Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta filozofická

Disertační práce

Korespondence Carla Friedricha Gausse

Mgr. Marie Větrovcová

Plzeň 2013

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta filozofická
Katedra filozofie
Studijní program Humanitní studia
Studijní obor Teorie a dějiny vědy a techniky

Disertační práce

Korespondence Carla Friedricha Gausse

Mgr. Marie Větrovcová

Školitel: Doc. RNDr. Jiří Fiala, CSc. † (do 2012)
Katedra filozofie
Fakulta filozofická Západočeské univerzity v Plzni

Doc. Dr. RNDr. Miroslav Holeček (od 2013)
Centrum nových technologií a materiálů
Nové technologie –
– Výzkumné centrum Západočeské univerzity v Plzni

Plzeň 2013

Předloženou disertační práci jsem zpracovala samostatně a citovala použité prameny a literaturu tak, jak je ve vědecké práci obvyklé.

Datum a podpis studenta

Παιδαγωγός je ten,
který žáka na (jeho, své i společné) cestě (. . .) do-provází.

Všem mým učitelům – malým i velkým.

Mé hluboké poděkování patří především mým školitelům doc. Jiřímu Fialovi † a doc. Miroslavu Holečkovi za doprovod a trpělivost, kterou se mnou počas mých studií měli. Za hojné a podnětné konzultace rovněž tak prof. Petru Vopěnkovi.

Neopomenutelné institucionální i morální pomoci se mi pak dostávalo na katedře filosofie, především zásluhou doc. Nikolaje Demjančuka a dr. Ludmily Dostálové.

V neposlední řadě bych ráda poděkovala za lásku, péči a shovívavost mé rodině: rodičům, Honzovi, Elše a Anče.

Děkuji.

Obsah

Úvod

Gauss…? Já znám jen Gaussovu křivku.

Gauss je pro dnešní dobu infinitivum, od něhož je odvozeno přivlastňovací jméno křivky, funkce, která se používá k vyjádření hustoty (Gaussova) normálního rozdělení pravděpodobnosti v matematické statistice. To je to, co dnes z Gausse zbylo. Není to sice mnoho, ale je to zároveň velmi mnoho. Poukazuje na matematika, který propojením nejrůznějších matematických a fyzikálních odvětví s vědeckou praxí založil statistiku. Matematickou discipínu, která je matematickou (a také funkcionální) analýzou, algebrou, numerikou a ještě něčím navíc.[1] Ano, jsou známy a v matematice hojně používány Gaussovy věty o… Základní věta algebry by rovněž měla nést jeho jméno.[2] Přesto se zdá, že Gausse vlastně nemůže charakterizovat nic tak výstižně. Gauss viděl křivky snad všude. Jeho vnímání matematiky bylo názorné stejně tak geometricky jako aritmeticky, a zároveň stejně tak teoreticky jako prakticky. Právě proto byl a je Gauss viděn jako titán věd, princeps mathematicorum. Jako neochvějný zásadní představitel nové vědy, kterou přinášelo moderní 19. století.

Předkládaná *Korespondence C. F. Gausse* je historiografickým uvedením do Gaussovy práce. Práce ve smyslu nejen produktu, představení jeho spisů, ale také ve způsobu, metody. Z důvodu rozsahu je přitom zúžena na tematiku práce s křivkami a plochami, tedy na diferenciální geometrii.

Geometrie zrozená mezi kopci

Devatenácté století přináší do epistemologie matematiky na jedné straně hroucení tradičního způsobu poznávání a zároveň na druhé straně znovubudování

[1] Tak alespoň o statistice na přednáškách Fakulty aplikovaných věd hovořil doc. Jiří Reif.

[2] Ale patrně podobně jako se nepatentují základní fyzikální principy, ani tato věta se přídomku Gaussova už nedočká.

základů nové, moderní matematiky. V tomto období dochází k verifikaci a následně redefinici všech oblastí matematického vědění.

Na základě výsledků ze začátku 19. století se namísto hledání konkrétního řešení úlohy začíná novou matematickou úlohou stávat řešitelnost úlohy. Do hry vstupuje propojení všech matematických disciplín matematiky (geometrie, teoretická aritmetika, algebra, matematická analýza). Díky důkazům nemožnosti řešení konkrétních úloh (z první poloviny 19. století) se otevírají nové možnosti vidění v matematice a nové matematické disciplíny. Od úlohy „jaké řešení má daný problém?“ se přechází k novému typu otázek: „je takovýto problém danými matematickými prostředky řešitelný?“.

Carl Friedrich Gauss prostředky diferenciální geometrie ukazuje zásadní zlom v kartografickém očekávání: *Nelze najít dokonalou kartografickou projekci.*

Kromě *negativní odpovědi* podal Gauss i nový způsob nahlížení na diferenciální geometrii – od plochy ohraničující dané konečné, a tedy omezené těleso, přešel k obecně uvažovaným plochám, potenciálně se do nekonečna rozprostírajícím. Našel také podmínky pro vzájemné zobrazování křivých ploch na sebe (v pozdějších spisech jím samotným nazvané konformní zobrazení). Do úvah o praktické geometrii Gauss zapojil funkce komplexní proměnné, lokální souřadnice a infinitesimální počet (v intuitivním smyslu). Výsledkem je obecné uvažování o stereografické projekci, o (sférických) souřadnicích a zároveň o lokálních souřadnicích, a tedy nová diferenciální geometrie (nezávislá na prostoru). To vše za účelem vybudování nového teoretického aparátu pro teoretickou a *praktickou* geodézii.

Geometrie je věda, která zprostředkovává vlastnosti *prostoru.* Objekt zkoumání, křivá plocha, se nyní sám stává prostorem, prostorem zkoumání i zkoumajícím.

Guy W. Dunnington souborem vypůjčených knih dokládá,[3] že Gauss mimo matematické literatury četl rovněž Kantovu *Kritiku čistého rozumu* a později i Hegela. Ke Gaussově četbě patřil i Newton, Euler, Lagrange. Podle odkazu Zdeňka Horského, heslovitě shrnutého *čtěme, co četli*, má při filosofické interpretaci Gaussových prací smysl hledat kantovské či newtonovské motivy v jeho pracech. Nevyprázdněnost kantovských a newtonovských odkazů v Gaussově pojetí zakládá oprávnění posuzovat jeho diferenciální geometrii (ač zpracovanou metodami infinitesimálního kalkulu) za názornou. A to i v šíři obecného Kantova pojetí prostoru.[4]

[3]Viz (Dunnington 2004, app. G).

[4]Při studiu Schumacherova životopisu (který v rámci svého profesorského působení na univerzitě v Kodani překládal Lazara Carnota (Carnot 1801, 1803)) navíc vytanul možný vliv francouzské školy syntetické geometrie s názorným, až fyzikalistickým pojetím geometrických veličin.

Vnímání vnitřních dějin matematiky

Nediskriminujme texty. Ty matematické stejně jako ty filosofické pojednávají o idejích. Není důvod mezi nimi přeostřovat optiku vnímání.

Čím je založeno oprávnění rozdílným způsobem číst matematický a filosofický text? U starých spisů je běžné, že se hledá historicko-společensko-kulturní kontext, aby se lépe porozumělo, proč jsou v nich obsaženy „pouze tak nedostatečné matematické poznatky“. Čím je zdůvodněno zapomenutí tohoto přístupu ke čtení textů novověkých a moderních? V zápisech, zavádění pojmů, formulaci matematických vět, způsobu vedení důkazu či strukturou práce, jež jsou již velmi blízké dnešní matematické praxi?

Ukazuje se, že metodologický rámec v přechodu od deskriptivní k intencionální historiografii[5] je pro práci s dobovými historickými prameny klíčový. Pod vlivem fenomenologické interpretace na čtení dobových matematických textů od antiky po začátek 19. století lze takto vysledovat proměny epistemologie matematiky, které se v různých vrstvách (paměti) matematiky uchovávají. Jinou optikou se zase ukazují různočtení Gaussovy diferenciální geometrie v hladinách sekundární literatury, pramenů, korespondence a jejich filosofické interpretace. Každá tato hladina pokládá jiné důrazy a představuje tak jiné závěry, které lze považovat za hlavní výsledky Gaussových příspěvků k diferenciální geometrii.[6]

Tento přístup bylo obzvlášť nutné držet při překladech z původních jazyků (němčiny a latiny) a hledat co nejširší významové pole (téměř bez ohledu na dnešní pojmosloví) tak, aby příslušný pojem vyjadřoval spíše podstatu a původ myšlenky k jeho vzniku, než ztotožnění s dnešními pojmy. Úskalí překladu jsou postižena převážně v poznámkovém aparátu. Při překládání bylo nutné přihlížet i k různě dobovým překladům do angličtiny, němčiny, příp. francouzštiny[7] a tím i k proměně pojímání Gaussových pojmů.

Je třeba však zdůraznit, že žádný překlad neposkytuje vlastní čiré ideje, ale že s každým překladem vzniká zároveň i interpretace daného textu. V disertační práci uvedené překlady z toho nevyjímaje. Na první pohled se může zdát, že matematické texty jsou proti tomuto jevu imunní, s odůvodněním,

[5] Viz kapitola 3 (Metodologie: vnitřní a vnější dějiny).

[6] Tento metodologický rámec byl již uplatněn v textech (Benediktová Větrovcová 2011) „Zrození aritmetického a algebraického kalkulu“ a (Větrovcová 2012) „Hermeneutika arabské matematiky dynastie Abbásovců“. V obou statích bylo případovou studií zrození aritmetického a algebraického kalkulu v prostředí arabského (islámského) středověku.

[7] (Gauss 2005), (Gauss 1899), (Gauss 1929), (Schumacher 1826), příp. (Spivak 1999, vol. II).

že matematika je jen jedna. Jenže i matematické texty, tedy výpovědi o matematice, už jsou výpověďmi nejen o vypovídaném, ale také o vypovídajícím a o době, v níž vypovídá. Posuny v překladech do moderních pojmů by se tyto nuance skryly v zapomnění. Bytostným úkolem intencionální historiografie je odkrývat tuto paměť a tím odhalovat dějinnost matematiky.

Ukazuje se, že matematika je skrze své texty stejně živá jako filosofie.

Srpen 2013 Marie Větrovcová

Část I

Gaussova diferenciální geometrie ve světle intencionální historiografie matematiky

Kapitola 1

Současný stav bádání

V historiografii matematiky se dosud neobjevila komplexní práce, jež by zahrnovala celistvé okolnosti vzniku Gaussovy diferenciální geometrie. Literatura k historii matematiky, vycházející z deskriptivní historiografie, se zaobírá diferenciální geometrií buď ve vztahu k analytické geometrii,[1] anebo se věnuje Gaussově diferenciální geometrii jako neproblematické oblasti,[2] na níž navazují např. otázky neeukledeidovských geometrií. Tedy zatímco základní data pro Gaussovu diferenciální geometrii (publikované texty a historická datace) jsou známá, zcela chybí interdisciplinární interpretace a intencionální historiografie, zasazující Gaussovy práce do kontextu *tehdejší* doby s odkazem na kontext *dnešní* doby.[3] Lze učinit obecný závěr: pro historiografii matematiky chybí vnitřní dějiny diferenciální geometrie.

Nejlepší Gaussův životopisec Guy Waldo Dunnington zmiňuje oblast diferenciální geometrie především v souvislosti s geodetickým proměřováním Hannoveru.[4] Širší okolnosti a interpretace však chybí. Ostatní životopisy (Hall 1970), (Bühler 1981), (Tent 2000) nebo (Biermann 1990) se omezují pouze na seznam prací, životopisné údaje s ohledem na rodinné poměry nebo zajímavé historky, plynoucí z korespondence. Systematické zkoumání korespondence s ohledem k dané epoše Gaussova života není dostupné.

V českém prostředí nejsou ani osoba Johanna Carla Friedricha Gausse, ani jeho práce příliš podrobně a nekriticky známé. První české (a jedny z mála) recepcí Gaussova díla pocházejí z časopiseckých prací.[5] Gauss je více znám

[1] Např. (Boyer 2004).
[2] Např. (Gray 2011).
[3] Zhruba řečeno: na základě čeho, kdo, kde, co a hlavně proč *tehdy* a co, kdo, proč *nyní*.
[4] Viz (Dunnington 2004).
[5] Např. (Studnička 1877) a (Kořistka 1877).

matematikům skrze aplikace a rozšíření jeho výsledků do různých matematických a fyzikálních disciplín.[6] Zkoumání jeho prací, ani korespondence nejsou zatím v české vědecké komunitě systematicky podchyceny. Tristní je, že dosud není dostupná jediná Gaussova práce v českém jazyce. Disertační práce tedy přispívá do projektu obnovy evropské vzdělanosti v překladech stěžejních matematických textů *Prameny evropské matematiky*,[7] který je dlouhodobým záměrem matematiků, působících na katedře filozofie FF ZČU, především zásluhou prof. Petra Vopěnky a doc. Jiřího Fialy.

Disertační práce by měla mít přínos k oboru historie matematiky v odkrývání souvislostí vzniku (vnitřní) diferenciální geometrie a v překladu (a předkladu) významného historického matematického textu do českého jazyka a prostředí.

[6] Především jsou známé a stále používané některé pojmy, jež nesou přídomek Gaussův, Gaussova (křivka, věta, komplexní rovina, metoda, formule,. . .).

[7] Tento projekt byl v letech 2010–2012 financován Grantovou agenturou ČR.

Kapitola 2

Cíl disertační práce

Cílem disertační práce je prozkoumat korespondenci Carla Friedricha Gausse, zúženou na léta 1813–1842 se zaměřením na diferenciální geometrii. Důležité je rovněž prozkoumat korespondenci z let 1808–1813 s cílem dohledat podněty a práce, ze kterých Gauss vycházel a na kterých pracoval. Tento apel se jeví jako nutný z toho důvodu, aby bylo možné lépe porozumět okolnostem a způsobu uvažování, jakým jsou jeho práce z diferenciální geometrie psané. Na základě tohoto zkoumání je úkolem vysvětlit pozadí vzniku Gaussovy diferenciální geometrie. Tedy přispět k historii matematiky první poloviny 19. století.

Tento prvotní úkol se rozšířil o původní kritický překlad Gaussových prací z diferenciální geometrie

- *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen änhlich wird* (1822),
- *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) a
- *Abstraktu k Disquisitiones generales. . . .*

Práce si klade za cíl nejen přivést do českého prostředí Gaussovu korespondenci, ale podat i interdisciplinárně pojatou hermeneutickou interpretaci vzniku Gaussových stěžejních výsledků. Tím se také otevírají další otázky pro možné polemiky a diskuse k tomuto a jiným dosud nevyjasněným tématům z pozadí Gaussovy práce.

Kapitola 3

Metodologie: vnitřní a vnější dějiny

Vzhledem k tomu, že práce má historiografický charakter, je potřeba ukotvit metodologický rámec zkoumání a vymezit pohled, ze kterého je práce vedena.

V intencionální historiografii matematika není časově invariantní. Její časovost není ani lineární, ani cyklická, ale dějinně–historická. Intencionální historiografie vnímá matematiku jako součást proměnlivého kulturního dědictví se svou historickou pamětí. Zkoumání historie matematiky je pak zkoumání matematiky samotné.

Deskriptivní historiografie matematiky nabízí souhrn dat a korespondujících událostí, aby sloužila k předporozumění netematizovanosti aktuálního matematického diskursu. Tím ale nedává prostor k vysvětlení odhalení či vzniku nějaké matematické ideje, ale vytyčuje rámec ideálních matematických entit pro konkrétní matematický problém. Na to poukazuje už Edmund Husserl: „V postoji geometra se nepociťuje potřeba [otázky po původu]: geometrii přece studoval, „rozumí“ geometrickým pojmům a poučkám, je obeznámen s operativními metodami jakožto způsoby, jak manipulovat s přesně definovanými útvary…“[1] Pro matematika–geometra zůstává permanentní existence „ideálních předmětů“ i v mimočasovosti jejich evidování.

Intencionální historiografie oproti deskriptivní nabízí způsob, jak vykládat historii vědy: nejen sumarizovat data, ale hledat i smysl a příčinné souvislosti.[2] Oprávnění k tomuto postoji se zakotvuje v hermeneutické a fenomenologické

[1] Viz (Husserl 1996, § 9b, 49). Nebo srv. též komentáře v Husserlově textu *O původu geometrie* či Derridově úvodu k němu (Derrida 2003).

[2] Termín a přístup intencionální historiografie užívá ke svému výkladu Petr Vopěnka. Srv. (Vopěnka, Benediktová Větrovcová & Ostřanský 2009) nebo (Větrovcová 2012).

filosofii. „Veškerá fenomenologie je výkladem v evidenci a evidencí ve výkladu. [...] V tomto smyslu fenomenologie nemůže probíhat jinak než jako hermeneutika.“[3] Přitom dochází k fázovému přechodu, přerodu od ne-zjevného, skytého k odkrytí niterného smyslu a základu.[4] Tedy uzření povstávajícího jakožto zjevného, které se svou bytností vyjeví a stane předmětem ukazování se.

Úkolem historiografie je především uchování paměti. K tomu dochází díky epistemologii historického poznání.[5] „Událost, jakou je vznik nějaké významné matematické ideje, nejlépe pochopíme a oceníme, když se nám podaří vstoupit do myšlení příslušné doby.“[6] Je tedy legitimní uvažovat o dějinách matematiky v kontextu doby, prostoru, společnosti a času. „Není pochyb, že matematické poznávání je vnějšně podmíněno událostmi nejrůznějšího druhu – politickými, ekonomickými, vědeckými, vojenskými – a neutuchajícími nároky na [křehké] umění [vyvažování doby] míru a války.“[7]

Historie matematiky nespočívá jen v intelektuálních dějinách, ale sama vnitřně utváří a je v podloží historie vědy, přesněji v historiích každé vědy. Epistemologie matematiky je filosoficky stejně založena jako epistemologie každé jiné přírodní vědy.[8] „Historie matematiky by měla být ve skutečnosti jádrem dějin kultury.“[9]

Zároveň má zkoumání historických matematických textů stejnou relevanci jako čtení klasických děl filosofie. V obou případech jde o odkrývání skrytého, zapomenutého smyslu, ve světle a interpretačním rámci aktuální doby a filosofického naladění. „Každé vysvětlení (proč) je vysvětlením v nějaké teorii.“[10]

Aby bylo možné analyzovat povahu dnešní matematiky a její základní pojmy, je potřeba pojímat matematiku jakožto proces (*mathématiques en acte*). Pak podobně jako ve filosofii lze i v matematice samé znovuobjevovat v daném čase vztahy a propojení idejí, jež stojí v jejím základu.[11] V tomto smyslu je „povaha matematiky identicky dána jejím vývojem“.[12]

---

[3] Viz (Ricouer 1986, 81).

[4] Srv. (Heidegger 1996, 52).

[5] Srv. (Ricoeur 2004, 148).

[6] Viz (Vopěnka, Benediktová Větrovcová & Ostřanský 2009, 207).

[7] Viz (Sarton 1955, 15).

[8] Srv. (Rota 1998, 68).
A dále: „Matematická pravda je výsledkem formulace faktů, které jsou vně ve světě, faktů, které jsou nezávislé na našem vrtochu nebo na chvilkových rozmarech axiomatických systémů.“.

[9] Viz (Sarton 1955, 4).

[10] Viz (Fiala 2010, 13).

[11] Srov. Ricoeurovu reflexi Kantovy *Transcendentální estetiky* B 66 v (Ricoeur 2007, 68nn.): „vše, co v našem poznání patří k názoru [...], neobsahuje nic než pouhé vztahy [... v názoru].“

[12] Viz (Sinaceur 1994, 15). Citováno podle (Dauben & Scriba 2002, 32–33).

Nechceme-li přistoupit na „objektivně platnou“ historii vědy, přeměnit ji na ideologii, pak dějiny vědy nelze formovat do teorií, ale vyprávět příběhy. Tedy obrátit diskurs od vyprávěného k vyprávějícímu. Nechat vědu samu svým vlastním, žitým příběhem, vyprávět. Historická paměť není vzpomínkou na přesné události. Jako každá jiná paměť je selektivní a lze ji vyvolat nepřímo čtením, poslechem nebo společým vzpomínáním účastníků události.[13]

Tím dostáváme vnější a vnitřní dějiny. Vnější dějiny se výhradně týkají minulosti, tak jak byla a ne jinak. Vnější dějiny jsou ty, jež jsou nám dány kolektivní pamětí. Vnitřní dějiny se týkají budoucnosti, těžící z reflexe minulého přes současný stav věci. Vnitřní dějiny vědy nabízejí návrat ke klíčovým okamžikům minulosti. Vydávají se hledat v periferiích vědeckého života to, co bylo (znovu)objeveno o mnoho a mnoho let později. Tím se minulost zpřítomňuje, aby byla součástí i budoucího.

K tomu přispívá Gian-Carlo Rota: „[Matematické] práce, které byly před pouhými dvaceti lety pokládány za fundamentální, se dnes pokládají za zavádějící. Novější teorie se nepodřazují pod teorie předcházející a nerozlišují je kvantitativním nárůstem objemu informací. Vynalézání teorií a řešení těžkých problémů nejsou procesy, které by se odvíjely lineárně v čase.“[14] Re-konstrukce historické paměti a matematické minulosti dává legitimitu matematice jakožto kulturnímu procesu, živým dějinám.

Fenomenologie a hermeneutika tak poskytují filosofický interpretační rámec intencionální historiografii matematiky. Ukazuje se, že pro hlubinnou analýzu dobových matematických textů je oprávněné je číst jako filosofické. V této rovině zkoumání se pak rozlišování mezi odborným vědeckým a filosofickým textem stírá a metodologicky postrádá opodstatnění.

V disertační práci je použita metodologie fenomenologické analýzy dobových matematických textů a publikované korespondence. To zahrnuje intencionální práci jak s publikovanými Gaussovými pracemi, tak s korespondencí a dostupnou pozůstalostí.

[13] Srv. (Halbwachs, 24).
[14] Viz (Rota 1998, 70).

Kapitola 4

Charakteristika užitých pramenů a literatury

Výzkum korespondence Carla Friedricha Gausse spočívá ve studiu níže uvedené publikované pramenné, primární a sekundární literatury.

Vzhledem k tomu, že součástí disertační práce je původní překlad dvou stěžejních Gaussových prací z diferenciální geometrie, bylo nutno pracovat i s dalšími dobovými matematickými pracemi Gaussových současníků a zároveň s odbornou matematickou literaturou z oblasti diferenciální geometrie a historie matematiky.

Pramenná a primární literatura

Od druhé poloviny 19. století postupně vycházelo souborné Gaussovo dílo ve 14 svazcích *Werke I–XII* (Gauss, 1863–1929). To zahrnuje především veškeré Gaussovy publikované práce, některé nepublikované rukopisy či spisy z pozůstalosti a také vybrané, relevantní úryvky z korespondence. *Werke* jsou pořádány především po oborech, do nichž Gauss svými pracemi přispěl. Jsou přetištěním původních prací z první poloviny 19. století, tedy v latině, němčině a francouzštině s minimálními komentáři, bez poznámkového aparátu. Dosud neexistuje jiné ucelené vydání Gaussových prací.

Na druhou stranu byla dílem Gaussových žáků shromážděna a vydána také Gaussova vědecká korespondence s Heinrichem Christianem Schumacherem (6 svazků, (Peters, 1860–1865)), Friedrichem Wilhelmem Besselem (Gauss & Bessel 1880), Wolfangem Bolyaiem (Schmidt & Stäckel 1899), Wilhelmem

Olbersem (2 svazky, (Schiling 1900, 1909)), Alexandrem von Humboldtem (Bruhns 1877) a Christianem Ludwigem Gerlingem (Schaefer 1927). A také mezi Gaussovými korespondenty navzájem (např. mezi Olbersem a Besselem (Bruhns 1877)).

Dalším zdrojem dat, dobových textů a podkladů jsou články, recenze a zprávy v dobových vědeckých časopisech. Především *Astronomische Abhandlungen* a *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, dále *Astronomische Nachrichten*, *Berliner Abhandlungen*, *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* a *Bulletin des sciences mathématiques, astronomie, physiques et chimiques*.

Ve všech případech se jedná o práci s vydanou pramennou odbornou literaturou devatenáctého až první poloviny dvacátého století (v národních jazycích – němčině, angličtině, francouzštině a latině).

Dalšími doprovodnými zdroji jsou Gaussovy životopisy (Dunnington 2004), (Hall 1970), (Bühler 1981), (Tent 2000) a (West 2009).

Z důvodů zasazení Gaussových prací do kontextu doby bylo nutné studovat rovněž práce Leoharda Eulera, Lazara Carnota, Gasparda Monge a jeho žáků, Josepha-Louise Lagrange a Andrie-Marie Legendra. A také životopisy a díla Gaussových korespondentů či dalších dobových matematiků (např. (Repsold 1918), (Schiling 1899), (Herschel 1847), (Lawrynowicz 1995), (Bradley & Sandifer 2008)).

Sekundární literatura

Literatura k *historii matematiky* 19. století spočívá především ve třech dílech klasické deskriptivní historiografie (Kolmogorov & Yushkevich 1996–2001) a dále v (Kline 1972). Počátek 19. století nevynechává ani žádná klasická přehledová či čítanková literatura (např. (Merzbach & Boyer 2011), (Callinger 1995), (Fauvel & Gray 1987) nebo (Katz 2009)).

S ohledem k tématu je potřeba pracovat s knihami, věnujícími se konceptuální historii, Carla B. Boyera (Boyer 2004) a Johna L. Greenberga (Greenberg 1995, 2007).

Neopomenutelnými zdroji jsou časopisy *Historia Mathematica*, *Archive for History of Exact Sciences* a *Isis Current Bibliography of the History of Science and its Cultural Influences* a vybrané články např. Erharda Scholze (Scholz 2004, 2005) nebo Karin Reich (např. (Reich 2007)).

Dalším typem zdrojů je *současná matematická odborná literatura*. Především se jedná o klasickou pětidílnou práci k diferenciální geometrii Michaela Spivaka (Spivak 1999–2005) a Manfreda P. do Carma (Carmo 1976, 1994). V českém prostředí pak známé učebnice Václava Hlavatého (Hlavatý 1937, 1941) nebo později Václava Kohouta (Kohout 1971) a Bruna Budinského (Budinský 1983). Matematická literatura však povětšinou opomíjí historický kontext, vývoj pojmů a práci s dobovými prameny. Nicméně tento druh zdrojů je neopominutelný z terminologických, teoretických a interpretačních hledisek vlastních Gaussových prací.

Vzhledem k tomu, že disertační práce si klade za cíl přispět rovněž i k dějinám a filosofii vědy, posledním druhem referenční a interpretační literatury je filosofická, historická a metodologická opora. Ta se odvíjí od zamýšlěné metodologické povahy práce, jíž je intencionální historiografie. Používána je tedy literatura, na níž je odkazováno v kapitole 3 (Metodologie: vnitřní a vnější dějiny) a která spadá do oboru fenomenologické a hermeneutické filosofie a filosofie a historie/historiografie vědy (Dauben & Scriba 2002), (Derrida 2003), (Fiala 2010), (Fiala 1998), (Halbwachs 1992), (Heidegger 1996), (Husserl 1936, 1996), (Ricouer 1986, 2004, 2007), (Robert 2011), (Rota 1998), (Sarton 1955), (Sinaceur 1994), (Vopěnka, P., Benediktová Větrovcová, M. & Ostřanský, B. 2009). A dále rámcové základní filosofické prameny, kterými mohl být Gauss ovlivněn (např. (Kant 2001), (Hegel 1992)) a které dávají filosofický rámec k pochopení Gaussova myšlení.

Kapitola 5

Struktura práce

Ačkoli disertační práce má historiografický charakter, nejedná se o pouhý souhrn historických událostí. V různých vrstvách znalostí interpretuje nově vzniknuvší Gaussovo matematické poznání v intencionalitě vědeckého poznávání 20. let 19. století. Proto je také rozdělena do čtyř částí.

Část I „Gaussova diferenciální geometrie ve světle intencionální historiografie matematiky“ obecně zdůvodňuje oprávnění zabývat se Gaussovými matematickými poznatky z pohledu intencionální historiografie. Shrnuje dosavadní historiografickou práci, vážící se ke Gaussově diferenciální geometrii. Představuje cíle disertační práce. Na bázi fenomenologické filosofie 20. století vysvětluje a odůvodňuje metodologii, která je v práci užita a tím otevírá diskusi nad interpretačním rámcem práce. Kapitola k metodologii práce je z hlediska charakteru celé práce stěžejní.

Část II „Carl Friedrich Gauss (1777–1855)“ předkládá Gaussův životopis, dílo a uvedení do kontextu evropské matematiky. Gaussovo curriculum vitae není pojímáno jako soubor vědeckých etap, přehled základních životních událostí. Jde o vyprávění rozdělené do jedenácti „sedmiletek“, kterými lze Gaussův život nahlížet. Líčí Gausse jako člověka, jehož životní události jsou svědectvím o utváření vědecké komunity a dokladem doby, v níž se německé země emancipují. Gauss se tak vyjevuje jako průkopník nového způsobu vědeckého bádání, kde jeho činy nesou již poselství nové, radostné vědy pro celé 19. století.

Souhrn Gaussova díla slouží k přehledu v souborné dvanáctisvazkové práci *Werke* a zároveň mapuje vědecké disciplíny, do nichž Gaussovo bádání zásadně promluvilo. V této kapitole jsou také stručně připomenuty hlavní výsledky Gaussových poznatků z diferenciální geometrie (křivých ploch) a teorií, které jí bezprostředně předcházely a které v ní zanechávají otisky svébytného způsobu uvažování.

Závěrečná kapitola představuje diferenciální geometrii v kontextu dobových matematických poznatků. Stručně se zde představují uchopení předmětu diferenciální geometrie z pohledu francouzské školy oproti pohledu Gaussovy matematiky. Je zde odkázáno na Gaussova praktická, geodetická východiska i teoretické předpoklady Eulerovy a Mongeovy teorie. Připomenuty jsou základní výsledky paralelního bádání Mongeových žáků. Dnešní základy diferenciální geometrie jsou synkrezí obou těchto přístupů.

Část III „Křivé plochy v korespondenci Gauss–Schumacher" je představení příběhu zrodu Gaussovy diferenciální geometrie – teorie křivých ploch na základě studia vědecké korespondence mezi Gaussem a Schumacherem. Představení Schumachera ukáže síť Gaussových bezprostředních vědeckých spolupracovníků, žáků a přátel. Ukáže se, že tato komunita se skládala převážně z astronomů a kartografů a nikoli z teoretických matematiků. V neposlední řadě se také boří představa, že by Gauss byl osamocený vědec.

Na základě zkoumání korespondence se ukazuje, že propojení Gausse se Schumacherem aktivně podnítilo vznik Gaussovy geometrie křivých ploch – teoretického nástroje pro projekt panevropského mapového systému. Dále se ukáží všechna úskalí, která vznik této teorie – práce k Ceně Kodaňské královské společnosti věd – provází, a na druhou stranu se odhalí její deriváty.

V této části jsou rovněž zaznamenány první ohlasy ke Gaussově diferenciální geometrii z okruhu jeho nejbližších spolupracovníků.

Část IV „Gaussova diferenciální geometrie (překlady)" jsou původní kritické překlady všech Gaussových publikovaných prací k diferenciální geometrii křivých ploch.

Část II

Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Kapitola 1

Odpočítávání času života Carla F. Gausse v kontextu životů jeho současníků

> Přichází sedm let veliké hojnosti v celé egyptské zemi.
> Po nich nastane sedm let hladu a všechna hojnost v egyptské zemi bude zapomenuta.
>
> [...]
>
> Ať po dobu příštích sedmi úrodných let shromažďují všechnu potravu a ve městech ať uskladňují pod faraónovou moc obilí a hlídají je.
> Tato potrava zabezpečí zemi na sedm let hladu, která přijdou na egyptskou zemi.
> A země nezajde hladem.
> *Gn 41: 29–30, 35–36*

Gauss se narodil a zemřel. Jeho život čítal

$$11 \times 7 = 77$$

let 8 měsíců a 23 dní. Gauss nikdy nedopustil, aby léta (intelektuální) hojnosti nezabezpečila případná pozdější léta hladu.

Níže uvedený přehled Gaussova života byl inspirován převážně prací Guye Walda Dunningtona *Gauss. Titan of Science* (Dunnington 2004).[1]

[1] K významu této biografie byla u příležitosti 235. výročí narození C. F. Gausse publikovaná recenzní stať (Benediktová Větrovcová 2012).

1. Rané dětství (1777–1784)

Dne 30. dubna 1777 se v (v dnes dolnosaském) Brunšviku na Wilhelmstrasse v rodině starousedlíků Gerhardu Dietrichovi Gaussovi (13. 2. 1744–14. 4. 1808) a jeho druhé manželce Dorothě roz. Benzové (18. 6. 1743–18. 4. 1839) narodil syn Carl Friedrich. Matka si nepamatovala přesný datum narození, neboť nebyla gramotná. Věděla jen, že to bylo ve středu, osm dní před Nanebevstoupením Páně.[2]

Rodina zahradníka, zedníka a úředníka místní pohřební služby a dcery kameníka kromě Carla Friedricha vychovávala ještě Johanna Georga Heinricha Gausse, osiřelého syna z prvního otcova manželství, který se narodil v roce 1769.

Rané dětství se uzavírá nástupem do školy sv. Kateřiny v Brunšviku.

2. Školní léta (1784–1791)

V době školských let navštěvuje Carl Friedrich Gauss aritmetickou třídu přísného ředitele J. G. Büttnera (od roku 1786). Z té doby se traduje historka, jak měli žáci v hodině spočítat součet všech přirozených čísel od 1 do 100. Gauss ihned měl výsledek 5050, který zároveň zdůvodnil: $100+1=101$, $99+2=101$, $98+3=101$, atd. a to vše padesátkrát. Tedy $50\times 101=5050$. Tím si vysloužil od Büttnera lepší učebnici aritmetiky,[3] dovezenou z Hamburku. Ve vyšším stupni (gymnasiu) se u Gausse projevuje vedle nadání na matematiku také jazykový talent.

V této době dochází také k navázání úzkého přátelství mezi Gaussem a Martinem Bartelsem.

Johann Christian Martin Bartels (1769–1836) byl matematik německého původu. Od roku 1783 byl učitelem v Brunšviku. Od roku 1788 navštěvoval brunšvické *Collegium Carolinum*. Od roku 1791 studoval matematiku v Helmstedtu u Johanna Pfaffa (později učitele Gaussova) a u Abrahama Kästnera v Göttingen. Vedle matematiky se věnoval i fyzikálním vědám. Roku 1800 získal místo profesora matematiky ve švýcarském Reichenau. V roce 1803 získal místo na Filosofické fakultě Univerzity v Jeně.

[2] Později se na základě této historky Carl Friedrich Gauss dopočítal přesného data narození a publikoval k tomu i výpočet data Velikonoc *Berechnung des Osterfestes* v *Monatliche Correspondenz* 2(1800), 121–130. Přetištěno ve *Werke* (Gauss 1874, s. 73–79).

[3] Dunnington uvádí, že se jednalo buď o Remerovu *Arithmeticu* anebo Hemelingovu *Arithmetisches kleines Rechenbuch*. Viz (Dunnington 2004, s. 13).

V roce 1807 byl pozván a roku 1808 přijal místo na katedře matematiky na Univerzitě v Kazani. Zde v následujících dvanácti letech vyučoval historii matematiky, vyšší aritmetiku, diferenciální a integrální počet, analytickou geometrii a trigonometrii, sférickou trigonometrii, analytickou mechaniku a astronomii. Mezi jeho studenty patřil i Nikolaj Ivanovič Lobačevskij.

Od roku 1821 Bartels působil na Univerzitě v Dorpartu (dnešním Tartu) ve Východním Prusku (dnes Estonsku), kde se na katedře matematiky věnoval diferenciální geometrii. Jeho dcera se provdala za významného dorpatského astronoma Otto von Struve. Bartels korespondoval s Gaussem až do roku 1823.[4]

Bartels byl ve svatokateřinské škole zaměstnán jako pomocný učitel. Společně s Gaussem zkoumají vlastnosti čísel a přichází k základům binomické věty a nekonečných řad. Zároveň ho Bartels seznámil i se středoškolským profesorem matematiky, fyziky a „přírodní historie" a pozdějším brunšvickým radním Augustem Zimmermanem.

3. Studia (1791–1798)

Na doporučení radního Zimmermana byl 28. června 1791 Gauss představen u dvora brunšvického vévody Carla Wilhelma Ferdinanda. Zaujme především státního ministra Geheimrata Feronçe von Rotenkreuze, od něhož Gauss získává první Schulzeho logaritmické tabulky *Sammlung von Tafeln*. Zároveň dostává od vévody pravidelné stipendium ke studiu na Collegiu Carolinum, kam nastupuje roku 1792. Vévoda brunšvický se stává do konce svého života významným Gaussovým mecenášem.

Studium na Collegiu Carolinum bylo předstupněm ke studiu na moderní univerzitě osvícenského typu. Poskytovalo vzdělání mimo oblasti, vyučované tradičními čtyřmi fakultami univerzity. Studovali zde budoucí důstojníci, architekti, inženýři, mechanici, obchodníci a sedláci. Stálo na pomezí praktického a teoretického způsobu vzdělávání.

Gauss zde vyniká v klasických i moderních jazycích a čte práce Newtona, Eulera a Lagrange.

V době studií také nezávisle objevuje principy základní věty o kvadratických residuích (o deset let dříve publikovanými Legendrem).

V říjnu 1795 opouští Brunšvik a nastupuje na univerzitu v Göttingen. Ještě téhož roku začíná intuitivně používat metodu nejmenších čtverců (dosud nikým nepublikovanou).

[4]Viz (Dunnington 2004, s. 13) a (O'Connor, Robertson 2009).

V březnu 1796 si začíná psát deník (Gauss 2009). První záznam je vepsání pravidelného sedmnáctiúhelníku do kruhu. Následuje první důkaz základní věty kvadratických residuí a začátek zkoumání binárních kvadratických forem. Rok 1797 patřil lemniskátě, integrálům racionálních funkcí a kvadratickým residuím.

4. Úsvit (1798–1805)

V roce 1798 na čas opouští Göttingen, aby se vrátil do Brunšviku, kde pracuje na hlavní práci z teorie čísel. K tomu využívá zázemí univerzity v Helmstedtu a úzce spolupracuje s profesorem Johannem Pfaffem.

Johann Wilhelm Andreas Pfaff (1774–1835) byl známý německý matematik, fyzik a astronom. Jeho život je úzce spjat s Dorpatem. Stál u založení hvězdárny (1811) a působil (od roku 1803) na univerzitě v Dorpatu, kde přednášel matematiku. Věnoval se teorii integrálu a parciálním diferenciálním rovnicím 1. řádu, které byly součástí teorie diferenciálních forem.[5]

Jeho cesta do Dorpatu nebyla přímá. V roce 1799 byl tím, kdo dovedl Gaussovu disertační práci na univerzitě v Helmstedtu k úspěšné obhajobě. Mezi Pfaffovými žáky byli rovněž Gaussovi přátelé Johann Christian Martin Bartels, Johann Elert Bode nebo Wilhelm Olbers. Počátkem roku 1817 byl Johann Pfaff jmenován mimořádným profesorem na univerzitě ve Würzburgu a od roku 1818 (až do svého skonu) působil jako profesor matematiky na univerzitě v Erlangen. Ze seznamu jeho publikací v univerzitní knihovně v Tartu (Pfaff 2002–2011) je vidět, že se věnoval pohybům planet a planetek (odchylkám od Keplerových zákonů), precesi a astrometrii. Na druhou stranu svými filologickými pracemi přispíval k rozluštění hieroglyfů. Sepsal také astrologické tabulky v souladu s Ptolemaiovou astrologickou soustavou.[6] Z matematických prací sepsal pojednání o spirále (1832), o obecném a přirozeném logaritmu (1821). Věnoval se i historii vědy (Isaac Newton, Johannes Kepler).

Na podzim roku 1798 se Gauss věnuje skládání binárních kvadratických forem. Na začátku roku 1799 pak přechází ke studiu ternárních kvadratických forem. V červnu získává na univerzitě v Helmstedtu titul doktor filosofie. Jeho disertační práce obsahovala první důkaz základní věty algebry. Téma nikdy během života neopustil. Další důkazy Gauss podal v letech 1815, 1816 a 1849.

[5] Dodnes se užívají matematické pojmy, které nesou jeho jméno.
[6] Jeho *Astrologie* vyšla roku 1816, tabulky v letech 1822 a 1823.

Roku 1800 Gauss začíná recenzovat práce svých kolegů. První je Legendrovo pojednání k teorii čísel. Věnuje se nejjednodušším ternárním kvadratickým formám a výzkumu eliptických funkcí. V tomto roce mu vyšla také první publikace (pro určení data Velikonoc).

Začátek nového století byl pro Gausse skutečným začátkem jeho vědecké kariéry. Na Nový rok 1. ledna 1801 totiž italský astronom Guiseppe Piazzi objevil planetku Ceres a svá pozorování z hvězdárny v Palermu publikoval s výzvou k dalšímu sledování. V září 1801 vyšla Gaussova přepracovaná disertační práce, slavné *Disquisitiones arithmeticae*.[7] Na jejich základě se Gaussovi podařilo propočítat základní elementy (především sklon) eliptické dráhy Ceres a ty prostřednictvím editora *Monatliche Correpondenze* von Zacha publikovat. Na Silvestra roku 1801 podle těchto parametrů byla Ceres znovuobjevena (von Zach na Seebergu a Olbers na Lilienthalu). Gaussovy hluboké matematické znalosti uplatněné v astronomii se staly pro vědu začátku 19. století fundamentální.

Kvůli pozorování a zveřejnění základních elementů eliptické dráhy další nově objevené planetky Pallas (Olbers, 1802) bylo Gaussovi nabídnuto místo ředitele hvězdárny v St. Petěrburku. Gauss místo (zřejmě i díky Bartelsovým postřehům z Ruska) nepřijímá.

Od ledna 1803 zůstává v Brunšviku a v létě navštěvuje Brémy a Olberse. Setkává se také se Zachem.

Baron Franz Xaver von Zach (1754–1832) byl významný astronom, geodet, matematik, historik vědy a důstojník, působící v Uhersku, Rakousku a Německu. Vystudoval Císařskou vojenskou akademii ve Vídni (s důstojnickou hodností) a poté astronomii v Oxfordu (stýkal se s Laplacem, Herschelem, de Lalandem). Ve službách rakouské armády mu byla svěřena stavba hvězdárny u Gothy, jíž se roku 1791 stal ředitelem. Psal německy, anglicky, francouzsky. Od roku 1798 editoval první astronomický odborný časopis *Allgemeine Geographische Ephemeriden*, jehož 4 svazky vycházely ve Výmaru (Weimar). Výsledky pozorování (pohyby Slunce) publikoval v práci *Novae et correctae tabulae motuum solis* (1792). Von Zach stál u zrodu prvního mezinárodního astronomického kongresu (na hvězdárně Seeberg u Gothy roku 1798). Od roku 1800 vydával (a až do roku 1807 redigoval) časopis *Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde* (celkově vyšlo v letech 1800 až 1813 28 svazků, od roku 1807 redigované Bernhardem von Lindenauem) a v letech 1818 až 1826 časopis *Correspondance Astronomique* (14 svazků a jedno číslo 15. ročníku). Hvězdárna na Seebergu u Gothy získala počas von Zachova působení světoznámý věhlas a stala se opěrnou časovou stanicí.

[7] Vyšly u nakladatele Gerharda Fleischera v Lipsku. Ve *Werke* zaujímá celý první svazek (Gauss 1863).

Na konci 18. století ustavil „nebeskou hlídku“ (Himmelspolizey), sdružení čtyřiadvaceti astronomů, kteří systematicky hledali „chybějící planetu“ (predikovanou Titius–Bodovou řadou) mezi Marsem a Jupiterem. Planetka Ceres (největší, navíc v tomto pásmu) byla právě takto ulovena na začátku roku 1801 Giuseppem Piazzim (Akademie v Palermu). Piazzi získal 24 pozic a informoval o svém objevu v *Monatliche Correspondenz*. Na základě této anonce Carl Friedrich Gauss metodou nejmenších čtverců předpověděl její polohu na konec roku 1801. Ceres byla poblíž vypočtených souřadnic na Silvestra roku 1801 znovuobjevena. Nezávisle na sobě se o to zasloužili právě Franz Xaver von Zach a Heinrich Wilhelm Matthias Olbers. Objevy dalších planetek (Pallas, Juno a Vesta) a propočítávání jejich dráhy brzku tvořily hlavní agendu astronomie nultých let 19. století.

Od roku 1804 von Zach cestoval po jižní Evropě. V Janově založil roku 1815 hvězdárnu, byl ředitelem neapolské Compodimonte (Osservatorio Astronomico di Capodimonte). Od roku 1827 působil v Paříži, kde o pět let později zemřel.[8]

Tento i následující rok se Gauss věnuje astronomickým pracem. Po objevu planetky Juno (Ludwigem Hardingem) zpracovává elementy dráhy i této planetky.

5. Rodina (1805–1812)

V říjnu roku 1805 se Gauss poprvé žení. V srpnu 1806 se mu narodí první syn Josef. Teprve až v červenci roku 1807 získává nabídku práce na univerzitě v Göttingen, a tu přijímá. V listopadu se svou rodinou mění bydliště z Brunšviku do Göttingen. Poslední 29. únorový den roku 1808 se Gaussovi narodí dcera Minna. O několik měsíců později mu však umírá otec.

Od letního semestru 1808 začíná Gauss přednášet kursy astronomie, později i s praktickými pozorováními a astronomickými výpočty. Od zimního semestru 1808 přednáší také teorii pohybu komet. V tu dobu přijíždí za Gaussem do Göttingen studovat Schumacher.

V roce 1809 u předního hamburského nakladatele Friedricha Christopha Petherse vychází *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, stěžejní Gaussova práce z astronomie. Ta se stává také oficiální vysokoškolskou učebnicí k jeho přednáškám.

Na podzim 1809 se mu narodí syn Louis, avšak jeho žena Dorothea do měsíce umírá. Na jaře 1810 stíhá podobný osud i malého Louise. V srpnu roku

[8] Viz (Günther 1898).

1810 se Gauss podruhé ožení. Bere si Minnu Waldeckovou, dceru univerzitního profesora práv z Göttingen.

Na podzim roku 1810 se na Gaussových přednáškách setkávají Gerling, Nicolai, Möbius a Encke. Gauss s vypětím všech sil získává profesorské místo v Berlíně a zajímá se o optiku. Vedle toho pozoruje komety a publikuje články s parametry jejich drah.

V červenci 1811 se Gaussovi narodí syn Eugene.

6. Teorie poslouží praxi (1812–1819)

V roce 1812 vyšla Gaussovi v *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recenciores* matematická práce o hypergeometrických řadách (*Disquisitiones generales circa seriem infinitiam...*).

Klidná, jistá a pevná léta tohoto období přinesla v roce 1813 narození syna Wilhelma a v roce 1816 dcery Theresy. Od roku 1817 žije ve společné domácnosti i jeho matka.

Z vědeckého působení dochází k publikování prvních prací pro numerickou matematiku: pojednání o nové metodě aproximace integrálu. Vychází nový důkaz základní věty algebry. Návrat doznává i důkaz základní věty o kvadratických residuích a její nové aplikace.

Roku 1818 je sice povolán k vytyčení mapového podkladu Hannoverského království, zatím však připravuje teoretické i praktické podklady. Gauss totiž od roku 1813 publikuje latinsky a později i německy teorii přitažlivosti homogenního eliptického sféroidu. Do tohoto období zapadají první práce z optiky. Hojně si dopisuje se Schumacherem.

7. Praxe vyžaduje teorii (1819–1826)

V roce 1819 vychází první pojednání o metodě nejmenších čtverců. V roce 1820 publikuje pojednání o novém vytyčení meridiánu v Göttingen. Rok nato vynalézá heliotrop, přístroj, se kterým v letech 1822 až 1826 provádí geodetická měření Hannoverského království.

Práce, které v této době Gauss publikoval, jsou aplikačního nebo praktického charakteru – o Reichenbachově meridiánovém kruhu, o heliotropu, mapové projekci.

Během proměřování nemá příliš času na teoretickou práci, na univerzitě učí pouze v zimních semestrech. Přesto našel sílu a čas, aby napsal první práci k teorii křivých ploch.[9]

Z této doby je i první práce o použití počtu pravděpodobnosti na úlohy praktické geometrie.

8. Berlín a Göttingen (1826–1833)

V roce 1827 v Göttingen Gauss přednáší a v roce 1828 vydává své stěžejní dílo z diferenciální geometrie *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Gauss se vrací k teoretické aritmetice a publikuje teorii bikvadratických residuí. Začínají se objevovat práce z fyziky (mechanika, tekutiny v rovnovážném stavu, kapilární jev) a optiky. Evergreenem zůstavají publikovaná astronomická pozorování planetek a komet. Vydává společná pozorování hvězdáren v Göttingen a Altoně.

V roce 1828 je přijat do berlínské vědecké společnosti. Na univerzitě je hostujícím profesorem u Alexandera von Humboldta.

Friedrich Wilhelm Heinrich Alexander von Humboldt (1769–1859) byl pruský přírodovědec, zakladatel moderní geografie a cestovatel (Latinská Amerika, Rusko). Jeho vědecké příspěvky zasáhly rovněž fyziku, chemii, geologii, mineralogii, botaniku, zoologii, klimatologii, oceánografii a astronomii. Vedle přírodovědy se zajímal též o etnologii a demografii. Významná je jeho vědecká korespondence a v německy mluvícím prostoru velmi oblíbené knihy *Ansichten der Natur...* a *Kosmos*. Souborné Humboldtovo dílo (*Gesammelte werke von Alexander von Humboldt*) čítá 12 svazků.

Humboldtovská (romantická) přírodověda je holistická, kladoucí si za cíl vysvětlit přírodní jevy bez apelu náboženských dogmat. Nejdůležitější bylo pozorování. Kvalitní sebraná data byla základem veškerého vědeckého pozorumění. Snažil se rovněž o sjednocení přírody ve smyslu nacházení vzájemných vztahů mezi všemi fyzikálními vědami (biologií, meteorologií, geologií).

Alexandrův otec byl vychovatelem pozdějšího pruského krále Friedricha Wilhelma II. Od té doby měla rodina blízko k pruskému dvoru. Alexander Humboldt studoval finance ve Frankfurtu nad Odrou, poté v Göttingen (kde se zabýval též mineralogií). Cizím jazykům se věnoval v Hamburku, geologii

[9] Její překlad pod názvem *O konformním zobrazení* je součástí této disertační práce. Blíže o jejím vzniku pojednává rozbor korespondence mezi Gaussem a Schumacherem.

na Technische Universität Bergakademie Freiberg (Báňská a technická univerzita ve Freibergu), anatomii v Jeně a astronomii (a používání vědeckých přístrojů) pod vedením Franze Xavera von Zacha v Gothě. S takovouto vzdělanostní výbavou se stal zdatným diplomatem a zprostředkovatelem mezi pruským a francouzským dvorem (krále Louise Philippa I. (1830–1848)). Alexander von Humboldt byl rovněž jedním z Gaussových korespondentů.[10]

V roce 2005 napsal Daniel Kehlmann román (a pozdější bestseller) *Die Vermessunf der Welt* (Kelmann 2005), kde podává historickou fikci bohatého cestovatelského a praxí podloženého Humboldtova života a vědeckých příspěvků v kontrastu k teoretickému bádání Carla Friedricha Gausse. Český překlad *Vyměřování světa* vyšel v roce 2007, v roce 2012 se román dočkal také zfilmování.

Gauss v Berlíně také přednáší a tiskem mu vychází přednáška o důsledcích základní věty algebry – o počtu kladných a záporných kořenů algebraické rovnice. Až teprve nyní se stává řádným profesorem.

V roce 1831 Wilhelm Weber obsazuje profesorské místo fyziky na univerzitě v Göttingen.

Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) byl německý fyzik ze Saska. Jeho otec byl profesorem teologie na univerzitě ve Wittenbergu. Rodina žila v domě profesora lékařství a přírodní historie Christiana Langgutha. Dům obýval ještě fyzik Ernst Chladni. I jeho bratr se vážně zabýval fyzikou.

Ke konci napoleonských válek (a války o svobodu Befreiungskriege) se univerzita ve Wittenbergu uzavřela. Weberovi odjeli do Halle, kde pokračovali v životě rodiny univerzitního profesora. Od roku 1821 pomáhal Wilhelm Weber svému bratru, který byl toho času profesorem na univerzitě v Lipsku, ve výzkumu fyziologie. Během studia se zajímal o proudění kapalin, vodu a zvukové vlny. Díky bratrovi se dostal k výzkumu mechanických vlastností arterií. V návaznosti na to roku 1825 publikovali společně monografii *Wellenlehre auf Experimente gegründet*, kde popsali základní zákony hydrodynamiky. Na univerzitě v Halle ho ovlivňovali především profesor fyziky Johann Schweigger a profesor matematiky Johann Pfaff. Disertační práci z akustiky varhanních píšťal psal pod vedením Schweiggera a odevzdal roku 1826. Po habilitaci roku 1827 přednášel (jako Privatdozent) na univerzitě v Halle. V letech 1828 až 1830 publikoval řadu článků v časopise *Annalen der Physik und Chemie*. V roce 1828 již byl mimořádným profesorem. A v témže roce se na vědeckém kongresu, pořádaném Alexanderem von Humboldtem, v Berlíně setkal s Gaussem. Gauss se v té době zajímal o zemský magnetismus a Weber se stal jeho spolupracovníkem.

[10] Viz soubor jejich dopisů (Bruhns 1877).

V roce 1831 se v Göttingen uvolnila stolice profesora fyziky. Weber po nabídce místo přijal. V přednáškách užíval experimenty a v Göttingen otevřel fyzikální laboratoře pro potřeby studentů.

V roce 1832 publikovali Gauss a Weber společně práci, v níž poprvé užili fyzikální jednotku pro míru zemského magnetismu. O rok později společně vynalezli telegraf, který experimentálně fungoval na vzdálenost 3 kilometrů mezi fyzikální laboratoří a hvězdárnou. V roce 1840 společně také publikovali Atlas zemského magnetismu *Atlas Des Erdmagnetismus: Nach Den Elementen Der Theorie Entworfe.* Na druhou stranu, Weber společně s druhým bratrem Eduardem, který se zabýval anatomií, vydal práci o mechanice lidské chůze (1836).

V roce 1837 byl Wilhelm Weber činný i politicky. Připojil se k výzvě göttingenských profesorů na obranu ústavních akademických svobod (poté, co se Hannoverské království oddělilo od britské koruny) a stal se členem *Göttingenské sedmičky.*[11] Z politických důvodů byl hannoverskými úřady z univerzity propuštěn. Jeho výzkumná práce však pokračovala v Göttingen Magnetische Verein.

Od roku 1843 byl profesorem fyziky na univerzitě v Lipsku, kde působili i jeho bratři. Zde pokračoval na práci k Ampèrově zákonu a vydal knihu *Elektrodynamische Massenbestimmungen.*

Po roce 1848 se mohl vrátit do Göttingen. V roce 1849 nastoupil místo ředitele hvězdárny po Gaussovi, který byl již v té době příliš stár. Weber pracoval na vztahu elektrostatiky a elektrodynamiky a předložil základy k určení rychlosti elektromagnetického vlnění (a tudíž i světla). Mezi jeho asistenty pracoval i Bernhard Riemann. Ke konci života se zabýval vztahem světla, elektrodynamikou a elektrostatickými jevy v látce. Po Weberovi byla jeden čas pojmenovaná SI jednotka magnetického toku.[12]

Gauss se v této době věnuje krystalografii, magnetismu a elektřině. V seznamu vydaných prací z té doby lze najít i pojednání k ternárním kvadratickým formám.

V tomto období Gaussův syn Eugen emigruje do USA. Navíc mu umírá jeho druhá žena Minna.

[11]Dalšími členy byli politolog a historik Friedrich Christoph Dahlmann, germanisté bratři Wilhelm a Jacob Grimmové, právník Wilhelm Eduard Albrecht, historik Georg Gottfried Gervinus a teolog a orientalista Heinrich Georg August Ewald.

[12]Viz (Knott 1896).

9. Přitažlivost magnetická (1833–1840)

Na Velikonoce 1833 ve spolupráci s Weberem provádí Gauss první pokusy s elektromagnetickým telegrafem. Společně publikují základní práci z magnetismu. Gauss vynalézá bifilární magnetometr (1836) a s Weberem zavádí jednotku magnetismu. Pozorování astronomická nyní nahrazují pozorování magnetická.

Gauss byl také na rok zvolen děkanem Filosofické fakulty.

Roku 1834 dochází v Göttingen k umrtí profesora Karla Hardinga.[13] Na jeho místo nastupuje Karl Goldschmidt, student, asistent a nakonec spolupracovník Gaussův na hvězdárně v Göttingen. S Gaussem spolupracoval na matematických i dalších vědeckých pracech.[14]

Podzim roku 1837 se nese ve víru oslav stého jubilea univerzity v Göttingen. Profesor Alexander von Humboldt je zvláštním hostem univerzity i Gaussovy domácnosti. Poté odjíždí Gaussův syn Wilhelm do USA a zeť Ewald do exilu. O rok později se dcera Minna stěhuje do Tübingen. V Missouri se mu (v den Gaussových narozenin) narodí první vnuk. Na jaře roku 1839 však umírá jeho matka.

V tomto období začíná Gauss sklízet ovace ve společensko-vědním prostoru. V roce 1838 se stane nositelem nejstaršího vědeckého ocenění, Copleyho medaile Královské společnosti v Londýně.[15] V témže roce se Gauss stal tajemníkem Královské společnosti v Göttingen.

Gauss začíná navíc studovat ruštinu a sanskrt.

Veškeré teoretické i odborné práce směřují k obecné teorii zemského magnetismu a atlasu zemského magnetismu (*Atlas Des Erdmagnetismus: Nach Den Elementen Der Theorie Entworfe*), na kterém pracovali společně Gauss, Weber a Goldschmidt.

[13] Karl Ludwig Harding byl objevitel planetky Juno (Lilienthal 1804). Stal se Gaussovým asistentem na hvězdárně v Göttingen. Od roku 1805 byl Harding mimořádným a od roku 1812 řádným göttingenským profesorem astronomie. Srv. (Bruhns 1879).

[14] Mezi jeho žáky patřil i Bernhard Riemann. Srv. (Kolmogorov, Yushkevich 1996, s. 199).

[15] Společně s Gaussem byl ve stejném roce oceněn také anglický fyzik a chemik Michael Faraday.

10. Pozdní odpoledne (1840–1847)

Pro zralý Gaussův věk jsou umrtí dcery Minny (1840) a revolta syna Josefa a jeho účast na velkém požáru v Hamburku (květen 1842) těžké.[16] Korespondenci s jeho přáteli Olbersem (1840), Besselem (1846) a Schumacherem (1850) ukončuje jejich smrt. Gauss zůstává osamocen.

V roce 1841 zastával úřad děkana Filosofické fakulty Univerzity v Göttingen. V roce 1845 se Goldschmidt stal docentem pro hvězdárnu. V témže roce požár nešťastně zničil vedení Gaussova–Weberova telegrafu.

V té době Gauss pracoval na teorii potenciálu, publikoval důkaz Legendrovy věty pro sférickou trigonometrii a věnoval se výzkumu komet. Do geodézie zapojuje použití magnetometru. Významný počin, na který se Gauss již mnoho let chystal, bylo vydání dvou dílů vysokoškolské učebnice k vyšší geodézii.

V roce 1846 navštěvuje přednášky z metody nejmenších čtverců dvacetiletý Bernhard Riemann.[17] Právě Gauss Riemanna přiměl ke studiu matematiky namísto teologie.

11. Revoluce a rekapitulace (1847–1854)

Během revoluční doby roku 1848 se Gauss přiklání na stranu konzervativců. Sám se však politicky ani jinak neangažuje.

V roce padesátiletého výročí získání doktorátu publikuje poslední důkaz základní věty algebry. U příležitosti oslav Gausse navštěvuje i Bernhard von Lindenau.

Gauss začíná rekapitulovat svou vědeckou dráhu. Mezi jeho posledními studenty jsou Dedekind a Moritz Cantor. V tomto období dopisuje a publikuje příspěvky k teorii algebraických rovnic.

V praktické astronomii se věnuje pozorování Neptunu (Le Verrierova planeta) a pozorování publikuje. Poslední řádné pozorování Gauss provádí v roce 1851. Přesto poté ještě několikrát namíří dalekohled k planetkám. Poslední publikované parametry dráhy od Gausse získává Psyche. V roce 1854 ještě tiskem vychází jeho pozorování a elementy komet.

[16] Srv. dopis Gausse Schumacherovi z 27. května 1842; (Peters 1862), Bd. 4, No. 776, s. 73–74; a 19. června 1842; (Peters 1862), Bd. 4, No. 778, s. 76–78.

[17] Její geometrický význam ve smyslu $n$dimensionální variety je zachycen v Ritterově zápisu z přednášek ze zimního semestru 1850/1851. Viz (Gauss 1917, s. 473–481) a Stäckelova poznámka k tomu (Gauss 1917, s. 481–482).

Hasnutí času (1854–1855)

Gausse uchvátila železnice. V roce 1854 se chodí dívat na stavbu tratě mezi Göttingen a Kassel. V létě se účastní slavnostního otevření železnice v Göttingen. Brzy nato umírá jeho nevlastní bratr Johann Georg Heinrich. V témže roce odešel také jeho přítel Lindenau.

Sám Gauss je vážně nemocen. Do posledních chvil jsou však jeho myšlenky hbité, stále čte, chce si dělat poznámky. Ke konci života s ním zůstává jen dcera Theresa a lékař dr. Braun. Občas ho ještě navštíví jeho přítel Sartorius.

Johann Friedrich Carl Gauss naposledy vydechnul hodinu po půlnoci dne 23. února 1855. Gaussovy kapesní hodinky se zastavily o pět minut později. V místnosti hvězdárny se rozprostřelo pokojné ticho.

Druhý den po smrti göttingenští profesoři fyziologie a patologie vyňaly z lebky mozek a podrobili ho důkladnému vážení a měření. Dodnes je společně s Dedekindovým mozkem uchován na katedře fyziologie v Göttingen. Zároveň byla Gaussovi sňata posmrtná maska.

Noc z 25. na 26. února 1855 byla poslední Gaussovou nocí v jeho pracovně, kdy ho jeho nejbližší přátelé oblékli do akademického taláru a uložili do rakve. Ráno byla jeho rakev odnesena mimo hvězdárnu. Mezi smutečními hosty byla dcera Theresa, syn Josef, zeť Ewald, studenti matematiky a přírodních věd (včetně Dedekinda). Pohřbem se nesly Lutherovy zpěvy. Smuteční oratorium vedl Heinrich Ewald, Gaussův zeť a profesor teologie a orientálních jazyků na Univerzitě v Göttingen.

Pro řeckou mytologii je charakteristický vývojový stupeň titánů, kteří se přerodí v olympské bohy. V tomto duchu lze smýšlet i o Gaussovi. Lze jej vidět jako vědce, který sice ještě stojí nohama v osvícenství, svou podstatou držící klasickou vědu, jeho srdce i mysl již však sahá po nové, ke specializacím směřované (romantické) přírodovědě a německé vědě 19. století.[18] Z tohoto pohledu lze uvažovat o Gaussovi jako o tom, kdo je přemostěním mezi posledními holistickými pojetími a (prvními) separovanými vědami. Jeho dílo umožňuje obě čtení.

Věda byla Gaussovi nositelkou nesmrtelné podstaty duše.

> Náboženství není předmět literatury, ale života. [. . .] Boží zjevení je trvale plynoucí, nikoli vytesáno do kamene či zapsáno na pergamen. A tak kniha je inspirována, pokud inspiruje.[19]

[18] Neboli Gauss již není ten, kdo drží nutně descartovsko–leibnizovskou *mathesis universalis*.

[19] Viz (Dunnington 2004, s. 301).

Kapitola 2

Gaussovo dílo

Carl Friedrich Gauss zasáhl do téměř všech oblastí, které matematika na začátku 19. století obsáhla. Jeho práce znamenaly průlom v teorii čísel, pravděpodobnosti a astronomii. Pod jejich vlivem se nepřímo přerodila klasická algebra v moderní. Gaussovo vnímání matematiky jako královny věd nebylo pohledem na ideální derivát všech věd v křišťálové kouli, ale na živou královnu, která ostatním [vědám] naslouchá, čerpá z nich a nově budovanými teoretickými nástroji jim pomáhá. Neboli matematika tu nebyla pro matematiku a svou krásu, ale pro astronomy, geodety, fyziky, optiky, inženýry. Gauss je ten, koho lze považovat za držitele idejí užité a inženýrské matematiky a zakladatele statistiky a numerické matematiky.

Podle přehledu bibliografie, kterou Dunnington uvádí,[1] publikoval Gauss během svého života 155 prací. Z nich pak bylo sestaveno a v letech 1863 až 1933 vydáno 12 svazků souborných prací. Na jejich sběru a systematizaci do oborů se podílely tři generace matematiků. Přesto je k jejich porozumění potřeba číst nejen práce daného oboru, ale také daného období, v němž to či ono pojednání vzniklo. Jinak ani není jasné, k jakým účelům bylo a je určené (a primárně použitelné).

Po rekapitulaci jednotlivých svazků *Werke* mají níže uvedené odstavce za cíl vyzdvihnout a zdůraznit některé Gaussovy matematicko-teoretické příspěvky, které stojí těsně před nebo u zrodu diferenciální geometrie.

Pro úplnost: Gauss psal své práce latinsky, německy a francouzsky.

[1](Dunnington 2004, s. 420–430).

Werke

Dvanáctisvazkové souborné vydání Gaussových *Werke* vyšlo v letech 1863 až 1933. Jejich vydání bylo podpořeno Královskou společností věd v Göttingen. Editoři Gaussových prací byli E. Schering, F. Klein, M. Brendel a L. Schlesinger. Na vydání se podíleli také asistenti R. Fricke, P. Stäckel, E. Wiechert, C. Schaefer, A. Galle a H. Geppert. Vydavateli byli nejkvalitnější nakladatelé a nakladatelství své doby: Friedrich Andreas Perthes (Gotha), B. G. Teubner (Leipzig) a Julius Springer (Berlin).

Nakladatelství Cambridge University Press provedlo vyčištění zdigitalizovaných tisků a celý soubor prací v roce 2011 v edici Cambridge Library Collection znovu vydalo. Texty jsou tak nyní čitelnější a hlavně dostupnější. Jde však o reprint, nikoli o upravené vydání.

Svazek I. (Gauss 186, 478 s.) je reprodukcí *Disquisitiones arithmeticae* z roku 1801. Jedná se o základní práci k teorii čísel, vedenou matematickou rigorositou, v níž Gauss vedle svých výsledků připomíná i poznatky z teorie čísel. V poslední kapitole čtenář najde podmínky konstruovatelnosti pravidelného $n$úhelníku. Tedy vyřešení otevřeného problému, který se v matematice vynořuje už od antiky. Svazek obsahuje i přepis Gaussových ručně psaných poznámek.

Svazek II. (Gauss 1863, 528 s.) doplňuje první svazek dalšími publikovanými články z teorie čísel z let 1808 až 1831. Obsahuje rovněž recenze a náčrty z pozůstalosti, a to včetně nedokončené části osmé kapitoly *Disquisitiones arithmeticae*. Autorem závěrečné editorské poznámky je Ernst Schering.

Svazek III. (Gauss 1866, 499 s.) se zaměřuje na (matematickou) analýzu. Obsahuje práce k algebraickým, eliptickým funkcím z let 1799 až 1849, tedy zejména další důkazy základní věty algebry, příspěvek k teorii algebraických rovnic a texty z pozůstalosti k očekávaným pojednáním o eliptických funkcích. Dále jsou zde pojednání k mocninným řadám (1812) a aproximace integrálu řadou (1814). Svazek obsahuje také sdělení k vydávaným spisům. Najdou se zde také texty k interpolaci, které spadají do pozůstalosti. Editorem svazku je Ernst Schering.

Svazek IV. (Gauss 1873, 492 s.) obsahuje Gaussovy teoretické práce z počtu pravděpodobnosti (1821–1816) a diferenciální geometrie ploch (1822–1827). Nacházejí se zde i recenze knih (např. Monge, Herschel) a záznamy geodetických měření Hannoverského království, Dánska a Brém (z 20. do 40. let). Svazek obsahuje oba díly učebnice vyšší geodézie (1843, 1846).

Svazek V. (Gauss 1867, 642 s.) je shrnutím Gaussových prací z mechaniky a zemského magnetismu z let 1813 až 1841. Zahrnuje Gaussův princip nejmenších vazeb (ekvivalentní d'Alembertově principu) a teorii kapilárních jevů. Je zde také Gaussova teorie přitažlivosti, obecná teorie zemského magnetismu, optická zkoumání, popis magnetometru a výsledky fyzikálních měření a pozorování. Jsou zde recenze knih z těchto oborů a texty z pozůstalosti (mj. k elektrodynamice). Autorem závěrečné editorské poznámky je Ernst Schering.

Svazek VI. (Gauss 1874, 664 s.) je věnován menším astronomickým pojednáním z doby 1800–1852. Zahrnuje data pozorování a pojednání k výpočtům eliptických drah planetek (Ceres, Pallas, Juno, Vesta, Iris, Flora a Psyche), komet, Měsíce, Neptunu aj. Jsou zde i výpočty dat Velikonoc a židovského Pesahu. Nechybí astronomické tabulky, tabulky refrakce, aberace, nutace. Svazek obsahuje poznámky k přístrojové technice. Dále jsou zde fragmenty z Gaussových korespondencí a recenze mnoha astronomických knih. Editorem svazku je Ernst Schering.

Svazek VII. (Gauss 1906, 650 s.) obsahuje teoretické astronomické spisy. Jde o Gaussovu učebnici teoretické astronomie *Theoria motus corpum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (1809), dodatky k ní a poznámky k parabolickému pohybu (včetně textů z pozůstalosti a úryvků korespondence). Jsou zde shrnuta i Gaussova pozorování poruch v pohybu planetek Ceres a Pallas (vyňata z korespondence nebo z pozůstalosti) a jejich zobecnění. Autorem závěrečné poznámky je Felix Klein.

Svazek VIII. (Gauss 1900, 458 s.) je doplněním svazků I až IV. o další výhradně nepublikované texty k teorii čísel, počtu pravděpodobnosti a diferenciální geometrii. Věnuje se aritmetice a algebře (doplňky svazků I–III) včetně řešení soustavy lineárních rovnic a úvah o kvaternionech. Dalším oddílem jsou doplňky cv. III k analýze, teorii eliptických funkcí a eliptických integrálů, numerickým výpočtům, metodě nejmenších čtverců. Zhruba dvě třetiny svazku zaujímají problémy základů geometrie (teorie rovnoběžnosti, transcendentní trigonometrie, astrální geometrie a metafyziky geometrie), pojetí geometria situs (předznamenáním topologie). Je zde také pojat geometrický význam komplexních veličin a náčrty k teorii křivých ploch. Hlavním editorem svazku je Felix Klein.

Svazek IX. (Gauss 1903) zahrnuje doplňky IV. svazku o příspěvky z geodézie, triangulace a geodetického vyměřování Hannoverského království včetně konformního zobrazení sféroidu do roviny jakožto projekční metody pro hannoverské mapování. Svazek obsahuje také představení heliotropu a pojednání o vyměřování rozdílu v zeměpisných šířkách mezi Göttingen a Altonou. Závěrečnou poznámku sepsal Felix Klein.

Svazek X. se skládá ze dvou částí:

První část (Gauss 1917, 586 s.) obsahuje fotokopiii Gaussova (matematického, vědeckého) deníku z let 1796 až 1814 s přepisem a editorskými poznámkami (Klein, Schlesinger, Bachmann, Loewy, Stäckel, Dedekind, Brendel, Galle). Tato část také zahrnuje další náčrty a poznámky z pozůstalosti a korespondence k aritmetice, algebře, analýze (včetně vlastností aritmeticko-geometrického průměru, k teorii transcendentních a eliptických funkcí, nekonečných řad) a geometrii (transcedentní a sférická trigonometrie, $n$rozměrné variety). Hlavním editorem této části je Felix Klein.

Druhá část (Gauss 1922–1933, 675 s.) je začátkem projektu Felixe Kleina sestavit Gaussovu biografii na základě statí systematické historiografie. Jednotlivé eseje mají pokrýt všechny vědecké oblasti, do kterých Gauss zasáhl. Tato část obsahuje interpretace Gaussových prací k teoretické matematice (teorie čísel, teorie funkcí, základní věta algebry, geometrie, variační počet), pravděpodobnosti a statistice a mechanice. Společnými editory části byli Martin Brendel a Ľudovít (Ludwig) Schlesinger.

Svazek XI. je rovněž rozdělen do dvou částí:

První část (Gauss 1917, 518 s.) zahrnuje přídavné materiály k V. až VII. svazku o fyzice. Je zde zastoupena mechanika, magnetismus, galvanismus, optika (dioptrika), chronologie, teoretická, praktická a sférická astronomie a pohyby ve Sluneční soustavě. Složena je z výhradně nepublikovaných textů. Autory shrnující závěrečné poznámky k této části byli Martin Brendel a Ludwig Schlesinger.

Druhá část (Gauss 1924–1929) sestává ze tří obsáhlých interpretačních studií k Gaussově geodézii, fyzice a astronomii. Autory byli Andreas Galle (165 s.), Clemens Schaefer (217 s.) a Martin Brendel (258 s.)

Svazek XII. (Gauss 1929, 415 s.) je souborem velmi rozmanitých poznámek a fragmentů z pozůstalosti, vědecké korespondence a návrhů úloh pro vědecké soutěže. Tento svazek obsahuje reprodukci Gaussova Atlasu zemského magnetismu (1840). Závěrečný svazek *Werke* redigovali Martin Brendel a Ludwig Schlesinger.

Teorie přitažlivosti

Během roku 1812 se Gaussovi podařilo najít vyjádření přitažlivosti pro homogenní eliptický sféroid. Se svým ještě nepublikovaným výsledkem na podzim zavítal k baronu von Zachovi na observatoř Seeberg,[2] načež si do svého deníku zapsal:[3]

> Objevili jsme absolutně novou teorii gravitace eliptického sféroidu v bodech mimo těleso.

Jde o práci *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum*, která Gaussovi vyšla v březnu roku 1813.[4] Německý překlad od Bernharda von Lindenaua vyšel téhož roku v *Monatliche Correspondenz*.[5]

Při řešení teorie gravitace Gauss použil Legendreovu aproximaci sféroidu rotačním elipsoidem. Vyjádření gravitace k bodům, které leží ve směrech hlavních os, před Gaussem našel Maclaurin a analyticky je zpracoval d'Alembert, Lagrange, Legendre a Laplace.[6]

V matematice tímto Gauss pojmenoval a uvedl k užívání lokální prostor a dvojný integrál. Nové bylo, že odvodil také povrch rotačního elipsoidu, přes který integroval. Výsledkem jsou věty o nulovosti integrálu (dnešními slovy gravitačního potenciálu) přes uzavřenou plochu (tj. povrch elipsoidu). Co se jeví zajímavé, jsou techniky, v nichž pro diferenciály nových nezávislých souřadnic rozlišuje jednotlivé případy „infinitesimálně malých rovinných obdélníků“ o stranách p, q, $p + \mathrm{d}p, q$, $p, q + \mathrm{d}q$ a $p + \mathrm{d}p, q + \mathrm{d}q$.[7]

Novým úkolem, který před ním stál, bylo najít zobrazení nejkratších (geodetických) linií[8] na rotačním elipsoidu.[9] Gauss přitom pracoval s obecnou křivou plochou, na které zavedl kartézské souřadnice bodu jako funkce dvou libovolných veličin (dnes nazývané parametrizace).[10] V geodetických spisech *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie I* (z let 1843 až 1844)[11]

[2]Hvězdárnu na Seebergu poblíž Gothy založil baron Franz Xaver von Zach a až do své smrti byl jejím ředitelem. Dnes je místo částí Gothy.

[3]Viz *Mathematisches Tagebuch 1796–1814*, záznam č. 142, datovaný 26. září 1812 v Seebergu (Gauss 2009, s. 128–129): „Theoriam attractionis sphaeroidis elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus“.

[4]Je též zahrnuta ve *Werke* (Gauss 1863, s. 1–22). Abstrakt tamtéž (Gauss 1863, s. 279–286).

[5]Über Attraction der Sphäroiden, *Monatliche Correspondenz*, Bd. 27 (1813), s. 421–431.

[6]Viz rovněž abstrakt k teorii gravitace ve *Werke* (Gauss Bd. 5, str. 279–286.

[7] *Werke*, Bd. 5, str. 15 : „Concipiatur planum per infinitas rectas tum liniae abscissarum parallelas tum ipsi normales in elementa rectangula divisum: huiusmodi elementum, inter puncta quorum coordinatae sunt p, q; $p + \mathrm{d}p, q$; $p, q + \mathrm{d}q$; $p + \mathrm{d}p, q + \mathrm{d}q$ contentum, erit $= \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q$.“

[8]Ve smyslu „infinitesimálně krátkých úseček“.

[9]Podle Dunningtona *Gauss. Titan of Science*, str. 163, šlo o linie na eliptickém sféroidu.

[10]Poznámku k vyjádření tohoto zobrazení pro nejkratší linie na rozvinutelných plochách najdeme v pozůstalosti, zahrnuté do *Werke*, Bd. 8, str. 457.

[11]Pojednání je součástí výboru *Werke*, Bd. 4, str. 262–348.

pro toto zobrazení zavádí Gauss označení *konformní*, tj. takové spojité zobrazení, které zachovává úhly.[12]

Teorie interpolace

Když se ve svém dopise z 23. ledna 1813 Schumacher zmiňoval Gaussovi o teorii interpolace pro svého žáka,[13] měl patrně na mysli práci *Theoria interpolationis methodo nova tractata*. Při bližším hledání se však ukáže, že nebyla za Gaussova života nikdy publikována a že je dochována jen v Gaussově pozůstalosti ve *Werke*.[14]

Interpolační metodu Gauss rozvádí i pro případ komplexní proměnné, v jehož vyjádření vystupují periodické funkce. Metodu (avšak bez komplexní proměnné) publikoval až posmrtně Gaussův žák a německý astronom Johann Encke v roce 1830[15] s poznámkou, že podklady získal od Gausse v roce 1812.[16]

Dnes je tato metoda známá jako *Newton–Gaussova interpolační formule*.[17] Používá se k přibližnému výpočtu hodnot funkcí daných tabulkou, při numerické integraci nebo při numerickém řešení diferenciálních rovnic. Daná funkce $f(x)$ se bude s interpolačním trigonometrickým polynomem shodovat v tzv. uzlech interpolace, v bodech x_k, v nichž se funkce i polynom shodují.

$$f(x) \approx t_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} f_k \zeta_k(x),$$

kde $t_n(x)$ je trigonometrický polynom $n$tého stupně takový, že

$$t_n(x_k) = f_k \qquad \text{pro} \quad k = 0, \ldots, 2n,$$

[12] Zobrazení $f : U \to V$ se nazývá *konformní* (úhlojevné) v bodě u_0, jestliže zachovává orientaci úhlů, které svírají křivky procházející bodem u_0.

[13] Viz dopis Schumachera Gaussovi No. 50, Bd. 1, str. 97–98.

[14] Bd. 3, str. 265–327.

[15] [Encke, J. F. Über Interpolation, In *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, 55 (1830), str. 265–284. Pojednání je uvedené také v *Gesammelte Mathematische und Astronomische Abhandlungen*, Bd. 1, F. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Berlin, 1888, 1–20.

[16] Více k historii interpolace např. práce Meijering, E. A Chronology of Interpolation. From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing. *Proceedings of the IEEE*, 90 (2002), No. 3, str. 319–342.

[17] Uvedené vyjádření je uvedeno v elektronické Wolframově knihovně matematických vzorců.
Weisstein, E. W.: Gauss's Interpolation Formula. In *MathWorld-A Wolfram Web Resource* [online] Poslední revize 18. května 2011. [cit. 9. 6. 2011]

a

$$\zeta_k(x) = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(x-x_0)\right]\cdots\sin\left[\frac{1}{2}(x-x_{k-1})\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(x_k-x_0)\right]\cdots\sin\left[\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})\right]}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sin\left[\frac{1}{2}(x-x_{k+1})\right]\cdots\sin\left[\frac{1}{2}(x-x_{2n})\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(x_k-x_{k+1})\right]\cdots\sin\left[\frac{1}{2}(x_k-x_{2n})\right]}.$$

Diferenciální geometrie křivých ploch

Prací k Ceně Kodaňské královské společnosti z roku 1822

Obecné řešení úlohy, jak zobrazit
části dané plochy
na jinou danou plochu tak, aby zobrazení bylo
v nejmenších částech stejné
jako zobrazovaná plocha

Gauss vypracoval obecnou formuli míry křivosti. Zobecnil zde Legendreovu větu o sférických trojúhelnících z roku 1787,[18] čímž propojil teorii nejkratších geodetických linií s teorií míry křivosti. V tomto světle se Gaussova věta o redukci malých geodetických trojúhelníků na rovinné jeví jako třešnička na dortu invariantů a rozvinutí plochy do roviny, o nichž uvažoval již od konce roku 1822. Práce obsahovala výsledek aplikace z dánského mapování, neboť z proměření pásma pěti stupňů zeměpisné šířky vypočítává parametry pro zploštění referenčního eliptického sféroidu.

Vydání *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen änhlich wird* se uskutečnilo až v roce 1825.[19] K dalšímu už nedošlo, neboť v té době Gauss již pracoval na novém pojednání o křivých plochách.

V druhé polovině roku 1825 se Gaussovi podařilo dokončit zobecnění teorie křivých ploch v *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* Přednáška, na níž Gauss pojednání prezentoval, se konala dne 8. října 1827 před Královskou společností věd v Göttingen a v roce 1828 vyšla v göttingenském časopise

[18]Věta je součástí Legendreova pojednání *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre* (Legendre 1787).
[19]Překlad je součástí této disertační práce (O konformním zobrazení).

Commentationes recentiores.[20] K ní vydal v *Anzeigen* také abstrakt. Přednáška byla publikována v latině, abstrakt v němčině. Překlady jak přednášky, tak abstraktu jsou součástí této disertační práce.

Gaussův matematický postup a závěr lze velmi stručně shrnout následovně:

Buď dán bod (x, y, z) na ploše S. Jeho souřadnice x, y, z jakožto funkce lze parametrizovat novými proměnnými p a q tak,[21] že

$$x = x(p, q), \quad y = y(p, q), \quad z = z(p, q).$$

Potom pro jejich diferenciály platí

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q, \quad \mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q, \quad \mathrm{d}z = c\,\mathrm{d}p + c'\,\mathrm{d}q,$$

kde

$$\begin{aligned} a = x_p = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad b = y_p = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad c = z_p = \frac{\partial z}{\partial p}, \\ a' = x_q = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad b' = y_q = \frac{\partial y}{\partial q}, \quad c' = z_q = \frac{\partial z}{\partial q}. \end{aligned}$$

Vedle toho nechť je dán oblouk o délce s, vyjádřené v těchto parametrických souřadnicích. Kvadrát diferenciálu jeho délky $\mathrm{d}s^2$ je pak

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = (a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q)^2 + (b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q)^2 + (c\,\mathrm{d}p + c'\,\mathrm{d}q)^2 = \\ = E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}v^2, \end{aligned}$$

kde

$$E = a^2 + b^2 + c^2, \qquad F = aa' + bb' + cc', \qquad G = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Gaussův závěr říká: *Vlastnosti plochy S závisí pouze na veličinách E, F a G a jejich parciálních diferenciálních koeficientech prvního a druhého řádu.*

(Gaussova) křivost K plochy S v bodě P se definuje vztahem

$$K = \frac{1}{rR},$$

kde r a R jsou hlavní poloměry S v P (tj. největší a nejmenší poloměr křivosti v tzv. hlavních směrech).

[20] V tomto čísle časopisu vyšly zároveň další dvě Gaussovy práce – matematické zdůvodnění teorie bikvadratických residuí (*Theoria residuorum biquadraticorum*) a dodatek k eliminaci chyb měření (*Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae*). Všechny byly inspirovány praktickým proměřováním Hannoverského království.

[21] Gauss užívá různá značení: nejprve t, u, posléze p, q. Dnes se někdy užívá také u, v.

To, čím jsou *Disquisitiones generales circa superficies curvas* přelomová, je následující známá věta (theorema egregium):[22]

> Jestliže je křivá plocha rozvinutelná na jinou plochu, pak míra křivosti v každém jejím bodě zůstává zachována.

Jinými slovy: míra křivosti (Gaussova křivost) plochy závisí pouze na vyjádření kvadrátů lineárních členů ve dvouparametrickém rozvoji a jejich diferenciálních koeficientech. Neboli, pro praxi zhruba řečeno, (Gaussovu) křivost plochy lze vnitřně určit pomocí úhlů, vzdáleností a jejich poměrů na samotné ploše, aniž bychom se více vztahovali na vnější trojdimensionální eukleidovský prostor (souřadnice, parametrisace atd.).

V průběhu téměř dvou set let se tento výsledek přeformulovával do modernějších pojmů a teorií: „Gaussova křivost je charakterizující invariant plochy“ anebo „Gaussova křivost plochy je invariantní vůči lokální isometrii“.

Důsledkem této věty je kritérium, jak zjistit, že jedna plocha je rozvinutelná do druhé (neboli kartografickou terminologií délkojevně (ekvidistantně) zobrazit) – musí mít právě stejnou Gaussovu křivost. Speciálně plochy rozvinutelné do roviny mají nulovou Gaussovu křivost. A také to, že kouli nelze do roviny rozvinout – neboli neexistuje dokonalá kartografická projekce (protože sféra a rovina nejsou isometrické, ani lokálně).

Shrňme výše uvedené závěry epistemologickými mezemi matematiky poloviny 19. století: Gaussova křivost je topologická vlastnost plochy.[23]

Nedlouho poté ohlas Gaussových prací přichází i z českých zemí. Ve zvláštním čísle *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky*, vydaného u příležitosti 100. výročí Gaussova narození, Karel František Edvard Kořistka toto Gaussovo dílo shrnuje slovy:[24]

> Na konec budiž mně dovoleno, vzpomenouti ještě čtvrtého geodaetického vynálezu, jejž Gauss uveřejnil v posledních dvou větších pojednáních „o předmětech geodaetických“ r. 1843 a 1846 od něho vydaných, ačkoli předmět, o němž první z těchto pojednání jedná, částečné již ve spisu r. 1827 pod titulem „Disquisitiones generales

[22] Gauss: Disquisitiones generales circa superficies, *Comm. soc. reg. sci.* VI(1827), s. 120. Viz (Gauss 1873, s. 237): „Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvuaturae in singulis punctis inuariata mant.“

[23] Moderní verze později nazvané Gaussovy–Bonettovy věta, která byla jedním z výsledků Bonettových prací z let 1844 až 1867.

[24] Viz (Kořistka 1877, s. 182–183).

> circa superficies curvas“ vyšlém, obsažen jest. Jestiť to theorie podobného zobrazení, kterouž řeší se obecně platným způsobem úkol, jak by náleželo části kterékoli dané plochy zobraziti na všeliké jiné ploše, a sice tak, aby obraz nový obrazu původnímu i v nejmenších částcích stal se podobným. Takovým podobným zobrazením koule na rovině jest na př. tak zvaný průmět stereografický. Avšak v řečeném pojednání zanáší se Gauss se zvláštním případem podobného přenesení plochy ellipsoidu na plochu koule, případu to pro geodaesii zvláště důležitého, jelikož mathematická podoba země není koule nýbrž ellipsoid a tudíž přenesení geodetických čar z ellipsoidu na kouli poskytnouti musí podstatného zjednodušení úlohy, jen když vývin děje se tak, aby určitost v podobnosti tvarů, tedy také stejná podobnost úhlův nevzala újmy. I tento problém řešil Gauss s neobyčejným v pravdě důvtipem i není-li možná, krátkými slovy zásady nové jeho methody objasniti, tož vzpomenu co příkladu svrchované určitosti, jakéž skrze ni lze dosáhnouti, jen toho případu, že opravy v úhlech čili v redukcích směrův v onom trojúhelníku Hannoverské sítě, jenž od meridianu normálního nejvíce vzdálen jest, neobnášejí více než 0.0032 sekund, že tedy lze jich zcela pustiti mimo, spokojíme-li se s dvěma decimalkami jedné sekundy.

Z obou Gaussových prací dodnes zbyly dva důležité přístupy. Prvním bylo systematické používání křivočarých souřadnic; druhým pak pojetí plochy jako dvouparametrického rozvinutí, nikoli pevného, ale pružného, a hledání jejích invariantů. Tímto novým uvažováním lze matematicky pojmout nové tvary, které získáme tak, že známé tvary bez natažení (dilatace) ohýbáme. Všechny plochy odvozené od dané plochy ohnutím jsou pak rozvinutelné do této dané plochy (ve speciálním případě do roviny). Gauss je přelomový tím, že těmto oběma pojetím dodal přísně rigorózní analytická kritéria.

Z hlediska dalšího ubírání se matematických dějin jsou *Disquisitiones generales circa superficies curvas* průkopnická ze dvou důvodů. Za prvé, Gauss přešel k (nepřímému) používání nekonečných grup (jak je zavedl později Sophus Lie), zatímco do té doby se v geometrii používaly pouze konečné grupy transformací. Druhý důvod je ten, že Gauss pojímal teorii křivých ploch jako (dnešní terminologií) geometrii dvourozměrné variety, která otevřela cestu obecné teorii vícerozměrných variet či *n*rozměrného prostoru.

Moderní dějiny teorie ploch právě *Disquisitions generales circa superficies curvas* dávají do svých počátků.

Kapitola 3

Gauss a diferenciální geometrie ve 20. letech 19. století

Matematika ve 20. letech 19. století procházela změnou paradigmatu: přerodem z čisté, ideální a zároveň všeplatné descartovsko–leibnizovské *mathesis universalis* ve specializační vědu, která hledala svou svébytnost.[1] V této kapitole bude načrtnuto ukotvení Gaussovy diferenciální geometrie v dobové evropské vědě a vymezení se vůči jiným matematickým školám. Praktické podněty geodézie, klasické pojetí geometrie křivek a ploch, vztah Gausse vůči Eulerovi a nevymezení se vůči Mongeově škole jsou pilíře, na nichž leží váha Gaussových myšlenek.

Geodézie jako impuls zrození nové diferenciální geometrie

Nové uspořádání Evropy po napoleonských válkách vyžadovalo z vojensko-ekonomických důvodů také nové mapové podklady. Tento moment výrazně zasáhl i do vědeckého života Gausse a Schumachera. Z nařízení dánského krále Friedricha VI. od roku 1817 Schumacher vytyčoval meridiány v různých místech Holštýnska (a později Dánska), na což navázal Gauss v Hannoveru. Podle poznámek z Gaussovy pozůstalosti[2] bylo jejich společnou ideou založení celoevropské geodetické triangulační sítě a na jejím základě podání nové (přesnější) kartografie.[3]

[1] Více o tomto období (a částečně i o Gaussovi) také pojednává monografie (Benediktová Větrovcová 2011).

[2] Viz *Werke* (Gauss 1873, s. 484).

[3] Projekt byl částečně rozšířen i do USA a Chile.

Schumacher sice nabízel Gaussovi práci na proměřování Dánska, Gauss však odmítl – získal práci k proměřování Hannoverského království.[4] K proměřování Hannoverského království byl Gauss povolán roku 1818. Roku 1820 dopsal spis o vytyčení meridiánu v Göttingen[5] a v roce 1821 Gauss vynalézá heliotrop – přístroj,[6] pomocí něhož lze i na velké vzdálenosti nasměrovat sluneční paprsek do jistého vzdáleného bodu. Vlastní geodetická měření pak intenzivně řídil a prováděl v letech 1821 až 1826. V té době přednášel pouze v zimním semestru[7] a téměř nepublikoval.

Astronomická pozorování a postupy sloužily v této době především k vyšší přesnosti geodetických měření. Nově zakládané hvězdárny s vytyčeným meridiánem byly východiskem pro mapování přilehlého okolí. Staly se tak výchozími body základní triangulační sítě. Na druhé straně geodézie vyžadovala také nový matematicko-teoretický základ, k němuž docházelo propojením poznatků matematické analýzy a geometrie v teorii křivých ploch.

Francouzská diferenciální geometrie

Vedle tohoto nového momentu vstupu teoreticko-geodetických úvah do geometrie stála tradice francouzské diferenciální geometrie. Svůj základ má v pracech švýcarského matematika Leonharda Eulera.

Leonhard Paul Euler (1707–1783) byl matematik a fyzik, který svými poznatky přispěl k základům diferenciálního počtu a pozdější teorie grafů. Vedle matematických pojednání psal práce z mechaniky, optiky a astronomie. Jeho život je spjat s Basilejí, Petrohradem, Berlínem. Celé Eulerovo dílo je postupně zpřístupňováno i elektronicky (*The Euler Archive. A Digital Library Dedicated to the Work and Life of Leonhard Euler*).[8]

Francouzská diferenciální (a později deskriptivní) geometrie je začátkem 19. století nesena prací Gasparda Monge.

---

[4] Srv. dopis Gausse Schumacherovi z 20. května 1820, (Peters 1860), Bd. 1, No. 100, s. 190–191.

[5] *On the new Meridian Circle at Göttingen*, *Astron. Soc. Mem.*, 1(1820), s. 129–134. Citace převzata z (Dunnington 2004, s. 424).

[6] O něm rovněž Gauss vydal článek *Über das Heliotrop*, *Annal.* IX a XVII. Citace převzata z (Dunnington 2004, s. 424).

[7] Vedl pouze přednášky z teorie pohybu nebeských těles, komet a použití počtu pravděpodobnosti v aplikované matematice. Soukromě vedl pro své studenty na hvězdárně také praktickou astronomii.

[8] Pro současnou historiografii je významným počinem Eulerova biografie (Bradley, Sandifer 2008).

Gaspard Monge (1746–1818) byl francouzský přírodovědec, matematik, ale také politik francouzské revoluce. Stojí u zrodu deskriptivní geometrie. Matematiku a později i fyziku vyučoval na dělostřeleckém učilišti v Lyonu. Od roku 1792 byl ministrem námořnictva. Vedle toho stál u zavedení metrické soustavy a založení École normale supérieure. Přednášel rovněž na vojenské akademii v Mézières a École Polytechnique. Během Napoleonova tažení do Egypta vedl vědeckou část výpravy. Z jeho díla jsou nejvýznamnější knihy *Traité élémentaire de statique*, *Géométrie descriptive* a *Application de l'analyse à la géométrie.*

Z hlediska epistemologie matematiky je podstatné, že francouzská diferenciální geometrie před Gaussem uvažovala o křivé ploše jako o reprezentaci hranice nepravidelného tělesa, které je umístěné v (trojrozměrném) prostoru. Kdežto Gauss přichází s pojetím křivé plochy jako znázornění „nekončící“ (neomezené) okolní krajiny.

Gauss a Euler

Gauss Eulera obdivoval. Ač Gauss v práci o křivých plochách *Disquisitiones generales circa superficies curvas* přímo nikoho necituje, Euler byl jediný, ke kterému se přímo vztahuje. Odvolává se na něj v Abstraktu k *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*[9] V hlavní práci sice tento odkaz není, jak si Karin Reich ve svém článku všímá,[10] přesto s ní nelze souhlasit v tom, že by Gauss Eulerovy práce z diferenciální geometrie neznal, ani že by ho nijak neovlivnily. Tento druhý názor sdílí Dunnington.[11]

Euler jako první rozvedl analytickou geometrii do třídimensionálního prostoru.[12] Stál u zrodu geometrických transformací a pojmu afinní transformace. Jako první se zabýval křivostí jiných než sférických ploch. V *Recherches sur la courbure des surfaces* (E333) z roku 1763 pokládá základy diferenciální geometrie (obecných) ploch. Vedle toho rozvíjí sférickou geometrii a trigonometrii.[13]

Gauss Eulerovy *Recherches* (E333) patrně znal, není ale jasné, jak moc rozsáhle znal další Eulerovy práce z teorie ploch a příspěvky k matematické kartografii. Tedy nakolik Gauss četl práce E392: *Evolutio insignis paradoxi circa*

[9] Překlad Abstraktu je součástí této disertační práce.

[10] Viz (Reich 2007).

[11] Viz (Dunnington 2004, s. 165).

[12] Více (Kolmogorov, Yushkevich 1996, s. 1).

[13] K tomu jsou hlavní Eulerovy práce z roku 1755 E214: *Principes de la trigonometrie spherique tires de la methode des plus grands et plus petits* a E215: *Elemens de la trigonometrie spheroidique tires de la methode des plus grands et plus petits.* Všechny jsou dostupné v uvedeném Eulerově archivu.

aequalitatem superficierum, E408: *De curva rectificabili in superficie sphaerica*, E419: *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet* a práce o kartografických projekcích E409: *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, E491: *De proiectione geographica superficiei sphaericae* a E492: *De proiectione geographica Deslisliana in mappa generali imperii russici usitata*.[14]

Gauss a Mongeova škola

K Mongeově francouzské škole se oproti tomu Gauss příliš nevztahoval. Dunnington uvádí pouze Gaussovu poznámku, že parciální diferenciální rovnice druhého řádu pro plochy rozvinutelné do roviny „nebyly ještě dokázány s dostatečnou rigorositou".[15] Mongeovo zkoumání speciálních tříd ploch nemělo na Gausse patrně žádný vliv stejně jako deskriptivní geometrie, kterou přesto v recenzi z roku 1813 pochvaloval.[16] A to i přesto, že Monge a jeho žáci na Eulera navazovali.

Z žáků, kteří studovali geometrii u Gasparda Monge, za zmínku stojí Jean Baptiste Mesnieur (1754–1793), který Eulerovo hlavní dílo E333 přímo zmiňuje.[17] Dodnes se v diferenciální geometrii zmiňuje Mesnieurova věta.[18]

Jiný Mongeův žák, Olinde Rodrigues (1794–1851), roku 1815 popisuje použití sférického zobrazení plochy, poměr obsahů vzájemně si odpovídajících ploch a vyjadřuje veličinu, kterou dnes známe jako totální (nebo Gaussovu) křivost, pro kterou ukázal, že je součinem hlavních křivostí.[19]

Křivostí ploch se zabýval i další Mongeův žák, absolvent École Polytechnique a námořní důstojník Charles Dupin (1784–1873). Ten navázal na práce o tzv. geodetických křivkách na elipsoidu, které rozdělují elipsoid na třídy ploch druhého řádu se společným ohniskem. Při studiu křivosti normálových řezů ploch zavedl křivku (Dupinova) indicatrix, díky níž klasifikoval body na dané ploše do čtyř typů: planární, eliptický, hyperbolický a parabolický.

Stejně jako Euler či Gauss, tak i Monge a jeho škola mají nezastupitelné místo ve vývoji diferenciální geometrie.

[14] E490, E491 a E492 byly v roce 1898 souborně vydány v německém překladu v (Wangerin 1898).

[15] Viz (Dunnington 2004, s. 165–166).

[16] Recenze je součástí *Werke* (Gauss 1873, s. 359–361).

[17] Jeho práce *Mémoire sur la courbure des surfaces* je sice z roku 1776, ale byla publikována až v roce 1783. Více viz (Reich 2007, s. 492).

[18] Středy oskulačních kružnic křivek na dané ploše, které procházejí daným bodem a které v tomto bodě mají společnou tečnu, leží na kružnici.

[19] Viz (Kolmogorov, Yushkevich 1996, s. 6).

Část III

Křivé plochy v korespondenci mezi Gaussem a Schumacherem

Kapitola 1

Heinrich Christian Schumacher

> Nová adresa
> Měsíc 42, 4° severní šířky, 60, 7° západní délky
> Průměr 61 km
> N. B. nedaleko od Gausse.[1]

Nejrozsáhlejší a nejzachovalejší je dopisování mezi Gaussem a jeho žákem a přítelem Schumacherem.[2] Z něho především vyplynuly okolnosti zrození spisů k diferenciální geometrii (Příběh Ceny Kodaňské královské společnosti) a také zatím neobjasněné datace spisů, které byly vydány až z pozůstalosti (Gaussovo–Newtonovy interpolační formule a projekce dvou křivých ploch navzájem na sebe).

Na základě četby dopisů mezi Gaussem a Schumacherem se ukazuje, že prvotné geodetické proměřování Hannoveru sehrává klíčovou roli pro vznik nového pojetí geometrie v infinitesimálním smyslu. Gauss totiž tvoří diferenciální geometrii, aby dosáhl kvalitnějšího teoretického podkladu pro budoucí, novou vyšší geodézii.[3]

Rovněž z korespondence plyne, že Gaussova praktická měření z 20. let směřovala k vybudování jednotné paneuropské geodetické síti. K tomu náleží i výsostné postavení astronomie a astronomických měření na počátku 19. století. To je v korespondenci doloženo také budováním nových hvězdáren v německy mluvících zemích.

[1] Měsíční krátery (a další útvary) nesou jména (a tím poskytují útočiště duším) mimo jiné také mnohých badatelů, kteří se zapsali do dějin vědy. U severovýchodního okraje Měsíce jsou Gauss i Schumacher. Data převzata z (Rükl 1991, s. 58).

[2] 6 svazků, (Peters 1860–1865).

[3] Tedy z pohledu fyziky přesnější referenční sféroid.

Také je vidět, jakou úlohu sehrávaly tehdy nově zakládané vědecké časopisy (*Astronomische Nachrichten*, *Astronomische Abhandlungen*, *Berliner Abhandlungen*, *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* a *Bulletin des sciences mathématiques, astronomie, physiques et chimiques*) a publikace v nich.

Korespondence mezi Gaussem a Schumacherem, příp. Besselem, Olbersem a Gerlingem odráží přijetí uvedených geometrických spisů v evropské komunitě. Tedy studium korespondence poskytlo základní interpretační rámec, který určoval, co bylo ve 20. letech 19. století klíčové a co na okraji vědeckého zájmu. Stejně tak ukázalo rozložení vlivů v tehdejším evropském vědeckém (a politickém) prostoru.

Základním, výchozím textem pro níže uvedené shrnutí je odstavec biografických údajů Karin Reich v *Neue Deutsche Biographie* (Reich 2007). Mnohem důslednější však byl obsáhlý nekrolog Johanna A. Repsolda v *Astronomische Nachrichten* (Repsold 1918).

Cesta ke Gaussovi

Henrich Christian Schumacher (1780–1850) byl německo-dánský astronom, matematik, geodet a fyzik. Ačkoli je znám především jako astronom, jeho cesta k hvězdářství nebyla přímá.

Narodil se v Bramstedtu, lázeňském městečku, nacházejícím se v Šlesvicku-Holštýnsku, které bylo onehdy v personální unií s Dánskem. Propojení těchto krajin králem Friedrichem VI. a vliv Schumacherova otce, který byl vysokým dánským úředníkem (Amtmann) a komořím, předurčovalo i jeho život.[4]

V letech 1782–1823 navštěvoval Gymnasium. Poté studoval práva – roku 1799 začal na univerzitě v Kielu, od roku 1801 pak pokračoval v Göttingen. Moderní univerzita v Göttingen měla výbornou pověst a právníci z ní získávali snadno uplatnění, prestižní umístění a získali také dobré konexe.

Schumacher se odstěhoval za prací do Východního Pruska (dřívějšího Livonska), kde se roku 1804 stal soukromým učitelem. Brzy se však stěhoval do Dorpatu,[5] kde získal na univerzitě místo docenta práv. Na univerzitě se setkával s prof. Johannem Pfaffem; Schumacher byl posluchačem jeho přednášek

[4] Podle Repsoldova odkazu ke korespondenci Gaussovi ze 17. ledna 1840 měl být sedmiletý Christian otcem představen dánskému králi (a v té době i holštýnskému vévodovi) Friedrichu IV. Ve vlastní korespondenci však bohužel takováto zmínka není.

[5] Dorpat je dřívější německé či švédské označení druhého největšího estonského města Tartu, známého též pod ruským jménem Jur'jev. Dortat patřil mezi hanzovní města.

z matematiky a astronomie, vědních disciplín, k nimž stále více a více tíhnul. Jako docent mohl už v roce 1806 po dvouletém studiu absenčně v Göttingen promovat. O tom se na sklonku života zmiňuje i Gaussovi v dopise ze 4. září 1850[6] poté, co je jím k tomu vyzván v předchozím dopise z 1. září 1850.[7] V něm se Gauss Schumachera dotazuje, jak to vlastně s jeho vzděláním a doložením jeho promoce z roku 1806 bylo. Schumacher se po vyřízení formalit stal (po Warbergovi) mimořádným profesorem astronomie na univerzitě v Kodani.[8]

Ještě než se tak stane, začíná si roku 1808 Schumacher dopisovat s Gaussem, a to o problémech z oblasti diferenciálních rovnic.[9] Nato získává Schumacher stipendium ke studiu astronomie a dostává se přímo ke Gaussovi do Göttingen, kde se vedle přednášek z astronomie věnuje i studiu matematiky. Stipendium mu je prodlouženo o rok.

Schumacher si mezitím dopisuje i s Repsoldem,[10] jehož v říjnu 1809 navštěvuje v Paříži. Cestou se zastavuje v Brémách u Olberse a na observatoři v Lilienthalu,[11] kde se v listopadu setkává s Besselem. S ním si Schumacher od konce roku 1809 dalších dvacet let dopisuje.

Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (1758–1840) byl německý astronom a lékař. Poté, co vystudoval lékařství na univerzitě v Göttingen, vrátil se do rodných Brém. Zde se vedle medicíny věnoval noční astronomii. Společně s von Zachem pozorováním na konci roku 1801 potvrdil Gaussovy výpočty dráhy planetky Ceres. V roce 1802 objevil planetku Pallas, v roce 1807 planetku Vesta. Věnoval se také pozorování komet, jedna krátkoperiodická přitom

[6]Srv. korespondenci (Peters 1865), No. 1308, Bd. 6, s. 109–111.

[7]Viz korespondence (Peters 1865), No. 1307, Bd. 6., s. 105–109.

[8]Srov. dopis Schumachera Gaussovi ze 4. září 1850 (Peters 1865), No. 1308, Bd. 6, s. 110.

[9]Dopis (No. 1) z 2. dubna 1808 s odpovědí (No. 2) ze 17. září 1808. Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, s. 1–4.

[10]Johann Georg Repsold (1770–1830), německý jemný mechanik, hodinář a zakladatel dílny astronomických a fyzikálních přístrojů pro hvězdárny v Altoně (Schumacherovi), Göttingen (Gaussovi), Königsbergu (Besselovi) a Hamburku.

Vlivem Repsolda na německé dějiny vědy první poloviny 19. století (v souvislosti s dílem Gausse) se zaobírají Jürgen W. Koch a Karin Reich: sebraná vzájemná korespondence Gausse, Schumachera a Repsolda (Koch 2000); disertační práce věnovaná Repsoldovi (Koch 2001) a práce o Repsoldovi (Reich 1998). Viz též (Beneke 1889).

[11]Hvězdárna v Lilienthalu byla založena roku 1782 Johanem Hieronymem Schröterem poblíž Brém a vždy měla blízko k anglickému prostředí. Právě zde roku 1804 objevil Harding planetku Juno (potvrzenou roku 1805 z hvězdárny v Göttingen). Na začátku 19. století byla hvězdárna největší evropskou kontinentální observatoří. Během napolenských válek však podlehla francouzskému tažení, zbývající přístroje byly přestěhovány do Göttingen a od roku 1816 postupně zanikala. Na místě bývalé hvězdárny stojí od roku 1999 památník.

Podrobněji viz (Gerdes 1991). Základní informace též stránky *Astronomische Vereiningung Lilienthal e. V.*. Odhalení památníku, zřízeného Lilienthalskou astronomickou společností, je zachyceno na videu *Sternwarte in Lilienthal.*

dodnes nese jeho jméno. Olbersovo jméno je úzce spjato s hvězdárnou v Lilienthalu, kde byl jeho asistentem Friedrich Bessel.[12]

Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846) byl německý astronom, matematik a geodet. Ačkoli byl autodidakt, stal se Schoeterovým a Olbersovým asistentem na hvězdárně v dolnosaském Lilienthalu. Na základě Olbersova doporučení se roku 1810 stal ředitelem hvězdárny v Königsbergu ve Východním Prusku, kde sklidil nejdůležitější vědecké úspěchy. Jeho nejvýznamnějším objevem bylo určení paralaxy (pro hvězdu 61 Cyg). Na jeho práci navazovali von Struve na hvězdárně v Dorpatu a Henderson na Mysu Dobré naděje. Bessel se podílel na propočtu dráhy Halleyovy komety a pozorování a astrometrii dvojhvězd (Sírus a Procyon). Za tabulky atmosférické refrakce obdržel cenu Francouzské akademie věd. Jeho příspěvky i v jiných oborech (matematika (Besselova funkce), geodézie (Besselův elipsoid)) byly inspirovány praktickou astronomickou prací. Byl zapojen do panevropského mapového projektu pro Východní Prusko a Rusko. Bessel patřil do okruhu Gaussových korespondentů.[13]

Na konci roku 1809 dostal Schumacher nabídku univerzitního profesora po Johannu Pfaffovi v Dorpatu, protože však usiloval o profesorské místo v Kodani, zůstal v Altoně. Vyučuje matematiku, vedle toho dopisuje vlastní matematickou *Geographii*[14] a pro Gausse shrnuje Repsoldovo pozorování z roku 1804. Od srpna 1810 se stává na jeden rok mimořádným profesorem astronomie na univerzitě v Kodani.

Géometrie de position

To již dva roky pracuje na překladu *Géometrie de position* (Carnot 1803), první učebnice geometrie, která pojímá geometrické veličiny systematicky jako dnešní analytická geometrie. Tou Lazare Carnot[15] rozšiřuje svou předchozí práci *De la correlation des figures de géométrie* (Carnot 1801), podle níž

[12]Podrobnější Olbersův životopis obsahuje monografie (Biegel, Oestmann, Reich 2001).

[13]O Besselovi stručně pojednává článek Zdeňka Kopala (Kopal 1985) a především monografie (Lawrynowicz 1995).

[14]O jejím vydání se zmiňuje i v dopise Gaussovi z 28. ledna 1813 (Peters 1860), Bd. 1, No.50, s. 98). V elektronicky dostupných katalozích německých či jiných knihoven však není.

[15]Lazare-Nicolas-Marguerite hrabě Carnot (1753–1823) byl francouzský politik, vědec, pevnostní stavitel a generál. Během studia inženýrství byl jeho učitelem Gaspard Monge. Ve francouzské armádě se setkal s Maxmilianem Robespierrem a s Francouzskou revolucí. Během té se stal de facto ministrem války, reorganizoval armádu, zavedl brannou povinnost a zřídil topografickou kancelář. Politickou kariéru vystřídala vědecká činnost. V době Napoleonských válek mu bylo svěřeno opevňování Antverp (proti Prusům a Britům). Po restauraci Bourbonů emigroval až do Magdeburku a vrátil se k vědě. V matematice je znám především v projektivní geometrii (eukleidovské geometrii a trigonometrii (vztah poloměru kružnice vepsané a opsané znám jako Carnotova věta)). V roce 1797 publikoval *Métaphys-*

> každá *veličina* je takový reálný objekt, který může rozum uchopit nebo přinejmenším ho ve výpočtech representovat.[16]

Tím se zakládá a zároveň i vymezuje Schumacherovo pojímání geometrických objektů a uvažování o vztahu matematických veličin a fyzikálních, tedy převážně astronomických, objektů.

Schumacher rozdělil překlad Carnotovy práce do dvou dílů. První díl dokončil 22. dubna 1808 a druhý 22. června 1810. Vydána pak byla roku 1810 s podtitulem o aplikaci analýzy na geometrii.[17] V předmluvě k druhému dílu Schumacher neopoměl poděkovat profesoru Gaussovi za pročtení. O tom se zmiňuje poprvé Gauss Schumacherovi v dopise ze 14. prosince 1809:

> Nedávno mi napsal pan Hammerich a požádal mne o recenzi Vašeho Carnota v našich *Anzeigen*. Rád a ochotně [jsem svolil], i když mi bylo přiděleno tak málo času, protože Carnotovy názory samy o sobě mají dost co říci, a nemohl jsem být obšírnější, takže jsem pracoval jen útržkovitě. Od svého návratu jsem pro *Anzeigen* nic dalšího nenapsal.[18]

Je patřičné dodat, že Gauss Carnotovu *Géometrie de position* reflektuje a roku 1810 píše na základě Schumacherových podnětů (ač nepublikované) dodatky. Jsou součástí souborného vydání Gaussových prací *Werke*.[19] Ve vzájemné Gaussově–Schumacherově korespondenci se odkazy na Carnotovu práci vyskytují až do 9. ledna 1811.

---

ique du calcul infinitésimal. Z roku 1783 je *Essai sur les machines en général* a v *Géometrie de position* (1803) završil moderní geometrii.

Byl otcem Sadiho Carnota, zakladatele termodynamiky a dědem Sadiho Carnota, francouzského presidenta z 80. let 19. století.

Významná rozsáhlá biografie o Lazaru Carnotovi je (Reihard 1994). Viz též (Grison 2000).

[16] „Toute *quantité* est un objet réel que l'esprit peut saisir, ou du moins sa représentation dans le calcul d'une manière absolue.“ (Carnot 1801, s. 2).

[17] Viz (Carnot, Schumacher 1810).

[18] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 10, s. 18: „Hr. Hammerich hat mir neulich geschrieben und um die Recension Ihres Carnot in unsern Anzeigen gebeten. Ich bin gern dazu erbötig, wenn nur noch etwas Zeit zugestanden wird, da doch über Carnots Ansichten selbst etwas gesagt werden müsste, mit denen ich mich noch nicht in extenso, sondern nur fragmentarisch bekannt gemacht habe. Seit meiner Zurückkunft habe ich noch gar Nichts für die Anzeigen geschrieben.“.

[19] Viz (Gauss 1873, s. 393–405).

Manheim – Kodaň – Altona

Ale zpět k Schumacherovým životním událostem. V roce 1811 se na základě Gaussova doporučení stává správcem hvězdárny v Mannheimu, avšak jen dočasně, než se v Altoně uvolní místo ředitele hvězdárny, aby nahradil Thomase Buggeho.[20] V srpnu 1812 Schumacher opustil Altonu a shledal hvězdárnu v Mannheimu v žalostném stavu, jak se zmiňuje na konci dopisu Gaussovi z 6. ledna 1814.[21]

Počátkem roku 1815 byl Schumacher z Mannheimu odvolán a získal místo profesora a správce hvězdárny v Kodani. Podnikl cestu do Itálie, kde se setkal s Reichenbachem,[22] odkud se vrátil v červenci 1815. V průběhu dalšího roku měl Schumacher hodně práce na hvězdárně v Kodani a také na projektu společného zeměměřičství Dánského království, jak se zmiňuje i v dopisu Gaussovi z 8. června 1816.[23] Zde se rovněž zmiňuje o tom, že Reichenbach mu pomohl s přístroji pro tento projekt.

Ve stejné době podněcuje Schumacher nejen Gausse, ale také barona von Lindenaua, aby zajistil triangulaci Bavorska.

Baron Bernhard August von Lindenau (1780–1854) byl saský právník, astronom, politik a sběratel umění. Po studiích na univerzitě v Lipsku se roku 1798 stal státním úředníkem. V Gothě absolvoval astronomická studia u Franze Xaviera von Zacha s praxí na hvězdárně Seeberg. Zde získal vazbu také na Gausse. V letech 1815 až 1818 vydával časopis *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* a naplno se věnoval astronomii. Od roku 1820 byl činný v politice. Protože byl vášnivým sběratelem italského renesančního umění, byla v Altenburgu uložena jeho sbírka.[24]

[20] Thomas Bugge (1740–1815), dánský matematik a astronom. Byl členem mezinárodní komise pro metrický systém.

Informace získány z knihovních katalogů: Deutsche Nationalbibliothek (DNB) a Bibliotheksverbundes Bayern (BVB). Databáze Gaussových prací v Ludwig–Maxmilians Universität München zahrnuje mj. také dopis C. F. Gausse Thomasi Buggemu ze 13. prosince 1806. Viz (Gauss 2007).

[21] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 54, s. 102.

[22] Georg Friedrich Reichenbach (1771–1826), německý mechanik a konstruktér astronomických a geodetických měřících přístrojů a pomůcek. V bavorském Mnichově založil dílnu a pracoval na výrobě astronomických měřičských přístrojů (meridiánový kruh, pasážník, terestrický kruh (Terrestrischer Kreis), astronomický kruh (Astronomischer Kreis), teodolity). Jeho teodolity byly často užívány především pro geodetické zaměření trigonometrické sítě a v první polovině 19. století se rozšířily po celé Evropě. Užívaly se rovněž k ustavení stabilního katastru na území Čech, Moravy a Slezska (v letech 1821–1840). Viz též (Reichenbach 2013) nebo (Čada 2005).

[23] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 68, s. 168.

[24] Podrobněji viz záznam Karlheinze Blaschkeho v *Neue Deutsche Biographie* (Blaschke 1985) a článek (Lindenau 1855).

Roku 1818 byl projekt pro hannoverskou oblast schválen. Aby geodetická měření mohla zahrnout i regiony, spadající pod britskou korunu, neslo se jaro roku 1819 v otázkách diplomatického řešení s Paříží a Londýnem.

V zimě roku 1820 Schumacher pozoroval v Kodani z nové, malé hvězdárny, kterou král nechal postavit právě za účelem pozorování, sloužícího k triangulaci. V létě se přesunul do Skagenu, pak do Lauenburgu a v říjnu společně s Gaussem a Repsoldem položili Braackerovu bázi.[25]

Od června roku 1821 Schumacher směřuje svou pozornost k Altoně, která patřila do Holštýnského vévodství, zatímco blízký Hamburk bylo staré hanzovní město (tedy mělo své zvláštní statutární postavení). Na pozemku zahrady si Schumacher nechal zbudovat malou hvězdárnu.[26] Dopis Schumachera Gaussovi z 2. února 1827 je dokladem toho, že i Gauss odtud prováděl některá svá pozorování.[27]

Od roku 1821 začíná mapování Holštýnska. Aby bylo možné navázat na předchozí práci, muselo dojít ke sjednocení základních linií, jak svědčí také dopis Schumachera Besselovi z března roku 1822:[28]

> Náš projekt velkého zeměměřičství se pro tento okamžik a ještě nejspíš i celý další rok pozastaví, protože bude nutné nejprve ustanonit mapu Holštýnska…, a teprve poté se mohu vrátit ke svému milovanému podniku.

V Altoně Schumacher provádí četná pozorování. Vydává efemeridy vzdáleností Venuše, Marsu, Jupitera a Saturnu od středu Měsíce (pro roky 1821–1831).[29]

[25]Srv. *Werke* (Gauss 1873, s. 446–448). Viz též (Koch 1997). O jiných triangulačních basích, které Gauss v tomto projektu používal, pojednává např. (Torge 2007, s. 120–124 a 137–142.)

[26]Hvězdárna v Altoně (Sternwarte Altona) se nacházela poblíž labského nábřeží na adrese Palmaille 9 (Hamburg–Altona). Po Schumacherově smrti (1850) byla v provozu ještě do roku 1871. Poté byla přestěhována do Kielu. V době velkého zeměměřičského projektu ve 20. letech 19. století byla Altona výchozím bodem triangulační sítě pro Hamburk, Holštýnsko a Lauenburk. Proměřením astronomických parametrů mezi Altonou a Greenwichem roku 1824 byla také položena síť evropských hvězdáren, které udávaly časovou základnu.

Za poznámku stojí, že hvězdárna v Altoně byla jen 16 metrů odchýlena od meridiánu (Gaussovy) hvězdárny v Göttingen, takže jak astronomická, tak i geodetická měření měli Gauss i Schumacher téměř srovnatelná.

[27]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 2, No. 296, s. 97–98.

[28]Citováno podle (Repsold 1918, s. 22): „Unsere Grandmessung steht für den Augenblick und wohl für ein ganzes Jahr still, da die Karte von Holstein erst eingerichtet werden soll…, und dann kehre ich zu meinem Lieblingsgeschäft zurück.“

[29]Schumacherovy astronomické *Hülfstafeln* vycházely v Kodani v letech 1820–1829 v deseti svazcích.

Astronomické časopisy

Počátek hlavního díla, které po Schumacherovi dodnes zbylo, se datuje do června 1821. V té době zakládá nový časopis *Astronomische Nachrichten*, který je dodnes nejvlivnější (a nejstarší) odborný astronomický časopis s nepřetržitou tradicí. Přispěvateli do časopisu vedle Schumachera byli také Gauss, Bessel, Rümker, Olbers, Encke či bratři Herschelové. Schumacher vydával časopis až do roku 1850.[30]

Astronomische Nachrichten ve dvacátých letech 19. století dobře konkurovaly časopisům *Monatliche Correspondenz*[31] Franze Xaviera von Zacha a *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*[32] Bernharda von Lindenaua a Johanna von Bohnenbergera.[33]

Mezi jeho další práce patří třísvazková *Astronomische Abhandlungen* (vydaná v letech 1823–1825 v Altoně) a ročenky *Astronomische Jahrbücher* z let 1836–1841 a 1843–1844 (vydané v Tübingen).

O možnosti přispívat do obou periodik svědčí oznámení–oběžník z července roku 1821, které se od Schumachera dostalo i ke Gaussovi a které je součástí jejich vzájemné korespondence.[34] Do časopisů bylo možné přispívat v jazyce německém, ale též anglickém, francouzském a latinském.

Schumacher, Bessel a Encke

V letech 1823 až 1829 prováděl Schumacher společně s Besselem pozorování fyzikálního kyvadla, dvojkyvadla a reverzního kyvadla k určení zemského gra-

[30] Viz stránky *Astronomische Nachrichten*.

[31] Časopis, plným názvem *Monatliche Corespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde*, založil roku 1800 Franz Xavier von Zach a vycházel do roku 1813. Od roku 1807 jeho editorem byl Bernhard von Lindenau.

[32] Časopis vycházel v letech 1816 až 1818 v Tübingen a Stuttgartu. Jeho editory byli Bernhard von Lindenau a Johann G. F. von Bohnenbergera. Vyšlo celkem šest svazků.

[33] Johann Gottfried Friedrich von Bohnenberger (1765–1831) byl německý astronom. Studoval katolickou teologii na univerzitě v Tübingen, stal se vikářem (1789) a zároveň se věnoval přírodním vědám (astronomii a geodézii). Působil u Franze Xavera von Zacha na Seebergu hvězdárně a od roku 1796 na hvězdárně v Tübingen. Roku 1798 byl na univerzitě v Tübingen jmenován mimořádným a od roku 1803 řádným profesorem matematiky.

Jeho zásluhou patřila tübingenská univerzitní hvězdárna do sítě evropských hvězdáren, zapojených do panevropského geodetického systému a sloužila jako základní triangulační bod pro Württemberské království.

Viz (Bruhns 1876), (Bundschuh 1955) a (Jordan 1897).

[34] Viz (Peters 1860), Bd. 1, No. 120, s. 233.

vitačního zrychlení. Schumacher měřil v Altoně, Bessel v Königsbergu. Porovnání jejich výsledků znamenalo sjednocení časových a délkových měr.[35]

V roce 1831 postihla Königsberg stejně jako Altonu epidemie cholery, která se nevyhla ani Besselovi, ani Schumacherovi. Kartografické práce byly o rok pozdrženy. Na základě podnětu Alexandra von Humboldta došlo v Berlíně v dubnu roku 1834 ke vzájemnému setkání se Schumacherem a Besselem. Hlavní Schumacherova kartografická práce Holštýnska a Besselovo pojednání o kyvadle byly v té době předloženy pruskému dvoru.

Při zpáteční cestě se Schumacher zastavil na Seebergu u Gothy u Hansena a poté i u Gausse v Göttingen. Jak později Schumacher píše Besselovi, Gauss se v té době již věnuje zemskému magnetismu.[36]

V roce 1835 dochází k opětovné schůzce Schumachera s Besselem v Berlíně a následně k Schumacherově návštěvě Hannoveru a Brém, kde se setkává s Olbersem.

Schumacher v té době spolupracuje také s významným dánským vědcem Hansem Christianem Ørstedem, kterého přizval ke společným schůzkám s Besselem v Berlíně v roce 1836.

Hans Christian Ørsted (též psán Oerstedt) (1777–1851) byl fyzik, chemik a filosof. Zásadní jsou jeho práce k teorii elektromagnetismu. Řadí se ke stoupencům kantovské filosofie (struktura přirozené metafyziky), byl prvním, kdo explicitně popsal myšlenkový experiment (Gedankenexperiment (1812), Gedankenversuch (1820)). Za své vědecké počiny byl roku 1821 Ørsted oceněn Copleyho medailí Královské společnosti v Londýně.

Praktická Schumacherova fyzikální měření v této době upozaďují matematické práce, jak dosvědčují dopisy mezi ním a Besselem z června roku 1837:

> Cítím se velmi dobře, protože toto jsem měl v úmyslu udělat už velmi dlouhou dobu. To, co mi bránilo, byla obava, která se nutně vytratila, že není nutné [již] rozšiřovat matematického poznání, jak bylo doteď vyžadováno.[37]

a

[35]Došlo především ke sjednocení dánské a prusské stopy, tehdejších běžných délkových měr.

[36]Srv. (Repsold 1918, s. 26).

[37]Viz (Repsold 1918, s. 27): „Ich fühle sehr wohl, daß ich es schon lange hätte thun sollen. Was mich bisher davon abgehalten hat, ist die Furcht, die Reductionen aus Mangel an den dazu erforderlichen, ausgebreiteten mathematischen Kenntnissen nich so zu machen, wie man es jetzt verlangen darf.“

> Rád bych s Vámi jednal k Vaší spokojenosti a zakončil celou Vaši práci, protože [Vaše práce] jsou vždy dostatečně podrobné, a odvodil z nich zákonitosti.[38]

Začátkem roku 1838 dochází k prvním nešťastným nedorozuměním mezi Besselem a Enckem,[39] což ovlivňuje i Schumachera. Encke totiž dokáže pozorovat s podobným úspěchem jako Bessel, i když Bessela považoval za lepšího:

> Chtěl bych, aby mi nebesa poskytla to štěstí ještě dlouho žít před vaším zrakem.[40]

Podobný Enckův postoj vůči Besselovi lze najít i v dopisu Johanna Enckeho Gaussovi z roku 1830 (který píše po své dubnové návštěvě v Königsbergu):

> … protože to málo, co jsem si vzal, mizí s tím, co Bessel stále uvádí.[41]

Besselův dojem z Enckeho, akademika a vedoucího hvězdárny v Berlíně, však takový nebyl. Postupně se prohluboval v jejich vzájemné antipatie.[42] O jejich vzájemných sporech přitom věděli i Schumacher, Gauss a Olbers.

V létě roku 1839 Schumachera v Altoně navštěvuje Bessel. V prosinci 1839 však zemřel Schumacherův ochránce a mecenáš, dánský král Friedrich VI. Ačkoli se jeho následovník, Christian VIII., zdál být stejně přízniv, politicko-ekonomická situace vedla k redukci mapování Holštýnska na okolí Altony a vypracování pouze základního mapového podkladu.[43] To mělo za následek i radikální snížení Schumacherových příjmů, a tím i redukci větších cest. Přesto zůstává s Besselem v kontaktu.

[38] Besselova odpověď Schumacherovi z června 1837: „Ich mögte Ihnen gern die Befriedigung gönnen, irgend etwas von Ihren Arbeiten ganz abzuschließen, oder, da sie immer hübsch abgeschlossen sind, die Rechnung darüber abzulegen.“ Viz (Repsold 1918, s. 27).

[39] Johann Franz Encke (1791–1865) byl německý astronom. Patřil mezi Gaussovy studenty astronomie v Göttingen. Jako asistent barona von Lindenaua na Seebergu se podílel na objevu a pozorování mnoha krátkoperiodických komet. Byl ředitelem hvězdárny na Seebergu a univerzitní hvězdárny v Berlíně, kde se také stal profesorem astronomie.

[40] Píše Encke Besselovi z 1828: „Möchte der Himmel mir das Glück vergönnt haben, auch eine längere Zeit unter Ihnen Augen gelebt zu haben.“ Citováno podle (Bruhns 1869, s. 272).

[41] Dopis Enckeho Gaussovi ze 4. května 1830: „… da das Wenige, was ich hier übernommen habe, so verschwindet gegen das, was Bessel so lange schon fortwährend leistet.“ Citováno podle (Bruhns 1869, s. 277).

[42] Více viz (Repsold 1918, s. 28–29).

[43] Za poznamenání stojí, že v roce 1844 stál Schumacher u vyměřování železniční trasy mezi Altonu a Kielem.

V roce 1840 navštěvuje Schumacher nově založenou hvězdárnu Pulkovo jižně od Petrohradu a v červenci 1842 podniká výpravu za pozorováním úplného zatmění Slunce do Vídně. Poté má Schumacher navštívit British Association v Glasgowě a také se setkat s Besselem a Gaussem. Besselův zdravotní stav se však zhoršil a Schumacher byl z vidiny konce života svého přítele podlomený. Po Besselově smrti se Schumacher uzavírá a píše si pouze s Gaussem:[44]

> Dovolte mi nyní, v době, kdy my dva ještě žijeme, najít ve své lásce a přátelství náhradu za tuto velikou ztrátu.

V následujících čtyřiceti letech ve Vévodství šlesvicko-holštýnském probíhala povstání a politické usilí o osamostatnění z područí Dánského království.[45] Schumacher je vtažen do politického života, když se 23. března 1848 v Kielu ustavuje Provizorní vláda, nezávislá na Kodani.

Ke konci života, ještě počas vojenského konfliktu, hvězdárnu i časopis *Astronomische Nachrichten* postupně převzal Schumacherův nástupce a nejbližší spolupracovník C. A. F. Peters, který se postaral i o vydání jeho korespondence s Gaussem.

[44]Dopis Schumachera Gaussovi z 23. března 1846 (Peters 1863), Bd. 5, No. 1059, s. 144): „Lassen Sie mich jetzt in Ihrer Liebe und Freundschaft für die Zeit, die wir noch zusammen leben, Ersatz für den großen Verlust finden.“

[45]První Šlesvická válka (Schleswig-Holsteinischer Krieg nebo též Treårskrigen) byl první vojenský konflikt mezi jižním Dánskem a severním Německem.

Kapitola 2

Korespondence Gausse a Schumachera

ʾαιει
ʿο περι τον Γαεσσιον

Totus Tuus
C. F. Gauss

Od roku 1808 až do své smrti si Schumacher s Gaussem hojně dopisoval. Schumacherovy dopisy jsou záznamem 42 let jeho a Gaussova a 37 let jeho a Besselova života. Jsou svědectvím doby z pohledu postupných proměn vědeckého života v německy hovořících krajích Evropy. Především jsou ale ilustrací blízkého přátelství, jaké se rozhořelo mezi učitelem a jeho žákem. O přátelství Gausse a Schumachera a významu vzájemné korespondence svědčí mimo jiné úryvek ze Studničkova článku:[1]

> Záhy poznal učitel při svém o 3 léta mladším žáku nejenom vědeckou horlivost, nýbrž i ducha pro vše ušlechtilé zaujatého; i vešel s ním v přátelství tak vřelé, že podobného sotva se nalezne ve světě učeném. Nejlepším svědectvím tohoto poměru jsou dopisy jejich, jdoucí od r. 1808 až do 1850, z nichž psal Schumacher Gaussovi 1297, Gauss pak Schumachrovi 1319, nepočítaje ztracené, a jichž sbírka představuje tištěných svazků 6. [...] Při každé příležitosti obrací se Gauss o radu k Schumachrovi ve světě více obeznámenému, o všech pracích podává mu zprávy, oznamuje sebe nepatrnější události rodinné a odpovídá na četné dotazy vědecké tak obšírně a důkladně, jakoby pro veřejnost psal.

[1]Viz (Studnička 1877, s. 163).

Korespondenci mezi Gaussem a Schumacherem uspořádal Schumacherův nástupce a pozdější ředitel hvězdárny v Altoně Christian Peters.

Christian August Friedrich Peters (1806–1880) byl německý astronom. Ač byl samoukem, získal obstojné znalosti v matematice a astronomii, až se roku 1826 mohl stát asistentem Schumachera v Altoně. Díky němu získal na univerzitě v Königsbergu doktorát z astronomie pod vedením Friedricha Bessela. Roku 1834 se stal asistentem na hvězdárně v Hamburku. V roce 1839 byl zaměstnán na hvězdárně Pulkovo. Roku 1849 se stal profesorem astronomie v Königsbergu a po Besselově smrti také ředitelem tamnější hvězdárny. V roce 1854 se vrátil do Altony, kde se po Schumacherovi ujal hvězdárny a stal se editorem *Astronomische Nachrichten*. Redigování časopisu se věnoval po zbytek života (celkem 58 svazků). Roku 1873 se Peters stal na univerzitě v Kielu řádným profesorem. Ve svých astronomických článcích se věnoval nutaci a paralaxe hvězd.[2]

Publikování korespondence

Korespondence mezi Gaussem a Schumacherem čítá soubor celkem 1319 dopisů (765 Schumachera Gaussovi a 554 Gausse Schumacherovi). Vyšla v 6 svazcích v letech 1860–1865 v Altoně u Gustava Esche (Peters 1860–1865) a je velkým svědectvím jejich přátelství.

Originály, jež měl Christian Peters k dispozici, patřily v případě dopisů Gausse Schumacherovým dědicům, v opačném byly součástí depositu univerzitní knihovny v Göttingen. Využíval k tomu i podklady geodetických operací na základě dokumentů královského dánského zeměměření (Grandmessung).[3]

Takto vydané dopisy, jak se Peters domnívá (a přeje si), přispívají vedle zprostředkování Gaussova života astronomickými publikacemi a vzpomínkami přátel k (novým) dějinám vědy. Ukazují, jaké nástroje a pomůcky se v astronomické a geodetické praxi v tehdejší době používaly a s jakými nesnázemi se vědecké bádání setkávalo. Zároveň jsou ale také dokladem toho, za jakých (jiných vědeckých) okolností se rodily Gaussovy podněty pro aplikovanou matematiku pro inženýrskou praxi.[4]

[2] Viz též Petersův stručný životopis (Günther 1887) a také nekrology (Peters 1881) a (Peters 1880).

[3] K tomu mu nejvíce pomohl státní rada Gerhard von Andrä. Viz též předmluvu v prvním svazku (Peters 1860).

[4] Tedy odkud a v jakých přírodovědeckých inspiracích by mohly mít [tyto podněty] své hlubinné kořeny (odkud „vstřebávaly vláhu a živiny"), a tudíž pro jaké vědecké obory jsou také nejpřirozenější a nejsnáze interpretabilní.

Sebrané dopisy jsou jen přepsané, postrádají hlubší poznámkový aparát a doprovodné studie, jak je v dnešní době v historii vědy zvykem. Vzhledem k délce dopisování a přátelství mezi oběma vědci není ani nutné zdůrazňovat, že se vědecká korespondence neobešla bez poukazů osobního charakteru, které obsahují lidské soudy o událostech a lidech, s nimiž žili.

Počátky a kořeny (1808–1814)

První díl začíná nesmělým dopisem doktora práv, Christiana Schumachera profesoru matematiky, Carlu Friedrichu Gaussovi z 2. dubna 1808[5] o problémech matematiky (diferenciální rovnice), na které Schumacher narazil ve spisech Hindenburgova *Archivu*.[6] Byl to Johannes Pfaff, který doporučil Schumacherovi, aby se s problémem obrátil na Gausse. Schumachera totiž již deset let zajímala úloha, která byla obsažena v učebnici matematiky španělského (původem asturského) učence Agustína Pedrayese.[7]

Gauss odpovídá až téměř po půl roce (17. září), neboť řešení problému si vyžadovalo více času. Vysvětluje Schumacherovi, jaký smysl má Pedrayesův problém a které matematické techniky k jeho vyřešení jsou potřebné. Nicméně se rovněž ukazuje, že Schumacher svým dotazem Gausse zaujal a že jejich vzájemná spolupráce (a interní recenze různých v Evropě vydávaných matematických prací) může započít (přitom Gauss zaměřuje pozornost ke Carnotově *Geometrie de Position*). Schumacher totiž odpovídá záhy, jen co Gaussův dopis obdržel (20. září). Otázky již směřují obecněji ke vztahu matematiky a astronomie, což je přesně ta oblast, která Gaussovi naprosto vyhovuje. Ten

[5] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 1, s. 1–2.

[6] Carl Friedrich Hindenburg (1741–1808) byl německý matematik a fyzik a od roku 1781 profesor filosofie na univerzitě v Lipsku. Společně s Danielem Bernoullim vydával časopisy *Leipziger Magazin zur reinen und angewandten Mathematik* (1786–1789), *Archiv der reinen und angewandten Mathematik* (1794–1801) a *Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen* (1796, 1800). Během studií v Göttingen se přátelil s Abrahamem Kästnerem, budoucím Gaussovým učitelem. Vedle matematiky publikoval rovněž i práce filologické. V matematice proslul zejména studiemi z kombinatoriky a také z pravděpodobnosti, teorie řad a diferenciálního počtu. Výpovědi kombinatoriky pro něj byly stejně silné jako aritmetiky, algebry či analýzy, jen v rovině posibilií (tedy v očekávání).

Viz (O'Connor, Robertson 2005).

[7] Agustín Bernardo de Pedrayes y Foyo (1744–1815) byl španělský matematik. Vystudoval filosofii, filologii a práva na univerzitě v Santiagu de Compostella. Poté se v Madridu věnoval vědecké a akademické práci, mj. také v matematice. Zajímal se hlavně o infinitesimální počet. Významný je jeho počin v metodě řešení infinitesimálních problémů (1777) (na kterou se právě Schumacher v dopise odvolává). Tu později užil ve svých pracech (o eliptických integrálech) i Niels Henrik Abel. Pedrayes svými pracemi (především *Solución del problema propuesto* (1797, publikováno v Madridu 1805)) ovlivnil matematiku francouzsky, německy i španělsky mluvících zemí na přelomu 18. a 19. století.

neopomíjí ani záležitosti praktické a přístrojové astronomie (teoretické podklady konstrukce astronomických přístrojů). Tím se zde také ukazuje, jak se svírá teoretická báze vědy s její verifikační a kodifikační částí. To jest, nakolik jsou verifikace teorií přístroji závislé na teorii vlastní, která stojí v pozadí těchto přístrojů.

Vztah mezi doktorem Schumacherem a profesorem Gaussem se do roka a půl ukazuje jako těsný a přátelský. Gaussovi milý Schumacher shání a zasílá potřebné knihy. Oba si již píší i o záležitostech, týkajících se jejich rodin. Od konce listopadu 1809 probíhá mezi Gaussem a Schumacherem rovněž „přenos a kalibrace dat“. Navzájem si zasílají naměřené polohy nebeských těles pomocí různých přístrojů. Vedle nich zůstávají stále živé diskuse nad různými matematickými a astronomickými teoretickými texty. Jejich vzájemné odpovědi v tuto dobu (do konce roku 1809) nemají příliš velkých prodlev (nanejvýš měsíc).

V následujícím roce 1810 je v dopisování čilejší Schumacher (12 dopisů oproti 5 Gaussovým). Zatímco Schumacher píše téměř vzápětí a zhruba po měsíci přidává další zprávy, Gauss odpovídá zhuba po dvou měsících. Je však možné, že některé Gaussovy dopisy z této doby v těch vydaných chybí.[8] Podle toho, co Gauss píše, věnuje se totiž i jiným (a také jejich společným) přátelům (hlavně Besselovi a ruským astronomům).[9] Nelze však konstatovat, že by vztah mezi Gaussem a Schumacherem ochladl.

Na konci května 1810 přichází Schumacher s otázkami sférické geometrie a v důsledku toho také ke geometrii (nad)ploch. Tyto otázky vyvstaly patrně po čtení, překládání (ze strany Schumachera) a následném recenzování (Gaussem) Carnotovy *Géometrie de Position*, ač na ni není explicitně odkazováno (oproti např. Eulerově *Dioptrice*).

Gaussovi se tak otevírají nové podněty ke zkoumání. Je však stále vidět, že Schumacher je některým (mnohdy i klíčovým) Gaussovým myšlenkám zdatným sekundantem a především má pro Gaussův způsob uvažování velkou empatii. Za poznámku stojí, že některé úryvky (především zdravice) si přátelsky píší ve starořečtině či latině, čímž podtrhují, že ač oba praktici, neopomíjejí kořeny svého klasického vzdělání. Latinské, francouzské či anglické pasáže v dopisech obou (především však Schumachera) jsou běžné.

Témata z geometrie se prolínají se staršími Gaussovými kardinálními příspěvky k teorii čísel (uveřejněnými v *Disquisitiones Arithemticae*). Schumacher

[8]Např. Schumacher v listu z 3. července 1810 děkuje Gaussovi za předchozí (nám však zatím nedochovaný) dopis. Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 22, s. 49.

[9]Vztah a vlivy Gausse k ruské vědě v současné době blíže zkoumá Karin Reich z univerzity v Berlíně. Friedrich Bessel budiž jejich počátečním svorníkem.

v dopise z 6. října 1810[10] poukazuje na vztah prvočísel k Fermatově větě, načež o tři dny později se vrací zpět ke geometrické eleganci.[11]

Rovněž se (v duchu novověké přírodovědy „jako v nebi, tak i na zemi“) prolínají vztahy „na nebesích“ (sférická astronomie) se vztahy „v přístrojích“ (zdokonalování ploch čoček do objektivů).

V lednu 1811 Schumacher užívá pro řešení trigonometrických úloh rozvoje funkcí do řad a symetrické vlastnosti úloh. To však zatím zůstává stranou, neboť Gauss se věnuje více astronomickému pozorování, praktickým záležitostem pro hvězdárnu v Göttingen, cestám a rodině.[12] Gauss v té době také přijímá ke studiu Christiana Gerlinga.[13]

Christian Ludwig Gerling (1788–1864) byl německý astronom, fyzik a matematik. Studoval teologii na univerzitě v Helmstedtu, kde se později začal u Johanna Pfaffa věnovat také matematice. Po uzavření univerzity roku 1810 přešel ve studiu na univerzitu v Göttingen. Jeho blízkým přítelem ze studií byl Johann Encke, se kterým společně prováděli astronomická měření u Gausse a Karla Hardinga. Gerlingova závěrečná práce se věnovala zatmění Slunce. Pro Göttingen byla důležitá jeho pozorování a výpočty poloh planetky Vesta z roku 1807. Po promoci se stal profesorem matematiky na univerzitě v Marburku, kde založil fyzikální laboratoře. V letech 1822 až 1837 se zapojil také do geodetického proměřování Evropy, kdy měl na starosti mapování Hessenského kurfiřství.[14]

Následující dopisy mezi Schumacherem a Gaussem z tohoto roku (1811) se věnují převážně výsledkům astronomických pozorování, hlavně planetek Juno, Vesta[15] a Pallas. Důležitým tématem byly v návaznosti na Gaussovy *Allgemeine Tafeln für Aberration und Nutation*[16] také propočty aberace a nutace cirkumpolárních hvězd. Ty zároveň sloužily k sestavení plánovaného Schumacherova katalogu pro 106 metrů vysokou věž kostela sv. Michaela v Hamburku, tedy hlavního geodetického zaměřovacího bodu. O tom svědčí i dopis Gausse Schumacherovi z 2. června 1811.[17] V Gaussově dopise ze 14. prosince 1811[18]

[10] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 26, s. 55–57.

[11] Dopis (Peters 1860), Bd. 1, No. 27, s. 57–58.

[12] Schumacher se dočkal odpovědi k těmto matematickým problémům až v březnu 1811.

[13] Viz týž dopis Gausse Schumacherovi z 10. března 1811 v (Peters 1860), Bd. 1, No. 32, s. 69–71.

[14] Více viz hesla v německých biografiích (Bruhns 1879) a (Volk 1964).

[15] Ta se v červnu 1811 nacházela v oposici.

[16] Vyšly v Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde v dubnu 1808 a jsou součástí *Werke* (Gauss 1974, s. 123–128).

[17] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 36, s. 78–79.

[18] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 42, s. 41–42.

je v souvislosti s pozorováním komet zmínka také o Gaussově korespondenci s Olbersem.

Do června 1812 není žádný dopis od Schumachera. Gauss se po půl roce znovu ozývá. V dopise z 5. června 1812 upozorňuje na další článek, který vyšel ve stejném vydání *Commentationes....* Toto *Pojednání o transcendentních funkcích* má podle Gaussova záměru sloužit především k porozumění čtení eliptických parametrů (elementů) planetky Pallas.[19]

V případě pojednání o transcendentních funkcích se nejspíš jedná o článek *Summatio quadrumdam serierum singularium*,[20] který je rozšířením *Disquisition arithmeticae*. Tomu předcházelo shrnutí výsledků pozorování Pallas z let 1803 až 1809 *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis*.[21]

Vzápětí se Schumacher omlouvá a děkuje za zaslání separátů obou tisků. Zároveň vznáší dotaz (od altonského senátora a geometra Matthiessena), jak ukázat součet řady

$$\sqrt[1]{x\sqrt[2]{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\ \text{ad infinit.}}}}} = x^{\mathrm{e}-1}.$$

Teorie přitažlivosti (1812–1814)

V odpovědi z 28. srpna 1812[22] se Gauss poprvé více shání po (Schumacherem zamýšlené) matematické *Geografii*. Gauss ji chtěl patrně pro Gerlinga, který v té době dokončil studia v Göttingen. Vedle toho se Gauss také zmiňuje o zamýšlených návštěvách u barona von Lindenaua (na Seebergu u Gothy) a v Altoně. O své práci, na čem dělá,[23] Gauss nepíše.

Brzy nato 17. září 1812 děkuje Schumacher za dopis od Gerlinga a také za zaslání Gaussovy práce o řadách, která pomůže k řešení výše uvedené úlohy senátora Matthiessena. Jde zřejmě o práci *Disqisiones generales circa seriem infinitam*

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + etc.$$

[19] Viz dopis (Peters 1860), Bd. 1, No. 43, s. 87–88.

[20] Vyšel v *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recenciores*, vol. I (1808–1811), 1–40. Přetištěno ve *Werke* (Gauss 1863, Bd. 2, s. 9–45. Abstrakt k témuž z 19. září 1808 je ve *Werke* (Gauss 1863, Bd. 2, s. 155–158).

[21] Viz *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recenciores*, vol. I (1808–1811), 1–26. Přetištěno ve *Werke* (Gauss 1874, s. 1–24). Abstrakt k témuž z 13. prosince 1810 ve *Werke* (Gauss 1874, s. 61–64).

[22] Viz dopis (Peters 1860), Bd. 1, No. 46, s. 91–92.

[23] Srv. s *Mathematisches Tagebuch*, záznamy 142 a 143 (Gauss 2009, s. 128–129 a 230–231).

pars prior, která vyšla v *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingnsis recentiores*.[24] Schumacher také Gausse přemlouvá, aby spíše než na Seeberg přijel za ním.[25]

Jedno z Gaussových tehdejších hlavních děl k teorii přitažlivosti zatím zůstává Schumacherovi skryto. Poprvé se Gauss o teorii přitažlivosti Schumacherovi zmiňuje až v dopise na konci roku 1812 (dopis je datovaný 31. prosince 1812).[26] *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum* je klíčový text pro porozumění teoretických začátků ke Gaussově diferenciální geometrii. Zveřejněn byl v *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, vol. 2, str. 1–24 (do tisku uveden 8. března 1813). Je rovněž přetištěn ve *Werke*.[27]

Vedle toho ale také Gauss Schumachera povzbuzuje k astronomické práci, která je nyní „dvakrát tak důležitá“. Jeho samého čeká dlouhá (teoretická) práce, a proto se na nějaký čas odmlčí.

Schumacher píše v lednu,[28] úkol přijímá a žádá od Gausse výtisk teorie přitažlivosti:[29]

> Jak moc se sháním po Vaší Teorii přitažlivosti eliptického sféroidu! Jakmile Vaše pojednání vyjde, pošlete mi, prosím, jeden exemplář. Víme, že Legendre měl v minulém roce předložit národnímu institutu pojednání o *témže předmětu zkoumání*.

Dále Schumacher žádá Gausse o zaslání jeho *Teorie interpolace* (*Theorie der Interpolation*). Jeho matematická geografie vyjde na Velikonoce a Schumacher se zavazuje, že Gaussovi jeden exemplář pošle.

Začátkem února 1813[30] Schumacher nadšeně Gausse pozdravuje od senátora Matthiessena. Rovněž se zmiňuje o Leonelliho sedmimístných (logaritmických) tabulkách[31] a o práci pro *Monatliche Correpondenz*. Zároveň také

[24] *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingnsis recentiores*, vol. 2, 1–46. Přetištěno ve *Werke* (Gauss 1866, s. 123–162). Abstrakt k témuž z 10. února 1812, *Werke* (Gauss 1866, s. 197–202).

[25] Srv. dopis (Peters 1860), Bd. 1, No. 47, s. 93.

[26] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 49, s. 95–96.

[27] (Gauss 1867, s. 1–22). Abstrakt k němu z 5. dubna 1813 je rovněž součástí *Werke* (Gauss 1867, s. 279–286).

[28] Dopis Schumachera Gaussovi z 23. ledna 1813; (Peters 1860), Bd. 1, No. 50, s. 96–98.

[29] „Wie sehr verlange ich nach Ihrer Theorie der Anziehung der elliptischen Sphäroide! Sobald Ihr Memoire gedruckt ist, bitte ich ergebenst um ein Exemplar. Sie wissen, dass Legendre auch im verwichenen Jahr ein Memoire über *denselben Gegenstand* dem Nationalinstitute übergeben hat.“ (Peters 1860), Bd. 1, No. 50, s. 97.

[30] Dopis Schumachera Gaussovi z 8. února 1813; (Peters 1860), Bd. 1, No. 51, s. 99.

[31] K nim píše Gauss recenzi, publikovanou též ve *Werke* (Gauss 1900, s. 121–127).

Gaussovi chválí jeho přístup k teorii přitažlivosti, který je jiný oproti Legendrově práci:[32]

> Nejhlavnějším (a nejdůležitějším) je trik (Kunstgriff), kterým se pomocí popisu nového [pomocného] elipsoidu převádí přitažlivost bodu mimo elipsoid na přitažlivost vnitřního bodu.

Gauss si v následujícím dopise z 3. března 1813[33] stěžuje na chybný výtisk jeho přednášky o přitažlivosti eliptického sféroidu. Na chyby ho upozornila práce Jamese Ivoryho[34] (Ivory 1809), která je dodnes známá jako *Ivoryho věta.*

Navíc Gauss získal opravy od Laplace.[35] Pro Gause byla Laplacova *Nebeská mechanika* (Mécanique céleste) klíčová. Ve třetí knize se totiž přímo věnuje vyjádření přitažlivosti pro homogenní sféroid pomocí plochy druhého řádu.[36]

Nicméně historie ukázala, že práce Gaussova stojí oprávněně na roveň Ivorově a Laplacově.

---

[32]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 51, s. 99: „Das Hauptsächlichste ist ein Kunstgriff, die Anziehung eines Punctes *ausser* dem Ellipsoid, durch Beschreibung eines neuen Ellipsoids auf die Anziehung eines *inneren* Punctes zu reduciren.“

[33]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 52, s. 99–100.

[34]Sir James Ivory (1765–1842) byl skotský matematik. Jeho nejranější práce z roku 1796, publikovaná v *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, se týkala analytického vyjádření rektifikace elipsy. Následovaly *A new method of resolving of Cubic Equations* (Kubické rovnice) (1799) a *A New and Universal Solution of Kepler's Problem* (Keplerova úloha) (1802). Publikoval ve *Philosophical Transactions*, kde roku 1809 vyšla jeho nejslavnější práce k teorii přitažlivosti. Navázal tím na práce Lagrange a Laplace. Poté se věnoval astronomické refrakci, perturbacím v pohybu planet nebo rovnovážnému stavu tekutých těles. Na jeho práce navazovali Jabobi a Liouville. Viz nekrolog (Ivory 1843).

[35]Pierre Simon de Laplace (1749–1827) byl francouzský matematik, fyzik, astronom a politik. V matematice zanechal důležité výsledky v matematické analýze, teorii pravděpodobnosti, teorii potenciálu, nebeské mechanice. Zavedl a dodnes jeho jméno nesou takové matematické pojmy jako Laplacova transformace, Laplacův operátor (pro diferenciální rovnice, jež vyjadřují potenciál daného pole). Známá je též teorie o vzniku sluneční soustavy (citovaná jako Kantova–Laplacova teorie).

Pro Laplace bylo klíčovým setkání a spolupráce s francouzským matematikem a fyzikem Jeanem Baptisou Le Rond d'Alembertem. Laplacovi se podařilo vyřešit otázku stability Sluneční soustavy, a tím extrapolovat newtonovskou mechaniku pohybu planet. Hlavním jeho dílem byla pětidílná *Mécanique céleste* (1799–1825). V teorii pravděpodobnosti (*Théorie analytique des probabilités*) z roku 1812 velmi přispěl k rozšíření Bayesovy věty o podmíněné pravděpodobnosti. Známé v jeho době byly jeho filosofické eseje k pravděpodobnosti *Essai philosophique des probabilités* (1814).

Během francouzské evoluce, kdy měl úzké vazby přímo s Napoleonem Bonapartem, byl nakrátko ministrem vnitra ačlenem senátu. Po restauraci Bourbonů byl přívržencem krále. Přestože nebyl ve vědeckých a politických kruzích příliš oblíben, patřil mezi ty, které Gauss rád četl.

Viz též (Merzbach, Boyer 2011, s. 443–446).

[36]Viz (Laplace 1797).

Další korespondence se věnovala astronomii praktické, pozorovatelské i úředním záležitostem s vědeckým životem spjatými. K teoretickým pracem je zmínka až v dopise ze 13. září 1814,[37] kde se Gauss zmiňuje o nové metodě numerické (přibližné) integrace, která má být součástí pojednání o teorii refrakce (*Untersuchungen über die Theorie der Refraction*). Jedná se o práci *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* z roku 1814, publikovanou v göttingenských *Commentationes.*[38] Gauss zde navazuje na Newtonovy–Cotesovy vzorce pro přibližný výpočet integrálu funkce.

Příběh Ceny Kodaňské královské společnosti (1816–1825)

Na jaře roku 1816 se Gauss přihlásil do soutěže, kterou vyhlásil nově založený astronomický časopis *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften.* Jedním z úkolů bylo najít vzájemné zobrazení (projekci) dvou křivých ploch na sebe. Gauss již měl hotovu podobnou úlohu pro nejmenší části (kousky) těchto ploch, ale to součástí zadání nebylo. Projekci vyřešil pomocí rovnoběžných normál na jednotkovou sféru. Prohnutí či zakřivení plochy pak bylo speciálním případem tohoto zobrazení. Gauss vypracoval pojetí totální křivosti plochy a míru křivosti v každém bodě nezávisle na prohnutí plochy.

Ve stejné době se Schumacher snažil získat pro Gausse geodetickou práci v Dánsku. O záměru získat grant dánského království za účelem jeho zmapování a proměřování psal v dopise z 8. června 1816.[39] V tomto dopise zároveň píše o možnosti podat jeho teorii interpolace na Cenu Kodaňské královské vědecké společnosti:[40]

> V naději, že to bude pro Vás popudem ke zveřejnění Vaší teorie interpolace, kterou mám v rukopise, jsem formuloval zadání naší

[37]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 59, s. 108–110.

[38]Gauss, C. F.: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. In *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recenciores*, vol. III (1814–1815), s. 39–76. Je součástí *Werke* (Gauss 1866, s. 163–196). Abstrakt též v (Gauss 1866, s. 202–206).

[39]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 68, s. 126–129.

[40]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 68, str. 128: „Ich habe in der Hoffnung, Sie würden dadurch Veranlassung finden, Ihre Theorie der Interpolation, die ich handschriftlich habe, bekannt zu machen, die Preisfrage unserer Gesellschaft für 1817 so abfassen lassen: „Theoriam interpolationis evolvere quae praesertim in functionibus periodicit adhuc manca videtur.““

> společnosti pro rok 1817 takto: „Rozvinout teorii interpolace, která se dosud týkala především periodických funkcí.“

Schumacher měl patrně na mysli již dříve zmíněnou práci *Theoria interpolationis methodo nova tractata*. Tu máme dochovanou jen z Gaussovy pozůstalosti.[41]

Gauss 5. července 1816 Schumacherovi odepsal.[42] Proměřování Dánska odmítl, protože mezitím dostal nabídku zmapovat Hannoverské království. Odpověděl ovšem také k úloze spojené s udělením ceny:[43]

> Program s úlohou Vaší společnosti jsem ještě neviděl. Hovořil jsem s Lindenauem o jiné úloze, která má být zveřejněna v novém časopise s odměnou 100 dukátů. Napadlo mne další zajímavé zadání: „**Obecně** promítnout (zobrazit) jednu danou plochu na jinou (danou) tak, aby se obraz podobal originálu v nejmenších částech (kouscích).“

K tomu Gauss dodal, že ve speciálním případě je jednou plochou koule a druhou rovina. V tomto případě je hledaným zobrazením stereografická projekce a Mercatorovo zobrazení.[44]

> Chce se ale takové obecné řešení pro jakýkoli druh plochy, které pojímá všechny kousky (částečky).

V roce 1820 tedy Schumacher požádal Kodaňskou královskou společnost věd, aby vyhlásila cenu k tomuto novému problému. O tom začíná i Schumacherův dopis Gaussovi z 11. ledna 1821.[45] Uzpůsobení zadání podle Gaussova návrhu se Schumacherovi jeví vítězné:[46]

---

[41] Je součástí *Werke* (Gauss 1866, s. 265–327.

[42] Viz korespodence (Peters 1860), Bd. 1, No. 69, s. 130–132.

[43] (Peters 1860), Bd. 1, No. 69, s. 131: „Das Programm mit der Preisfrage Ihrer Societät ist mir noch nicht zu Gesichte gekommen. Mit Lindenau habe ich auch über eine Preisfrage conferirt, die in der neuen Zeitschrift mit dem Preise von 100 Ducaten aufgegeben werden soll. Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nemlich: „**allgemein** eine gegebne Fläche so auf einer andern (gegebnen) zu proiiciren (abzubilden), dass das Bild dem Original in den kleinsten Theilen ähnlich werde.““

[44] (Peters 1860), Bd. 1, No. 69, s. 132: „Man will aber die allgemeine Auflösung worunter alle particulären begriffen sind, für jede Arten von Flächen.“

[45] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 108, s. 202–203.

[46] (Peters 1860), Bd. 1, No. 108, s. 202: „Unsere Hoffnung ist jetzt, auf Sie gerichtet, mein vielverehrter Freund!“

> Naše naděje přichází právě k Vám, můj velevážený příteli!

Termín pro dodání práce byl stanoven na konec roku a odměnou měla být medaile v hodnotě 50 dukátů. K žádné deflaci, ani úpravě měny nedošlo. Je si jen potřeba uvědomit, že ani Německo, ani jeho měna nebyly sjednocené, natož aby byly stejné jako měna v Dánsku. Hannover měl jinou hodnotu dukátu než Sasko, Dánsko mělo se Švédskem a Norskem v rámci monetární unie koruny. Při hrubých přepočtech těchto měn na říšský tolar měla marka (správněji marcka) v Hamburgu a Lübecku hodnotu 1/3 říšského tolaru, zatímco dánská (nebo berlínská) marka jen hodnotu 1/6 říšského tolaru. Tedy severoněmecká měna byla dvojnásobná oproti dánské (anebo berlínské). Odměny k úlohám byly tedy podobné.

O deset dní později Gauss datuje dopis,[47] v němž začíná, že už téměř šest týdnů pracuje na pojednání o transformaci ploch. Ze stejného dopisu rovněž vyplývá, že Gauss v té době ovšem intenzivně pracuje na geodetickém proměřování Hannoveru a na teoretickou práci nemá příliš času. Protože žádná práce kodaňské společnosti nebyla doručena, cena se přesunula na rok 1822 se stejným zadáním. Teprve až 4. června 1822[48] se Schumacher s prací připomíná:[49]

> Úlohu naší společnosti o zobrazení plochy na jinou prodloužila do konce tohoto roku a od problému interpolace pro [tuto] novou [úlohu] bylo upuštěno.

Na což Gauss 10. července 1822 odpovídá:[50]

> Je mi líto, že jsem se o zopakování Vašeho zadání dozvěděl až teď. Loňskou zimu bych snad nějaký čas k tomu našel, ale dokud v tomto roce trvají praktická měření, nemohu prostě na žádné podrobné (subtilní) teoretické zpracování ani pomyslet.

[47] Dopis z 21. ledna 1822 uzavírá první díl korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 164a, s. 438–439.

[48] Viz (Peters 1860), Bd. 1, No. 145, s. 266–267.

[49] (Peters 1860), Bd. 1, No. 145, s. 267: „Die Preissaufgabe unserer Gesellschaft über die Abbildung einer Fläche auf der andern, ist bis zu Ende dieses Jahrs prorogirt, und die Aufgabe über Interpolation von neuem aufgegeben.“

[50] (Peters 1860), Bd. 1, No. 146, s. 267–270: „Es thut mir leid die Wiederholung Ihrer Preisfrage erst jetzt zu erfahren. Im vorigen Winter hätte ich vielleicht einige Zeit dazu gefunden, aber so lange die praktischen Messungearbeiten dieses Jahres dauern, kann ich natürlich an eine subtile theoretische Ausarbeitung gar nicht denken.“ Citace ze s. 270.

Schumacher Gaussovi tedy nabízí možnost příslibu odložení práce (o zobrazení plochy na plochu) ještě o jeden rok (tedy do konce roku 1823), pokud by to bylo nutné. A zároveň se do té doby rozhodnout, který problém bude k ceně předložen. Tedy zda nově zobrazení ploch, anebo původní teorie interpolace.[51]

Gauss se věnuje praktickým geodetickým měřením a výběru vhodného heliotropu. K práci pro Kodaňskou královskou společnost věd se nevyjadřuje. Přesto v této době je korespondence mezi oběma vědci velmi hojná. Jak se později ukáže, geodetická měření byla pro Gaussovu teoretickou práci z diferenciální geometrie klíčová.

Gauss práci do konce roku zvládl dopsat. Ještě se chce ale o některých záležitostech s Schumacherem poradit, jak píše 25. listopadu 1822:[52]

> Pozdě jsem se dozvěděl, že Kodaňská společnost zopakovala zadání ke znázornění ploch. Přítel matematiky, který Vám nesmí být jmenován, právě sestavil základy řešení a předtím, než by neochotně ve svém *velmi* omezeném čase obětoval zbytečnou práci, aby se zabýval kompletním dokončení, chce od Vás odpověď na následující otázky:
>
> 1. zda může být článek napsán v němčině;
> 2. zda by nebylo předsudkem, kdyby měla menší rozsah, než jaký má práce spojená s udělením ceny mít, tj. sotva dva plné archy, samozřejmě pokud je samotné zadání úplně vyřešené;
> 3. asi týden po přijetí Vaší odpovědi by mohla být stať dokončena a odeslána; ptám se, zda je to dostatečně včas?

---

[51] Srv. dopis Schumachera Gaussovi z 22. července 1822 (Peters 1860), Bd. 1, No. 147, s. 270–271.

[52] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 161, s. 293: „Ich habe erst spät erfahren, dass die Copenhagener Societät die Preisfrage, wegen der Darstellung der Fläche wiederholt hat. Ein Freund der Mathematik, der sich Ihnen nicht nennen darf, hat die Hauptsachen der Auflösung jetzt geordnet und wünscht, ehe er die bei seiner *sehr* beschränkten Zeit ungerne zwecklos aufzuwendende Arbeit des vollständigen Ausarbeitens unternimmt, von Ihnen Anwort auf folgende Fragen:
1) ob der Aufsatz deutsch abgefasst werden kann,
2) ob es demselben nicht zum praejudiz gereicht, wenn er weniger Volumen hat als sonst gewöhnlich Preisschriften haben, d.i. schwerlich volle 2 Bogen, versteht sich in sofern die Fragen selbst erschöpfend beantwortet ist;
3) Etwa eine Woche nach Ankunft Ihrer Antwort würde der Aufsatz vollendet seyn und abgesandt werden können; fragt sich ob dies noch früh genug ist?“

Schumacher odpovídá 30. listopadu 1822:[53]

> S ohledem k rukopisu o zobrazení ploch spatřuji:
>
> 1. že [zadavatelé] mohou být velmi rádi, že bude psán německy;
> 2. rozsah záleží na autorovi.
> 3. Do konce roku musí být v Kodani. Může být zaslána ně do Altony, anebo přímo profesoru Thunovi do Kodaně (Nye Vestergade).
> 4. K mottu vám opravdu, příteli, nemohu předložit vhodný návrh, protože z Vašeho pojednání vím příliš málo.

Gauss své řešení Královské kodaňské společnosti věd včas zaslal[54] a cenu převzal. Do roku 1825 však jeho práce nebyla uveřejněna. Uveřejnění mu zajistil až Schumacher v *Astronomische Abhandlungen.* Pojednání vyšlo v třetím (a zároveň posledním!) ročníku. Tím by mohl končit příběh Ceny Kodaňské královské společnosti věd, ne však Gaussovy diferenciální geometrie.

Jinými paralelními tématy korespondence z tohoto období bylo především geodetické proměřování a projekt sjednoceného mapování Evropy. Jedná se o diskusi ohledně přístrojových příprav projektu, ustanovování základní triangulační sítě a vlastního měření. Zároveň je zde vylíčeno rozšiřování projektu do dalších německy mluvících krajin Evropy a spolupráce s dalšími významnými astronomy (mnohdy Gaussovými žáky) – Olbersem, Besselem, Gerlingem a Enckem, ale také von Zachem, von Littrowem a Struvem.

Stranou nezůstávají ani klasická astronomická témata – pozorování komet, cirkumzenitální pozorování oblohy, proměřování aberace a nutace, sledování západů Slunce, problémy refrakce, zákryty hvězd Měsícem nebo dvojhvězdy. Nově se objevující přístrojová témata se týkají podstaty, konstrukce a měření zenitálního dalekohledu, heliotropu, teodolitu, barometru, kyvadla.

První polovina roku 1816 je však také matematická. Probíraná je metoda nejmenších čtverců a obsah elipsy. Ty jsou náplní dopisu Schumachera Gaussovi z 5. dubna 1816.[55] Dalším předmětem korespondence jsou vlastnosti dnes

[53]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 162, s. 295–297. „In Bezug auf die Schrift über Darstellung der Flächen bemerke ich:
1) dass sie sehr gern deutsch abgefasst seyn kann;
2) die Ausdehnung hängt von dem Verfasser ab. 3) Er muss vor Ende des Jahres in Kopenhagen seyn. Er kann an mich nach Altona addresirt werden, oder direct an Professor Thune in Kopenhagen (Nye Vestergade). 4) Ueber das Motto kann ich würklich Ihrem Freunde keinen passenden Vorschlag machen, da ich zu wenig vom Aufsatz weiss.“
Citace s. 296.

[54]Srv. dopis Gausse Schumacherovi z 11. prosince 1822 (Peters 1860), Bd. 1, No. 163, s. 297.

[55](Peters 1860), Bd. 1, No. 66, s. 123–124.

známých statistických veličin, jakými jsou aritmetický a geometrický průměr (dopis Gausse Schumacherovi z dubna 1816),[56] a jejich vztah k eliptickým integrálům (následující dopis Schumachera Gaussovi z 8. července 1816).[57]

Počas roku 1823 se Schumacher chce věnovat kombinatorice (combinatorischer Analysis),[58] Gauss však pro něj žádné bližší (vlastní) práce či doporučení nemá.[59] Sám zmiňuje, že jeho *Pojednání o počtu pravděpodobnosti* je téměř připravené do tisku.[60]

Bez povšimnutí by neměl ostat ani dopis Schumachera Gaussovi z 23. července 1824, v němž se zmiňuje, že Olbersovi posílá *Důkaz nemožnosti obecného řešení rovnice pátého stupně*, který pro něho [Gausse] obdržel „od studenta Abela z Christianie".[61]

Niels Henrik Abel (1802–1829) byl v té době neznámý student matematiky, který svým důkazem nemožnosti řešení zastavil honbu za zlatým grálem klasické algebry – najít řešení algebraické rovnice vyššího než čtvrtého stupně. Tím položil jednu z ontologických mezí klasické matematiky, jimž tehdejší doba čelila.[62]

Zjevně Schumacher obdržel Abelův text *Mémoire sur les équations algébriques, où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième dégré* (1824) ihned po jeho publikování. Abel totiž práci nechal vytisknout ze stipendia, které obdržel roku 1824. Vzhledem k tomu, že na podzim roku 1823 Abel pobýval v Kodani, je rovněž tak možné, že Schumacher minimálně o výsledku jeho práce věděl. Je vysoce pravděpodobné, že se Abel se Schumacherem setkali na univerzitě, kde Abel pročítal matematické spisy[63] a Schumacher přednášel matematiku a astronomii. Jejich setkání se uvádí až při Abelově cestě do Berlína roku 1825.[64] Není jasné, jaké všechny faktory v té době hrály roli při klíčovém rozhodnutí změnit směr cesty od Gaussových

[56] (Peters 1860), Bd. 1, No. 67, s. 124–126.

[57] (Peters 1860), Bd. 1, No. 68, s. 126–129.

[58] (Peters 1860), Bd. 1, No. 168, s. 301–302.

[59] (Peters 1860), Bd. 1, No. 169, s. 302–304.

[60] Vyšlo pod názvem *Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der praktischen Geometrie: Die Lage eines Punktes aus den demselben gemessenen horizontalen Winkeln zwischen anderen Punkten von genau bekannter Lage zu finden.* v časopise *Astronomische Nachrichten*, Bd. I (1823)(6), s. 81–86. Je součástí *Werke* (Gauss 1903, s. 231–237).

[61] O vzniku a významu této práce a o problému řešitelnosti algebraické rovnice pátého stupně pojednává monografie, věnovaná norskému matematiku Nielsi Henriku Abelovi (Benediktová Větrovcová 2011).

[62] Více o něm monografie (Benediktová Větrovcová 2011).

[63] Srv. (Benediktová Větrovcová 2011, s. 106–107).

[64] Srv. (Benediktová Větrovcová 2011, s. 107–108).

Göttingen ke Crellově Berlínu. Nicméně v korespondenci mezi Schumacherem a Gaussem zmínka o Abelově zastavení v Altoně není.

Gauss tuto Schumacherovu poznámku nereflektoval (anebo Gaussova reakce není zachována). Je však známo, že sám chtěl najít řešení algebraických rovnic pátého stupně, avšak nikoli algebraicky, ale numericky, jak psal Schumacherovi v dopise o rok dříve.[65] K nalezení obecného řešení byl totiž Gauss skeptický, jak lze najít už v jeho disertační práci z roku 1799:[66]

> Námitka proti této metodě je ta, že přes veškerá úsilí skvělých geometrů je velmi malá naděje, že lze kdykoli přijmout obecné řešení algebraických rovnic, takže bude více a více pravděpodobné, že nebude možné najít řešení, nebo bude kontradiktorické. Paradoxně je toto o to méně *vidět tomu, kdo je zběhlý v řešení rovnic, rovnic v pravém slova smyslu, které nejsou ničím jiným než redukcí na čistou rovnici.* Řešení čistých rovnic se sice nevyučuje, ale mělo by. [...] Snad není tak obtížné dokázat nemožnost [řešení rovnice] pátého stupně ve vší preciznosti, jak uvádím na jiném místě těchto pojednání. Tady stačí, že řešitelnost obecné rovnice v přijatelném smyslu je stále velmi nejasná, a tak důkaz, který závisí na síle předpokladu, nemá v současném stavu věci žádnou váhu.

Osvobození a ozvěny geometrie zrozené mezi kopci (1825–1830)

První recepce ke Gaussově teorii křivých ploch zazní v korespondenci se Schumacherem 7. ledna 1825.[67] V jednom případě bylo $t+\delta u$, $t+\delta u$, ale Schumacher

[65]Dopis je z 9. března 1823 a je v něm zmínka o korespondenci s profesorem Sommerem z roku 1822. Viz (Peters 1860), Bd. 1, No. 169, s. 302–304.

[66]Viz *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis*, též ve *Werke*, (Gauss 1866, s. 17–18).
Contra hoc ratiocinium obiici potest, post tot tantorum geometrarum labores perexiguam spem superesse, ad resolutionem generalem aequationum algebraicarum umquam perveniendi, ita ut magis magisque verisimile fiat, talem resolutionem omnino esse impossibilem et contradictoriam. Hoc eo minus paradoxum videri debet, *quum id, quod vulgo resolutio aequationis ficitur, proprie nihil aliud sit quam ipsius reductio ad aequationes puras.* Nam aequationum purarum solutio hinc non docetur sed supponitur. [...] Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem iam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam. Hic sufficit, resolubilitatem generalem aequationum, in illo sensu acceptam, adhuc valde dubiam esse, adeoque demonstrationem, cuius tota vis ab illa suppositione pendet, in praesenti rei statu nihil ponderis habere.
Překlad uveden též v (Benediktová Větrovcová 2011, s. 94–96).

[67]Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 230, s. 422.

odhalil, že má být $t+\delta t$, $u+\delta u$, což mu Gauss vzápětí 10. ledna 1825 potvrdil[68] s dodatkem:[69]

> Spěch a nervozita by měly omluvit to, že ruka psala jinak, než měla.

Zároveň uvítá jakákoli další nalezení podobných chyb.

Gauss se o deset měsíců později v dopise z 21. listopadu 1825[70] Schumacherovi svěřuje, že před časem započal práci na obecném zkoumání o křivých plochách, které by stálo v základech (Grundlage) vytyčených prací k vyšší geodézii. Má obsahovat např. zobecnění Legendrovy věty pro sférické trojúhelníky.[71] Jedná se zřejmě o nepublikované *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*, které je dochované pouze z pozůstalosti.[72] Nakonec Gauss (sice až v roce 1841, přesto ale) v Crelleho *Journalu* publikoval aspoň základní odvození *Elementare Ableitug eines zuerst im Legendre aufgestellten Lehrsatzes der sphärischen Trigonometrie*.

Začátkem roku 1857 Gauss Schumachera žádá o zaslání jednoho výtisku publikovaného *Allgemeine Auflösung der Aufgabe*, aby mohl sestavit pojednání o prvotních základech teorie křivých ploch.[73] To bude psané v latinském jazyce a bude obsahovat natolik vyjasněné pojmy, jak dosud v žádné jiné práci neměl. Na konci ledna Schumacher vyzdvihuje Gaussovu teorii křivých ploch, když mu píše o (okolním) zájmu o jeho další práce.[74]

V dopise z 11. října 1827 se Gauss mimo jiné zmiňuje také o tom, že v oněch dnech předložil královské společnosti [v Göttingen] pojednání o křivých plochách. Abstrakt k němu dopíše v následujícím týdnu. Avšak pojednání samo do zimy vytištěné nebude.[75] Na konci října Gauss upřesňuje,[76] že abstrakt k pojednání o plochách je v čísle 177 göttingenských *Anzeigen*.

[68] Dopis (Peters 1860), Bd. 1, No. 231, s. 428.

[69] „Die Eile und Unruhe mögen entschuldigen, wenn die Hand anders schrieb als sie sollte."

[70] Viz korespondenci (Peters 1860), Bd. 2, No. 262. s. 35–39.

[71] Srv. (Peters 1860), Bd. 2, No. 262. s. 37–38.

[72] Je součástí *Werke*, (Gauss 1900, s. 408–443).

[73] Srv. dopis Gausse Schumacherovi z 15. ledna 1827; (Peters 1860), Bd. 2, No. 293, s. 92–94.

[74] Srv. (Peters 1860), Bd. 2, No. 295, s. 96.

[75] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 2, No. 316, s. 122–125: „Meine Abhandlung über die krummen Flächen, habe ich in diesen Tagen der k. Soc. übergeben; eine Anzeige davon wird in den nächsten Wochen in den hiesigen gel. Anz. erscheinen; die Abhandlung selbst aber im Lauf des Winters gedruckt."

[76] Dopis z 25. listopadu 1825; (Peters 1860), Bd. 2, No. 318, s. 126–129.

Velmi záhy jsou již výsledky Gaussovy nové teorie křivých ploch převedeny do praxe při aplikování na geodetická měření. V dopise Gauss Schumacherovi ze 7. ledna 1828[77] píše o výpočtu zemského zakřivení a korekci chyb pro tento výpočet. Aplikace geometrie na měření a zpětný vliv zkušenosti z měření na ustanovení oskulačního elipsoidu je popsána v následujícím dopise Gausse Schumacherovi ze 14. ledna 1828 (anebo 1829).[78]

Obecné pojednání o křivých plochách vyšlo začátkem roku 1828. V březnu Schumacher žádá Gausse o další separát.[79] Gaussova práce se rychle šíří mezi jeho žáky a přátele. Dopis Schumachera Gaussovi z 20. ledna 1829 zmiňuje ohlas u Bessela:[80]

> Bessel se nyní, jak se zdá, dostal ke studiu vašeho posledního pojednání, které pokládá základy vaší teorie křivých ploch.

Po pročtení k tomu měl Bessel Schumacherovi připsat „die wundervolle“, tedy báječné.

Původním účelem psaní obecné diferenciální geometrie ploch bylo podání teoretického podkladu pro vyšší geodézii. O použití ke zpracování výsledků geodetické práce svědčí dopis Gausse Schumacherovi z 18. dubna 1830.[81]

Z dalších témat z tohoto období stojí za to zmínit Laplacovu formuli pro délku kyvadla v dopise Schumachera Gaussovi z 25. ledna 1825.[82]

Vztah k syntetické geometrii (1841–1842)

Několik zmínek ke Gaussově diferenciální geometrii lze najít také v pozdější korespondenci.

V dopise z 29. prosince 1841[83] Gauss promýšlí geometrii sférických trojúhelníku v souvislosti s prací pro Cenu Kodaňské královské společnosti. Zajímá se přitom o výsledky syntetické geometrie.

[77] Viz (Peters 1860), Bd. 2, No. 324, s. 145–150.

[78] Viz (Peters 1860), Bd. 2, No. 355, s. 196–198. Datace roku není zcela jasná.

[79] Dopis Schumachera Gaussovi ze 14. března 1828; (Peters 1860), Bd. 2, No. 333, s. 165–167.

[80] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 2, No. 356, s. 198–199: „Bessel ist jetzt, wie es scheint, zum Studium Ihrer letzten Abhandlung gekommen, welche die Fundamente Ihrer Theorie der krummen Fläche legt.“

[81] Viz (Peters 1860), Bd. 2, 230–239.

[82] Viz korespondence (Peters 1860), Bd. 1, No. 235, s. 431–432.

[83] Viz (Peters 1862), Bd. 4, No. 758, s. 45–46.

Na to mu Schumacher odpovídá 3. ledna 1842.[84] Gausse odkazuje na článek berlínského geometra Jacoba Steinera v Crelleho *Journalu*, kde je podobný problém řešen, Gaussova práce však bohužel není citována. Schumacher dále uvádí Lexella, Eulera a Legendra.

Ten, kdo podle tohoto Schumacherova dopisu však Gaussovu práci znal a používal, byl Schumacherův spolupracovník, dánský matematik a astronom Thomas Clausen. Ke Clausenově recepci se Gauss vyjadřuje hned v následujícím dopise z 6. ledna 1842.[85] K tématu se pak vrací ještě několikrát na jaře 1842. Zatím poslední poznámky ke Clausenově užití Gaussovy geometrie jsou v Gaussově dopisu Schumacherovi z 2. dubna 1842.[86]

Další korespondence se již přímo k problematice Gaussovy diferenciální geometrie (a jejích přímých důsledků) bezprostředně neváže, proto ji v této disertační práci nebude věnována bližší pozornost.

[84] Viz (Peters 1862), Bd. 4, No. 759, s. 46–47.
[85] Viz (Peters 1862), Bd. 4, No. 759, s. 48–50.
[86] Viz (Peters 1862), Bd. 4, No. 768, s. 63–64.

Kapitola 3

Další korespondence a recepce

Níže předkládaná kapitola shrnuje bezprostřední ohlas Gaussových prací k diferenciální geometrii z 20. let 19. století. Jde především o Schumacherovu recenzi (Schumacher 1826) a odkazy na ni. Jsou zde rovněž uvedeny další odkazy na fragmenty korespondence, které se váží ke Gaussovým úvahám k teorii křivých ploch a příslušným publikacím.

Gaussovy křivé plochy ve Férussacově *Bulletinu*

Ohlas Gaussových příspěvků k diferenciální geometrii se rozezní v roce 1826. Téměř bezprostředně poté, co Schumacher vydá Gaussovu práci k Ceně Kodaňské královské společnosti věd, píše obsáhlejší recenzi do vlivného Férussacova časopisu *Bulletin des sciences mathématiques, astronomie, physiques et chimiques.*[1]

Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques byl vědecký časopis založený v roce 1823. U jeho zrodu stál francouzský přírodovědec baron André de Férussac (1786–1836), profesor geografie a statistiky v Paříži. Bulletin byl součástí objemného vědeckého časopisu *Bulletin général et universel des annonces et des nouvelles scientifiques*, který byl rozdělen na osm sekcí, a to podle věd, kterým se dané sekce věnovaly. Kromě matematiky, astronomie, fyziky a chemie (section 1) se věnoval také lékařství, geologii, ekonomii, technice, historii nebo vojenství.

[1] Viz Schumacher (1826).

Je až s podivem, jak byl tento Schumacherův počin účinným diplomatickým tahem ve výsostných vodách francouzské matematiky. A zároveň jaká náhoda tomu byla, že se zde potkal s jiným, velmi cenným textem té doby: dodatkem k Abelově důkazu o nemožnosti řešení algebraických rovnic pátého stupně.[2] Schumacher tímto francouzské komunitě ukázal novou krystalicky čistě sepsanou geometrii, povstalou z inženýrské praxe.

Korespondence mezi Gaussem a Gerlingem

Při čtení vydaných dopisů mezi Gaussem a Gerlingem (Schaeffer 1927) lze najít odkazy ke Gaussovým úvahám o křivých plochách. Vztahují se na období let 1824 a 1825 mezi psaním práce k Ceně Kodaňské královské společnosti věd a *Obecného pojednání o křivých plochách*.

Dopis Gausse Gerlingovi z 11. února 1824[3] zahrnuje vlastnosti první diferenciální formy. Gauss ji užívá ke stanovení absolutních minimálních a maximálních hodnot funkce, popisující křivou plochu. Pokud by tato funkce měla být interpretací krajinného rázu a její hodnotou nadmořská výška, pak toto užití lze interpretovat jako stanovení nejvyššího a nejnižšího bodu (tedy kopce a údolí) v krajině. Takovéto vysvětlení však muselo být oběma korespondentům zřejmé a v dopise uvedené není.

V dopise z 5. listopadu 1825[4] se Gauss Gerlingovi zmiňuje o plánu sepsat teoretický materiál pro hlubší práci o vyšší geodézii. Takovým má být Obecné zkoumání křivých ploch. Gauss zároveň načrtává předběžný obsah práce.

V Gerlingově odpovědi z 26. listopadu 1826[5] se dočteme, že vyšla Schumacherova recenze. Gerling si je vědom, že se váže ke Gaussově aktuálnímu badatelskému zájmu, bohužel se však k výtisku recenze ještě nedostal.

Vybrané úryvky z korespondence mezi Gaussem a Olbersem

Dne 18. dubna 1822 Gauss Olbersovi[6] píše o závěrech práce k Ceně Kodaňské královské společnosti věd. Očekává, že teorii křivých ploch bude možné

[2] Viz (Abel 1826). Český překlad prof. Petra Němce je součástí (Benediktová Větrovcová 2011, s. 71–81).
[3] Viz korespondence (Schaeffer 1927), No. 165, s. 304–307.
[4] Viz korespondence (Schaeffer 1927), No. 173, s. 316–319.
[5] Viz (Schaeffer 1927), No. 174, s. 319–322.
[6] Viz (Schilling 1909), Bd. 2, No. 448, s. 183–186.

použít k bližšímu zkoumání vztahu rozvinutelných a křivých ploch. O výsledcích Gaussova *Obecného pojednání o křivých plochách* (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) však více svědčí pozdější dopisy.

Dne 20. října 1825[7] Gauss Olberse upozorňuje na hlavní výsledek práce – zobecnění Legendrovy metody – a vyjadřuje zde přání celistvě sepsat obecnou práci o křivých plochách. K 19. únoru 1826[8] se pak váže Gaussova poznámka o psaní práce.

Dne 14. ledna 1827 Gauss upozorňuje Olberse,[9] že tiskem vyšla práce k Ceně Kodaňské královské společnosti věd. Zároveň vbrzku očekává vydání *Disquisitiones generales.* Začátkem března 1827[10] se vyjevují výsledky: výpočet přebytku součtu úhlů v nesférickém (a nerovinném) trojúhelníku (vůči rovinnému) včetně použití k přesnějšímu zeměměřičství. Ke konci měsíce společně s dopisem[11] zasílá Gauss Olbersovi separáty svých posledních článků z *Commentationes* včetně *Obecného pojednání o křivých plochách.*

Výraznější ohlas ze strany Olberse je v dopise Gaussovi z 2. července 1828.[12] Zde se Olbers zmiňuje o tom, že v květnovém čísle Nicholsonova časopisu *Philosophical Magazine*, No. LII, vyšlo oznámení o vydání *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Poznámky mezi Gaussem a Besselem

Téměř celá korespondence mezi Gaussem a Besselem se týká astronomických pozorování a panevropského mapového systému. Přesto lze několik poznámek, které mají vztah ke geometrii křivých útvarů, najít i zde.

V červenci roku 1820 píše Bessel Gaussovi o matematickém vyjádření atmosférické refrakce, přičemž užívá křivost zemské nadplochy.[13]

K vlastním Gaussovým pracem se Bessel také dostává. V dopise ze srpna 1828 k pojednání o křivých nadplochách Gausse chválí: z jeho pohledu se jedná o novou, elegantní metodu s krásou výsledku.[14]

[7] Viz (Schilling 1909), Bd. 2, No. 593, s. 431–434.
[8] Viz (Schilling 1909), Bd. 2, No. 596, s. 438–441.
[9] Viz (Schilling 1909), Bd. 2, No. 607, s. 465–468.
[10] Dopis Gausse Olbersovi z 1. března 1827 (Schilling 1909), Bd. 2, No. 609, s. 470–473.
[11] Dopis Gausse Olbersovi z 29. března 1827 (Schilling 1909), Bd. 2, No. 627, s. 499.
[12] Viz korespondence (Schilling 1909), Bd. 2, No. 630, s. 506–509.
[13] Dopis ze 7. července 1820; (Gauss, Bessel 1880), No. 121, s. 354–358.
[14] Dopis Bessela Gaussovi z 27. srpna 1828; (Gauss, Bessel 1880), No. 161, s. 480–485.

Z korespondence se jeví, že Bessel byl Gaussovými *Disquisitiones generales circa superficies curvas* unešel. V dopise z 2. ledna 1829 mu píše,[15] že se k nim stále a stále vrací a jejich opakované studium mu přináší stále větší hodnotu. Zároveň skrze ně vidí další aplikace, obzvláště v geodézii.

Gaussův přístup ke geometrii probudil v Besselovi úvahy o případu sférického prostoru, jehož projekcí se získají sférické trojúhelníky. Bessela přitom zajímá užití Gaussových výsledků i pro tento případ. Sice je pojem sférického prostoru rozvolněným synonymem pro sféru, každopádně však tato poznáka zřetelně ukazuje, že Gaussova geometrie pojímá křivé plochy jako prostory samy o sobě. O tom, že zároveň otevírá zatím skrytou možnost pro úvahy o dalších, neeukleidovských geometriích, budou dosvědčovat matematické závěry až o několik let a jejich interpretace až o několik desetiletí později.

[15] Srv. (Gauss, Bessel 1880), No. 162, 2. 485–487.

Část IV

Gaussova diferenciální geometrie (překlady)

Carl Friedrich Gauss

O konformním zobrazení

(1822)

Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird

Astronomische Abhandlungen
herausgegeben von H.C. Schumacher,
Drittes Heft.
Altona
1825.
Reprint: *Werke*, Bd. 4, Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten,
Göttingen 1873, S. 191–216.

Obecné řešení úlohy, jak zobrazit

části dané plochy

na jinou danou plochu tak, aby zobrazení bylo

v nejmenších částech stejné

jako zobrazovaná plocha.

1

Povaha [charakter] křivé plochy je určená rovnicí souřadnic x, y, z, které se vztahují na každý bod této plochy. Pomocí této rovnice lze každou z těchto tří veličin považovat za funkci zbylých dvou. Ještě obecnější je zavést další dvě nové veličiny t, u a reprezentovat každou [ze souřadnic] x, y, z jako funkci t a u, čímž – aspoň obecně řečeno – příslušejí určité hodnoty t a u pokaždé určitým bodům (nad)plochy a naopak.

2

Nechť mají [veličiny] X, Y, Z, T, U podobný význam ve vztahu k druhé křivé ploše, jako mají x, y, z, t, u ve vztahu k první.

3

Zobrazit první plochu na druhou znamená stanovit zákon, podle kterého má každému bodu první plochy odpovídat určitý bod druhé plochy. To se stane tak, že se T a U budou rovnat určitým funkcím dvou proměnných veličin t a u. Pokud má zobrazení dostatečně splňovat určité podmínky, nebudou již tyto funkce moci být libovolné. Protože se tím také X, Y, Z stávají funkcemi proměnných t a u, musí tyto funkce navíc k podmínce, která je předepsána povahou [charakterem] druhé plochy, také ještě splňovat tu, která má být splněna v tomto zobrazení.

4

Zadání úlohy Královské společnosti věd požaduje, aby zobrazení zobrazovaného si bylo v nejmenších částech podobné. Nejprve je důležité formulovat tuto podmínku analyticky.

Diferencováním funkcí v proměnných t a u, pomocí nichž se vyjadřují x, y, z, X, Y, Z, vzniknou následující rovnice:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= a\,\mathrm{d}t + a'\,\mathrm{d}u,\\
\mathrm{d}y &= b\,\mathrm{d}t + b'\,\mathrm{d}u,\\
\mathrm{d}z &= c\,\mathrm{d}t + c'\,\mathrm{d}u,\\
\mathrm{d}X &= A\,\mathrm{d}t + A'\,\mathrm{d}u,\\
\mathrm{d}Y &= B\,\mathrm{d}t + B'\,\mathrm{d}u,\\
\mathrm{d}Z &= C\,\mathrm{d}t + C'\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Předepsaná podmínka požaduje za prvé, aby všechny nekonečně malé linie, vycházející z jednoho bodu první plochy a ležící na této ploše, byly úměrné odpovídajícím liniím druhé plochy, a za druhé, aby týž úhel z nich vytvořený jako onen zůstal.[16]

Takovýto lineární element na první ploše bude

$$= \sqrt{(aa+bb+cc)\,\mathrm{d}t^2 + 2(aa'+bb'+cc')\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}u + (a'a'+b'b'+c'c')\,\mathrm{d}u^2}$$

a odpovídající [lineární element] na druhé ploše

$$= \sqrt{(AA+BB+CC)\,\mathrm{d}t^2 + 2(AA'+BB'+CC')\,\mathrm{d}t\cdot\mathrm{d}u + (A'A'+B'B'+C'C')\,\mathrm{d}u^2}.$$

Jestliže oba [tyto lineární elementy] mají nezávisle na $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}u$ být vůči sobě v nějakém určitém vztahu, pak musí být zjevně tyto tři veličiny

$$aa+bb+cc, \qquad aa'+bb'+cc', \qquad a'a'+b'b'+c'c'$$

úměrné následujícím třem:

$$AA+BB+CC, \qquad AA'+BB'+CC', \qquad A'A'+B'B'+C'C'.$$

Jestliže koncovým bodům druhého elementu na první ploše odpovídají hodnoty

$$t, \quad u, \qquad \text{a} \qquad t+\delta t, \quad u+\delta u,$$

[16] Tedy aby úhel sevřený těmito protínajícími se liniemi na první ploše byl rovný úhlu sevřenému odpovídajím liniím na ploše druhé. [pozn. překl.]

pak kosinus úhlu, který [tento element] tvoří s prvním elementem, je

$$= \frac{\begin{array}{r}(a\,\mathrm{d}t + a'\,\mathrm{d}u)(a\,\delta t + a'\,\delta u) + (b\,\mathrm{d}t + b'\,\mathrm{d}u)(b\,\delta t + b'\,\delta u) + \\ + (c\,\mathrm{d}t + c'\,\mathrm{d}u)(c\,\delta t + c'\,\delta u)\end{array}}{\sqrt{\begin{array}{r}[(a\,\mathrm{d}t + a'\,\mathrm{d}u)^2 + (b\,\mathrm{d}t + b'\,\mathrm{d}u)^2 + (c\,\mathrm{d}t + c'\,\mathrm{d}u)^2]\cdot \\ \cdot[(a\,\delta t + a'\,\delta u)^2 + (b\,\delta t + b'\,\delta u)^2 + (c\,\delta t + c'\,\delta u)^2]\end{array}}}$$

a pro kosinus úhlu mezi odpovídajícími si elementy na druhé ploše vychází naprosto obdobný výraz, pouze se [veličiny] a, b, c, a', b', c' nahradí [veličinami] A, B, C, A', B', C'. Oba výrazy si zjevně budou rovny, pokud je nalezena výše zmíněná úměra, a druhá podmínka je tedy již pojmutá v první, což je také po promyšlení samo o sobě jasné.

Analytické vyjádření podmínky naší úlohy je tedy takové, že [rovnost] musí platit

$$\frac{AA + BB + CC}{aa + bb + cc} = \frac{AA' + BB' + CC'}{aa' + bb' + cc'} = \frac{A'A' + B'B' + C'C'}{a'a' + b'b' + c'c'},$$

což je konečná funkce [proměnných] t a u. Tuto funkci chceme položit $= mm$. Potom m vyjadřuje poměr, v němž se lineární veličiny na první ploše při jejím zobrazení na druhou plochu se zvětší nebo zmenší (podle toho, zda je m větší nebo menší než 1). Tento poměr bude, obecně řečeno, pro [různá] místa různý: ve speciálním případě, kde m je konstantní, nastane dokonalá podobnost také v koncových částech[17] a pokud je navíc $m = 1$, nastane dokonalá rovnost a bude možné jednu plochu rozvinout do druhé.

5

Tím, že zkráceně položíme

$$(aa + bb + cc)\,\mathrm{d}t^2 + 2(aa' + bb' + cc')\,\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}u + (a'a' + b'b' + c'c')\,\mathrm{d}u^2 = \omega,$$

povšimneme si, že difereciální rovnice $\omega = 0$ připouští *dvě* integrace. Tím, že lze totiž trojčlen ω rozdělit na dva (ve vztahu k dt a du) lineární faktory, se buď jeden, nebo druhý faktor musí $= 0$, což dá dvě rozdílné integrace. Jeden integrál bude odpovídat rovnici

$$\begin{aligned} 0 = &(aa + bb + cc)\,\mathrm{d}t + \\ &+ \Big\{aa' + bb' + cc' + \\ &\quad + \mathrm{i}\sqrt{(aa + bb + cc)(a'a' + b'b' + c'c') - (aa' + bb' + cc')^2}\Big\}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

[17]Ve smyslu „na okrajích mapy“ a dále příslušné konečné části si budou také podobné. [pozn. překl.]

(kde je zkráceně psáno i namísto $\sqrt{-1}$, lze se snadno přesvědčit, že iracionální část výrazu musí být imaginární); druhý [integrál bude odpovídat] úplně podobné rovnici, kde se jen i zamění za iu. Je-li tedy integrál první rovnice

$$p + \mathrm{i}\, q = \text{konst.},$$

kde p a q mají význam reálných funkcí [proměnných] t a u, pak druhý integrál bude

$$p - \mathrm{i}\, q = \text{konst.},$$

a z podstaty věci tedy

$$(\mathrm{d}p + \mathrm{i}\,\mathrm{d}q) \cdot (\mathrm{d}p - \mathrm{i}\,\mathrm{d}q) \quad \text{nebo} \quad \mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}q^2$$

musí být faktorem [formou] ω, nebo musí být

$$\omega = n(\mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}q^2),$$

kde n bude konečná funkce [proměnných] t a u.

Označme si nyní Ω trojčlen, v nějž přejde

$$\mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2 + \mathrm{d}Z^2$$

tím, že se [hodnoty] $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}Y$, $\mathrm{d}Z$ substituují pomocí [proměnných] T, U, $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}U$, a předpokládejme, že podobně jako předtím budou oba integrály rovnice $\Omega = 0$ tyto

$$P + \mathrm{i}\, Q = \text{konst.},$$
$$P - \mathrm{i}\, Q = \text{konst.}$$

a

$$\Omega = N(\mathrm{d}P^2 + \mathrm{d}Q^2),$$

kde P, Q, N budou mít význam reálných funkcí [proměnných] T a U.

Tyto integrace lze (obecné obtíže integrování [ponechme] stranou) zjevně vyjádřit před vyřešením naší hlavní úlohy.

Když nyní pro T, U substituujeme takové funkce [proměnných] t, u a zároveň bude splněna podmínka naší hlavní úlohy, pak přejde Ω ve [výraz] $mm\omega$, a bude [platit]

$$\frac{(\mathrm{d}P + \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q) \cdot (\mathrm{d}P - \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q)}{(\mathrm{d}p + \mathrm{i}\,\mathrm{d}q) \cdot (\mathrm{d}p - \mathrm{i}\,\mathrm{d}q)} = \frac{mmn}{N}.$$

Lze však snadno nahlédnout, že čitatel v první části této rovnice může být dělitelný jmenovatelem jen tehdy, když je

$$\begin{array}{ll} \text{buď} & \mathrm{d}P + \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q \text{ dělitelné } \mathrm{d}p + \mathrm{i}\,\mathrm{d}q \quad \text{a} \\ & \mathrm{d}P - \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q \text{ dělitelné } \mathrm{d}p - \mathrm{i}\,\mathrm{d}q, \\[1em] \text{nebo} & \mathrm{d}P + \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q \text{ dělitelné } \mathrm{d}p - \mathrm{i}\,\mathrm{d}q \quad \text{a} \\ & \mathrm{d}P - \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q \text{ dělitelné } \mathrm{d}p + \mathrm{i}\,\mathrm{d}q. \end{array}$$

dělitelné. V prvním případě tedy $\mathrm{d}P + \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q$ vymizí, pokud $\mathrm{d}p + \mathrm{i}\,\mathrm{d}q = 0$, nebo $P + \mathrm{i}\,Q$ bude konstantní, a pokud se předpokládá $p + \mathrm{i}\,q$ konstantní, tj. $P + \mathrm{i}\,Q$ bude pouze funkcí $p + \mathrm{i}\,q$; a zrovna tak $P - \mathrm{i}\,Q$ bude funkcí [promměnné] $p - \mathrm{i}\,q$. V druhém případě bude $P + \mathrm{i}\,Q$ funkcí [proměnné] $p - \mathrm{i}\,q$ a $P - \mathrm{i}\,Q$ funkcí [proměnné] $p + \mathrm{i}\,q$. Je snadné nahlédnout, že toto vyvozování platí také obráceně; totiž že když se předpokládají $P + \mathrm{i}\,Q$, $P - \mathrm{i}\,Q$ jako funkce [proměnných] $p + \mathrm{i}\,q$, $p - \mathrm{i}\,q$ (buď takto nebo obráceně), pak [existuje] konečné dělení[18] Ω [trojčlenem] ω, a tedy výše požadovaná úměrnost.

Ostatně se lze snadno přesvědčit, že když se například položí

$$\begin{aligned} P + \mathrm{i}\,Q &= f(p + \mathrm{i}\,q), \\ P - \mathrm{i}\,Q &= f'(p - \mathrm{i}\,q), \end{aligned}$$

pak charakter funkce f' bude již podmíněný [charakterem funkce] f. Jestliže totiž mezi konstantními veličinami, které nechť implicitně zahrnuje [obsahuje] posledně uvedená funkce, nejsou jiné než reálné [funkce], pak bude muset být druhá [funkce] f' [zcela] identická s f, aby pokaždé reálným hodnotám [proměnných] p, q odpovídaly reálné hodnoty [proměnných] P, Q; v opačném případě se f' od f bude lišit pouze tím, že v imaginárních členů [prvcích] musí být všude místo i, které je u [funkce] f, opačné $-\mathrm{i}$.

Potom dostaneme

$$P = \frac{1}{2} f(p + \mathrm{i}\,q) + \frac{1}{2} f'(p - \mathrm{i}\,q),$$

$$\mathrm{i}\,Q = \frac{1}{2} f(p + \mathrm{i}\,q) - \frac{1}{2} f'(p - \mathrm{i}\,q),$$

nebo, což je totéž, tím, že jsme předpokládali zcela libovolnou funkci f (dle libosti se zahrnutím konstatních imaginárních členů [prvků]), bude P rovno reálné části a $\mathrm{i}\,Q$ (u druhého řešení $-\mathrm{i}\,Q$) imaginární části [funkce] $f(p + \mathrm{i}\,q)$, a z toho se pak prostřednictvím eliminace vyjádří T a U ve tvaru funkcí

[18] „Rozkouskování“ vložením ω do Ω ve smyslu teorie proporcí, známou z páté knihy Eukleidových *Základů*. [pozn. překl.]

[proměnných] t a u. Tím je výše uvedená úloha vyřešena zcela obecně a úplně [celistvě].

6

Jestliže $p' + \mathrm{i}\, q'$ představuje libovolnou určitou funkci [proměnné] $p + \mathrm{i}\, q$ (tím, že p', q' jsou reálné funkce [proměnných] p, q), pak je snadno vidět, že také

$$p' + \mathrm{i}\, q' = \text{konst.} \quad \text{a} \quad p' - \mathrm{i}\, q' = \text{konst.}$$

[představují] zobrazené integrály diferenciální rovnice $\omega = 0$; ve skutečnosti budou mít tyto [funkce]

$$p + \mathrm{i}\, q = \text{konst.} \quad \text{a} \quad p - \mathrm{i}\, q = \text{konst.}$$

s výše uvedenými [funkcemi] zcela stejný význam.[19] Zrovna tak mají stejný význam integrály

$$P' + \mathrm{i}\, Q' = \text{konst.} \quad \text{a} \quad P' - \mathrm{i}\, Q' = \text{konst.}$$

diferenciální rovnice $\Omega = 0$ s výše uvedenými

$$P + \mathrm{i}\, Q = \text{konst.} \quad \text{a} \quad P - \mathrm{i}\, Q = \text{konst.},$$

pokud $P' + \mathrm{i}\, Q'$ představuje libovolnou určitou funkci [proměnné] $P + \mathrm{i}\, Q$ (přičemž P', Q' jsou reálné funkce [proměnných] P, Q). Z toho vysvítá, že v obecném řešení naší úlohy, kterou jsme si stanovili v předchozím odstavci, mohou také p', q' zastupovat p, q; resp. P', Q' mohou zastupovat P, Q. I když taková změna nepřispěje k větší obecnosti řešení,[20] přece jen může být při aplikaci občas některý tvar příhodnější pro jeden účel a jiný pro další účel.

7

Jestliže funkce, které povstanou z diferencování libovolných funkcí f, f', se označí φ, resp. φ', tak, aby $\mathrm{d}\cdot fv = \varphi v \cdot \mathrm{d}v$, $\mathrm{d}\cdot f'v = \varphi' v \cdot \mathrm{d}v$, pak bude v důsledku našeho obecného řešení

$$\frac{\mathrm{d}P + \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p + \mathrm{i}\,\mathrm{d}q} = \varphi(p + \mathrm{i}\, q), \qquad \frac{\mathrm{d}P - \mathrm{i}\,\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p - \mathrm{i}\,\mathrm{d}q} = \varphi'(p - \mathrm{i}\, q),$$

[19]Budou ekvivalentní, z čistě formálního matematického (syntakticko-kalkulativního) hlediska se jedná o funkce totožné. [pozn. překl.]

[20]Nedostaneme obecnější řešení. [pozn. překl.]

tedy

$$\frac{mmn}{N} = \varphi(p + \mathrm{i}\,q) \cdot \varphi'(p - \mathrm{i}\,q).$$

Zvětšovací poměr se proto ustanoví formulí

$$m = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}q^2}{\omega} \cdot \frac{\Omega}{\mathrm{d}P^2 + \mathrm{d}Q^2} \cdot \varphi(p + \mathrm{i}\,q) \cdot \varphi'(p - \mathrm{i}\,q)}.$$

8

Nyní ještě chceme vysvětlit naše obecné řešení na několika příkladech, čímž budou nejlépe osvětleny jak druh použití, tak i charakter některých vnějších okolností, které přicházejí v úvahu.

Jsou to především obě dvě plochy roviny, kde budeme moci položit

$$\begin{array}{lll} x = t, & y = u, & z = 0, \\ X = T, & Y = U, & Z = 0. \end{array}$$

Diferenciální rovnice

$$\omega = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}u^2 = 0$$

zde dává tyto dva integrály

$$t + \mathrm{i}\,u = \text{konst.}, \qquad t - \mathrm{i}\,u = \text{konst.}$$

a zrovna tak dva integrály rovnice

$$\Omega = \mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}U^2 = 0$$

jsou:

$$T + \mathrm{i}\,U = \text{konst.}, \qquad T - \mathrm{i}\,U = \text{konst.}$$

Dvě obecná řešení úlohy jsou tudíž

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & T + \mathrm{i}\,U = f(t + \mathrm{i}\,u), & T - \mathrm{i}\,U = f'(t - \mathrm{i}\,u), \\ \text{II.} & T + \mathrm{i}\,U = f(t - \mathrm{i}\,u), & T - \mathrm{i}\,U = f'(t + \mathrm{i}\,u). \end{array}$$

Tento výsledek lze také vyjádřit takto: tím, že charakteristika [funkce] f má význam libovolné funkce, je nutno považovat reálnou část [funkce] $f(x + \mathrm{i}\,y)$ za X a pro imaginární část s vynecháním faktoru i buď Y, nebo $-Y$.

Pokud použijeme charakteristiky φ, φ' ve smyslu odstavce 7 a položíme

$$\varphi(x + \mathrm{i}\,y) = \xi + \mathrm{i}\,\eta, \qquad \varphi'(x - \mathrm{i}\,y) = \xi - \mathrm{i}\,\eta,$$

je zřejmé, že ξ a η budou reálné funkce [proměnných] x a y, pak dostaneme v *prvním* řešení

$$\mathrm{d}X + \mathrm{i}\,\mathrm{d}Y = (\xi + \mathrm{i}\,\eta)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y),$$
$$\mathrm{d}X - \mathrm{i}\,\mathrm{d}Y = (\xi - \mathrm{i}\,\eta)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\,\mathrm{d}y),$$

a tudíž

$$\mathrm{d}X = \xi\,\mathrm{d}x - \eta\,\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}Y = \eta\,\mathrm{d}x + \xi\,\mathrm{d}y.$$

Pokud nyní provedeme

$$\xi = \sigma \cdot \cos\gamma, \qquad \eta = \sigma \cdot \sin\gamma,$$
$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s \cdot \cos g, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \cdot \sin g,$$
$$\mathrm{d}X = \mathrm{d}S \cdot \cos G, \qquad \mathrm{d}Y = \mathrm{d}S \cdot \sin G,$$

tak aby ds mělo význam lineárního [rovinného] elementu v první rovině, g jeho odklon[21] od abscisy,[22] dS odpovídající lineární [rovinný] element ve druhé rovině a G jeho odklon od abscisy,[23] pak výše uvedené rovnice dávají

$$\mathrm{d}S \cdot \cos G = \sigma \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos(g + \gamma),$$
$$\mathrm{d}S \cdot \sin G = \sigma \cdot \mathrm{d}s \cdot \sin(g + \gamma)$$

a když pak uvažujeme σ za kladné, což je přípustné, platí

$$\mathrm{d}S = \sigma \cdot \mathrm{d}s, \qquad G = g + \gamma.$$

Lze tedy vidět (ve shodě s odstavcem 7), že [veličina] σ představuje poměr zvětšení [rovinného] elementu ds v zobrazení dS, a jak se patří, je na g nezávislá; zrovna tak ukazuje nezávislost úhlu γ na g, že všechny lineární elementy, vycházející z jednoho bodu v první rovině, jsou zobrazeny jako elementy ve druhé rovině, které mezi sebou svírají – a můžeme dodat, že ve *stejném smyslu* – tytéž úhly jako elementy v první rovině.[24]

Když nyní vybereme za f lineární funkci tak, aby $fv = A + bv$, kde konstatní koeficienty mají tento tvar

$$A = a + b\,\mathrm{i}, \quad B = c + e\,\mathrm{i},$$

[21] Tj. úhel svíraný s osou x. [pozn. překl.]

[22] Abscisa (die Abscissenlinie) je vodorovná osa v kartézském souřadném systému, obvykle značená x. [pozn. překl.]

[23] Zde úhel svíraný s osou X. [pozn. překl.]

[24] Tedy úhel a jeho orientace se zobrazením zachovává. [pozn. překl.]

pak bude

$$\varphi v = B = c + e\,\mathrm{i},$$

takže

$$\sigma = \sqrt{cc + ee}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{e}{c}.$$

Zvětšovací poměr je tudíž ve všech bodech konstantní a zobrazení je zobrazovanému [vzoru] je absolutně podobné.[25]

Pro každou jinou funkci f nebude (jak lze snadno prokázat) zvětšovací poměr konstantní, a podobnost se tedy bude konat pouze v nejmenších částech.

Jsou-li předepsána místa, která mají v [tomto] zobrazení odpovídat nějakému určitému množství daných bodů první roviny, pak lze snadno prostou interpolační metodou najít nejjednodušší algebraickou funkci f, čímž bude tato podmínka splněna. Označíme-li totiž hodnoty [místa] $x + \mathrm{i}\,y$ pro dané body jako a, b, c atd. a odpovídající hodnoty [místa] $X + \mathrm{i}\,Y$ jako A, B, C atd., pak budeme muset dostat

$$fv = \frac{(v-b)(v-c)\cdots}{(a-b)(a-c)\cdots} \cdot A + \frac{(v-a)(v-c)\cdots}{(b-a)(b-c)\cdots} \cdot B + \\ + \frac{(v-a)(v-b)\cdots}{(c-a)(c-b)\cdots} \cdot C + \text{ atd.},$$

což je algebraická funkce [proměnné] v, jejíž řád je o jednotku menší než počet zadaných bodů. Pro dva body, kdy bude funkce lineární, bude tedy podobnost [místa] dokonalá.

Tento postup lze s výhodou využít v geodézii při převádění mapy, založené na nevalných měřeních, která je v malých detailech dobrá, ale jako celek a u hranic zkreslená, na lepší, známe-li správnou polohu určitého počtu bodů. Je však jasné, že se při této transformaci nesmíme pustit mimo hranici[26] oblasti vymezené těmito body.

Když stejným způsobem uskutečníme *druhé* řešením, zjistíme [najdeme], že celá odlišnost tkví jen v tom, že podobnost je opačná, tedy že všechny elementy v [obrazu] zobrazení navzájem spolu sice svírají právě tak velký úhel jako ve [vzoru] zobrazovaného, ale v opačném smyslu, takže to, co je zde nalevo, leží v onom napravo. Tato odlišnost není ale nijak podstatná a vymizí, když se v jedné rovině strana, považovaná za horní, vezme jako spodní. Tuto poslední poznámku lze ostatně použít pokaždé, když jedna z obou ploch je rovinou, proto se můžeme v následujících příkladech tohoto druhu omezit pouze na první řešení.

[25]Reprezentace je zcela podobná zobrazované ploše. [pozn. překl.]
[26]Příliš daleko za hranici. [pozn. překl.]

9

Nyní chceme sledovat (jako druhý příklad) zobrazení plochy kolmého kužele do roviny. Jako rovnici této plochy budeme předpokládat

$$xx + yy - kkzz = 0,$$

kde dále položíme

$$\begin{aligned} x &= kt\cos u, \\ y &= kt\sin u, \\ z &= t \end{aligned}$$

a [stejně jako] předtím $X = T$, $Y = U$, $Z = 0$.

Diferenciální rovnice

$$\omega = (kk+1)\,\mathrm{d}t^2 + kktt\,\mathrm{d}u^2 = 0$$

zde dává dva integrály

$$\log t \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\cdot u = \text{Const.}$$

Tudíž máme řešení

$$\begin{aligned} X + \mathrm{i}\,Y &= f\left(\log t + \mathrm{i}\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\cdot u\right), \\ X - \mathrm{i}\,Y &= f\left(\log t - \mathrm{i}\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\cdot u\right) \end{aligned}$$

a protože má f význam libovolné funkce, předpokládáme pro X pro reálnou část

$$f\left(\log t + \mathrm{i}\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\cdot u\right)$$

a pro Y pro imaginární [část] (po vynechání faktorů i).

Dosadíme-li za f například exponenciální veličinu, totiž

$$fv = h\,\mathrm{e}^v,$$

kde h je konstanta a e má význam základu hyperbolických logaritmů, [dostaneme] nejjednodušší zobrazení

$$X = ht\cos\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\cdot u, \qquad Y = ht\sin\sqrt{\frac{kk}{kk+1}}\cdot u.$$

Použitím formulí z odstavce 7 zde dostaneme

$$n = (kk + 1)tt, \qquad N = 1$$

a protože $\varphi v = \varphi' v = h\,\mathrm{e}^v$,

$$\varphi\left(\log t + \mathrm{i}\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u\right) \cdot \varphi'\left(\log t - \mathrm{i}\sqrt{\frac{kk}{kk+1}} \cdot u\right) = hhtt,$$

je tedy

$$m = \frac{h}{\sqrt{kk+1}}$$

konstatní. Vezmeme-li se tedy ještě

$$h = \sqrt{kk+1},$$

bude [obrazem] zobrazení dokonalé rozvinutí [plochy].

10

Za třetí má být v rovině zobrazena kulová plocha, jejíž poloměr $= a$. Položíme zde

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \cdot \sin u, \\ y &= a\sin t \cdot \sin u, \\ z &= a\cos u, \end{aligned}$$

čímž získáme

$$\omega = aa\sin u^2\,\mathrm{d}t^2 + aa\,\mathrm{d}u^2.$$

Diferenciální forma $\omega = 0$ následně dává

$$\mathrm{d}t \mp \mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\sin u} = 0$$

a její integrace

$$t \pm \mathrm{i}\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}u = \text{konst.}$$

Proto když označíme znovu charakteristikou f libovolnou funkci, musí se X položit rovno reálné a $\mathrm{i}\,Y$ imaginární části [funkce]

$$f\left(t + \mathrm{i}\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}u\right).$$

Uvedeme pár speciálních případů tohoto obecného řešení.

Zvolme za f lineární funkci tak, že položíme $fv = kv$. Potom bude

$$X = kt, \qquad Y = k \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}u.$$

Při aplikování na Zemi, jestliže t bude mít význam zeměpisné délky a $90° - u$ [zeměpisné] šířky, [je tato funkce] zjevně totožná s Mercatorovou projekcí. Pro zvětšovací poměr formule z odstavce 7 zde dají

$$m = \frac{k}{a \sin u}.$$

Vezměme za f imaginární exponenciální funkci, a sice nejprve tu nejjednodušší $fv = k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,v}$. Pak bude

$$f\left(t + \mathrm{i} \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}u\right) = k\,\mathrm{e}^{\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}u + \mathrm{i}\,t} = k \operatorname{tg} \frac{1}{2}u(\cos t + \mathrm{i} \sin t)$$

a

$$X = k \operatorname{tg} \frac{1}{2}u \cdot \cos t, \qquad Y = k \operatorname{tg} \frac{1}{2}u \cdot \sin t,$$

což je, jak je snadno vidět, stereografická polární projekce.

Položíme-li obecněji $fv = k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda v}$, pak bude

$$X = k \operatorname{tg} \frac{1}{2}u^{\lambda} \cdot \cos \lambda t, \qquad Y = k \operatorname{tg} \frac{1}{2}u^{\lambda} \cdot \sin \lambda t.$$

Pro zvětšovací poměr zde obdržíme

$$n = aa \sin u^2, \qquad N = 1, \qquad \varphi v = \mathrm{i}\,\lambda k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda v},$$

a odtud

$$m = \frac{\lambda k \operatorname{tg} \frac{1}{2}u^{\lambda}}{a \sin u}.$$

Lze vidět, že zde [obrazy v] zobrazení všech bodů, pro které je u konstatní, spadnou do [jedné] kružnice a [obrazy v] zobrazení všec bodů, pro které je t konstantní, spadnou do jedné přímé linie [úsečky], a déle také, že kružnice, náležející všem různým hodnotám [proměnné] u, jsou soustředné. To dává velmi vhodnou [účelnou] mapovou projekci pro případy, kdy je potřeba zobrazit jen část kulové plochy, a pak je nejlepší zvolit λ tak, aby zvětšovací poměr pro nejkrajnější hodnoty [proměnné] u byl stejně velký, čímž dostaneme kolem středu její nejmenší hodnoty. Jsou-li tyto nejkrajnější hodnoty [proměnné] u označeny u^0 a u', budeme muset v důsledku toho položit

$$\lambda = \frac{\log \sin u' - \log \sin u^0}{\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}u' - \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}u^0}.$$

Listy, hvězdné mapy č. 19–26, pana profesora Hardinga, jsou nakresleny podle této projekce.

11

Obecné řešení pro příklad pojednaný v předchozím odstavci lze sestavit i v jiném tvaru, který se cítíme nuceni zde ještě přidat kvůli jeho eleganci.

V důsledku toho, co bylo předneseno v 6. odstavci, protože

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}u(\cos t + \mathrm{i} \sin t)$$

je funkce [proměnné]

$$t + \mathrm{i} \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2}u$$

a

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}u(\cos t + \mathrm{i} \sin t) = \frac{\sin u \cos t + \mathrm{i} \sin u \sin t}{1 + \cos u} = \frac{x + \mathrm{i}\, y}{a + z}$$

bude možno obecné řešení zobrazit také takto:

$$X + \mathrm{i}\, Y = f\frac{x + \mathrm{i}\, y}{a + z}, \qquad X - \mathrm{i}\, Y = f'\frac{x - \mathrm{i}\, y}{a + z}$$

tj. je nutno položit X reálné a $\mathrm{i}\, Y$ imaginární části [funkce] $f\frac{x+\mathrm{i}\, y}{a+z}$, přičemž f označuje libovolnou funkci. Jak je snadno vidět, lze místo místo $f\frac{x+\mathrm{i}\, y}{a+z}$ vzít také libovolnou funkci [proměnné] $\frac{y+\mathrm{i}\, z}{a+x}$ anebo [proměnné] $\frac{z+\mathrm{i}\, x}{a+y}$.

12

Za čtvrté chceme sledovat zobrazení nadplochy rotačního elipsoidu do roviny. Nechť jsou a a b dvě půlky hlavních os elipsoidu,[27] takže bude možné položit

$$x = a \cos t \sin u,$$
$$y = a \sin t \sin u,$$
$$z = b \cos u.$$

[27]Míní se tím hlavní poloosy. [pozn. překl.]

Bude tedy

$$\omega = aa \sin u^2 \,\mathrm{d}t^2 + (aa \cos u^2 + bb \sin u^2)\,\mathrm{d}u^2$$

a z diferenciální formy $\omega = 0$ vyjde, když pro zkrácení položíme $\sqrt{1 - \frac{bb}{aa}} = \varepsilon$ (pokud rotační poloosa $b < a$),

$$0 = \mathrm{d}t \mp \mathrm{i}\,\mathrm{d}u \cdot \sqrt{(\operatorname{cotg} u^2 + 1 - \varepsilon\varepsilon)}.$$

Položme zde

$$\sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon)} \cdot \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} w,$$

kde (při aplikaci na zemský sféroid) bude $90^\circ - w$ značit [představovat] zeměpisnou šířku a t [zeměpisnou] délku. Potom se tato rovnice přemění na

$$0 = \mathrm{d}t \mp \mathrm{i}\,\mathrm{d}w \cdot \frac{1 - \varepsilon\varepsilon}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^2)\sin w},$$

jejíž integrací dostaneme

$$\text{konst.} = t \pm \mathrm{i} \log \cdot \left\{ \operatorname{cotg} \frac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 - \varepsilon \cos w}{1 + \varepsilon \cos w} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}.$$

Protože f má význam libovolné funkce, musíme vzít za X reálnou a za $\mathrm{i}Y$ imaginární část [funkce]

$$f\left(t + \mathrm{i} \log \left\{ \operatorname{cotg} \frac{1}{2} w \cdot \left(\frac{1 - \varepsilon \cos w}{1 + \varepsilon \cos w} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\} \right).$$

— Zvolíme-li za f lineární funkci, tj. $fv = kv$, pak bude

$$X = kt, \qquad Y = k \log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} w - \frac{1}{2} k\varepsilon \log \frac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w},$$

což je [projekce] analogická mercatorovské projekci.

Vezmeme-li naproti tomu za f imaginární exponenciální funkci $fv = k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda v}$, pak bude

$$X = k \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^{\lambda} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda} \cdot \cos \lambda t,$$

$$Y = k \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} w^{\lambda} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon \cos w}{1 - \varepsilon \cos w} \right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda} \cdot \sin \lambda t,$$

což dává, když se položí $\lambda = 1$, [projekci] analogickou stereografické polární projekci a obecně velmi účelnou projekci k zobrazení části zemského povrchu,[28] pokud je třeba brát ohled na zploštění.

Co se dá říci o druhém případu, kde je $b > a$, lze sice snadno a bezprostředně lehce vyvodit z předchozího [případu], ve kterém když se ponechá totéž značení, [je] ε imaginární, ale $\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$ je pak zase reálné. Pro úplnost však ještě zvlášť doložme formule pro tento případ a hned na začátku položme $\sqrt{\frac{bb}{aa}-1} = \eta$. Následně stanovme w pomocí rovnice

$$\sqrt{1+\eta\eta}\cdot\operatorname{tg}u = \operatorname{tg}w$$

a diferenciální rovnice

$$0 = \mathrm{d}t \mp \mathrm{i}\,\mathrm{d}w\cdot\frac{1+\eta\eta}{(1+\eta\eta\cos w^2)\sin w}$$

bude mít integrál

$$\text{konst.} = t \mp \mathrm{i}\left(\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}w + \eta\operatorname{arctg}\eta\cos w\right),$$

takže budeme muset vzít X pro reálnou a $\mathrm{i}Y$ pro imaginární část [funkce]

$$f\left(t+\mathrm{i}\left(\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}w + \eta\operatorname{arctg}\eta\cos w\right)\right).$$

Protějšky obou výše zmíněných zvláštních použití z toho vyplynou automaticky. Podle první [aplikace] bude nutno položit

$$X = kt, \qquad Y = k\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}w + \eta k\operatorname{arctg}\eta\cos w,$$

podle druhé

$$X = k\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^{\lambda}\cdot \mathrm{e}^{-\eta\lambda\operatorname{arctg}\eta\cos w}\cdot\cos\lambda t,$$

$$Y = k\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^{\lambda}\cdot \mathrm{e}^{-\eta\lambda\operatorname{arctg}\eta\cos w}\cdot\sin\lambda t.$$

[28] Nadplochy zemského sféroidu. [pozn. překl.]

13

Jako poslední příklad chceme posuzovat obecné zobrazení nadplochy rotačního elipsoidu na kulovou plochu. Pro tento případe zachováme značení z předešelého odstavce a položíme poloměr kulové plochy $= A$ a

$$\begin{aligned} X &= A\cos T\sin U, \\ Y &= A\sin T\sin U, \\ Z &= A\cos U. \end{aligned}$$

Když zde aplikujeme obecné řešení z 5. odstavce, tak zjistíme, že jelikož f má význam libovolné funkce, musíme položit T rovno reální a $\mathrm{i}\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}U$ imaginární části [funkce]

$$f\left(t + \mathrm{i}\log\left\{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}w\cdot\left(\frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}\right\}\right).^{29}$$

Nejjednodušším řeššením bude položit $fv = v$, čímž dostaneme

$$T = t, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}U = \operatorname{tg}\frac{1}{2}w\cdot\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

To poskytuje neobyčejně užitečnou transformaci pro vyšší geodézii, jejímž použitím se zde však můžeme zabývat jen krátce a v několika náznacích. Když totiž budeme na nadploše elipsoidu a koule uvažovat vzájemně si odpovídající ty body,[30] které mají stejnou [zeměpisnou] délku a jejichž [zeměpisné] šířky $90^\circ - w$, resp. $90^\circ - U$, [vzájemně] souvisí prostřednictvím uvedené rovnice, pak systému poměrně malých trojúhelníků (a budou to vždy ty, které mohou sloužit ke skutečnému měření), jež byly na nadploše sféroidu vytvořeny těmi nejkratšími liniemi, odpovídá na kulové ploše systém trojúhelníků, jejichž úhly jsou *právě* rovny odpovídajícím úhlům na sféroidu a jejichž strany se od největšího kruhového oblouku odchylují tak málo, že ve většině případů, kdy není požadována maximální ostrost, lze prohlásit, že se shodují,[31] přičemž i v případě, že je požadována maximální ostrost, se dá odchylka od největšího kruhu lehce vypočítat s veškerou nutnou ostrostí pomocí jednoduchých

[29] Opomeneme zde zčásti druhé řešení z 5. odstavce, které se od výše zmíněného budou lišit jen v záměně $-T$ za $+T$, a [to] bude odpovídat nějakému obrácenému zobrazení, částečně [pak] případ protáhlého elipsoidu, jehož projednání poté, co se vyskytl v předchozím odstavci, se dostane ze zploštělého [elipsoidu].

[30] Pohled bude veden z téhož bodu. [pozn. překl.]

[31] Shodný v tom smyslu, že na sebe navzájem plochy lícují, kryjí se. [pozn. překl.]

vzorců. Poté, co jsme tedy náležitě přenesli jednu stranu trojúhelníka na kulovou plochu,[32] lze celý systém vypočítat pomocí úhlů, úplně stejně, jako by na ní ležela, v případě nutnosti s právě naznačenou modifikací, která spočívá v tom, že pro všechny body systému určíme hodnoty [proměnných] T a U a od nich se vrátíme k odpovídajícím hodnotám [funkce] w (nejsnáze prostřednictvím pomocné tabulky, jejíž konstrukce je pomocí nejvzdálenějších [bodů] velmi snadná).

Dokud se trojúhelníková síť[33] rozprostírá pouze nad velmi malou (skrovnou) částí zemského povrchu, lze uvedeného účelu ještě dokonale dosáhnout, i když obecné řešení ještě trochu zobecníme a namísto $fv = v$ předpokládáme $fv = v +$ konst. Zjevně bychom tímto způsobem vůbec nic nezískali, kdybychom této konstantě přisoudili reálnou hodnotu, poněvadž tím by se T a t lišily pouze o tuto konstantu, a nestejné by bylo toliko počáteční body délek. Situace je však naprosto jiná, když konstantě přisoudíme imaginární hodnotu. Položíme-li ji $= -\mathrm{i}\log k$, pak bude

$$T = t, \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}U = k\operatorname{tg}\frac{1}{2}w \cdot \left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Abychom zde mohli rozhodnout o nejvhodnější hodnotě [konstanty] k, musíme především stanovit zvětšovací poměr.

S použitím symbolů 5. a 7. odstavce zde bude

$$\begin{aligned} n &= aa\sin u^2, \\ N &= AA\sin U^2, \\ \varphi v &= 1. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned} m = \frac{A\sin U}{a\sin u} &= \\ &= \frac{A\sin U}{a\sin w} \cdot \sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2} = \\ &= \frac{A}{a} \cdot \frac{k(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}}{\cos\frac{1}{2}w^2(1-\varepsilon\cos w)^{\varepsilon} + kk\sin\frac{1}{2}w^2(1+\varepsilon\cos w)^{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

kdy poměr tedy závisí pouze na [zeměpisné] šířce. Nejmenší možnou odchylku od dokonalé podobnosti získáme, určíme-li k tak, aby mělo pro nejkrajnější

[32] Pomocí promítnutí. [pozn. překl.]
[33] V geodézii nazývaná triangulační síť. [pozn. překl.]

šířky m stejnou hodnotu, čímž bude m při střední šířce samo o sobě velmi blízko své největší nebo nejmenší hodnotě. Označíme-li nejkrajnější hodnoty w jako w^0 a w', pak tímto způsobem dostaneme

$$k = \sqrt{\frac{\frac{\cos\frac{1}{2}w^{0\,2}(1-\varepsilon\cos w^0)^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^{0\,2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}} - \frac{\cos\frac{1}{2}w'^2(1-\varepsilon\cos w')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w'^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}}}{\frac{\sin\frac{1}{2}w'^2(1-\varepsilon\cos w')^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w'^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}} - \frac{\sin\frac{1}{2}w^{0\,2}(1-\varepsilon\cos w^0)^\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^{0\,2})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon}}}}.$$

Abychom zjistili, při které šířce dosáhne m své největší nebo nejmenší hodnoty, máme

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \operatorname{cotg} U \cdot \mathrm{d}u - \operatorname{cotg} w \cdot \mathrm{d}w + \frac{\varepsilon\varepsilon\cos w \cdot \sin w \cdot \mathrm{d}w}{1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\sin U} = \frac{\mathrm{d}w}{\sin w} - \frac{\varepsilon\varepsilon\sin w \cdot \mathrm{d}w}{1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\,\mathrm{d}w}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)\sin w},$$

a z toho

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\,\mathrm{d}w}{\sin w(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)} \cdot (\cos U - \cos w).$$

Z toho je jasné, že m dosáhne své největší nebo nejmenší hodnoty v místě, kde bude $U = w$; označíme-li hodnotu w v tomto místě jako W, pak bude

$$k = \left(\frac{1-\varepsilon\cos W}{1+\varepsilon\cos W}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \quad \text{nebo} \quad \cos W = \frac{1-k^{\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon\left(1+k^{\frac{2}{\varepsilon}}\right)},$$

z čehož lze určit W, když je k vypočítané podle výše uvedeného vzorce. Pro použití v praxi bude zatím málo záležet na zcela přesné rovnosti hodnot [proměnné] m v nejkrajnějších šířkách, a můžeme se spokojit s tím, že vybereme pro $90° - W$ přibližně střední šířku a z toho odvodíme k. Obecnou závislost mezi U a w dává pak vzorec

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}U = \operatorname{tg}\frac{1}{2}w\left\{\frac{(1-\varepsilon\cos W)(1+\varepsilon\cos w)}{(1+\varepsilon\cos W)(1-\varepsilon\cos w)}\right\}^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

K opravdovému číselnému výpočtu je však výhodnější použít řady, kterým lze dát různý tvar, jejich vytvářením se však zde nebudeme zdržovat.

Je ostatně snadno vidět, že pro $w < W$ [platí] $U > w$, tudíž $\cos U - \cos w$, a tedy také $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}w}$ [bude] záporné; a pro $w > W$ [platí] $U < w$, a tedy $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}w}$ bude kladné, takže je jasné, že pro $w = U = W$ bude hodnotou m pokaždé minimum, a sice

$$= \frac{A}{a}\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2)}.$$

Zvolíme-li tedy poloměr koule $A = \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2}}$, nebude zobrazení nekonečně malých částí elipsoidu při [zeměpisné] šířce $90^\circ - W$ předobrazu[34] pouze podobné, ale rovné, při jiných [zeměpisných] šířkách však [bude] větší.

Logaritmus [funkce] m lze výhodně rozvinout v řadu mocnin $\cos U - \cos W$, jejíž první členy, které [k jejímu ustanovení] postačí, jsou

$$\begin{aligned}\operatorname{logh} m = \log \left\{ \frac{A}{a}\sqrt{1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2} \right\} &+ \\ &+ \frac{\varepsilon\varepsilon}{2(1-\varepsilon\varepsilon)} \cdot (\cos U - \cos W)^2 - \\ &- \frac{2\varepsilon^4 \cos W}{3(1-\varepsilon\varepsilon)^2} \cdot (\cos U - \cos W)^3 \cdots .\end{aligned}$$

Když se tedy tímto způsobem například Dánské království promítne uvnitř hranic [zeměpisné] šířky 53° a 58° na kulovou plochu a položí se $W = 34^\circ 30'$, pak se zobrazení na hranicích při zploštění $\frac{1}{303}$ a lineárním modelu zvětší jen o $\frac{1}{530\,000}$.

Musíme se zde spokojit jen se stručným náznakem *jednoho* způsobu využití promítání obrazů ve vyšší geodézii a přiměřenější výklad si uschovat pro jiné místo.

14

Ještě nám zbývá si všimnout trochu podrobněji jedné okolnosti, vyskytující se v našem obecném řešení. V 5. odstavci jsme ukázali, že se pokaždé najdou (existují) dvě řešení, neboť buď musí být právě $P + \mathrm{i}\,Q$ funkcí [proměnné] $p + \mathrm{i}\,q$ a $P - \mathrm{i}\,Q$ funkcí [proměnné] $p - \mathrm{i}\,q$, anebo $P + \mathrm{i}\,Q$ funkcí [proměnné] $p - \mathrm{i}\,q$ a $P - \mathrm{i}\,Q$ funkcí [proměnné] $p + \mathrm{i}\,q$. Nyní ještě ukážme, že pokaždé v jednom řešení mají části [obrazu] v zobrazení současně podobnou polohu jako [ve vzoru] zobrazovaného; naproti tomu v jiném řešení leží opačně; zároveň uveďme kritérium, podle něhož bude toto možné rozlišit a priori.

Nejprve poznamenejme, že o souhlasné nebo opačně orientované podobnosti[35] může být řeč pouze natolik, nakolik budou na každé z obou ploch rozlišitelné dvě strany, z nichž bude jedna považována za horní, druhá za spodní. Protože toto je samo o sobě libovolně [dáno], nejsou obě řešení zcela bytostně rozdílná a opačně orientovaná podobnost se změní v souhlasně orientovanou,

[34] V pojetí tohoto zobrazení tedy vzoru. [pozn. překl.]

[35] Doslova přímé nebo opačné podobnosti. [pozn. překl.]

jakmile se u jedné plochy uděláme spodní stranu z té, kterou jsme předtím považovali za horní.[36] Při našem řešení k tomuto rozlišení vůbec nedošlo, protože plochy byly určeny pouze souřadnicemi svých bodů. Chceme-li se tímto rozdílem zabývat, budeme muset nejprve určit povahu [charakter] plochy jiným způsobem, který v sobě tento rozdíl zahrnuje.[37] Za tímto účelem předpokládejme, že povaha první plochy bude dána rovnicí $\psi = 0$, kde ψ je daná monotónní funkce [proměnných] x, y, z. Ve všech bodech plochy se tak bude hodnota [funkce] ψ nulovat a ve všech bodech prostoru, které této ploše nenáleží,[38] se nulovat nebude. Při průchodu plochou pak bude – alespoň obecně řečeno – hodnota [funkce] ψ [přecházející] z kladné v zápornou, při [průchodu] opačným [směrem] se bude proměňovat ze záporné v kladnou, nebo na jedné straně plochy bude hodnota [funkce] ψ kladná, na druhé záporná: první [stranu] považujme za horní, druhou za spodní. Stejné nechť je to i u druhé plochy, jejíž povaha je stanovena rovnicí $\Psi = 0$, kde Ψ je daná monotónní funkce souřadnic X, Y, Z. Nechť dále existuje diferencování

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi &= e\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z, \\ \mathrm{d}\Psi &= E\,\mathrm{d}X + G\,\mathrm{d}Y + H\,\mathrm{d}Z, \end{aligned}$$

kde e, g, h budou funkce [proměnných] x, y, z a E, G, H funkce [proměnných] X, Y, Z.

Protože úvahy, kterými musíme dospět ke stanoveným cílům nejsou samy o sobě těžké, avšak přesto poněkud neobvyklého rázu, budeme se snažit je co nejvíce projasnit. Mezi dběma navzájem si odpovídajícími zobrazeními na plochách, jejichž rovnice jsou $\psi = 0$ a $\Psi = 0$, předpokládejme šest mezizobrazení v rovině, takže přichází v úvahu osm různých zobrazení,[39] totiž

[36] Shodně a opačně orientovaná podobnost budou mít stejný smysl (logos) jako horní a spodní strana. [pozn. překl.]

[37] Tak činí ve svých pracích Möbius, srv. např. Zwei geometrische Aufgaben in August Ferdinand Möbius: *Gesammelte Werke*, Bd. 1, s. 391–398, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885.

[38] Tj. ve všech bodech prostoru mimo tuto plochu. [pozn. překl.]

[39] A z toho vyplývající také osm různých značení. [pozn. překl.]

		přičemž se za odpovídající (souhlasné) považují body, jejichž souřadnice =		
1.	původní obraz v ploše, jejíž rovnice $\psi = 0$…	x,	y,	z
2.	zobrazení v rovině…	x,	y,	0
3.	— ″ — …	t,	u,	0
4.	— ″ — …	p,	q,	0
5.	— ″ — …	P,	Q,	0
6.	— ″ — …	T,	U,	0
7.	— ″ — …	X,	Y,	0
8.	zobrazení v ploše, jejíž rovnice $\Psi = 0$…	X,	Y,	Z

Nyní tedy tato různá zobrazení navzájem porovnejme pouze s ohledem na vzájemnou *polohu* nekonečně malých lineárních elementů s tím, že poměr velikostí odložíme zcela stranou. Dvě zobrazení budeme tedy považovat za podobná, se souhlasnou orientací, jestliže ze dvou výchozích lineárních elementů, vycházejících z jednoho bodu, tomu, který v prvním zobrazení leží vpravo, odpovídá ve druhém zobrazení [element], který také vpravo. V opačném případě se zobrazení budou nazývat opačně orientovaná. U roviny, tedy v [případech] číslo 2–7, se vždy považuje za horní stranu ta, v níž leží kladné hodnoty třetí souřadnice; u první a poslední plochy je naproti tomu rozlišení horní a dolní strany závislé jen na kladné nebo záporné hodnotě ψ a Ψ, jak již bylo stanoveno výše.

Zde je tedy nejprve jasné, že pro každé místo první plochy, kde se při nezměněných [proměnných] x a y pomocí kladného přírůstku [proměnné] z dostaneme na její horní stranu, bude zobrazení v [případě] 2 se zobrazením v [případě] 1 podobně a souhlasně orientované: to bude zjevně platit všude tam, kde je h kladné; opak nastane při záporném h; tam bude zobrazení opačně orientované.

Stejně souhlasně nebo opačně orientovaná budou zobrazení v [případech] 7 a 8 podle toho, zda je H kladné nebo záporné.

Abychom se mezi sebou porovnali zobrazení v [případech] 2 a 3, stanovme, že v prvně jmenovaném [zobrazení] je ds délka nekonečně malé linie, vedoucí z bodu, jehož souřadnice jsou x, y, do jiného [bodu] o souřadnicích $x + \mathrm{d}x$, $y + \mathrm{d}y$, a l odklon je od abscisy[40] rostoucí v tom smyslu, ve kterém přecházíme od osy x k ose y, tedy

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s \cdot \cos l, \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \cdot \sin l.$$

[40]Viz pozn. 22 na straně 95. [pozn. překl.]

V zobrazení [v případě] 3 je $\mathrm{d}\sigma$ velikost linie, která odpovídá $\mathrm{d}s$, a její odklon od abscisy, ve stejném smyslu jako předtím, [je] λ, takže

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\sigma \cdot \cos\lambda, \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}\sigma \cdot \sin\lambda.$$

Podle značení 4. odstavce tedy máme

$$\mathrm{d}s \cdot \cos l = \mathrm{d}\sigma(a\cos\lambda + a'\sin\lambda),$$
$$\mathrm{d}s \cdot \sin l = \mathrm{d}\sigma(b\cos\lambda + b'\sin\lambda)$$

a z toho

$$\operatorname{tg} l = \frac{b\cos\lambda + b'\sin\lambda}{a\cos\lambda + a'\sin\lambda}.$$

Považujeme-li nyní x a y za konstanty a l, λ za proměnné, pak diferencováním dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{ab' - ba'}{(a\cos\lambda + a'\sin\lambda)^2 + (b\cos\lambda + b'\sin\lambda)^2} =$$
$$= (ab' - ba') \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\mathrm{d}s^2}.$$

Lze tedy vidět, že podle toho, zda je $ab' - ba'$ kladné *nebo* záporné, pak l a λ buď zároveň rostou, *nebo* se mění opačně,[41] a že tedy v prvním případě jsou zobrazení [v případech] 2 a 3 souhlasně orientovaná.[42]

Z propojení tohoto výsledku s dřívějším zjištěním vychází, že zobrazení v [případech] 1 a 3 jsou souhlasně nebo opačně orientovaná podle toho, zda $\frac{ab'-ba'}{h}$ je kladné nebo záporné.

Protože na ploše, jejíž rovnice je $\psi = 0$, [platí]

$$e\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z = 0,$$

a tedy také

$$(ea + gb + hc)\,\mathrm{d}t + (ea' + gb' + hc')\,\mathrm{d}u = 0,$$

ať už zvolíme jakýkoli poměr $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}u$, musí zjevně identicky [platit]

$$ea + gb + hc = 0, \qquad ea' + gb' + hc' = 0,$$

z čehož plyne, že e, g, h, resp. veličiny $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ jsou úměrné,[43] tedy

$$\frac{bc' - cb'}{e} = \frac{ca' - ac'}{g} = \frac{ab' - ba'}{h}.$$

[41] Jedna veličina roste, druhá klesá. [pozn. překl.]

[42] V druhém případě jsou pak orientovaná opačně. [pozn. překl.]

[43] Souměřitelné, proporcionální; uvedené veličiny mají stejný vzájemný poměr. [pozn. překl.]

Jako kritérium souhlasné nebo opačné orientace části v zobrazení [v případech číslo] 1 a 3 lze tedy [použít] kterýkoliv z těchto tří výrazů nebo symetrickou veličinu

$$ebc' + gca' + hab' - ecb' - gac' - hba',$$

vzniklou násobením s kladnou veličinou $ee + gg + hh$.

Právě tak bude souhlasná nebo opačná orientace částí [plochy] v zobrazeních [v případech] 6 a 8 záviset na kladné nebo záporné hodnotě veličiny

$$\frac{BC' - CB'}{E} = \frac{CA' - AC'}{G} = \frac{AB' - BA'}{H}$$

nebo, chcete-li raději, na symetrické [formě veličiny]

$$EBC' + GCA' + HAB' - ECB' - GAC' - HBA'.$$

Porovnání zobrazení v [případech] 3 a 4 je založeno na zcela obdobných důvodech jako u [zobrazení v případech] 2 a 3 a souhlasná nebo opačná orientace částí [plochy] závisí na kladném nebo záporném znaménku veličiny

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right);$$

a stejně určuje kladné nebo záporné znaménko [veličiny]

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)$$

souhlasnou nebo opačnou orientaci částí [plochy] v zobrazeních [v případech] 5 a 6.

A konečně – pokud jde o porovnání zobrazení [v případech] 4 a 5 mezi sebou – můžeme se odvolat na analýzu 8. odstavce, ze které vysvítá, že tato zobrazení jsou v nejmenších částech podobná a souhlasně či opačně orientovaná podle toho, zda jsme zvolili první nebo druhé řešení, tj. stanovili buď

$$P + \mathrm{i}\,Q = f(p + \mathrm{i}\,q) \qquad \text{a} \qquad P - \mathrm{i}\,Q = f'(p - \mathrm{i}\,q),$$

anebo

$$P + \mathrm{i}\,Q = f(p - \mathrm{i}\,q) \qquad \text{a} \qquad P - \mathrm{i}\,Q = f'(p + \mathrm{i}\,q).$$

Z toho všeho spějeme nyní konečně k závěru, že pokud má být zobrazení na ploše, jejíž rovnice je $\Psi = 0$, původnímu vzoru na ploše, jejíž rovnice je $\psi = 0$, v nejmenších částech nejen podobné, ale také souhlasně orientované, pak je nutno zohlednit počet záporných veličin, vyskytujících se mezi těmito čtyřmi veličinami:

$$\frac{ab' - ba'}{h},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U}\right) - \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right),$$

$$\frac{AB' - BA'}{H}$$

není-li mezi nimi žádný nebo je-li jich sudý počet, bude nutno zvolit první řešení; je-li [počet] záporných [veličin] jedna nebo tři, pak zvolíme druhé. Při opačné volbě dostaneme pokaždé opačně orientovanou podobnost.

Ostatně se dá ještě ukázat, že označíme-li výše uvedené čtyři veličiny r, s, S, R, bude vždy

$$\frac{r\sqrt{ee + gg + hh}}{s} = \pm n,$$

$$\frac{E\sqrt{EE + GG + HH}}{S} = \pm N,$$

mají-li n a N význam, uvedený v 5. odstavci; zde však opomineme snadno nalezitelný důkaz této věty, protože ten už pro náš účel není nutný.

[*Poznámky na okraj v Gaussově rukopise*:]

[Odst. 10 vedle poslední rovnice k určení [hodnoty] λ]

nebo $\lambda = \cos u^*$, má-li být pro $u = u^*$ hodnota [zvětšovacího poměru] minimální.

[Odst. 12 vedle rovnice, pomocí níž je v tomto výtisku zavedena veličina w]

Znak ω je v tisku použit v rozporu s mým záměrem: mělo by být w.

[Odst. 13 vedle rovnic, vztahujících se k zobrazení, určenému funkcí $fv = v - \mathrm{i}\log k$, jsou zaznamenány odpovídající rovnice pro funkci $fv = \alpha v - \mathrm{i}\log k$, které byly později zahrnuty v prvním pojednání Zkoumání předmětů vyšší geodézie.[44]]

[44] Gaussův spis *Abhandlung der Untersuchungen über Gegenstände der hohern Geodäsie.*

Carl Friedrich Gauss

Abstrakt
Disquisitiones generales circa superficies curvas

(1827)

Anzeigen. Disquisitiones generales circa superficies curvas

Göttingische gelehrte Anzeigen
No. 177. S. 1761–1768.
1827. November 5.
Reprint: *Werke*, Bd. 4, Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten,
Göttingen 1873, S. 341–347.

Dne 8. října podal pan Hofrath Gauss Královské společnosti přednášku

Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Ačkoli geometři se zabývají mnoha obecnými zkoumáními o křivých plochách a jejich výsledky pokrývají významnou část oblasti vyšší geometrie, i tak je tento předmět [zkoumání] ještě tak mnoho vzdálený od toho, aby byl vyčerpaný, což lze spíše tvrdit, než (do té doby však malým dílem nanejvýš) úrodná pole obdělávat. Skrz řešení úlohy najít všechna zobrazení nějaké dané plochy na nějakou jinou, u nichž zůstavají nejmenší elementy podobné, začal autor před několika lety hledat novou stránku této teorie: účelem současného pojednání je znovu otevřít jiná nová hlediska a rozvinout díl nových pravd, které tím budou zpřístupněny. Ukážeme zde, co může být bez velké rozvláčnosti rozumně vypracováno, musíme však předem poznamenat, že jak tato nová utváření pojmů, tak také tyto věty, mají-li být co největší obecností zahrnuty, [ještě] stále částečně potřebují nějaká omezení nebo přibližná ustanovení, která zde musí být přehlížena.

Při zkoumání, kdy v úvahu přichází varieta[1] směrů přímých linií (přímek) v prostoru, je prospěšné označit tyto směry pomocí těch bodů na nadploše nějaké pevné koule, které jsou koncovými body [linií] rovnoběžně vedenými k poloměru: střed a poloměr této *pomocné koule* jsou zde zcela libovolné; pro poslední [veličinu][2] bude zvolená jednotková úsečka.[3] Tento postup se v podstatě používá totožně jako ten, který je neustále využíván v astronomii, kde se všechny směry na nějaké umělé nebeské sféře charakterizují nekonečně velkým poloměrem. Sférická trigonometrie a další teorémy, kterými autor ještě přikládá nová, častá použití, slouží pak k řešení úlohy, které může skýtat srovnání různých vyskytujících se směrů.[4]

Pokud se podle naznačené metody označí směr normály, vztyčený v každém bodě nějaké křivé plochy, příslušným bodem kulové plochy, tedy že každému bodu křivé plochy v tomto značení může odpovídat jeden bod nadplochy pomocné koule, pak bude obecně řečeno každá linie na křivé ploše odpovídat nějaké linii na nadploše pomocné koule a každý kousek plochy každé [křivé plochy] nějakému kousku plochy v této [nadploše]. Čím je nepatrnější odchylka

[1] V německém originále Mannigfaltigkeit. Anglický překlad infinity je zavádějící. Varieta sice má mohutnost kontinua, nejedná se však ve své podstatě o ordinálně–kardinání, tj. aritmetický, matematický objekt, ale úžeji o geometrickou entitu. [pozn. překl.]

[2] Tedy poloměr. [pozn. překl.]

[3] V německém originále Lineareinheit. Anglický překlad užívá pouhého výrazu unity. [pozn. překl.]

[4] Také ve smyslu různých metod. V německém originále Richtungen. Anglický překlad zde má directions. [pozn. překl.]

onoho kousku od roviny, tím menší bude příslušná část kulové plochy. A to je tedy velice přirozená myšlenka [vedoucí] k míře totální křivosti, která nějaký kousek křivé plochy charakterizuje[5] tím, že použije obsah příslušných kousků kulové plochy. Autor nazývá pak tento obsah *integrální křivost (curvatura integra)*[6] příslušného kousku křivé plochy. Kromě velikosti [kousku] se ale zároveň uvažuje ještě *poloha* (orientace) kousku, která je zcela nezávislá na vztahu [jejich] velikosti, v kterém mohou být oba kousky buď souhlasné (podobné),[7] nebo opačné: tyto oba případy mohou být rozlišeny totální křivostí [a] označené kladným nebo záporným znaménkem. Toto rozlišení má však určitý význam jen potud, pokud jsou zamýšleny obrazce na obou stranách daných ploch: autor je bere při [zobrazení] kulové plochy na vnější[8] stranu a při [zobrazení] křivé plochy na tu stranu, kam se nasměřuje normála, a [z toho] potom plyne: že místo má kladné znaménko pro konvexně–konvexní nebo konkávně–konkávní plochy (které nejsou v podstatě různé) a záporné [znaménko] pro konkávně–konvexní [plochu]. Jestliže v přednášce do tohoto vztahu vstoupí kousek křivé plochy, složený z částí nestejného typu, pak budou nutná ještě bližší definování, která zde musí být zanedbána.

Porovnání obsahů dvou navzájem korespondujících si kousků křivé plochy a nadplochy pomocné koule nyní vede (tím způsobem jako např. z porovnání objemů a hmotností[9] vyplývá hustota) k nějakému novému pojmu. Autor totiž *mírou křivosti* v nějakém bodě křivé plochy nazývá hodnotu zlomku, jehož jmenovatel je obsah nějakého nekonečně malého kousku křivé plochy v tomto bodě a čitatel obsah příslušného kousku plochy pomocné koule, nebo integrální křivost (curvatura integra) onoho elementu. Lze vidět, že (ve smyslu autorově) integrální křivost (curvatura integra) a míra křivosti obou křivých ploch je analogická tomu, co se u křivých linií (křivek) nazývá amplituda (výchylka), resp. jednoduchá křivost; [autor] se zabýval úvahami,[10] zda spíše druhý [pojem/výraz][11] ze zvyku přenášet na křivé plochy z důvodu přiměřenosti. Ostatně [pochyby] spočívají méně na pojmenováních samých než na tom, že jejich zavedení bude výstižnými (pregnantními) větami oprávněné.

Řešení úlohy najít míru křivosti v každém bodě nějaké křivé plochy se jeví

[5]V německém originále beilegen. [pozn. překl.]

[6]Německy *ganze Krümmung*, latinsky *curvatura integra*. V anglosaské literatuře užívaný termín *integral curvature*. Bylo by možné překládat také jako celistvá křivost. [pozn. překl.]

[7]V německém originále änhlich. V anglickém překladu similar. Český překlad je uzpůsoben terminologii podle orientace plochy. [pozn. překl.]

[8]Překládám äussern ve významu äußserlich, tedy vnější. Stejným směrem je veden i anglický překlad.

[9]Die Masse se zde překládá ve fyzikálním významu jako hmotnost, ne jako hmota. [pozn. překl.]

[10]V německém originále er fand Bedenken. Anglický překlad užívá he hesitates. [pozn. překl.]

[11]Tj. jednoduchá křivost

v odlišné [prostové] formě (Gestalt) v souladu se způsobem (podobné tomu), jakým je dána povaha křivé plochy. Nejjednodušší způsob je ten, že body v prostoru budou obecně rozlišeny třemi pravoúhlými souřadnicemi x, y, z, jedna souřadnice se zobrazí jako funkce obou ostatních (zbývajících dvou): přitom se dostane nejjednodušší výraz pro míru křivosti. Zároveň to ale znamená vážnější souvislost mezi mírou křivosti a křivostí [dané] křivky, jež vzniká kolmým řezem křivé plochy s rovinou. Jak je známo, Euler [jako] první ukázal, že dvě tyto řezné roviny, které se nazájem řežou rovněž pod pravým úhlem úhlem, mají vlastnost, že v jedné se nachází místo největšího a v druhé [se nachází místo] nejmenšího poloměru křivosti, nebo správněji, že se v nich nacházejí obě extrémní křivosti. Ze zmíněného výrazu pro míru křivosti zde tedy vyplývá, že bude roven zlomku, jehož čitatel bude jedna [a] jmenovatel bude součinem obou poloměrů křivosti. — Méně jednoduchý bude výraz pro míru křivosti, když je povaha křivé plochy určená rovnicí pro x, y, z, a bude ještě složitější, když povaha křivé plochy bude dána tím, že x, y, z se zobrazí ve formě funkce dvou nových proměnných veličin p, q. V posledním případě obsahuje výraz patnáct členů [a stejně] tak parciální diferenciální členy[12] prvního a druhého řádu pro x, y, z podle p a q: samo o sobě to není příliš důležité, neboť lze úpravou přejít od jednoho k druhému. [Samotná úprava však] musí být připočítána k nejvíce důležitým větám v této teorii. Podle způsobu, jakým se zobrazuje povaha křivé plochy, se [zobrazuje] sám obecný výraz pro nějaký lineární element, neboli pro

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2},$$

[se dostane] forma

$$\sqrt{E\,\mathrm{d}x^2 + 2F\,\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + G\,\mathrm{d}y^2},$$

kde E, F, G budou opět funkce [proměnných] p a q. Tedy uvedený nový výraz pro míru křivosti obsahuje pouze tyto veličiny a jejich parciální diferenciální členy prvního a druhého řádu. Je také vidět, že ke stanovení míry křivosti je nutná pouze znalost obecných výrazů lineárních elementů bez toho, že by bylo zapotřebí [znát] výrazy pro samotné souřadnice x, y, z. Bezprostředním důsledkem je velmi důležitá věta: Pokud lze nějakou křivou plochu nebo nějaký kousek [této křivé plochy] rozvinout na nějakou jinou plochu, pak po rozvinutí zůstane míra křivosti v každém bodě nezměněná. Jako speciální případ z toho dále vyplývá: V [nějaké] křivé ploše, která může být rozvinutelná do roviny, je míra křivosti všude $= 0$. Z toho lze ihned odvodit charakteristickou rovnici [plochy], schopné rozvinutí do roviny: jestliže z bude považována za funkci [proměnných] x a y, [pak]

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y^2} - \left(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y}\right)^2 = 0,$$

[12] V německém originále Differentialquotient. Jedná se o člen, který má tvar parciální derivace nebo diferenciálu. [pozn. překl.]

[tj.] rovnice, jež [je] sice dávno známá, ale podle autorova úsudku nebyla dosud nikdy dokázána (odvozena) s žádoucí (patřičnou) precizností.

Tyto [výše uvedené] věty povedou k tomu, jakou teorii křivých ploch [máme] z nového úhlu pohledu brát v úvahu, když se otevře zkoumání širokého i zcela nepěstovaného pole. Když se [uvažuje] plocha nikoli jako hranice tělesa,[13] ale též jako těleso [samo o sobě], jehož jeden rozměr se ztrácí,[14] a zároveň [je] pružné (ohebné), ale není považované za elastické (roztažitelné), pak je pochopitelné, že je [nutné] rozlišit dvojí podstatné rozdílné vztahy: jednak zejména takové, které předpokládají nějakou určitou formu plochy v prostoru, jednak takové, které jsou nezávislé na rozdílných formách, kterými mohou být plochy přijímány.[15] Druhý [uvažovaný případ] je ten, o čem je zde řeč. Poté co bylo před chvílí poznamenáno, k tomuto [způsobu vyjádření] patří míra křivosti. Snadno lze ale nahlédnout, že právě [k tomuto způsobu] patří [také] uvažování o tom, jak se na ploše konstruují tvary, jejich úhly, jejich plošné obsahy a jejich totální křivost, spojení bodů nejkratšími liniemi a podobně. Všechna taková zkoumání musí z toho vycházet, takže povaha křivé plochy sama o sobě je dána výrazem libovolného neurčitého lineárního elementu ve tvaru $\sqrt{(E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p\cdot\mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2)}$. Autor zapisuje do dnešního pojednání [pouze] část svého zkoumání, které v této oblasti prováděl před více lety, tím, že se omezoval [jen] na ty, které nejdou z prvního začátku odstranit, a k části, jak mohou [být] obecně nápomocné k častým dalším zkoumáním. Pro náš abstrakt se musíme ještě více omezit a spokojit se pouze s několika uvedenými vybranými [příklady zkoumání].

Jestliže se na nějakou křivou plochu z jednoho počátečního bodu nějakého systému rozbíhá nekonečně mnoho nejkratších linií ze stejné [zeměpisné] délky, pak pod pravými úhly skrz její koncový bod překříží[16] odcházející linii, každou touž. Jestliže jsou v každém bodě libovolné linie na křivou plochu kolmo na každou linii protaženy nejkratší linie ze stejné [zeměpisné] délky, pak jsou tyto [linie ze] všech [bodů] také kolmé na ony linie, které je spojují s odlišnými koncovými body. Tyto dvě věty, z čehož ta druhá může být považována za zobecnění první, budou nejen analytické,[17] ale také pomocí jednoduché geometrické úvahy dokázány.[18] *Nadbytek sumy úhlů nejkratšími liniemi tvořeného trojúhelníku nad dvěma pravými je roven totální křivosti trojúhelníku.* Zároveň se bude předpokládat, že úhel, pro který oblouk odpovídá poloměru

[13] Takto o ploše uvažuje Euler nebo Monge. [pozn. překl.]

[14] Nepíše se, že je nulový! Tedy rozměr je infinitesimálně malý, což zakládá oprávněnost uvažovat o (souhlasných) stranách plochy. [pozn. překl.]

[15] Tedy nezávislé na matematickém popisu ploch.

[16] V německém originálu schneidet. Též lze číst jako přeřízne. [pozn. překl.]

[17] Analytické ve smyslu Kantovy transcendentální estetiky. [pozn. překl.]

[18] Tedy budou mít v návaznosti na předchozí poznámku i syntetický charakter. [pozn. překl.]

sféry,[19] [tedy] ($57^\circ\,17'\,45''$), a že integrální křivost jakožto kousek plochy pomocné koule, jehož obsah je roven kvadrátu poloměru,[20] budou brány jako základní jednotky.[21] Zřejmě lze také tak vyjádřit tento důležitý teorém: nadbytek úhlů nejkratšími liniemi tvořeného trojúhelníku nad dva pravé se chová (má poměr) k osmi pravým [tak], jak ten kousek nadplochy pomocné koule, který mu odpovídá jako totální křivost, [se má] k celé nadploše pomocné koule. Obecně bude nadbytek úhlů mnohoúhelníku o n stranách, kterými jsou nejkratší linie, nad $2n-4$ pravé, které jsou rovné [hodnotě][22] integrální křivosti mnohoúhelníku.

Obecně v tomto pojednání rozvinutá zkoumání budou na konci aplikovaná ještě na teorii, v níž se z nejkratších linií tvoří trojúhelníky, z čehož zde uvedeme pouze jednu dvojici hlavních teorémů. Buďte a, b, c strany nějakého takového trojúhelníku (které budou považovány za veličiny prvního řádu); A, B, C protější úhly; α, β, γ míry křivosti ve vrcholech úhlů; σ plošný obsah trojúhelníku, pak je (až na veličiny čtvrtého řádu) $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\sigma$ nadbytek součtu [úhlů] $A+B+C$ nad dvěma pravými. Kromě toho s toutéž přesností jsou úhly rovinných přímočarých trojúhelníků, jejichž strany jsou a, b, c, v uvedeném pořadí

$$
\begin{aligned}
&A-\frac{1}{12}(2\alpha+\beta+\gamma)\sigma,\\
&B-\frac{1}{12}(\alpha+2\beta+\gamma)\sigma,\\
&C-\frac{1}{12}(\alpha+\beta+2\gamma)\sigma.
\end{aligned}
$$

Ihned je vidět, že tento poslední teorém je zobecněním známé [věty] od Legendra, [který ji] poprvé vytvořil, [a] po kterém se (až na veličiny čtvrtého řádu) dostanou úhly rovinného trojúhelníku, když se úhly každého sférického [trojúhelníku] zmenší na třetí díl[23] sférického přebytku. Na nesférické ploše se musí také přidat zmenšení nestejných úhlů (a tato nerovnost je obecně řečeno nějaká veličina třetího řádu). Jestliže se však celá plocha odchyluje pouze malinko od kulového tvaru, pak nezahrnuje navíc nic kromě faktoru řádu odchylky od kulového tvaru. To je bezesporu důležité pro vyšší geodézii, protože člověk je schopen propočítat nerovnosti každého zmenšení (zploštění), a tím získat plné přesvědčení, že pro všechny měřitelné trojúhelníky na povrchu (nadploše) Země jsou [tyto odchylky] považovány za celkem nepatrné. Tedy nechť se najde např. v největším trojúhelníku, který byl autorem propočítáván, triangulace, jehož

[19]Velikost úhlu je 1 radián. [pozn. překl.]

[20]Tedy kousek plochy, který je převeditelný na čtverec o straně, která je rovna poloměru sféry. [pozn. překl.]

[21]Základní jednotkový úhel, resp. jednotku integrální křivosti. [pozn. překl.]

[22]Ve významu maximální.

[23]Tj. třetinu. V německém originále um den dritten Theil. [pozn. překl.]

největší strana je dlouhá téměř 15 geografických mil[24] a ve kterém nadbytek sumy jeho tří úhlů nad dvěma pravými činí téměř 15 sekund.[25] Takže redukce tří úhlů na úhly rovinných trojúhelníků [jsou] 4.″95113, 4.″95104, 4.″95131. Nakonec toto autor rovněž rozvine ve výše uvedené výrazy ([kromě] scházejícího členu čtvrtého řádu, který pro kulovou plochu obdrží velice jednoduchou formu); k měřitelným trojúhelníkům na povrchu (nadploše) Země jsou ale vcelku nepatrné a v uvedeném příkladě budou brány ty, jejichž první redukce je snížena pouze na dvě jednotky pátého desetinného místa a třetí přesně o tolik zvětšena.

[24]Podle poznámky v anglickém překladu činí německá geografická míle čtyři obloukové minuty z oblouku na rovníku, tedy 7,42 kilometru. Poznámka uvádí též přepočet na anglickou míli. [pozn. překl.]

[25]Úhlových vteřin. [pozn. překl.]

Carl Friedrich Gauss

Obecné pojednání o křivých plochách

(1827)

Disquisitiones generales circa superficies curvas
Commentationes societatis Gottingensis recentiores, vol. VI (1828), s. 99–146.
Reprint: *Werke*, Bd. 4, Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten,
Göttingen 1873, s. 219–258.

Allgemeine Flächentheorie
transl. & ed. Albert Wangerin, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig 1889,
51 s.

General Investigations of Curved Surfaces
transl. & ed. Peter Pesic, Dover Publications, Mineola, NY 2005, 140 s.

1

Zkoumání, ve kterých jsou uvažovány směry různých přímočarých linií[1] v prostoru,[2] dosahují většího sklonu jasnosti a jednoduchosti, pokud zapojíme jako pomocně zvolenou kulovou plochu poloměru = 1 opsanou okolo libovolného středu,[3] [tedy] doporučujeme vést jednotlivými body [na nadploše kulové plochy] reprezentované směry přímočarých linií rovnoběžných k radiálám (poloměrům) v nich končících. Pak pozice každého bodu v prostoru je popsána třemi souřadnicemi, totiž pomocí vzdálenosti [bodu od] tří pevných navzájem kolmých rovin; je nutné přede vším uvažovat směry os kolmých na tyto roviny: body kulových ploch, jež reprezentují tyto směry, budeme značit (1), (2), (3); vzájemná vzdálenost mezi nimi navzájem[4] bude kvadrant. Ostatně předpokládáme, že směry os a jim příslušné části jsou ty, v nichž odpovídající souřadnice narůstají.

2

Nebude zbytečné zde shrnout tvrzení, která se v tomto případě často používají.

I. Úhel mezi dvěma přímočarými liniemi, jež se protínají,[5] je měřen pomocí úhlu mezi body, které na kulové ploše směrům odpovídají.

II. *Situs*,[6] jež může být representován libovolnou rovinou pomocí největší kružnice na kulové ploše, jejíž rovina je rovnoběžná s ní.[7]

III. Úhel mezi dvěma rovinami je roven sférickému úhlu mezi největšími [po kouli vedenými] kružnicemi jimi reprezentovanými a v důsledku také je

[1]Latinsky rectarae, tj. přímých, tedy moderně přímek. [pozn. překl.]

[2]V německém překladu je ovšem „bei denen eine Mannigfaltigkeit von Richtungen gerader Linien im Raume ins Spiel kommt“, tj. v nichž do hry vstupuje varieta směrů přímých linií. [pozn. překl.]

[3]Gaussova idea pomocné kulové plochy má základ v astronomii. Srov. též Gaussův *Abstrakt*. [pozn. překl.]

[4]Jednoho z těchto bodů od dalšího ze zbývajících dvou. [pozn. překl.]

[5]V případě moderní, současné interpretace pro eukleidovský prostor se jedná o různoběžné přímky. [pozn. překl.]

[6]V této pasáži má situs význam orientace. V němčině užito die Stellung. Obecně Gauss užívá situs pro směr nebo orientaci roviny, polohu roviny, směr linie a pozici bodu.
Gaussův situs se zdá pro geometrii (a mechaniku) klíčovým matematicko-filosofickým pojmem. Nejedná se už o Leibnizův situs, ale spíše předznamenává situs Poincarého, tedy ve smyslu topologickém. Vzhledem k obtížnosti pojmu se jeví, že je vhodnější nepřekládat podle významu (jak činí anglický překlad), ale lépe ponechat nepřeložitelný latinský výraz. [pozn. překl.]

[7]Je rovnoběžná s danou rovinou. [pozn. překl.]

měřitelný úhlem, zachyceným mezi póly těchto největších kružnic.[8] A stejně tak úhel odchylky přímočaré linie od roviny je měřen obloukem z bodu, který odpovídá směru přímočaré linie, do [bodu kulové plochy, určeného] normálou největší kružnice, která určuje situs roviny.

IV. Buďte označeny x, y, z; x', y', z' souřadnice dvou bodů, r jejich vzdálenost a L bod, který na sférické ploše reprezentuje směr přímočaré linie, vedený z bodu prvního do druhého, bude

$$\begin{aligned} x' &= x + r\cos(1)L, \\ y' &= y + r\cos(2)L, \\ z' &= z + r\cos(3)L. \end{aligned}$$

V. Z toho snadno plyne, rovněž obecně

$$\cos^2(1)L + \cos^2(2)L + \cos^2(3)L = 1,\text{[9]}$$

budiž označen L' další bod na sférické ploše, pak je

$$\cos(1)L \cdot \cos(1)L' + \cos(2)L \cdot \cos(2)L' + \cos(3)L \cdot \cos(3)L' = \cos LL'.$$

VI.[10] Teorém. *Nechť jsou označeny L, L', L'', L''' čtyři body na sférické ploše a A úhel, jež tvoří oblouk LL', [resp.] $L''L'''$ v bodě průsečíku, pak je*

$$\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' = \sin LL' \cdot \sin L''L''' \cdot \cos A.$$

Důkaz. Budiž navíc písmenem A označen samotný bod průsečíku a [buď] položeno

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t'''.$$

Takže máme

$$\begin{aligned} \cos LL'' &= \cos t \cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A, \\ \cos L'L''' &= \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A, \\ \cos LL''' &= \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A, \\ \cos L'L'' &= \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A \end{aligned}$$

[8] Anglický překlad má pouze great circle; latinský originál circulus maximus; německý grössten Kugelkreisten. [pozn. překl.]

[9] V latinském originálu je

$$\cos(1)L^2 + \cos(2)L^2 + \cos(3)L^2 = 1.$$

Při překladu použita současná notace. Podobně značí i anglický a německý překlad. [pozn. překl.]

[10] Věta je původem Gaussova; stejně tak metoda odvozování VII.

a následně

$$\begin{aligned}\cos LL'' \cdot \cos L'L''' - \cos LL''' \cdot \cos L'L'' =\\ = \cos A(\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t'' =\\ - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''') =\\ = \cos A(\cos t \sin t' - \sin t \cos t')(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''') =\\ = \cos A \cdot \sin (t' - t) \cdot \sin (t''' - t'') =\\ = \cos A \cdot \sin LL' \cdot \sin L''L'''.\end{aligned}$$

Ale protože pro každou největší kružnici existují obě větve vycházející z bodu A, tyto dvě větve v tomto bodě vytváří dva úhly, které jeden druhému jsou doplňkem do 180°:[11] avšak naše analýza ukazuje, že tyto větve se berou takové, že příslušné směry [jsou] ve smyslu postupu z bodu L do L' a podobně (souhlasně) z bodu L'' do L''': protože největší kružnice se protínají ve dvou bodech, je jasné, zda další ze dvou bodů mohou být libovolně zvolené. A tedy namísto úhlu A může být použitý oblouk mezi póly největších kružnic, jejichž částmi jsou oblouky LL', $L''L'''$: jenže je také zjevné, že tyto póly jsou vybrány takové, které jsou podobně umístěny namísto těchto oblouků; totiž jestliže pól leží napravo, pak procházíme od L do L' a od L'' do L''', anebo [pól leží] nalevo.

VII. Nechť jsou L, L', L'' tři body na sférické ploše a položme v tomto případě zkrátka

$$\begin{aligned}\cos (1)L &= x, & \cos (2)L &= y, & \cos (3)L &= z,\\ \cos (1)L' &= x', & \cos (2)L' &= y', & \cos (3)L' &= z',\\ \cos (1)L'' &= x'', & \cos (2)L'' &= y'', & \cos (3)L'' &= z''\end{aligned}$$

neboli

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \triangle.$$

Buď λ označení pólu největší kružnice, jejíž částí je oblouk LL', a [to] právě toho, který leží vzhledem k tomuto oblouku stejně jako bod (1) vůči oblouku (2)(3). Potom z uvedeného teorému je

$$yz' - y'z = \cos (1)\lambda \cdot \sin (2)(3) \cdot \sin LL';$$

nebo protože (2)(3) = 90°,[12] je

$$yz' - y'z = \cos (1)\lambda \cdot \sin LL',$$

a stejně tak

$$\begin{aligned}zx' - z'x &= \cos (2)\lambda \cdot \sin LL',\\ xy' - x'y &= \cos (3)\lambda \cdot \sin LL'.\end{aligned}$$

[11] Tj. jejichž součet (suma) je 180°. [pozn. překl.]
[12] Tedy $\sin (2)(3) = 1$. [pozn. překl.]

Násobením těchto rovnic x'', y'', resp. z'' a sečtením dostaneme pomocí druhé věty v V.[13] tvrzení [takovýto následující vztah]

$$\Delta = \cos \lambda L'' \cdot \sin LL'.$$

Nyní jsou k rozlišení tři případy. *První*: když L'' leží na největší kružnici, jejíž částí je oblouk LL', bude

$$\lambda L'' = 90^\circ, \qquad \text{a tedy} \quad \Delta = 0.$$

Jestliže L'' leží mimo největší kružnici, nastane *druhý* případ, když L'' je na stejné straně jako λ. *Třetí* případ [nastane], když jsou na opačných stranách: v těchto [posledních dvou] případech body L, L', L'' tvoří sférický trojúhelník a v druhém případě tyto body leží ve stejném pořadí jsko body (1), (2), (3) a v opačném pořadí ve třetím případě. Označením úhlů tohoto trojúhelníku jednoduše pomocí L, L', L'' a spuštěním kolmice na kulovou plochu z bodu L'' na stranu LL', označenou p, bude

$$\sin p = \sin L \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin L'L''$$

a tedy

$$\lambda L'' = 90^\circ \mp p,$$

s hodnotou horního znaku v druhém případě, dolního [znaku] ve třetím [případě]. Z toho shrnujeme

$$\begin{aligned} \pm \Delta = \sin L \cdot \sin LL' \cdot \sin LL'' = \sin L' \cdot \sin LL' \cdot \sin L'L'' = \\ = \sin L'' \cdot \sin LL'' \cdot \sin L'L''. \end{aligned}$$

Potom je zjevné, že první případ může být posuzován a bez problémů chápán jako druhý nebo třetí, když výraz $\pm\Delta$ představuje šestkrát objem čtyřstěnu,[14] postavenými body L, L', L'' a středem sféry. Konečně zde snadno shrnujeme, že stejným výrazem $\pm\frac{1}{6}\Delta$ zobecníme vysloveně objem libovolného čtyřstěnu obsaženého mezi původními souřadnicemi a body, jejichž souřadnice jsou

$$x, y, z; \quad x', y', z'; \quad x'', y'', z''.$$

[13]Latinský reprint ve *Werke* obsahuje překlep „v Y“. V původním otištění v *Commentationes societatis Gottingensis recentiores* namísto V je V. [pozn. překl.]

[14]„Pyramidy“. Latinský originál má pyramidis. [pozn. překl.]

3

Říkáme, že křivá plocha s bodem A, má v tomto místě spojitou křivost, jestliže směry vedené všemi přímočarými liniemi z A do všech bodů plochy, nekonečně blízko vzdálené od A,[15] jsou nekonečně málo odchýleny od [nějakého libovolného] jednoho [bodu] stejné [této] roviny určené pomocí A:[16] tuto rovinu nazýváme *tečnou* ke křivé ploše v bodě A. Jestliže tato podmínka není splněna v nějakém bodě, pak je zde spojitost křivosti přerušena, což nastává např. ve vrcholu kužele. Představená zkoumání se omezí na takové křivé plochy (nebo části takových ploch), ve kterých se spojitost křivosti nikde nepřeruší.[17] Zde pouze pozorujeme, že metody, které se používají k určení umístění tečné roviny, pro singulární body, v nichž je spojitost křivosti přerušena, ztrácí svou působnost (platnost) a vedou k neurčitým[18] závěrům.

4

Poloha tečné roviny se nejpohodlněji rozpozná z polohy normálové přímočaré linie v bodě A, která se též nazývá normála křivé plochy [v bodě A]. Označme směr této normály pomocí bodu L na nadploše pomocné sféry a položme

$$\cos(1)L = X, \quad \cos(2)L = Y, \quad \cos(3)L = Z,$$

[zatímco] souřadnice bodu A označíme pomocí x, y, z. Dále jsou $x+\mathrm{d}x$, $y+\mathrm{d}y$, $z+\mathrm{d}z$ souřadnice jiného bodu A' na křivé ploše; $\mathrm{d}s$ jeho nekonečně malá vzdálenost od A; a konečně λ bod na kulové ploše reprezentovaný směrem elementu AA'. Takže bude

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s \cdot \cos(1)\lambda, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s \cdot \cos(2)\lambda, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}s \cdot \cos(3)\lambda;$$

a protože musí být $\lambda L = 90°$, [pak také]

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0.$$

Z kombinace těchto rovností odvodíme

$$X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z = 0.$$

[15] Topologicky tedy bereme body v okolí bodu A. [pozn. překl.]

[16] Anglický překlad uvádí the same plane passing through A. Doplněním budiž poznámka k anglickém překladu: geometrická podmínka zde uvedená, že křivost spojitá v každém bodě plochy pojitá (nebo části plochy), je ekvivalentní analytické podmínce, že první a druhá derivace funkce nebo funkcí definující plochu jsou konečné a spojité ve všech bodech plochy (nebo částech plochy). [pozn. překl.]

[17] Moderní diferenciální geometrie říká těmto plochám *hladké*. [pozn. překl.]

[18] Nedefinovatelným či až nepředvídatelným. [pozn. překl.]

Získali jsme tak dvě obecné metody k určení povahy[19] křivé plochy. *První* metoda používá rovnici mezi souřadnicemi x, y, z, kterou můžeme redukovat na tvar

$$W = 0,$$

kde W bude funkce nezávislých [proměnných] x, y, z. Buď úplný diferenciál[20] funkce W

$$\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

a na křivé ploše bude

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0,$$

a následně [čehož je]

$$P\cos(1)\lambda + Q\cos(2)\lambda + R\cos(3)\lambda = 0.$$

Pokud tato rovnice stejně tak jako ta, kterou jsme výše stanovili, musí být splněna pro směry všech elementů ds na křivé ploše, snadno vidíme, že X, Y, Z musí být úměrné k P, Q, R; v důsledku protože

$$XX + YY + ZZ = 1,$$

bude buď

$$X = \frac{P}{\sqrt{PP + QQ + RR}},$$

$$Y = \frac{Q}{\sqrt{PP + QQ + RR}},$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{PP + QQ + RR}},$$

nebo

$$X = \frac{-P}{\sqrt{PP + QQ + RR}},$$

$$Y = \frac{-Q}{\sqrt{PP + QQ + RR}},$$

$$Z = \frac{-R}{\sqrt{PP + QQ + RR}}.$$

[19]Též charakter. V latinském originálu je indolem. Jinde nature, tedy povaha. [pozn. překl.]

[20]Tedy totální diferenciál. [pozn. překl.]

Druhá metoda[21] se týká souřadnic ve tvaru funkce dvou proměnných p, q. Předpokládejme, že diferencováním těchto funkcí vychází

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q, \\ \mathrm{d}y &= b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q, \\ \mathrm{d}z &= c\,\mathrm{d}p + c'\,\mathrm{d}q, \end{aligned}$$

kterýmižto substituováním [těchto] hodnot do výše uvedené formule dostaneme

$$(aX + bY + cZ)\,\mathrm{d}p + (a'X + b'Y + c'Z)\,\mathrm{d}q = 0.$$

Protože tato rovnice musí platit[22] nezávisle na hodnotách diferenciálů $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, musí být zjevné, že

$$aX + bY + cZ = 0, \qquad a'X + b'Y + c'Z = 0,$$

odkud shrnujeme, že X, Y, Z musí být úměrné veličinám

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'.$$

Položme tedy v tomto případě zkrátka

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \Delta,$$

[pak] bude buď

$$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta},$$

anebo

$$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}.$$

[21] Wangerin k německému překladu připisuje následující poznámku: „Druhá metoda zobrazující jednu plochu (výraz souřadnic pomocí dvou pomocných proměnných) byl poprvé užit Gaussem pro libovolné plochy u úlohy konformního zobrazení [Astronomische Abhandlungen, ed. H. C. Schumacher, vol. III, Altona 1825; též Gauss, Werke, vol. IV, p. 189; reprint v Ostwaldových Klassiker, vol. 55; srov. též Gaussovu práci „Theoria attractionis corpum sphaer. ellipt.“, Comment. Gott. II, 1813; Gauss, Werke, vol. V, p. 10]. Zde poprvé aplikuje toto zobrazení, aby určil směr normály plochy a později také ke studiu křivosti a geodetických linií. Geometrický význam proměnných p, q se více rozebírá v odstavci 17. Tato metoda zobrazení utváří zdroj mnoha nových tvrzení, z nichž je potřeba především zmínit následující: důsledek, že míra křivosti s ohybem plochy zůstává neměnná (odst. 11, 12); teorémy odst. 15, 16 zaobírající se geodetickými liniemi; teorém odst. 20; a konečně výsledky odvozené v závěru, které odkazují ke geodetickému trojúhelníku vzhledem k přímkovému trojúhelníku, jehož strany mají stejné délky.“

[22] Doslova musí mít místo, tj. platnost a význam zároveň. [pozn. překl.]

K těmto dvěma metodám přistupuje *třetí*, kde jedna souřadnice, např. z, je vyjádřena ve tvaru funkce ostatních [dvou souřadnic] x, y: tato metoda není zjevně ničím jiným, než zvláštním případem buď první, nebo druhé metody. Jestliže položíme

$$\mathrm{d}z = t\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y,$$

[pak] bude buď

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1+tt+uu}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1+tt+uu}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+tt+uu}},$$

anebo

$$X = \frac{t}{\sqrt{1+tt+uu}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1+tt+uu}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+tt+uu}}.$$

5

Dvě řešení, nalezená v předchozím odstavci, jsou zjevně [vztažená] k opačným bodům kulové plochy, nebo odkazují k opačným směrům, což souvisí s přirozeností, protože normála může být vedena na obě strany křivé plochy. Jestliže se rozlišuje mezi dvěma stranami souvislé plochy[23] a jednu budeme nazývat vnější a druhou vnitřní, pak můžeme oběma normálám přidělit jejich příslušné řešení pomocí teorému odvozeného v odstavci 2 (VII) a zároveň ustavit kritérium, kterým se odliší jedna strana od druhé.[24]

V první metodě bylo takové kritérium, podané na základě znaménka hodnoty veličiny W. Totiž obecně řečeno křivá plocha rozděluje prostor na části,

[23]Mezi dvěma ohraničenými oblastmi na této ploše. [pozn. překl.]

[24]V anglickém překladu je zde uvedena část Wangerinovy poznámky, vztahující se k celému odstavci: „K rozhodnutí otázky, který z těchto obou systémů hodnot, nalezených v odst. 4, pro X, Y, Z náleží ke směru vnější normály a který ke směru vnitřní normály, potřebujeme akorát použít teorém z odst. 2 (VII) za předpokladu, že použijeme druhou metodu zobrazování plochy. Pokud naopak je plocha definovaná rovnicí $W = 0$ mezi souřadnicemi navzájem, pak následující jednodušší úvahy vedou k odpovědi. Povedeme linii $\mathrm{d}\sigma$ z bodu A vně [plochy]. Potom jestliže $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ jsou projekce $\mathrm{d}\sigma$, máme

$$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z > 0.$$

Na druhou stranu jestliže úhel mezi σ a vnější normálou je ostrý, pak

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sigma}X + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\sigma}Y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\sigma}Z > 0.$$

Tato podmínka, protože je $\mathrm{d}\sigma$ kladné, se musí zkombinovat s předešlou, jestliže první řešení se bere pro X, Y, Z. Tento výsledek se dostane podobně, jestliže plocha je analyticky definovaná třetí metodou.“ [pozn. překl.]

ve které W získá kladnou hodnotu a ve které hodnota z W se stává záporná. Z teorému je snadno vidět, že jestliže W získá kladnou hodnotu oproti vnější straně a jestliže normálu uvažujeme vztyčenou vně, pak získáme první řešení. Navíc v jakémkoli případě se snadno dovolává, zda přes celou plochu platí stejné pravidlo o znaménku W nebo zda pro různé části budou různá pravidla: dokud koeficienty P, Q, R mají konečné hodnoty a nejsou všechny tři zanedbatelné, nebude pravidlo spojitosti doznávat jakékoli změny.

Jestliže sledujeme druhou metodu, můžeme na křivé ploše pojmout (koncipovat) dva systémy křivočarých linií: jeden, pro který je p proměnná, q konstanta; druhý, pro který je q proměnná, p konstanta: vzájemná poloha těchto linií vztahující se k vnější straně bude určovat, které ze dvou řešení se musí přijmout. Totiž kdykoli tři linie, totiž větve linie prvního systému vycházející z bodu A, jakmile roste p, větev linie druhého systému vycházející z bodu A, jakmile q narůstá, a normála směřuje z vnější strany leží *souhlasně* jako osy x, y, resp. z od počátku abscis (např. jestliže jak pro první tři linie, tak pro druhé tři, můžeme pojímat první vlevo, druhou vpravo, třetí dopředu), pak musíme přijmout první řešení; ovšem jakmile je vzájemná poloha tří linií opačná vůči vzájemné poloze os x, y, z, bude platit druhé řešení.

Ve třetí metodě je [vidět], zda zatímco z dostává kladný přírůstek, zůstávají x a y neměnné (invariantní), průchod bude proti straně vnější či vnitřní. V prvním případě pro normálu směřující ven platí první řešení, v druhém [případě] druhé [řešení].

6

Přeneseme směr normály na křivé ploše na nadplochu kulové plochy tak, že [každý] určitý bod první plochy odpovídá určitému bodu v druhé [ploše], tak také jakákoli linie nebo jakýkoli tvar v [první] je representován odpovídající linií nebo tvarem v [druhé]. Při porovnání dvou tvarů tímto způsobem vzájemně si odpovídajících, kde jeden bude obrazem druhého, jsou sledovány dva monenty: jeden, kdy se uvažuje pouze množství,[25] druhý, kdy se abstrahuje od množství a rozvažujeme samotný situs.[26]

První moment bude základem některých pojmů, což se zdá užitečné pro teorii křivých ploch přijmout. Zejména každé části křivé plochy s určitými limitami přiřadíme *totální křivost* či jinak *integrální* (celou) [křivost], která je

[25]Tedy plošný obsah. V latinském originále quantita; německy Grösse; anglicky quantity. [pozn. překl.]

[26]Zde ve smyslu orientace, poloha. [pozn. překl.]

obsahem tvaru [obrazce] na [křivé ploše] odpovídající kulové ploše. Touto integrální křivostí je také rozlišitelná speciální křivost, kterou nazýváme *mírou křivosti*: posledně zmiňovaná se vztahuje k *bodu* plochy a označuje podíl,[27] který roste, když integrální křivost elementu plochy v sousedství[28] bodu je dělena obsahem elementu, a tudíž značí poměr nekonečně malého obsahu na křivé ploše a na nadploše kulové plochy, navzájem si odpovídající.[29] Užitečnost těchto vylepšení (inovací) tím, co později rozvineme, bude hojně, jak doufáme, schválena. Avšak co se týče terminologie, především jsme se rozhodli poskytnout [návod], jak vyloučit všechny dvojznačnosti,[30] proto jsme mysleli nikoli výhodně, ale výhradně následujíc analogii k terminologii v teorii rovinných křivek běžně přijímané (ačkoli ne všemi schvalované), podle které míra křivosti se jednoduše musí nazývat křivost, avšak integrální (celková) křivost výchylka. Ale proč nemít ve slovech volnost, pokud nebyla prázdná[31] nebo z chybné interpretace?

Situs[32] tvaru na kulové sféře může být buď souhlasný s polohou odpovídajícího tvaru na křivé ploše, anebo opačný (inverzní); první případ je místem, kde obě linie na křivé ploše z téhož bodu nesměřují rovně,[33] ale [ani] ne opačnými směry, odpovídající na kulové ploše ležícím jednoduchým křivkám, totiž kde obraz linií ležících vpravo je vpravo; případ druhý, kde platí opak. Tyto dva případy budeme rozlišovat buď kladným, nebo záporným *znaménkem* míry křivosti. Ale zjevně toto rozlišení může platit pouze tehdy, pokud na obou plochách můžeme zvolit určitou stranu, ve které musí být tvar myslitelný.[34] Na libovolné sféře pokaždé užijeme vnější stranu, od středu odvrácenou: na křivé ploše tedy může být přijata vnější strana ta, jež je za vnější považována, nebo spíše strana stejná s tou, jejíž normála je vzpřímená [vně]; proto zjevně neexistuje žádná změna vzhledem k podobnosti tvarů, jestliže na křivé ploše jak tvar, tak normála [jsou] na opačnou stranu obrácené, pokud [je] samotný obraz stále na stejné straně kulové plochy namalovaný.[35]

[27]Latinsky quotient. [pozn. překl.]

[28]Matematikou 20. století lze mluvit o okolí bodu, ne však ještě v této době. [pozn. překl.]

[29]Dnes je tato definice míry křivosti nejběžnější. V 19. století však byly známé i jiné definice křivosti. Například francouzská matematička a Gaussova korespondentka, Sophie Germain (1776–1831), definovala míru křivosti v bodě plochy jako součet reciprokých hodnot hlavních poloměrů křivky v onom bodě.Italský matematik Felice Casorati (1835–1890) později definoval míru křivosti polovinou součtu čtverců reciprokých hodnot hlavních poloměrů křivky v nějakém bodě plochy. [pozn. překl.]

[30]Ambivalence. [pozn. překl.]

[31]Tedy bez významu. [pozn. překl.]

[32]Orientace umístění. [pozn. překl.]

[33]Tedy nevycházejí stejným směrem. [pozn. překl.]

[34]Musí zde ležet. [pozn. překl.]

[35]Ve smyslu natřený. [pozn. překl.]

Kladné nebo záporné znaménko, kterým pro polohu nekonečně malého tvaru připisujeme *míru* křivosti, také přenášíme na integrální křivost konečného tvaru na křivé ploše. Nicméně jestliže akceptujeme zahrnutí argumentů veškeré obecnosti, [jsou] požadována některá objasnění, kterých se zde jen krátce dotkneme. Dokud je tvar na křivé ploše takový, že k několika bodům na něm odpovídají *různé* body na křivé ploše, definice nepotřebuje další vysvětlování. Kdykoli však tato podmínka místa neplatí, nutně budou některé části tvaru na kulové ploše dvakrát nebo vícekrát započteny, pročež pro souhlasnou, nebo opačnou polohu může narůstat buď kumulace, nebo destrukce. Nejjednodušší bude v takovém případě tvar na křivé ploše uvažovat rozdělený na takové části, které prohlíženy samy o sobě tuto podmínku splňují, každému atributu jeho integrální křivost, množství podle obsahu tvaru na odpovídající kulové ploše, znaménko podle určitého situ.[36] A konečně celému tvaru připsat integrální křivost ze součtu integrálních křivostí, které odpovídají jednoduchým částem. Obecně tedy integrální křivost tvaru je

$$= \int k \,\mathrm{d}\sigma,$$

[kde] $\mathrm{d}\sigma$ označuje element obsahu tvaru, k míru křivosti v libovolném bodě. Ale co se týká geometrické representace tohoto integrálu, následující momenty se k této záležitosti vrátí. Obvod tvaru na křivé ploše (podle restrikce z odst. 3) bude vždy odpovídat linii na kulové ploše, která je sama do sebe uzavřená. Jestliže se sama nikde neprotíná, rozdělí celou kulovou plochu na dvě části, kterážto jedna odpovídá tvaru na křivé ploše a jejíž obsah, kladně nebo záporně přijatý podle toho (a vzhledem k obvodu), zda je její situs[37] souhlasný nebo opačný vůči situ tvaru na křivé ploše, bude představovat integrální křivost [tvaru na křivé ploše]. Kdykoli ale tato linie protne samu sebe jednou nebo vícekrát, bude představovat složitý tvar, k němuž je nicméně možné přiřadit jistý obsah natolik oprávněně, nakolik jsou tvary bez uzlů, [a tento obsah], správně pochopeno, bude vždy představovat právě hodnotu integrální křivosti. Nicméně musíme najít (rezervovat) další příležitost k obecněji pojmutému výkladu teorie těchto tvarů.[38]

7

Zkoumejme nyní výraz k vyjádření míry křivosti pro libovolný bod křivé plochy. Nechť $\mathrm{d}\sigma$ označuje obsah elementu této plochy, $Z\,\mathrm{d}\sigma$ bude obsah projekce

[36] Polohy. [pozn. překl.]

[37] Vzájemná orientace umístění. [pozn. překl.]

[38] Gauss se však nikdy k tomuto záměru studovat nejobecnější tvary zobrazované na sféru nevrátil a tento program neuskutečnil. To čekalo až na jeho následovníky (především francouzského matematika Camilla Jordana (1838–1922)), kteří zapojili novější prostředky komplexní analýzy a topologie. [pozn. překl.]

tohoto elementu do roviny o souřadnicích x, y; a právě tak jestliže $\mathrm{d}\Sigma$ je obsah odpovídajícího elementu na křivé ploše, bude $Z\,\mathrm{d}\Sigma$ obsah projekce do stejné roviny: kladné nebo záporné znaménko samotného Z bude značit, že *situs*[39] projekce je souhlasný nebo opačný *situ* projektovaného elementu: zjevně tedy tyto projekce mají stejné poměry vůči veličině a zároveň stejné vztahy vůči *situ*[40] jako mají elementy samy. Uvažujme nyní trojúhelníkový element na křivé ploše[41] a předpokládejme, že souřadnice tří bodů, které utváří jeho projekci, jsou

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x+\mathrm{d}x, & y+\mathrm{d}y, \\ x+\delta x, & y+\delta y. \end{array}$$

Dvojitý obsah tohoto trojúhelníku bude vyjádřen výrazem

$$\mathrm{d}x\cdot\delta y-\mathrm{d}y\cdot\delta x,$$

a to v kladném nebo záporném tvaru [podle toho], jak *situs*[42] strany z prvního k třetímu bodu vůči straně z prvního druhému bodu je souhlasný nebo opačný vůči *situ* osy souřadnic y vůči ose souřadnic x.

Prostě jestliže souřadnice třetího bodu, který utváří projekci odpovídajícího elementu na kulové ploše, začínající ve středu koule, jsou

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X+\mathrm{d}X, & Y+\mathrm{d}Y, \\ X+\delta X, & Y+\delta Y, \end{array}$$

bude dvojitý obsah této projekce vyjádřen

$$\mathrm{d}X\cdot\delta Y-\mathrm{d}Y\cdot\delta X,$$

u něhož znaménko výrazu bude určeno stejně jako bylo popsáno výše. Pročež míra křivosti v tomto místě (bodě)[43] křivé plochy bude

$$k=\frac{\mathrm{d}X\cdot\delta Y-\mathrm{d}Y\cdot\delta X}{\mathrm{d}x\cdot\delta y-\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}x}.$$

[39] Zde ve významu poloha. [pozn. překl.]

[40] Zde poloha.

[41] V anglickém překladu je zde odkaz na Wangerinovu poznámku, vztahující se k celému odstavci. „To, že k výpočtu míry křivosti lze uvažovat plošný element, který má tvar trojúhelníka, plyne [...] s faktem, že k je nezávislá na veličinách $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, δx, δy a že následně k má stejnou hodnotu pro každý nekonečně malý trojúhelník ve stejném bodě plochy, a tedy také plošné elementy libovolné formy jakýmkoli způsobem ležící v tomto bodě.“ [pozn. překl.]

[42] Zde spíše orientace. [pozn. překl.]

[43] V Gaussově smyslu dnešní terminologií lze nejlépe číst jako infinitesimálně malé okolí bodu. Tedy „co nejjemněji rozmazaný bod“ (tedy nedělitelný). [pozn. překl.]

Jestliže nyní předpokládáme, že povaha křivé plochy bude dána pomocí třetího způsobu (metody), jak jsme uvažovali v odst. 4, budeme mít X a Y ve tvaru funkcí veličin x, y, a tedy bude[44]

$$\mathrm{d}X = \frac{\partial X}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial X}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y,$$

$$\mathrm{d}Y = \frac{\partial Y}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial Y}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta y.$$

Substituováním těchto hodnot přejde předchozí výraz do tvaru

$$k = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}. \qquad (*)$$

Položením jako výše

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = u,$$

a tedy

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = T, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y} = U, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V$$

nebo

$$\mathrm{d}t = T\,\mathrm{d}x + U\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}u = U\,\mathrm{d}x + V\,\mathrm{d}y$$

máme z výše uvedených výrazů

$$X = -tZ, \quad Y = -uZ, \quad (1+tt+uu)ZZ = 1,$$

[44] V latinském originálu jsou parciální derivace značeny

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y}, \quad \text{atd..}$$

V překladu z důvodu srozumitelnosti používané současné značení

$$\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \text{atd.}$$

Podobně užívá i anglický překlad. [pozn. překl.]

a odtud

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= -Z\,\mathrm{d}t - t\,\mathrm{d}Z, \\ \mathrm{d}Y &= -Z\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}Z, \\ (1+tt+uu)\,\mathrm{d}Z + Z(t\,\mathrm{d}t + u\,\mathrm{d}u) &= 0 \end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z &= -Z^3(t\,\mathrm{d}t + u\,\mathrm{d}u), \\ \mathrm{d}X &= -Z^3(1+uu)\,\mathrm{d}t + Z^3tu\,\mathrm{d}u, \\ \mathrm{d}Y &= +Z^3tu\,\mathrm{d}t - Z^3(1+tt)\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$ [45]

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= Z^3(-(1+uu)T + tuU), \\ \frac{\partial X}{\partial y} &= Z^3(-(1+uu)U + tuV), \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= Z^3(tuT - (1+tt)U), \\ \frac{\partial Y}{\partial y} &= Z^3(tuU - (1+tt)V), \end{aligned}$$

což substituováním [těchto] hodnot do dříve uvedeného výrazu dá

$$k = Z^6(TV-UU)(1+tt+uu) = Z^4(TV-UU) = \frac{TV-UU}{(1+tt+uu)^2}.$$

8

Vhodnou volbou počátku a souřadnicových os lze snadno zajistit, aby pro daný [bod] A zanikly hodnoty veličin t, u, U.[46] Zejména [to znamená] splnění dvou již dříve zmíněných podmínek, jestliže tečná rovina v tomto bodě se přijme

[45] Liouvillův překlad [z roku 1852] uvádí chybně

$$\mathrm{d}Y = -Z^3tu\,\mathrm{d}t - Z^3(1+t^2)\,\mathrm{d}u.$$

[46] Tj. limitně se blížily k 0. K fenomenologickém horizontu, ve kterém skryjí (zapouzdří či zabalí) svou podstatu, ale [tu] nenechají [ontologicky] zaniknout. [pozn. překl.]

za rovinu se souřadnicemi x, y. Kromě toho jestliže se navíc počátek nachází v bodě A, zjevně výraz souřadnice z získá takovýto tvar

$$z = \frac{1}{2}T^0 xx + U^0 xy + \frac{1}{2}V^0 yy + \Omega,$$

kde Ω bude řádu většího než druhého. Poté změnou *situ* os x, y o úhel M takový,[47] že máme

$$\operatorname{tg} 2M = \frac{2U^0}{T^0 - V^0},$$

lze snadno nahlédnout, že nutně vzniká rovnice tohoto tvaru

$$z = \frac{1}{2}Tx^2 + \frac{1}{2}Vy^2 + \Omega,$$

což je také ujednání splnění třetí podmínky. Jsou-li [dokončena] tato opatření, je jasné, že

I. Jestliže se křivá plocha protíná rovinou, kterou prochází normála a souřadná osa x, povstane[48] rovinná křivka, jejíž poloměr křivosti v bodě A bude $= \frac{1}{T}$, kladné nebo záporné znaménko naznačuje konkávnost nebo konvexnost [křivky] vůči straně, vůči níž jsou souřadnice z záporné.

II. Stejným způsobem bude $\frac{1}{V}$ v bodě A poloměr křivosti rovinné křivky, která povstane [vznikne, oriri] protnutím křivé plochy s rovinou, jíž prochází osy y, z.

III. Položením $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, se stane

$$z = \frac{1}{2}(T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi)rr + \Omega,$$

odkud shrnujeme: jestliže protnutí nastane rovinou skrz křivou [plochu] normálou v bodě A tak, že s osou x svírá úhel φ, povstane rovinná křivka, jejíž poloměr křivosti v bodě A bude

$$= \frac{1}{T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi}.$$

IV. Kdykoli tak máme $T = V$, bude poloměr křivosti ve *všech* normálových rovinách roven. Jestliže ale T a V si nejsou rovny, je zjevné, že pokud $T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi$ pro jakoukoli hodnotu úhlu φ spadne mezi T a V, poloměry křivosti v hlavních řezech, v [bodech] I a II uvažované, odkazující

[47] Jde o otočení souřadného systému. Tedy situs zde je ve významu otočení, změna poloha, nikoli orientace či umístění posunem. [pozn. překl.]

[48] Latinsky oriri. Zrodí se zde nová křivka. [pozn. překl.]

k extrémálním křivostem, [budou] například jiné k maximální křivosti, jiné k minimální, jestliže T a V jsou ovlivněny stejným znaménkem; oproti tomu jiné [odkazující] k maximální konvexitě a jiné k maximální konkavitě, jestliže T a V požívají opačných znamének. Tyto závěry obsahují vše, co lze [o plochách říci]. Euler první učil o křivosti křivých ploch.[49]

V. Míra křivosti křivé plochy v bodě A se však najde nejjednodušším výrazem $k = TV$, odkud máme

TEORÉM. *Míra křivosti v jakémkoli bodě plochy je rovna zlomku, jehož čitatel je jedna, jmenovatel však součin dvou extrémálních poloměrů křivosti v řezech normálovou rovinou.*

Zároveň se [tak] stírá, [že] míra křivosti je kladná pro plochy konkávně–konkávní nebo konvexně–konvexní (kterýchžto rozdíl není podstatný), záporná však pro konkávně–konvexní. Jestliže plocha sestává z obou druhů ploch, musí v jejich [vzájemných přechodových] hranicích míra křivosti zanikat. O povaze takové křivé plochy, ve které míra křivosti všude zaniká, více pojednává níže uvedené.

9

Obecná formule pro míru křivosti, navržená na konci odst. 7, je ze všech nejjednodušší, protože se skládá pouze z pěti prvků; ke složitější, zejména zahrnující nové prvky, přejdeme, pokud použijeme první způsob vyjadřující povahu[50] křivé plochy. Při zachování značení odst. 4 navíc stanovujeme

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = P', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = R',$$

$$\frac{\partial^2 W}{\mathrm{d}y \cdot \partial z} = P'', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x \cdot \partial z} = Q'', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x \cdot \partial y} = R''$$

tak, aby nastalo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= P'\,\mathrm{d}x + R''\,\mathrm{d}y + Q''\,\mathrm{d}z, \\ \mathrm{d}Q &= R''\,\mathrm{d}x + Q'\,\mathrm{d}y + P''\,\mathrm{d}z, \\ \mathrm{d}R &= Q''\,\mathrm{d}x + P''\,\mathrm{d}y + R'\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

[49] Jde zřejmě o Eulerovu práci E333 *Recherches sur la courbure des surfaces*. V anglickém překladu je totiž uveden odkaz na práci v *Mem. de l'Acad. de Berlin*, vol. XVI, 1760. [pozn. překl.]

[50] Též lze číst jako charakter či přirozenost. [pozn. překl.]

Nyní když se ponechalo $t = -\frac{P}{R}$, jsme diferencováním našli

$$\begin{aligned} &RR\,\mathrm{d}t = -R\,\mathrm{d}P + P\,\mathrm{d}R = \\ &\qquad = (PQ'' - RP')\,\mathrm{d}x + (PP'' - RR'')\,\mathrm{d}y + (PR' - RQ'')\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

nebo odstraněním $\mathrm{d}z$ pomocí rovnice $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = 0$ [bude]

$$\begin{aligned} R^3\,\mathrm{d}t = {}&(-RRP' + 2PRQ'' - PPR')\,\mathrm{d}x + \\ &+ (PRP'' + QPQ'' - PQR' - RRR'')\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Proto tak usuzujeme

$$\begin{aligned} R^3T &= -RRP' + 2PRQ'' - PPR', \\ R^3U &= PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'', \\ R^3V &= -RRQ' + 2QRP'' - QQR'. \end{aligned}$$

Nahrazením těchto hodnot ve formuli odst. 7 obdržíme pro míru křivosti k následující symetrický výraz:

$$\begin{aligned} &(PP + QQ + RR)^2 k = \\ &\quad = PP(Q'R' - P'P'') + QQ(P'R' - QQ''QQ'') + \\ &\quad + RR(P'Q' - RR''R'') + 2QR(Q''R'' - P'P'') + \\ &\quad + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R''). \end{aligned}$$

10

Formuli ještě složitější, například postavenou z patnácti prvků, obdržíme, jestliže sledujeme druhou obecnou metodu, jež vyjadřuje křivou plochu. Přesto má velký význam propracovat také tento [způsob]. Při zachováním znaků odst. 4 navíc stanovujeme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \alpha, &&\frac{\partial^2 x}{\partial p \cdot \partial q} = \alpha', &&\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = \alpha'', \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} = \beta, &&\frac{\partial^2 y}{\partial p \cdot \partial q} = \beta', &&\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = \beta'', \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = \gamma, &&\frac{\partial^2 z}{\partial p \cdot \partial q} = \gamma', &&\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = \gamma''. \end{aligned}$$

Pro další zestručnění uděláme

$$\begin{aligned} bc' - cb' &= A, \\ ca' - ac' &= B, \\ ab' - ba' &= C. \end{aligned}$$

Nejprve pozorujeme, maje

$$A\,\mathrm{d}x + B\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}z = 0,$$

neboli

$$\mathrm{d}z = -\frac{A}{C}\,\mathrm{d}x - \frac{B}{C}\,\mathrm{d}y;$$

tedy že rozsah z se zobrazuje jako [rozsah][51] funkce [proměnných] x, y, pak je

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= t = -\frac{A}{C}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= u = -\frac{B}{C}. \end{aligned}$$

Kromě toho z

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q, \qquad \mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q$$

odvozujeme

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{d}p &= b'\,\mathrm{d}x - a'\,\mathrm{d}y, \\ C\,\mathrm{d}q &= -b\,\mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Tudíž dostaneme totální diferenciál v [proměnných] t, u:

$$C^3\,\mathrm{d}t = \left(A\frac{\partial C}{\partial p} - C\frac{\partial A}{\partial p}\right)(b'\,\mathrm{d}x - a'\,\mathrm{d}y) + \left(C\frac{\partial A}{\partial q} - A\frac{\partial C}{\partial q}\right)(b\,\mathrm{d}x - a\,\mathrm{d}y),$$

$$C^3\,\mathrm{d}u = \left(B\frac{\partial C}{\partial p} - C\frac{\partial B}{\partial p}\right)(b'\,\mathrm{d}x - a'\,\mathrm{d}y) + \left(C\frac{\partial B}{\partial q} - B\frac{\partial C}{\partial q}\right)(b\,\mathrm{d}x - a\,\mathrm{d}y).$$

[51]Obor hodnot. [pozn. překl.]

Nyní jestliže v těchto formulích nahradíme

$$\frac{\partial A}{\partial p} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma,$$

$$\frac{\partial A}{\partial q} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma',$$

$$\frac{\partial B}{\partial p} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha,$$

$$\frac{\partial B}{\partial q} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha',$$

$$\frac{\partial C}{\partial p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta,$$

$$\frac{\partial C}{\partial q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

a jestliže uvážíme,[52] že získané hodnoty diferenciálů dt, du musí zůstat stejné nezávisle na diferenciálech dx, dy, veličinách $T\,\mathrm{d}x + U\,\mathrm{d}y$, resp. $U\,\mathrm{d}x + V\,\mathrm{d}y$, najdeme po některých transformacích dostatečně zřetelně

$$\begin{aligned} C^3T = {} & \alpha Ab'b' + \beta Bb'b' + \gamma Cb'b' - \\ & - 2\alpha' Abb' - 2\beta' Bbb' - 2\gamma' Cbb' + \\ & + \alpha'' Abb + \beta'' Bbb + \gamma'' Cbb, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^3U = {} & -\alpha Aa'b' - \beta Ba'b' - \gamma Ca'b' + \\ & + \alpha' A(ab'ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') - \\ & - \alpha'' Aab - \beta'' Bab - \gamma'' Cab, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^3V = {} & \alpha Aa'a' + \beta Ba'a' + \gamma Ca'a' - \\ & - 2\alpha' Aaa' - 2\beta' Baa' - 2\gamma' Caa' + \\ & + \alpha'' Aaa + \beta'' Baa + \gamma'' Caa. \end{aligned}$$

Jestliže pak k zestručnění položíme

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D, \tag{1}$$
$$A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D', \tag{2}$$
$$A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'', \tag{3}$$

[52] Provedeme rozvahu a dospějeme k závěru „že“. [pozn. překl.]

dostane se

$$
\begin{aligned}
C^3T &= Db'b' - 2D'b'b' + D''bb,\\
C^3U &= -Da'b' + D'(ab' + ba') - D''ab,\\
C^3V &= Da'a' - 2D'aa' + D''aa.
\end{aligned}
$$

Tudíž jsme [postupným] rozvíjením odvozovaného zjistili

$$C^6(TV - UU) = (DD'' - D'D')(ab'ba')^2 = (DD'' - D'D')CC,$$

a odtud [dostali] formuli pro míru křivosti

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}.$$

11

Poté, co se nalezla jediná [všeobecná] formule [pro výpočet míry křivosti], musíme navázat další [přední výsledky], které jsou uvedené mezi nejplodnějšími teorémy teorie křivých ploch. Zavedeme následující značení:

$$
\begin{aligned}
aa + bb + cc &= E,\\
aa' + bb' + cc' &= F,\\
a'a' + b'b' + c'c' &= G,\\
a\alpha + b\beta + c\gamma &= m, && (4)\\
a\alpha' + b\beta' + c\gamma' &= m', && (5)\\
a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' &= m'', && (6)\\
a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= n, && (7)\\
a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' &= n', && (8)\\
a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' &= n'', && (9)\\
AA + BB + CC &= EG - FF = \Delta.
\end{aligned}
$$

Vyloučíme z rovnic (1), (4), (7) veličiny β, γ [tak], že se vynásobí [výrazy] $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$ a sečtou: takže povstane

$$
\begin{aligned}
&(A(bc' - cb') + a(b - c'B) + a'(cB - bC))\alpha =\\
&\qquad\qquad = D(bc' - cb') + m(b - c'B) + n(cB - bC),
\end{aligned}
$$

čímž rovnici snadno transformujeme v tuto:

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

Podobným způsobem eliminací veličin α, γ nebo α, β ze stejné rovnice se dostane

$$\begin{aligned} BD &= \beta\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE), \\ CD &= \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE). \end{aligned}$$

Násobením těchto tří rovnic [veličinami] α'', β'', γ''' a sečtením obdržíme

$$DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE). \tag{10}$$

Jestliže stejně tak pojmeme rovnice (2), (5), (8), dostaneme

$$\begin{aligned} AD' &= \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E), \\ BD' &= \beta'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E), \\ CD' &= \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E), \end{aligned}$$

kteréžto rovnice jsou násobeny [veličinami] α', β', γ', [takže pak] sečtením dávají

$$D'D' = (\alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma')\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E).$$

Kombinací této rovnice s rovnicí (10) dostaneme

$$\begin{aligned} DD'' - D'D = {} & (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma')\Delta + \\ & + E(n'n' - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'm' - mm''). \end{aligned}$$

Nyní se zdá být

$$\frac{\partial E}{\partial p} = 2m, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = m' + n, \qquad \frac{\partial G}{\partial p} = 2n',$$

$$\frac{\partial E}{\partial q} = 2m', \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = m'' + n', \qquad \frac{\partial G}{\partial q} = 2n'',$$

nebo

$$m = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p}, \qquad m' = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, \qquad m'' = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},$$

$$n = \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}, \qquad n' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, \qquad n'' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}.$$

Kromě toho lze snadno potvdit, že máme

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'\alpha' - \beta'\beta' - \gamma'\gamma' = \frac{\partial n}{\partial q} - \frac{\partial n'}{\partial p} = \frac{\partial m''}{\partial p} - \frac{\partial m'}{\partial q} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial p \cdot \partial q} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}.$$

Jestliže nyní tyto různé výrazy nahradíme ve formuli pro míru křivosti na konci předchozího odstavce, přistoupíme k následující formuli, [složenou] z jasných veličin E, F, G a jejich diferenciálních členů prvního a druhého řádu:

$$4(EG - FF)^2 k = E\left(\frac{\partial E}{\partial q} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right) +$$

$$+ F\left(\frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q} \cdot \frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial q} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} + 4\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial p}\right) +$$

$$+ G\left(\frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial p} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right) -$$

$$- 2(EG - FF)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p \cdot \partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial q^2}\right).$$

12

Pokud bez omezení máme

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2,$$

pak je jasné, že

$$\sqrt{E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2}$$

je obecné vyjádření [plošného obsahu] lineárního[53] elementu na křivé ploše. Takže analýza, rozestřená v předchozím odstavci, vykládá, že k objevení míry křivosti neexistuje konečná formule, jejíž souřadnice x, y, z se vykazují jako funkce neznámých [proměnných] p, q, ale dostatečně obecné vyjádření pro velikosti jakéhokoli lineárního elementu. Pokročme k některým aplikacím tohoto nejtěžšího teorému.

[53]Ve smyslu infinitesimálně rovinného. [pozn. překl.]

Předpokládejme, že naše křivá plocha může být rozvinuta v další plochu, křivou nebo rovinnou, tak, aby každému bodu první plochy, určeného souřadnicemi x, y, z, odpovídal určitý bod druhé plochy, jehož souřadnice jsou x', y', z'. Takže zjevně x', y', z' mohou být rovněž považovány za funkce neznámých [proměnných] p, q, z čehož pro element $\sqrt{\mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2}$ se dostane výraz takovýto

$$\sqrt{E'\,\mathrm{d}p^2 + 2F'\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G'\,\mathrm{d}q^2},$$

[kde] E', F', G' rovněž označují funkce [proměnných] p, q. Jenže pro samotný pojem *rozvinutí* plochy do plochy je jasné, že elementy, jež si v obou plochách odpovídají, jsou si nutně rovny, takže identicky bude rovno

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Takže formule v předchozím odstavci samovolně přejde ve výborný (egregium)[54]

Teorém. *Jestliže křivá plocha je rozvinutelná v nějakou další plochu, [pak] míra křivosti v jednotlivých bodech zůstává neměnná.*

Zjevně také *pak jakákoli konečná část křivé plochy rozvinutá v nějakou plochu zachovává stejnou integrální křivost.*

Zvláštní případ, na který až dosud geometři omezovali svá zkoumání, zajišťuje plocha rozvinutelná do roviny. Naše teorie samovolně vykládá, že míra křivosti takovéto plochy musí být v každém bodě = 0, pročež jestliže jejich[55] vrozená přirozenost přímo odpovídá třetímu způsobu [vyjádření],[56] pak bude všude[57]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}\right)^2 = 0;$$

jakožto kritérium, poslední dobou skutečně známo, nebylo alespoň pro naše studie dosud s žádnou přísností dokázáno.

[54]Zde jest onen slavný, theorem egrerium. [pozn. překl.]
[55]Tedy těchto ploch. [pozn. překl.]
[56]Srov. odstavec 4. [pozn. překl.]
[57]Tedy pro každý bod plochy. [pozn. překl.]

13

To, co jsme v předchozím odstavci vysvětlili, souhlasí[58] se zvláštním způsobem uvažování o plochách, vřele ctihodným, který geometři podrobně vyvinuli. Pokud se totiž uvažuje druh ploch, nikoli jako hranic tělesa, ale jako pružné, avšak ne elastické těleso, jehož jeden rozměr (dimense) se bude vytrácet, pak vlastnosti plochy částečně závisí na formě, do níž je redukcí koncipována, a částečně jsou absolutní a také zůstávají invariantní v případě některých forem ohybu. K těmto posledním uvedeným [vlastnostem], jež geometrům otevírají nový úrodný předmět zkoumání, náleží míra klřivosti a integrální křivost v tom smyslu, ve kterém se nám tato vyjádření přijímají; sem patří teorie nejkratších linií a mnoho dalších, které máme rezerované k dalšímu [zkoumání].[59] V tomto způsobu uvažování je totiž rovinná plocha a plocha, rozvinutelná do roviny, např. válcová, kuželová, atd., nahlížena v podstatě identicky, a původní způsob, obecně vyjadřující povahu plochy, tak vždy závisí na formuli

$$\sqrt{E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p\cdot\mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2},$$

která se týká propojejí elementů s dvěma neznámými [veličinami] p, q. Avšak než budeme pokračovat tímto dalším argumentem, musí být zopakovány principy teorie nejkratších linií na dané křivé ploše.

14

Vrozená přirozenost[60] křivých linií v prostoru je tak obecně dána tak, jak souřadnice x, y, z odpovídají jeho jednotlivým bodům, nám předložené ve formě funkce jedné proměnné, kterou budeme označovat w. Délku takové linie z libovolného počátečního bodu až do bodu, jehož souřadnice jsou x, y, z, vyjadřujeme integrálem

$$\int \mathrm{d}w\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2}.$$

Jestliže předpokládáme, že *situs* křivých linií podléhá nekonečně malé variaci (změně), pak souřadnice jednolivých bodů přijmou variace δx, δy, δz [a] variace celé délky se najde

$$= \int \frac{\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}\delta x + \mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}\delta y + \mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}\delta z}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}},$$

[58]Koheruje, nemusí tedy nutně přenášet význam (podstatu), ale jen smysl (výsledek metody). V latinském originále cohaerent. [pozn. překl.]

[59]Gauss však již žádný další text, věnovaný vlastnostem rozvinutelných ploch, nepublikoval.

[60]V latinském originálu indoles. [pozn. překl.]

jejíž vyjádření přeměníme v takovouto formu:[61]

$$\frac{\mathrm{d}x\cdot\delta x+\mathrm{d}y\cdot\delta y+\mathrm{d}z\cdot\delta z}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}- \\ -\int\left(\delta x\cdot\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}+\delta y\cdot\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}+ \right. \\ \left. +\delta z\cdot\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}\right).$$

V tom případě, kdy je linie nejkratší mezi svými krajními body, tvrdíme, že ty [výrazy], které jsou pod znaménkem integrálu,[62] se musí zanedbat. Pokud linie musí být na dané ploše, jejíž vrozená přirozenost je vyjádřena rovnicí

$$P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=0,$$

a dokonce i variance δx, δy, δz musí splňovat rovnici

$$P\delta x+Q\delta y+R\delta z=0,$$

pak podle známého principu snadno shrneme, že diferenciály

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}},\quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}},\quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}},$$

resp. veličiny P, Q, R musí být [navzájem] úměrné.[63] Nyní nechť jsou položeny $\mathrm{d}r$ lineární element křivky, λ bod na ploše sféry, odpovídající směru tohoto elementu, L bod na ploše sféry, odpovídající směru normály v křivé ploše; a nakonec nechť jsou ξ, η, ζ souřadnice bodu λ a X, Y, Z souřadnice bodu L vzhledem ke středu sféry.[64] Takže bude

$$\mathrm{d}x=\xi\,\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}y=\eta\,\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}z=\zeta\,\mathrm{d}r,$$

z čehož shrnujeme, že výše uvedené diferenciály budou $\mathrm{d}\xi$, $\mathrm{d}\eta$, $\mathrm{d}\zeta$. A jelikož veličiny P, Q, R jsou úměrné [veličinám] X, Y, Z, charakter nejkratších linií spočívá v rovnicích

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{X}=\frac{\mathrm{d}\eta}{Y}=\frac{\mathrm{d}\zeta}{Z}.$$

Jinak jednoduše zachyceno,

$$\sqrt{\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\zeta^2}$$

[61] Transformace se snadno získá integrováním per partes. [pozn. překl.]
[62] Tj. integrand. [pozn. překl.]
[63] Navzájem jsou ve stejném poměru. [pozn. překl.]
[64] Neboli jedná se o lokální sférické souřadnice. [pozn. překl.]

je rovno malému obloučku na ploše sféry, která měří úhly mezi směry tečen v počátečním a koncovém elementu $\mathrm{d}r$, a tak je $= \frac{\mathrm{d}r}{\varrho}$, jestliže ϱ označuje poloměr křivosti v tomto místě nejkratší křivky; takže bude

$$\varrho\,\mathrm{d}\xi = X\,\mathrm{d}r, \quad \varrho\,\mathrm{d}\eta = Y\,\mathrm{d}r, \quad \varrho\,\mathrm{d}\zeta = Z\,\mathrm{d}r.$$

15

Předpokládejme, že z daného bodu A na křivé ploše vychází nesčíselně[65] krátkých křivek, které se navzájem liší úhlem, který vytváří jednotlivé první elementy z této linie s prvním elementem, který se převezme pro první [element]: nechť φ je onen úhel, nebo obecněji funkce onoho úhlu, a r délka takové nejkratší linie z bodu A až do bodu, jehož souřadnice jsou x, y, z. Pokud také určité hodnoty proměnných r, φ odpovídají určitým bodům plochy, pak lze souřadnice x, y, z považovat za funkce těchto [veličin] r, φ. Ponecháme značení λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z ve stejném významu, v jakém bylo přijato v předchozím odstavci, zavedené neomezeným způsobem k neurčitému (blíže neurčenému) libovolnému bodu na nejkratších linií.

Všechny nejkratší linie, které mají stejnou délku r, budou končit na jiné linii, jejíž délku měřenou z libovolného počátku označíme v. Tudíž se může v uvažovat jako funkce nezávislých r, φ. A jestliže pomocí λ' označíme bod na ploše sféry, odpovídající elementu směru $\mathrm{d}v$, a tedy pomocí ξ', η', ζ' souřadnice tohoto bodu vzhledem ke středu sféry, máme

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \xi' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \eta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \zeta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Tudíž z

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \eta, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \zeta,$$

vyplývá

$$\frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \cos \lambda\lambda' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

První člen této rovnice, který také bude funkcí [proměnných] r, φ, označíme pomocí S; jeho druhý diferenciál dává

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial r} &= \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \left(\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \right)}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \zeta}{\partial r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

[65] Tedy libovolně. Moderně celá varieta. [pozn. překl.]

Avšak

$$\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1,$$

takže diferenciál $= 0$; a podle předchozího odstavce, jestliže také zde ϱ označuje poloměr křivosti v linii r, máme

$$\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{X}{\varrho}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial r} = \frac{Y}{\varrho}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial r} = \frac{Z}{\varrho}.$$

Takže dostaneme

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{1}{\varrho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{\partial v}{\partial\varphi} = \frac{1}{\varrho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{\partial v}{\partial\varphi} = 0,$$

protože λ' zjevně leží na největším kruhu, jehož pól je L. Odtud pak uzavíráme, že S je nezávislé na r, a tudíž je samo funkcí φ. Ovšem pro $r = 0$ zjevně natává $v = 0$, a následně také

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi} = 0,$$

anebo $S = 0$ nezávisle na φ. Nutně tak obecně musí být $S = 0$, takže

$$\cos\lambda\lambda' = 0, \qquad \text{tj.} \qquad \lambda\lambda' = 90^\circ.$$

Odtud uzavíráme

Teorém. *Jestliže je na křivé ploše narýsováno ze stejného počátečního bodu nesčetně nejkratších linií stejné délky, pak linie spojující jejich extrémy bude normála na každou z [těchto] linií.*

Považovali jsme za cennou snahu odvodit tento teorém z fundamentálních (základních) vlastností nejkratších linií: ale aniž by se počítalo lze také pravdivě chápat následující odůvodnění. Buďte AB, AB' dvě nejkratší linie stejné délky, v A obsahující (zahrnující) nekonečně malý úhel, a předpokládejme, že další úhel elementu BB' [vytvořený] s liniemi BA, $B'A$ má odlišnou konečnou velikost oproti pravému úhlu, proto podle zákona spojitosti[66] jeden bude větší, druhý bude menší než pravý úhel. Předpokládejme, že úhel u B je $= 90^\circ - \omega$, a na linii BA vezměme bod C tak, že je

$$BC = BB' \cdot \operatorname{cosec}\omega :$$ [67]

proto když nekonečně malý trojúhelník $BB'C$ bude považován za rovinný, bude

$$CB' = BC \cdot \cos\omega,$$

[66]Zřejmě se jedná o obdobu tvrzení o součtu úhlů ve sférickém trojúhelníku. [pozn. překl.]
[67]Neboli $BB' = BC \cdot \cos\omega$. [pozn. překl.]

a v důsledku

$$AC + CB' = AC + BC \cdot \cos\omega = \\ = AB - BC \cdot (1 - \cos\omega) = AB' - BC(1 - \cos\omega),$$

tj. průchod z bodu A do B' bodem C je kratší než nejkratší linie. Q. E. A.

16

S teorémem z předchozího odstavce spojujeme další [teorém], který takto vyjádříme.

Jestliže na křivé ploše si představujeme jakoukoli linii tak, že z jejích různých bodů se pod pravým úhlem a naopak ve stejném směru spouští nesčetně nejkratších linií stejných délek, pak křivka, která spojuje jejich další extrémy, bude tyto různé [linie] pod pravým úhlem řezat.[68]

K důkazu [tohoto tvzení] není [potřeba] nic z předchozího rozboru měnit, kromě toho že φ musí označovat délku *dané* křivky, počítanou (měřenou) z libovolného bodu, nebo raději funkci této délky; tedy všechny důvody budou také platit s takovou proměnou (modifikací), že pravdivost rovnice $S = 0$ pro $r = 0$ je již nyní zahrnuta v samotné této hypotéze. Dále tento další teorém je obecnější než předchozí, nakolik lze uvažovat, že tento obsahuje první, zatímco pro danou linii přijmeme nekonečně malý kruh opsaný kolem středu A. A nakonec upozorňujeme, že zde také geometrické úvahy mohou zaujímat místo analýzy, které nicméně když jsou dostatečně jasné, zde neobtěžují.

17

Vratíme se k výrazu

$$\sqrt{E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2},$$

který vyjadřuje neurčitou velikost lineárního elementu na křivé ploše, a zkoumejme nejprve před vším ostatním geometrický význam koeficientů E, F, G. V odstavci 5 jsme již připomněli, že na křivé ploše lze uvažovat dva systémy linií, jeden, ve kterém budou p proměnné, q konstantní; druhý, v němž bude

[68] Tj. ekvidistanty budou mít normály ve všech navzájem si odpovídajících bodech zachovány. [pozn. překl.]

q proměnné, p konstantní. Jakýkoli bod plochy lze pak považovat za průsečík linie prvního systému s linií druhého [systému]: a pak element první linie přiléhá k tomuto bodu a odpovídající k variaci dp bude

$$= \sqrt{E} \cdot \mathrm{d}p,$$

a element druhé linie odpovídající k variaci dq bude

$$= \sqrt{G} \cdot \mathrm{d}q;$$

a konečně označí-li se ω úhel mezi těmito elementy, pak lze snadno pochopit, že bude

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$[69]

Avšak obsah rovnoběžníkového elementu na křivé ploše mezi dvěma liniemi prvního systému, jemuž odpovídá q, $q + \mathrm{d}q$, a dvěma liniemi druhého systému, jemuž odpovídá p, $p + \mathrm{d}p$, bude

$$\sqrt{EG - FF} \cdot \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q.$$

Jakákoli linie na křivé ploše k žádnému z obou jejich příslušných systémů (systémů k nim vztahujících se) vychází,[70] přičemž p a q budou představovat nové funkce jedné proměnné nebo dalších jiných jejich funkcí. Nechť s je vzdálenost takové křivky s libovolnou počáteční hodnotou a nechť [tato křivka] má kladný směr. Označme θ úhel, který svírá element

$$\mathrm{d}s = \sqrt{E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2}$$

s linií prvního systému vyvozenou z počátečního elementu a vskutku, aby nedošlo k nedorozumění, zůstane vždy uveden tento úhel na této větvi jeho linie, ve které hodnoty [proměnné] p rostou, a předpokládáme, že bude přijímán na této kladné straně, když hodnoty [proměnné] q rostou. Tak je lehce srozumitelné, když to zachytíme

$$\cos\theta \cdot \mathrm{d}s = \sqrt{E} \cdot \mathrm{d}p + \sqrt{G} \cdot \cos\omega\,\mathrm{d}q = \frac{E\,\mathrm{d}p + F\,\mathrm{d}q}{\sqrt{E}},$$

$$\sin\theta \cdot \mathrm{d}s = \sqrt{G} \cdot \sin\omega \cdot \mathrm{d}q = \frac{\sqrt{EG - FF} \cdot \mathrm{d}q}{\sqrt{E}}.$$

[69] V anglickém překladu je k této pasáži uvedena rozsáhlá poznámka, která je odvozením elementu plochy

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2} \cdot \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q$$

pro rovnoběžníkový element o stranách p, $p + \mathrm{d}p$, q, $q + \mathrm{d}q$. [pozn. překl.]

[70] Oritur od orior povstávat, vycházet, vzcházet. [pozn. překl.]

18

Zkoumejme nyní, jak položit podmínku, aby takto položená linie byla nejkratší. Vzhledem k tomu, že příslušná délka s, vyjádřená pomocí integrálu

$$s = \int \sqrt{E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2},$$

znamená požadovanou podmínku minima jakožto variaci tohoto integrálu z různých nekonečně malých vedených linií, musí být [tento integrál] = 0. Výpočet našeho návrhu bude v tomto případě vhodně dokončený, jestliže p uvažujeme jakožto funkci [proměnné] q. Pak jestliže se znakem δ označí variace, máme

$$\delta s = \int \frac{\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}q^2\right)\delta p + (2E\,\mathrm{d}p + 2F\,\mathrm{d}q)\,\mathrm{d}\delta p}{2\,\mathrm{d}s} =$$

$$= \frac{E\,\mathrm{d}p + F\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} \cdot \delta p +$$

$$+ \int \delta p \cdot \left\{ \frac{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}q^2}{2\,\mathrm{d}s} - \mathrm{d} \cdot \frac{E\,\mathrm{d}p + F\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} \right\}$$

konstantní a ty, které tady jsou pod znakem integrálu, nezávislé na δp musí vymizet. Takže se stane

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p^2 + \frac{2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}q^2 =$$

$$= 2\,\mathrm{d}s \cdot \mathrm{d} \cdot \frac{E\,\mathrm{d}p + F\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} =$$

$$= 2\,\mathrm{d}s \cdot \mathrm{d} \cdot \sqrt{E} \cdot \cos\theta =$$

$$= \frac{\mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}E \cdot \cos\theta}{\sqrt{E}} - 2\,\mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \sqrt{E} \cdot \sin\theta =$$

$$= \frac{(E\,\mathrm{d}p + F\,\mathrm{d}q)\,\mathrm{d}E}{E} - 2\sqrt{EG - FF} \cdot \mathrm{d}q \cdot \mathrm{d}\theta =$$ [71]

$$= \left(\frac{E\,\mathrm{d}p + F\,\mathrm{d}q}{E}\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}p + \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} \cdot \mathrm{d}q\right) - 2\sqrt{EG - FF} \cdot \mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}\theta.$$

Proto tedy dostáváme následující rovnici [–] podmínku pro nejkratší linii:

$$\sqrt{EG-FF}\cdot \mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{F}{E}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot \mathrm{d}p + \frac{1}{2}\frac{F}{E}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot \mathrm{d}q + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot \mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot \mathrm{d}p - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\cdot \mathrm{d}q,$$

kterou lze také napsat takto

$$\sqrt{EG-FF}\cdot \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\cdot \mathrm{d}E + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot \mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}\cdot \mathrm{d}p - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\cdot \mathrm{d}q.$$

Jinak pomůže rovnice

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E}{\sqrt{EG-FF}}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} + \frac{F}{\sqrt{EG-FF}};$$

z této rovnice se vymezí úhel θ, a tak lze odvodit diferenčně-diferenciální rovnici mezi p a q, která byla dosud více složitější a její aplikace byly méně užitečné, než předchozích [rovnic].

19

Obecné formule, které jsme sestavili v odst. 11, 18 pro míru křivosti a pro variaci směru nejkratší linie, budou hodně zjednodušené, jestliže se veličiny p, q zvolí tak, aby linie prvního systému (soustavy) vzájemně ortogonálně protínaly linie druhého systému, tj. abychom obecně měli $\omega = 90°$, či jinak $F = 0$. Potom pro míru křivosti nepochybně nastane

$$4EEGG =$$
$$= E\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} + E\left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)^2 + G\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} + G\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\right)^2 - 2EG\left(\frac{\mathrm{dd}E}{\mathrm{d}q^2} + \frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2}\right)$$

a pro variaci úhlu θ

$$\sqrt{EG}\cdot \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}\cdot \mathrm{d}p - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\cdot \mathrm{d}q.$$

Mezi různými případy, ve kterých platí tato podmínka ortogonality, první místo platí[72] to, kde linie všech dalších systémů, např. prvního, jsou nejkratší

[71] U výrazu $\sqrt{EG-FF}$ chybí ve výtiscích Gaussových prací (ať už v souborném vydání, tak i v původním tisku) koeficient 2, který např. anglický překlad už uvádí jako opravený, bohužel však bez komentáře. Jedná se však o zjevnou tiskovou chybu, neboť v předchozím i následujícím řádku je s tímto koefiecientem počítáno a z meritu věci tak i vychází. [pozn. překl.]

[72] Latinsky tenet, doslova první místo podrží, uchová (v paměti) to. [pozn. překl.]

linie. Zde tedy pro konstatní hodnotu z [proměnné] q bude úhel $\theta = 0$, z čehož se tradičním způsobem vysvětlí[73] rovnice pro variaci úhlu θ. A tak musí být

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} = 0,$$

anebo musí být koeficient E nezávislý na q, tj. E musí být buď konstatní, nebo funkce pouze p. Nejjednodušší bude, pokud p bude přijato jako délka v případě linií prvního systému a právě kolikrát se budou všechny linie prvního systému sbíhat v jednom bodě, z tohoto bodu počítáno, anebo jestliže společný průsečík nebude přítomen, z každé linie druhého systému. Které tak bude rozumně zrušeno, již stejně označené p a q, jež jsme v odst. 15, 16 vyjadřovali pomocí r a φ, a tedy bude $E = 1$. Takže dvě předchozí formule už přecházejí v tyto:

$$4GGk = \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}\right)^2 - 2G\frac{\mathrm{dd}G}{\mathrm{d}p^2},$$

$$\sqrt{G} \cdot \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}q,$$

nebo zavedením $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\mathrm{dd}m}{\mathrm{d}p^2}, \qquad \mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p} \cdot \mathrm{d}q.$$

Obecně řečeno m bude funkce [proměnných] p, q, a tedy

$$m\,\mathrm{d}q$$

vyjadřuje element jakékoli linie druhého systému. Avšak ve zvláštním případě, kde všechny linie p budou vycházet z téhož bodu, bude zjevně pro $p = 0$ muset být $m = 0$; dále jestliže v tomto případě za q přijmeme úhel, který první element jakékoli linie prvního systému svírá s nějakým libovolně zvoleným elementem s nekonečně malou hodnotou [proměnné] p, pak element linie druhého systému (který může být uvažován jako kruh popsaný poloměrem p) budiž $= p\,\mathrm{d}q$. Pro hodnotu nekonečně malých [proměnných] p bude $m = p$, takže pro $p = 0$ zároveň platí

$$m = 0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p} = 1.$$

[73]Latinsky modo tradita docet. Neboli tradice učí. [pozn. překl.]

20

Odložíme, co jsme až dosud předpokládali, tedy že p značí neurčitou délku nejkratší linie vedenou z daného bodu A do libovolného bodu plochy a že q [značí] úhel, který svírá první element této linie s prvním elementem další nejkratší linie opuštějící bod A. Buď B bod určený na této linii, pro který $q = 0$, a C jiný bod určený plochou, pro který označíme hodnotu [proměnné] q jednoduše pomocí A. Předpokládejme, že body B, C jsou spojené nejkratší linií, jejíž části, z bodu B měřeno, jsme v odst. 18 neurčitě značili s; a stejně jako dříve označme θ úhel, který se vztahuje k sevření elementu $\mathrm{d}s$ s elementem $\mathrm{d}p$: a nakonec θ^0, θ' jsou hodnoty úhlu θ v bodech B, C. Takže mějme do křivé plochy zahrnut trojúhelník nejkratších linií, jeho úhel u B a C, kterýžto pomocí těchto písmen jednoduše označen bude roven doplňku úhlu θ^0 do $180°$, zde do úhlu θ'. Ale pokud se otevře naše analýza, která se snadno zkoumá, všechny úhly nejsou myšlené ve stupních, ale vyjádřené číslem, takže úhel $57°\,17'\,45''$, kterému odpovídá oblouk délky poloměru, budeme mít za jednotku, potom musíme ustavit

$$\theta^0 = \pi - B, \qquad \theta' = C,$$

kde obvod kruhu označíme 2π. Nyní zkoumejme integrální křivost tohoto trojúhelníku, která je

$$= \int k \,\mathrm{d}\sigma,$$

kde $\mathrm{d}\sigma$ označuje plošný element trojúhelníka; proto když tento element vyjádříme pomocí $m\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q$, musí být vyšetřen[74] integrálem

$$\iint km\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q$$

přes celou plochu trojúhelníku. Začneme integrováním podle p, které protože

$$k = -\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial\partial m}{\partial p^2},$$

poskytuje

$$\mathrm{d}q \cdot \left(\text{konst.} - \frac{\partial m}{\partial p}\right)$$

pro integrální křivost plochy, ležící mezi liniemi prvního systému, kterému odpovídají neurčité hodnoty druhé [proměnné] q, $q + \mathrm{d}q$: pokud tato křivost musí pro $p = 0$ zmizet, pak počet konstant, zavedených integrováním, musí být roven hodnotě [veličiny] $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ pro $p = 0$, tj. jedné. Takže máme

$$\mathrm{d}q \left(1 - \frac{\partial m}{\partial p}\right),$$

[74]Eruere od eruo zde vyšetřit. Pro překlad se přihlíží a užívá příbuznost s německým slovesem eruieren (vyšetřit, zjistit, vyhledat). [pozn. překl.]

kde pro $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ musí být vzata hodnota odpovídající zakončení této plochy na linii CB. V této linii podle předchozího odstavce vskutku bude

$$\frac{\partial m}{\partial q} \cdot \mathrm{d}q = -\,\mathrm{d}\theta,$$

přičemž se náš výraz promění na $\mathrm{d}q + \mathrm{d}\theta$. Přistoupíme již k druhému integrování v rozpětí od $q = 0$ do $q = A$ a dostaneme integrální křivost trojúhelníka

$$= A + \theta' - \theta^0 = A + B + C - \pi.$$

Integrální křivost je rovna ploše této části sférické plochy, která odpovídá trojúhelníku, chápaného s kladným nebo záporným znaménkem, jak křivá plocha, ve kterou je trojúhelník vložen, je konkávně–konkávní nebo konkávně–konvexní: za jednotkovou plochu je přijmut čtverec, jehož strana je jednotka (poloměr sféry), kterýžto celkovou plochu sféry dává $= 4\pi$. Tedy část sférické plochy trojúhelníku odpovídá celé ploše sféry, poněvadž $\pm(A+B+C-\pi)$ [přísluší] ke 4π. Tento teorém, který pokud jsme se nespletli, znamená nejskvotnější zprávu v teorii křivých ploch, takže může být pronesena také následujícím způsobem:

Přebytek součtu úhlů trojúhelníku, utvořeného z nejkratších linií na křivé konkávně-konkávní ploše, převyšuje $180°$, *anebo úbytek součtu úhlů trojúhelníku, utvořeného nejkratšími liniemi na konkávně-konvexní křivé ploše, je oproti* $180°$ *měřený pro obsah části sférické plochy, která ve směru normály odpovídá tomuto trojúhelníku, jestliže celková plocha je ekvivalentní* 720 *stupňům.*

Obecně v každém mnohoúhelníku o n stranách, jež je jednoduše tvořen nejkratšími liniemi, je přebytek součtu úhlů nad $2n-4$ pravými, anebo úbytek je o $2n-4$ pravé [úhly] (podle charakteru křivé plochy), je plocha mnohoúhelniku ekvivalentní příslušné sférické ploše, přičemž celková sférická plocha je ekvivalentní 720 stupňům, což samo o sobě proniká z předchozí věty, pokud roztrháme mnohoúhelník na trojúhelníky.[75]

21

V obecném smyslu obnovíme znaky p, q, E, F, G, ω, které byly dříve přijaty, a předpokládáme vložení další křivé plochy určené jiným podobným způsobem pomocí dvou jiných proměnných p', q', přičemž neurčitý lineární element [bude] vyjádřený pomocí

$$\sqrt{E'\,\mathrm{d}p'^2 + 2F'\,\mathrm{d}p' \cdot \mathrm{d}q' + G'\,\mathrm{d}q'^2}.$$

[75] Tj. provedeme triangulaci. [pozn. překl.]

Takovýmto způsobem každému bodu plochy, určenému hodnotami určitých proměnných p, q odpovídají hodnoty určitých proměnných p', q', kde asi tyto budou funkce [proměnných] p, q, z nichž předpokládáme, že diferencováním se vyjeví

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p' &= \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q, \\ \mathrm{d}q' &= \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q. \end{aligned}$$

Nyní před(po)kládáme našemu zkoumání geometrický význam těchto koeficientů α, β, γ, δ.

Takže nyní můžeme na křivé ploše představit *čtyři* lineární systémy, pro které jsou q, p, q', resp. p' konstanty. Jestliže pro určitý bod, který odpovídá proměnným hodnotám p, q, p', q', předpokládáme čtyři linie, které byly vzaty k jednomu takovému náležejícímu systému, pak těmto elementům, kladným variacím $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$, budou odpovídat

$$\sqrt{E}\cdot\mathrm{d}p, \quad \sqrt{G}\cdot\mathrm{d}q, \quad \sqrt{E'}\cdot\mathrm{d}q', \quad \sqrt{G'}\cdot\mathrm{d}q'.$$

Úhel, který tyto elementy směru svírají s libovolnými pevnými směry, označíme M, N, M', N', měřené v tom smyslu, ve kterém [se mají] druhé vzhledem k prvním, takže $\sin(N-M)$ bude kladná veličina: ve stejném smyslu zůstavší předpokládejme (což je přípustné), že čtvrtá je vztažena k třetí, takže také $\sin(N'-M')$ bude kladná veličina. Takže takto chápáno, jestliže uvažujeme další bod, nekonečně málo vzdálen od prvního bodu, kterému odpovídají hodnoty proměnných

$$p+\mathrm{d}p, \quad q+\mathrm{d}q, \quad p'+\mathrm{d}p', \quad q'+\mathrm{d}q'$$

nepatrným soustředěním se, víme, že obecně bude, tj. nezávisle na hodnotách variací (přírůstků, diferenciálů) $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}p'$, $\mathrm{d}q'$,

$$\sqrt{E}\cdot\mathrm{d}p\cdot\sin M + \sqrt{G}\cdot\mathrm{d}q\cdot\sin N = \sqrt{E'}\cdot\mathrm{d}p'\cdot\sin M' + \sqrt{G'}\cdot\mathrm{d}q'\cdot\sin N',$$

pokud oba výrazy nebudou [obsahovat] žádný další kromě vzdálenosti nového bodu od linie, z které úhly směrů začínají. Avšak máme díky zápisu výše uvedeného

$$N - M = \omega,$$

a analogicky položíme

$$N' - M' = \omega',$$

či dodatečně

$$N - M' = \psi.$$

Takže rovnice zavedeným způsobem může být předvedena v následujícím tvaru:

$$\sqrt{E} \cdot \mathrm{d}p \cdot \sin{(M' - \omega + \psi)} + \sqrt{G} \cdot \mathrm{d}q \cdot \sin{(M' + \psi)} =$$
$$= \sqrt{E'} \cdot \mathrm{d}p' \cdot \sin M' + \sqrt{G'} \cdot \mathrm{d}q' \cdot \sin{(M' + \omega')}$$

nebo takto

$$\sqrt{E} \cdot \mathrm{d}p \cdot \sin{(N' - \omega - \omega' + \psi)} + \sqrt{G} \cdot \mathrm{d}q \cdot \sin{(N' - \omega' + \psi)} =$$
$$= \sqrt{E'} \cdot \mathrm{d}p' \cdot \sin{(N' - \omega')} + \sqrt{G'} \cdot \mathrm{d}q' \cdot \sin N'.$$

A protože rovnice musí být zjevně nezávislá na počátečním směru, tento [směr] může být [zvolen], jak je potřeba. A tak ustavením ve druhé formuli $N' = 0$, nebo v první $M = 0$, dostaneme následující rovnice:

$$\sqrt{E'} \cdot \sin\omega' \cdot \mathrm{d}p' = \sqrt{E} \cdot \sin{(\omega + \omega' - \psi)} \cdot \mathrm{d}p + \sqrt{G} \cdot \sin{(\omega' - \psi)} \cdot \mathrm{d}q,$$

$$\sqrt{G'} \cdot \sin\omega' \cdot \mathrm{d}q' = \sqrt{E} \cdot \sin{(\psi - \omega)} \cdot \mathrm{d}p + \sqrt{G} \cdot \sin\psi \cdot \mathrm{d}q,$$

a kteréžto rovnice, poněvadž musí být identické s těmito

$$\mathrm{d}p' = \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q,$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q,$$

budou poskytovat určení koeficientům α, β, γ, δ. A to bude

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \frac{\sin{(\omega + \omega' - \psi)}}{\sin\omega'},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{G}{E'}} \cdot \frac{\sin{(\omega' - \psi)}}{\sin\omega'},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}} \cdot \frac{\sin{(\psi - \omega)}}{\sin\omega'},$$

$$\delta = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\omega'}.$$

Připojením musí být rovnice [tvaru]

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \qquad \cos\omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}},$$

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{EG - FF}{EF}}, \qquad \sin\omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'F'}{E'G'}},$$

odkud tedy [tyto] čtyři rovnice také mohou vypadat [takto]

$$\alpha\sqrt{E'G' - F'F'} = \sqrt{EG'} \cdot \sin(\omega + \omega' - \psi),$$

$$\beta\sqrt{E'G' - F'F'} = \sqrt{GG'} \cdot \sin(\omega' + \psi),$$

$$\gamma\sqrt{E'G' - F'F'} = \sqrt{EE'} \cdot \sin(\psi - \omega),$$

$$\delta\sqrt{E'G' - F'F'} = \sqrt{GE'} \cdot \sin\psi.$$

Poněvadž substitucemi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p' &= \alpha\,\mathrm{d}p + \beta\,\mathrm{d}q, \\ \mathrm{d}q' &= \gamma\,\mathrm{d}p + \delta\,\mathrm{d}q \end{aligned}$$

by měl trojčlen

$$E'\,\mathrm{d}p'^2 + 2F'\,\mathrm{d}p' \cdot \mathrm{d}q' + G'\,\mathrm{d}q'^2$$

přejít do [tvaru]

$$E\,\mathrm{d}p^2 + 2F\,\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}q + G\,\mathrm{d}q^2,$$

jednoduše dostaneme

$$EG - FF = (E'G' - F'F')(\alpha\delta - \beta\gamma)^2;$$

a poněvadž naopak poslední trojčlen by opět měl přejít v první pomocí substituce

$$\begin{aligned} (\alpha\delta - \beta\gamma)\,\mathrm{d}p &= \delta\,\mathrm{d}p' - \beta\,\mathrm{d}q', \\ (\alpha\delta - \beta\gamma)\,\mathrm{d}q &= -\gamma\,\mathrm{d}p' + \alpha\,\mathrm{d}q', \end{aligned}$$

nalézáme

$$E\delta\delta - 2F\gamma\delta + G\gamma\gamma = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} \cdot E',$$

$$E\beta\delta - F(\alpha\delta + \beta\gamma) + G\alpha\gamma = -\frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} \cdot F',$$

$$E\beta\beta - 2F\alpha\beta + G\alpha\alpha = \frac{EG - FF}{E'G' - F'F'} \cdot G'.$$

22

Od obecného pojednání předchozího odstavce sestoupíme k nejšířeji rozprostřeným aplikacím, kde když p a q budou také vzaty v nejobecnějším smyslu, pak za p', q' vezmeme veličiny, které jsme v odst. 15 značili r, φ, které jsme zde také používali. Zejména pro každý bod plochy bude r minimální vzdálenost od určitého (pevného) bodu a φ úhel v tomto bodě mezi prvním elementem z r a (nějakým) pevným směrem. Tedy máme

$$E' = 1, \quad F' = 0, \quad \omega' = 90^\circ :$$

položíme navíc

$$\sqrt{G'} = m,$$

tak jak lineární element kterýkoliv byl

$$= \sqrt{\mathrm{d}r^2 + mm\,\mathrm{d}\varphi^2}.$$

Odtud čtyři rovnice, vyšetřené v předchozím odstavci pro α, β, γ, δ, dávají

$$\sqrt{E} \cdot \cos(\omega - \psi) = \frac{\partial r}{\partial p}, \tag{1}$$

$$\sqrt{G} \cdot \cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q}, \tag{2}$$

$$\sqrt{E} \cdot \sin(\psi - \omega) = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \tag{3}$$

$$\sqrt{G} \cdot \sin\psi = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q}. \tag{4}$$

Poslední a předposlední [rovnice předchozího odstavce] ale [dávají] tyto

$$EG - FF = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F \cdot \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2, \tag{5}$$

$$\left(E \cdot \frac{\partial r}{\partial q} - F \cdot \frac{\partial r}{\partial p}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left(F \cdot \frac{\partial r}{\partial q} - G \cdot \frac{\partial r}{\partial p}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}. \tag{6}$$

Z těchto rovnic se požaduje určení veličin r, φ, φ' a (jestliže práce je vidět) m pomocí p a q: zejména integrování rovnice (5) poskytne r, které tím dostaneme; integrování rovnice (6) poskytne φ a jedna nebo druhá rovnice (1) [nebo] (2) samotné ψ: nakonec m dostaneme z jedné nebo druhé rovnice (3) [nebo] (4).

Obecným integrováním rovnic (5), (6) by měly nutně být zavedeny dvě libovolné funkce, které co [je jejich význam,] chceme snadno pochopit, jestliže uvážíme, že tyto rovnice nejsou omezeny na samotný případ, který zde posuzujeme, ale je přivažována hodnota, jestliže r a φ přijmeme v obecnějším smyslu než v odst. 16, takže položíme r délku nejkratší linie od libovolné linie, určené vedenou normálou, a φ libovolnou funkci vzdálenosti té části linie, která je zachycena mezi [nějakou] neurčitou nejkratší linií a daným [pevným] libovolným bodem. A tedy obecné řešení by mělo zahrnout všechno to neurčité a potom libovolné funkce by měly nakonec přejít v určité, pokud tato libovolná linie a částečná funkce, kterou by měla [veličina] φ ukazovat, jsou předepsané. V našem případě nekonečně malého kruhu můžeme přijmout, maje střed v jeho bodě, ze kterého je měřena vzdálenost r, a [věda, že] φ bude označovat samotné části tohoto kruhu, rozdělené poloměrem, z čehož se jednoduše shrne, že rovnice (5), (6) jsou pro náš případ zcela dostačující za předpokladu, že [funkce, které mají] ponechanou neurčitost, se přizpůsobí podmínce, jaká se vztahuje na r a φ pro tento počáteční bod a i pro body z nekonečně malé vzdálenosti od něho.

Jinak pokud jde o samotné integrování rovnic (5), (6), se konstatuje, že ho lze redukovat na integrování obyčejných diferenicálních rovnic, které přesto často přejde v natolik komplikované, že redukce přináší pramalý užitek. Naproti tomu rozvinutí do řad, které je v praxi běžnější, kdykoli je plocha poskládaná z malého množství[76] částí, je bohatě dostačující, nepředstavuje žádné těžkosti, a tak hodně otevírá i původně uvedené výrazy k řešení mnohem závažnějších problémů. Jenže toto je jediný příklad, jak ukázat charakter[77] metody.

23

Uvažujme nyní případ, kde všechny linie, pro které je p konstantní, jsou nejkratší linie, ortogonální vůči druhým liniím, pro které $\varphi = 0$ a které můžeme doplnit tak jako abscisální linii. Nechť A je bod, pro který $r = 0$, D neurčitý bod na abscisální linii, $AD = p$, B neurčitý bod na nejkratší linii, která je v D normálou k AD a i $BD = q$, takže p můžeme považovat za abscisu, tak jako q ordinátu bodu B; kladnou abscisu budeme předpokládat v tom rameni abscisální linie, které odpovídá $\varphi = 0$, zatímco r očekáváme vždy jako kladnou veličinu; kladnou ordinátu ustavíme v té oblasti,[78] kde se φ měří mezi 0°

[76] Anglický překlad uvádí z konečného množství. Německy es sich um nicht allzugrosse Theile einer Fläche handelt (z ne příliš velkého). Latinský originál nemá množství nijak vyjádřeno. [pozn. překl.]

[77] Ve smyslu povahy, vnitřní skryté krásy. [pozn. překl.]

[78] Latinsky plaga ve smyslu řeckého πλαγός kraj, krajina, končina, zóna. [pozn. překl.]

a 180°.[79]

Podle teorému z odst. 16 máme

$$\omega = 90^\circ, \quad F = 0 \quad \text{a rovněž} \quad G = 1;$$

mimoto položme

$$\sqrt{E} = n.$$

Tedy n bude funkce pouze p, q a vskutku taková, že pro $q = 0$ musí být $= 1$. Aplikací původní formule z odst. 18 na náš případ vyjde, že v *každém případě* nejkratší linie musí splňovat

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\partial n}{\partial p} \cdot \mathrm{d}q,^{80}$$

[kde] θ označuje úhel mezi elementem této linie a elementem linie, pro kterou je q konstantní: nyní když abscisální linie je sama nejkratší linií a kvůli tomu kdekoli[81] $\theta = 0$, je jasné, že pro $q = 0$ musí kdekoli splňovat

$$\frac{\partial n}{\partial q} = 0.$$

Z tohoto důvodu tedy usuzujeme, že jestliže n lze rozvinout do další rostoucí mocninné řady [závislé] pouze na q, [potom] tato řada musí mít následující tvar

$$n = 1 + fqq + gq^3 + hq^4 + \quad \text{atd.},$$

kde f, g, h, atd. budou funkce pouze p, a to ještě položíme

$$\begin{aligned} f &= f^0 + f'p + f''pp + \quad \text{atd.}, \\ g &= g^0 + g'p + g''pp + \quad \text{atd.}, \\ h &= h^0 + h'p + h''pp \quad \text{atd.}, \end{aligned}$$

atd., nebo

$$\begin{aligned} n = 1 + f^0qq \quad &+ f'pqq \quad + f''ppqq + \quad \text{atd.} \\ &+ g^0q^3 \quad + g'pq^3 + \quad \text{atd.} \\ &\qquad\qquad + h^0q^4 + \quad \text{atd. atd.} \end{aligned}$$

[79]K tomuto odstavci se vztahuje náčrtek, uvedený v anglickém překladu na str. 55. [pozn. překl.]

[80]Použito anglického překladu s přihlédnutím k poznámkovému aparátu anglického a německého překladu. Latinské texty mají chybně na pravé straně znaménko minus. [pozn. překl.]

[81]Tedy také kdykoli a v kterémkoli bodě. [pozn. překl.]

24

Rovnice odstavce 22 v našem případě poskytují[82]

$$n \sin \psi = \frac{\partial r}{\partial p},$$

$$\cos \psi = \frac{\partial r}{\partial q},$$

$$-n \cos \psi = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$\sin \psi = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$nn = nn \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2,$$

$$nn \cdot \frac{\partial r}{\partial q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.$$

Prostřednictvím těchto rovnic, z kterých pátá a šestá jsou již v předchozích obsaženy, lze rozvinout řadu pro r, φ, ψ, m nebo pro nějakou libovolnou funkci takovýchto veličin, z kterých takové, které obzvláště zaslouží pozornosti, zde ověříme.

Poněvadž pro hodnoty nekonečně malých [proměnných] p, q musí platit

$$rr = pp + qq,$$

řada pro rr začíná členem $pp + qq$: členy vyššího řádu dostaneme metodou neurčitých koeficientů[83] prostřednictvím rovnice

$$\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial rr}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial rr}{\partial q}\right)^2 = 4r^2,$$

[82]Latinsky suppeditant od suppedito, poskytovat, opatřovat. Lze číst také jako dávají ve smyslu nezištně dávají (hojnost). [pozn. překl.]

[83]Gaussova poznámka: [Tedy] výpočtem, kterým se pomocí nikoli úskoku poněkud zmenšuje, zde jsme se rozhodli zbytečně připsat.

a to[84]

$$
\begin{aligned}
rr = pp &+ \frac{2}{3}f^0ppqq &+\frac{1}{2}f'p^3qq &+\left(\frac{2}{5}f'' - \frac{4}{45}f^0f^0\right)p^4qq \quad \text{atd.} \qquad ([1])\\
+ \quad qq & &+\frac{1}{2}ppq^3 &+\frac{2}{5}g'p^3q^3\\
& & &+\left(\frac{2}{5}h^0 - \frac{7}{45}f^0f^0\right)ppq^4.
\end{aligned}
$$

Potom vedeni formulí

$$r\sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\partial rr}{\partial p}$$

máme

$$
\begin{aligned}
r\sin\psi = p - \frac{1}{2}f^0pqq &- \frac{1}{4}f'ppqq &- \left(\frac{1}{5}f'' + \frac{8}{45}f^0f^0\right)p^3qq \quad \text{atd.} \qquad ([2])\\
&- \frac{1}{2}g^0pq^3 &- \frac{2}{5}g'ppq^3\\
& &- \left(\frac{3}{5}h^0 - \frac{8}{45}f^0f^0\right)pq^4
\end{aligned}
$$

a zároveň pomocí formule

$$r\cos\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial rr}{\partial q}$$

[bude]

$$
\begin{aligned}
r\cos\psi = q + \frac{2}{3}f^0ppq &+ \frac{1}{2}f'p^3q &+ \left(\frac{2}{5}f'' - \frac{4}{45}f^0f^0\right)p^4q \quad \text{atd.} \qquad ([3])\\
&+ \frac{3}{4}g^0ppqq &+ \frac{3}{5}g'p^3qq\\
& &+ \left(\frac{4}{5}h^0 - \frac{14}{45}f^0f^0\right)ppq^3.
\end{aligned}
$$

Tudíž společně dohromady uvádějí ve známost úhel ψ. Prostě k výpočtu úhlu φ je vhodné rozvinout řadu pro $r\cos\varphi$ a $r\sin\varphi$, které budou sloužit jako

[84] Anglický překlad v komentářích obsahuje odvození formule [1] až [3]. [pozn. překl.]

prostředek k parciálním diferenciálním rovnicím

$$\frac{\partial \cdot r\cos\varphi}{\partial p} = n\cos\varphi\cdot\sin\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \cdot r\cos\varphi}{\partial q} = \cos\varphi\cdot\cos\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

$$\frac{\partial \cdot r\sin\varphi}{\partial p} = n\sin\varphi\cdot\sin\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \cdot r\sin\varphi}{\partial q} = \sin\varphi\cdot\cos\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0,$$

jejichž zkombinováním se dostane

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial\cdot r\cos\varphi}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial\cdot r\cos\varphi}{\partial q} = r\cos\varphi,$$

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial\cdot r\sin\varphi}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial\cdot r\sin\varphi}{\partial q} = r\sin\varphi.$$

Odtud se jednoduše rozvinou řady pro $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, kterýchžto první členy zjevně musí být p a q, například[85]

$$\begin{aligned} r\cos\varphi = p + \frac{2}{3}f^0pqq \quad &+ \frac{5}{12}f'ppqq &&+ \left(\frac{3}{10}f'' - \frac{8}{45}f^0f^0\right)p^3qq \quad \text{atd.} \qquad ([4])\\ &+ \frac{1}{2}g^0pq^3 &&+ \frac{7}{20}g'ppq^3\\ & &&+ \left(\frac{2}{5}h^0 - \frac{7}{45}f^0f^0\right)pq^4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r\sin\varphi = q - \frac{1}{3}f^0ppq \quad &- \frac{1}{6}f'p^3q &&- \left(\frac{1}{10}f'' - \frac{7}{90}f^0f^0\right)p^4q \quad \text{atd.} \qquad ([5])\\ &- \frac{1}{4}g^0ppqq &&- \frac{3}{20}g'p^3qq\\ & &&- \left(\frac{1}{5}h^0 + \frac{13}{90}f^0f^0\right)ppq^3.\end{aligned}$$

[85] Anglický překlad v komentářích opět obsahuje odvození formulí [4] a [5]. [pozn. překl.]

Z kombinace rovnic [2], [3], [4], [4] lze odvodit řadu pro $rr\cos(\psi+\varphi)$, a tedy vydělením řadou [1] řadu pro $\cos(\psi+\varphi)$, ze které lze stanovit řadu pro samotný úhel $\psi+\varphi$. Elegantně však totéž se získá následujícím způsobem. Diferencování první a druhé rovnice z těch [rovnic], které jsou zavedené na začátku tohoto odstavce, dostaneme [rovnici]

$$\sin\psi\cdot\frac{\partial n}{\partial q}+n\cos\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q}+\sin\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p}=0,$$

kterážto skombinovanou s touto

$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\sin\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q}=0$$

ukáže (vyjeví)

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial q}+\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial q}=0.$$

Z této rovnice pomocí metody neurčitých koeficientů jednoduše získáme řadu pro $\psi+\varphi$, jestliže zvážíme, že sám první člen musí být $\frac{1}{2}\pi$, poloměr vezmeme roven jednotce a označením 2π obvodu kruhu, [bude][86]

$$\begin{aligned}\psi+\varphi=\frac{1}{2}\pi-f^0pq\qquad&-\frac{2}{3}f'ppq\qquad&&-\left(\frac{1}{2}f''-\frac{1}{6}f^0f^0\right)p^3q\quad\text{atd.}\\&-g^0pqq&&-\frac{3}{4}g'ppqq\\&&&-\left(h^0-\frac{1}{3}f^0f^0\right)pq^3.\end{aligned}\qquad([6])$$

Zdá se cenným snaha rozvinout do řady také obsah trojúhelníka ABD. Tento rozvoj podává následující rovnici [ve tvaru] podmínky, která je jednoduše odvoditelná z dostatečně zjevných geometrických úvah a ve které S označuje hledaný obsah:[87]

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial p}+r\cos\psi\cdot\frac{\partial S}{\partial q}=\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\int n\,\mathrm{d}q,$$

[kde] integrování započne s $q=0$. Proto tedy metodou neurčitých koeficientů

[86] Přesné odvození formule [6] lze najít v komentáři k anglickému překladu. [pozn. překl.]

[87] Přesné odvození následující formule a formule [7] lze najít v komentáři k anglickému, příp. německému překladu. [pozn. překl.]

dostaneme

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{2}pq - \frac{1}{12}f^0p^3q - \frac{1}{20}f'p^4q - \left(\frac{1}{30}f'' - \frac{1}{60}f^0f^0\right)p^5q \quad \text{atd.} \qquad ([7])\\
-\frac{1}{12}f^0pq^3 - \frac{3}{40}g^0p^3qq - \frac{1}{20}g'p^4qq\\
-\frac{7}{120}f'ppq^3 - \left(\frac{1}{15}h^0 + \frac{2}{45}f'' + \frac{1}{60}f^0f^0\right)p^3q^3\\
-\frac{1}{10}g^0pq^4 - \frac{3}{40}g'ppq^4\\
-\left(\frac{1}{10}h^0 - \frac{1}{30}f^0f^0\right)pq^5.
\end{aligned}
$$

25

Z formulí předchozího odstavce, které se vztahovaly k pravoúhlnému trojúhelníku, utvořeného z nejkratších linií, pokročíme k obecnému. Nechť C je další bod v této [stejné] nejkratší linii DB, pro který p zůstává [stejné jako pro bod B] a q', r', φ', ψ', S' mají stejný význam jako q, r, φ, ψ, S pro bod B. Takže bude povstávat trojúhelník mezi body A, B, C, jehož úhly označíme A, B, C, protilehlé strany a, b, c a obsah σ; míru křivosti v bodech A, B, C budeme znázorňovat pomocí α, β, γ. A potom předpokládajíc (což je přípustné), že veličiny p, q, $q - q'$ jsou kladné, máme

$$
\begin{aligned}
A &= \varphi - \varphi',\\
B &= \psi,\\
C &= \pi - \psi',\\
a &= q - q',\\
b &= r',\\
c &= r,\\
\sigma &= S - S'.
\end{aligned}
$$

Především pomocí řady znázorníme obsah σ. V rovnici [7] provedeme záměnu jednotlivých veličin, které se vztahují k [bodu] B, za ty, které odkazují k [bodu] C, čímž dostaneme formuli pro S', odkud až do veličin šestého řádu [přesně] dostaneme

$$\sigma = \frac{1}{2}p(q-q')\Big\{1-\frac{1}{6}f^0(pp+qq+qq'+q'q') - \frac{1}{60}f'p(6pp+7qq+7qq'+7q'q') - \frac{1}{20}g^0(q+q')(3pp+4qq+4q'q')\Big\}.$$ [88]

Tento výraz za pomoci řady [2], totiž

$$c\sin B = p\left(1-\frac{1}{3}f^0pp-\frac{1}{4}f'pqq-\frac{1}{2}g^0q^3- \text{ atd.}\right),$$

přejde v následující

$$\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\Big\{1-\frac{1}{6}f^0(pp+qq+qq'+q'q') - \frac{1}{60}f'p(6pp-8qq+7qq'+7q'q') - \frac{1}{20}g^0(3ppq+3ppq'-6q^3+4qqq'+4qq'q'+4q'^3)\Big\}.$$

Míra křivosti pro libovolný pevný bod plochy bude (podle odst. 19, kde m, p, q byly tím, co jsou zde n, q, p)

$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial\partial n}{\partial q^2} = -\frac{2f+6gq+12hqq+\text{ atd.}}{1+fqq+\text{ atd.}} = -2f-6gq-(12h-2ff)qq- \text{atd.}$$

Tímto se stává, nakolik p, q odpovídají bodu B, že

$$\beta = -2f^0-2f'p-6g^0q-2f''pp-6g'pq-(12h^0-2f^0f^0)qq- \quad \text{atd.}$$

a rovněž také

$$\gamma = -2f^0-2f'p-6g^0q'-2f''pp-6g'pq'-(12h^0-2f^0f^0)q'q'- \quad \text{atd.}$$
$$\alpha = -2f^0.$$

[88] Všechny překlady a vydání kromě německého (Wangerinova) namísto členu v závorce $3pp+4qq+4q'q'$ chybně přetiskují $3pp+4qq+4qq'+4q'q'$. Tento překlad se drží původního smyslu, a tedy nepřepisuje (jako anglický) výrazy do tvaru $3p^2+4q^2+4q'^2$. [pozn. překl.]

Zavedením těchto měr křivosti do řady pro σ, dostaneme následující výraz, který je přesný až do veličin šestého řádu (kromě něho):

$$\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(4pp - 2qq + 3qq' + 3q'q') \right. \\ + \frac{1}{120}\beta(3pp - 6qq + 6qq' + 3q'q') \\ \left. + \frac{1}{120}\gamma(3pp - 2qq + qq' + 4q'q')\right\}.^{89}$$

Stejná přesnost zůstane, jestliže namísto p, q, q' substituujeme $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B - a$, které zprostředkovaně dávají[90]

$$\sigma = \frac{1}{2}ac\sin B\left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3aa + 4cc - 9ac\cos B) \right. \\ + \frac{1}{120}\beta(3aa + 3cc - 12ac\cos B) \\ \left. + \frac{1}{120}\gamma(4aa + 3cc - 9ac\cos B)\right\}. \tag{[8]}$$

Pokud z této rovnice vše, co odkazuje k linii AD vedené normálou na BC, zmizelo, pak je přípustné permutovat mezi sebou také body A, B, C s příslušnými [výrazy], což bude stejně přesné (precisní)

$$\sigma = \frac{1}{2}bc\sin A\left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 12bc\cos A) \right. \\ + \frac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 9bc\cos A) \\ \left. + \frac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 9bc\cos A)\right\}, \tag{[9]}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}ab\sin C\left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3aa + 4bb - 9ab\cos C) \right. \\ + \frac{1}{120}\beta(4aa + 3bb - 9ab\cos C) \\ \left. + \frac{1}{120}\gamma(3aa + 3bb - 12ab\cos C)\right\}. \tag{[10]}$$

[89] V souborném vydání *Werke*, Bd. 4, je chybně uveden člen v závorce $3pp - 2qq + qq' + 4qq'$ namísto $3pp - 2qq + qq' + 4q'q'$. Anglický překlad tuto chybu již napravil. [pozn. překl.]

[90] Anglický překlad v komentářích uvádí odvození [8]. Z formule [8] záměnou proměnných A, β, a, b namísto B, α, β, a dostaneme [9] a záměnou C, γ, β, b namísto B, β, γ, c dostaneme [10]. [pozn. překl.]

26

Velký užitek zjednává uvažování rovinného pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou rovny samotným a, b, c; úhly tohoto trojúhelníka, které označíme A^*, B^*, C^*, se od úhlů na křivé ploše, totiž od A, B, C, odlišují ve veličinách druhého řádu; a bude pracné a cenné přesně rozvinout tyto rozdíly. Avšak než [abychom se zabývali] těžkými detailními výpočty, nejprve zvážíme dostatečnost [tohoto].

Nahrazením veličin, které se vztahují k B, ve formulích [1], [4], [5] těmi, které odkazují k C, jsou získány formule pro $r'r'$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Potom rozvoj výrazu

$$rr + r'r' - (q-q')^2 - 2r\cos\varphi\cdot r'\cos\varphi' - 2r\sin\varphi\cdot r'\sin\varphi',$$

který bude

$$= bb + cc - aa - 2bc\cos A = 2bc(\cos A^* - \cos A),$$

zkombinovaný s rozvojem výrazu

$$r\sin\varphi\cdot r'\cos\varphi' - r\cos\varphi\cdot r'\sin\varphi',$$

který se stane

$$= bc\sin A,$$

dává následující formuli

$$\begin{aligned}\cos A^* - \cos A = -\,(q-q')p\sin A\Big\{&\frac{1}{3}f^0 + \frac{1}{6}f'p + \frac{1}{4}g^0(q+q') + \\ &+\left(\frac{1}{10}f'' - \frac{1}{45}f^0f^0\right)pp + \frac{3}{20}g'p(q+q') + \\ &+\left(\frac{1}{5}h^0 - \frac{7}{90}f^0f^0\right)(qq+qq'+q'q') + \quad \text{atd.}\Big\}.\end{aligned}$$

Proto dále bude až do veličin pátého řádu

$$\begin{aligned}A^* - A = +(q-q')p\Big\{&\frac{1}{3}f^0 + \frac{1}{6}f'p + \frac{1}{4}g^0(q+q') + \frac{1}{10}f''pp \\ &+\frac{3}{20}g'p(q+q') + \frac{1}{5}h^0(qq+qq'+q'q') \\ &-\frac{1}{90}f^0f^0(7pp+7qq+12qq'+7q'q')\Big\}.\end{aligned}$$[91]

Zkombinováním této formule s touto [následující]

$$2\sigma = ap\left(1 - \frac{1}{6}f^0(pp + qq + qq' + q'q' - \quad \text{atd.})\right)$$

a také s hodnotami veličin α, β, γ, zmíněnými v předchozím odstavci, dostaneme až do veličin pátého řádu[92]

$$\begin{aligned} A^* = A - \sigma \Big\{ &\frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{12}\gamma \frac{2}{15}f''pp + \frac{1}{5}g'p(q+q') + \\ &+ \frac{1}{5}h^0(3qq - 2qq' + 3q'q') + \\ &+ \frac{1}{90}f^0f^0(4pp - 11qq + 14qq' - 11q'q')\Big\}. \end{aligned} \tag{[11]}$$

Přesně stejnými operacemi rozvineme

$$\begin{aligned} B^* = B - \sigma \Big\{ &\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{6}\beta + \frac{1}{12}\gamma \frac{1}{10}f''pp + \frac{1}{10}g'p(2q+q') + \\ &+ \frac{1}{5}h^0(4qq - 4qq' + 3q'q') + \\ &- \frac{1}{90}f^0f^0(2pp + 8qq - 8qq' + 11q'q')\Big\}, \end{aligned} \tag{[12]}$$

$$\begin{aligned} C^* = C - \sigma \Big\{ &\frac{1}{12}\alpha + \frac{1}{12}\beta + \frac{1}{6}\gamma \frac{1}{10}f''pp + \frac{1}{10}g'p(q+2q') \\ &+ \frac{1}{5}h^0(3qq - 4qq' + 4q'q') \\ &- \frac{1}{90}f^0f^0(2pp + 11qq - 8qq' + 8q'q')\Big\}. \end{aligned} \tag{[13]}$$

Odtud zároveň když je součet $A^* + B^* + C^*$ roven dvěma pravým, zavádíme přebytek součtu $A + B + C$ nad dvěma pravými úhly, například

$$\begin{aligned} A + B + C = \pi + \sigma \Big\{ &\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{3}\gamma \frac{1}{3}f''pp + \frac{1}{2}g'p(q+q') \\ &+ \left(2h^0 - \frac{1}{3}f^0f^0\right)(qq - qq' + q'q')\Big\}. \end{aligned} \tag{[14]}$$

[91] Kromě Wangerina všechny překlady a vydání (včetně *Werke*, Bd. 4) převádí záporné znaménko na pravé straně. Opraveno v souladu s komentáři anglického překladu. [pozn. překl.]

[92] Komentáře k anglickému překladu obsahují odvození následujících formulí. [pozn. překl.]

Tato poslední rovnice by měla být nadstavěna nad formulí [6].

27

Jestliže křivou plochou je sféra, jejíž poloměr $= R$, bude

$$\alpha = \beta = \gamma = -2f^0 = \frac{1}{RR};$$
$$f'' = 0, \qquad g' = 0, \qquad 6h^0 - f^0 f^0 = 0$$

nebo

$$k^0 = \frac{1}{24R^4}.$$

Odtud se formule [14] stane

$$A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{RR},$$

která se těší absolutní přesnosti; avšak formule [11]–[13] dávají

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(2pp - qq + 4qq' - q'q'),$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp - 2qq + 2qq' + q'q'),$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(pp + qq + 2qq' - 2q'q'),$$

anebo [jim] stejně rovné

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3RR} - \frac{\sigma}{180R^4}(bb + cc - 2aa),$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(aa + cc - 2bb),$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3RR} + \frac{\sigma}{180R^4}(aa + bb - 2cc).$$

Zanedbáním veličin čtvrtého řádu jasně poukazuje tento teorém na poznatek, který první předložil Legendre.[93]

[93]Legendrův teorém se nachází v Mémoires (Histoire) de l'Academie Royale de Paris, 1787, str. 358, a také v jeho *Trigonometrii*, Appendix, § V:

Velmi mírně zakřivenému sférickému trojúhelníku, jehož úhly jsou A, B, C a jehož strany jsou a, b, c, vždy odpovídá rovinný trojúhelník, jehož strany a, b, c jsou stejných délek a jehož protější úhly jsou $A - \frac{1}{3}e$, $B - \frac{1}{3}e$, $C - \frac{1}{3}e$, kde e je přebytek součtu úhlů v daném sférickém trojúhelníku nad dvěma pravými.

[pozn. překl.]

28

Naše obecné formule, oproštěné[94] od členů čtvrtého řádu, velmi jednoduše vzniknou,[95] totiž

$$A^* = A - \frac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma),$$

$$B^* = B - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma),$$

$$C^* = C - \frac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma).$$

Takže k úhlům A, B, C na nesférických plochách jsou aplikovatelné nerovnosti omezeními, a tak siny zaměněných úhlů se stanou úměrné protilehlým stranám.[96] Nerovnost, obecně řečeno, bude třetího řádu, ale jestliže plocha se od sféry málo rozrůzňuje,[97] pak ona [nerovnost] se bude vztahovat k vyššímu řádu: dokonce v největším trojúhelníku na zemské ploše, jehož úhly lze skutečně měřit, může být vždy rozdíl nepostřehnutelný. Tedy například v největším trojúhelníku mezi těmi, které jsme předchozí rok zjišťovali, zejména mezi body[98] Hohenhagen, Brocken, Inselsberg, kde odchylka součtu úhlů byla $= 14.''85348$, výpočet dal následující redukci, aplikovanou na úhly:[99]

Hohenhagen	$-4.''95113$,
Brocken....	$-4.''95104$,
Inselsberg..	$-4.''95131$.

[94]Latinsky reiectis, tedy přesněji odhozené. [pozn. překl.]

[95]Přesněji uniknout či spíše obtíží odvozování se vyhnou. Latinsky euadunt. [pozn. překl.]

[96]Neboli (do hodnot $\leq 5°$) je provedena aproximace $\sin x \approx x$, tedy oblouk nahrazen hodnotou. [pozn. překl.]

[97]Latinsky discrepat. [pozn. překl.]

[98]Body, které odpovídají příslušným vrcholům hor, základní triangulační sítě. [pozn. překl.]

[99]Wangerin v komentáři k německému překladu dodává navíc vzdálenosti:

Hohenhagen–Brocken .	107 km,
Inselsberg–Hohenhagen	85 km,
Brocken–Inselsberg....	69 km.

[pozn. překl.]

29

Ověnčeným případem ještě porovnáme obsah trojúhelníku na křivé ploše s obsahem pravoúhlého trojúhelníku, jehož příslušné strany jsou a, b, c. Obsah posledně zmíněného [trojúhelníku] označme σ^*, který bude

$$= \frac{1}{2}bc \sin A^* = \frac{1}{2}ac \sin B^* = \frac{1}{2}ab \sin C^*.$$ [100]

Až do veličin čtvrtého řádu máme

$$\sin A^* = \sin A - \frac{1}{12}\sigma \cos A \cdot (2\alpha + \beta + \gamma)$$

nebo stejně tak rovno

$$\sin A = \sin A^* \cdot \left(1 + \frac{1}{24}bc \cos A \cdot (2\alpha + \beta + \gamma)\right).$$

Dosazením této hodnoty do formule [9] bude až do veličin šestého řádu

$$\sigma = \frac{1}{2}bc \sin A^* \cdot \left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(3bb + 3cc - 2bc\cos A) + \right.$$
$$+ \frac{1}{120}\beta(3bb + 4cc - 4bc\cos A) +$$
$$\left. + \frac{1}{120}\gamma(4bb + 3cc - 4bc\cos A)\right\}$$

anebo stejně tak rovno

$$\sigma = \sigma^* \left\{1 + \frac{1}{120}\alpha(aa + 2bb + 2cc) + \frac{1}{120}\beta(2aa + bb + 2cc) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{120}\gamma(2aa + 2bb + cc)\right\}.$$

Pro sférickou plochu tato formule vezme na sebe tvar

$$\sigma = \sigma^* \left(1 + \frac{1}{24}\alpha(aa + bb + cc)\right),$$

na jehož místě může být rovněž vítaný tak jako přesně [stejně] přijatelný [následující tvar]

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin A^* \cdot \sin B^* \cdot \sin C^*}}.$$

[100] Anglický překlad obsahuje podrobné odvození vztahu mezi σ a σ^*. [pozn. překl.]

Jestliže tato formule [obsahu] trojúhelníku na křivé ploše není aplikovatelná na nesférický, bude obecně řečeno chyba čtvrtého řádu, avšak smysly nepostřehnutelná ve všech trojúhelnících, které by mohly být měřitelné na zemské ploše.

Závěr

Ukázalo se, že zkoumání zrození Gaussovy diferenciální geometrie se dotýká těchto disciplín:

- historie matematiky,
- historie astronomie, aplikací astronomických metod v geodézii,
- historie kartografie, teoretické i praktické geodézie,
- historie fyziky,
- teorie potenciálu.[1]

K interpretaci tedy bylo nutné kromě historie matematiky a matematických pojmů interdisciplinárně přihlížet i k dalším vědním oborům a jejich vývoji.

Téma *Korespondence C. F. Gausse* bylo zúženo na zkoumání zrození diferenciální geometrie. Na druhou stranu se zadání práce rozšířilo o překlad Gaussových základních prací k této části matematiky. Součástí disertační práce jsou tak dosud nepublikované překlady textů

- *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (1822),[2]
- *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827)[3] a

[1]Jak teoreticky v matematice, tak užitá v geofyzice při výpočtu ideálního zemského refenčního sféroidu nebo zemského magnetismu.

[2]Zde je uvedeno jako dílo *O konformním zobrazení*. Vydáno v *Astronomische Abhandlungen* herausgegeben von H. C. Schumacher, Drittes Heft., Altona 1825. Je součástí (Gauss 1873).

[3]Zde je uvedeno jako *Obecné pojednání o křivých plochách*. Vydáno v *Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores*, vol. VI, Gottingae 1828. Je rovněž součástí (Gauss 1873).

- *Anzeigen. Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827).[4]

Nedílnou součástí těchto překladů je podrobný rozbor Gaussovy korespondence s Heinrichem Christianem Schumacherem z let 1808 až 1830.

Kromě výše uvedeného se během zkoumání podařilo najít a odhalit tyto závěry:

1. Geodetické proměřování Hannoverského království sehrálo klíčovou roli pro vznik Gaussovy diferenciální geometrie, neboť ta dává teoretický podklad pro Gaussem v té době již smýšlenou, novou, vyšší geodézii.
2. Na základě korespondence se ukazuje, že Gaussova praktická měření směřovala k vybudování jednotné paneuropské geodetické sítě.
3. Korespondence odhalila, jakou roli sehrál příběh Ceny Kodaňské královské společnosti k sepsání prvotního i vrcholného Gaussova spisu z diferenciální geometrie.
4. Deriváty Ceny Kodaňské královské společnosti jsou vedle Gaussovy diferenciální geometrie posmrtně publikovaný manuskript o Gaussově–Newtonově interpolační formuli a projekce dvou křivých ploch navzájem na sebe.
5. Gaussova diferenciální geometrie, ač infinitesimálně pojímaná, je názorná. Navazuje na Newtonovo pojetí přírodovědy a zachovává filosofický odkaz Kantova geometrického názoru.
6. Syntetická geometrie v učebnicích Lazara Carnota sehrává nepřímou, ale důležitou roli k pochopení a názoru geometrických veličin.
7. Zasazení Gaussovy práce do evropské matematiky ve 20. letech 19. století vede více přes uplatnění v praktické oblasti, aplikaci astronomie a geodézie, než (v té době) jako příspěvek k teoretické matematice. Ten se ukazuje mnohem později. Gaussovy práce je nutno interpretovat vzhledem k probíhající epistemologické proměně matematiky první poloviny 19. století.

Z povahy věci je zřejmé, že podrobnější zkoumání více dopisů či prací korespondentů by detailněji dokreslilo obraz matematického bádání v okruhu Carla Friedricha Gausse. Další možnosti hledání života Gaussovy diferenciální

[4] Vydáno v *Göttingische gelehrte Anzeigen* No. 177. S. 1761–1768. 1827. November 5. Je rovněž součástí (Gauss 1873, 341–347).

geometrie spočívají v hlubším zkoumání jeho korespondence s Lindenauem, Olbersem, Gerlingem a Besselem a/nebo v propojení s náčrty Gaussových textů z pozůstalosti (a tím umožnit jejich bližší časovou identifikaci). To zahrnuje i kritický překlad textu *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*, který se zdá být nejen časovým spojovníkem mezi *Allgemeine Auflösung der Aufgabe* a *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, ale také jako text k porozumění spisů o vyšší geodézii.

Summary

The present dissertation *Correspondence of C. F. Gauss* has historiographical character. Its aim is to expose life and work of the famous German mathematician, astronomer and physicist Carl Friedrich Gauss (1777–1855) through the correspondence with his students (mainly Heinrich Christian Schumacher). The thesis focuses on the 1820s period and Gauss' publications on differential geometry.

The methodological perspective of this thesis is based on intentional historiography. This is widely overviewed in the first part of dissertation.

The main theses of the dissertation, which is defended on the grounds of correspondences and papers, are the following:

1. A geodetic surveying of the Hannover Kingdom was a key to grow up the Gauss differential geometry. Gauss' theoretical geometrical results formed a background to his new higher geodesy work.

2. The correspondence between Gauss and Schumacher implies that a practical geodetic measurement tends to build the Paneuropean geodetic net.

3. The letters exposed a role of the Royal Copenhagen Society Price. Its story arose immediately from the correspondence between Gauss and Schumacher.

4. Derivatives of the Copenhagen Royal Society Price are the Gauss–Newton interpolation formula (published from inheritance) and a mutually projection of curved surfaces (unpublished, only in inheritance).

5. Although the Gauss differential geometry is given in infinitesimal sense, it holds a Kantian intuition of space. Gauss follows a Newtonian focus on science and philosophical heritage of Kant's geometrical view.

6. Synthetic geometry in text-books by Lazare Carnot gives an indirect but important role to understand geometric magnitudes.

7. The Gauss papers on differential geometry joined European mathematics of 1820s to practical areas, applications in astronomy and geodesy, more than a theoretical contribution to mathematics. The theoretical benefits grew up later. It is necessary to read the Gauss works in the context of the continuous epistemological exchange of mathematics of the first-half of 19th century.

The comprehensive part of the dissertation are original critical Czech translations of Gauss' published papers on differential geometry of curved surfaces:

- *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen änhlich wird* (1822),
- *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) and
- *Abstract of Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827).

Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation *Korrespondenz von C. F. Gauss* hat einen historiographischen Charakter. Ihr Ziel ist es, Leben und Werk des berühmten deutschen Mathematiker, Astronom und Physiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) durch die Korrespondenz mit seinen Schülern (vor allem Heinrich Christian Schumacher) aussetzen. Die These liegt der Schwerpunkt auf den 1820er Periode und Gausche Publikationen über die Differentialgeometrie.

Der methodische Perspektive dieser Arbeit wird auf einer intenzionalischer Geschichtsschreibung basiert. Dies ist in den ersten Teil der Dissertation überblicken.

Die wichtigsten Thesen der Dissertation, die auf dem Gelände der Gaußsche Korrespondez, Werke und Nachlass verteidigt wird, sind die folgenden:

1. Die Erd- und Landvermessung des Königreichs Hannover war ein Schlüssel zum aufwachsen die Gaußscher Differentialgeometrie. Theoretische geometrischen Ergebnisse von Gauss erklärte in einem Hintergrund zu neuen, höheren Geodäsie Arbeit.

2. Der Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher bedeutet, dass eine praktische geodätische Messung den Netzen der paneuropischen Grandmessung bauen tendiert.

3. Die Buchstaben ausgesetzt waren, eine Rolle die Preisfrage der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen. Seine Geschichte entstand unmittelbar aus der Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher.

4. Derivaten die Preisfrage der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Kopenhagen sind die Gauß–Newton Interpolation Formel (veröffentlicht von der Nachlass) und die Projektion der krümmen Flächen.

5. Obwohl die Gaußsche Differentialgeometrie in unendlich Sinne gegeben ist, hält sie einen Kantischen Anschauung des Raumes. Gauss folgen einem Newtonschen Fokus von Wissenschaft und philosophische Erbe der geometrischen Ansicht Kants.

6. Synthetische Geometrie in Text-Bücher von Lazare Carnot gibt einen indirekten, aber wichtige Rolle zu, um geometrische Gröen zu verstehen.

7. Die Gaußschen Abhandlungen zur Differentialgeometrie an europäische Mathematik der 1820er Jahre aus der praktischen Bereichen, Anwendungen in der Astronomie und Geodäsie, mehr als ein theoretischer Beitrag zur Mathematik fixiert. Die theoretischen Vorteile wuchs später. Es ist notwendig, lesen Sie die Gauss arbeitet im Rahmen der kontinuierlichen erkenntnistheoretischen Austausch der Mathematik der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts.

Das umfangreiche Teil der Arbeit sind original kritischen tschechischen Übersetzungen der veröffentlichten Gauss' Werke zur Differentialgeometrie von krummen Flächen:

- *Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (1822),

- *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) und

- *Anzeigen. Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827).

Literatura

Primární literatura

[1] Gauss, C. F.: *Werke, band I*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, 1863.

[2] Gauss, C. F.: *Werke, band II*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, 1863.

[3] Gauss, C. F.: *Werke, band III*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, 1866.

[4] Gauss, C. F.: *Werke, band IV*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, 1873.

[5] Gauss, C. F.: *Werke, band V*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, 1867.

[6] Gauss, C. F.: *Werke, band VI*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, 1874.

[7] Gauss, C. F.: *Werke, band VII*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig 1906.

[8] Gauss, C. F.: *Werke, band VIII*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig 1900.

[9] Gauss, C. F.: *Werke, band IX*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig 1903.

[10] Gauss, C. F.: *Werke, band X (erste Abteilung)*. Königlichen Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig 1917.

[11] Gauss, C. F.: *Werke, band X (zweite Abteilung)*. Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, Julius Springer, Berlin 1922–1933.

[12] Gauss, C. F.: *Werke, band XI (erste Abteilung)*. Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, Julius Springer, Berlin 1927.

[13] Gauss, C. F.: *Werke, band XI (zweite Abteilung)*. Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, Julius Springer, Berlin 1924–1929.

[14] Gauss, C. F.: *Werke, band XII*. Gesselschaft der Wissenschagten, Göttingen, Julius Spinger, Berlin, 1929.

[15] Gauss, C. F., *Allgemeine Flächentheorie*, transl. Albert Wangerin, W. Engelmann, Leipzig 1899.

[16] Gauss, C. F., *General Investigations of Curved Surfaces*, ed. Peter Pesic, Dover Publications, Mineola, NY 2005.

[17] Gauss, C. F., *Die vier Gaussschen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reele Factoren ersten oder zweiten Grades (1799–1849)*, W. Engelmann, Leipzig 1890.

[18] Gauss, C. F., *On Conformal Representation*, In D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, McGraw-Hill, New York–London 1929.

[19] Gauss, C. F., *Mathematisches Tagebuch 1796–1814*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2009.

[20] Bruhns, K., *Briefe Zwischen A. v. Humboldt Und Gauss*, Wilhelm Engelmann, Leipzig 1877.

[21] Erman, A., *Briefwechsel Zwischen Olbers Und Bessel*, Erster Band, Avenarius & Mandelssohn, Leipzig 1852.

[22] Gauss, C. G. & Bessel, F. W., *Briefwechsel Zwischen Gauss Und Bessel*, W. Engelmann, Leipzig 1880.

[23] Gauss, C. G., *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai*, B. G. Teubner, Leipzig 1899.

[24] Gauss, C. G., *Briefwechsel von C. F. Gauss*, Signatura Kopenhagen, Kongelige Bibliotek, Ny kgl. S. 2749, 4°, ID 6336, Ludwig–Maxmilians Universität München 2007.
`http://gauss.gwi.uni-muenchen.de/Q/ID=6336` [pos. rev. 28. 2. 2007, cit. 17. 7. 2013]

[25] Peters, Ch. A. F. (ed.), *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und H. C. Schumacher*, Band 1, August Esch, Altona 1860.

[26] Peters, Ch. A. F. (ed.), *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und H. C. Schumacher*, Band 2, August Esch, Altona 1860.

[27] Peters, Ch. A. F. (ed.), *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und H. C. Schumacher*, Band 3, August Esch, Altona 1861.

[28] Peters, Ch. A. F. (ed.), *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und H. C. Schumacher*, Band 4, August Esch, Altona 1862.

[29] Peters, Ch. A. F. (ed.), *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und H. C. Schumacher*, Band 5, August Esch, Altona 1863.

[30] Peters, Ch. A. F. (ed.), *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und H. C. Schumacher*, Band 6, August Esch, Altona 1865.

[31] Poser, H. (ed.), *Briefwechsel Zwischen C. F. Gauß Und E. A. W. von Zimmermann*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1987.

[32] Schaefer, C. (ed.), *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und Christian Ludwig Gerling*, Otto Elsner, Berlin 1927.

[33] Schiling, C. (ed.), *Wilhelm Olbers: Sein Leben und Seine Werke*. Zweiter Band. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Erste Abtheilung, Julius Springer, Berlin 1900.

[34] Schiling, C. (ed.), *Wilhelm Olbers: Sein Leben und Seine Werke*. Zweiter Band. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Zweite Abtheilung, Julius Springer, Berlin 1909.

[35] Schmidt, F. & Stäckel, P., *Briefwechsel Zwischen Carl Friedrich Gauss Und Wolfgang Bolyai*, B. G. Teubner, Lepzig 1899.

[36] Valentiner, W. (ed.), *Briefe von C. F. Gauss und B. Nicolai*, Druck und Verlag der G. Braun'schen Hofbuchhandlung, Karlsruhe 1877.

Sekundární literatura

[37] Abel, N. H.: Démonstration de limpossibilité de la résolution algébrique des équations algébriques générales dun degré supérieur au quatrième“. In *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, 6(1806)(207), s. 347–354.

[38] *Astronomische Nachrichten*. `http://www.aip.de/AN/` [posl. rev. 29. 9. 2008, cit. 13. 6. 2011]

[39] *Astronomische Vereiningung Lilienthal e. V.*. `http://www.avl-lilienthal.de` [cit. 17. 7. 2013]

[40] Benediktová Větrovcová, M.: *Niels H. Abel: O algebraických rovnicích.* OPS & Vydavatelství ZČU, Kanina–Plzeň 2011.

[41] Benediktová Větrovcová, M.: Dunningtonuv Titán (recenze). *Kuděj* 1/2012, s. 127–131.

[42] Benediktová Větrovcová, M.: Zrození aritmetického a algebraického kalkulu. In Velický, B., Kůrka, P., Matoušek A. et al. *Spor o matematizaci ve vědě*, str. 171–194. Pavel Mervart, Červený Kostelec 2011.

[43] Beneke, O.: Repsold, Johann Georg. In: *Allgemeine Deutsche Biographie (ADB)*. Band 28, Duncker & Humblot, Leipzig 1889, S. 233–235.

[44] Bernard von Lindenau. In *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 15 (1855), s. 106.

[45] Biermann, K.-R.: *Carl Friedrich Gauß. Der Fürst der Mathematiker in Briefen und Gesprächen*, Verlag C. H. Beck, München 1990.

[46] Biegel, G., Oestmann, G., Reich, K. (eds.): *Neue Welten. Wilhelm Olbers und die Naturwissenschaften um 1800.* Braunschweigisches Landesmuseum, Braunschweig 2001.

[47] Blaschke, K.: Lindenau, Bernhard von. In: *Neue Deutsche Biographie* (NDB). Band 14, Duncker & Humblot, Berlin 1985, S. 592 f.

[48] Bonola, R.: *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc. 1955.

[49] Boyer, C. B.: *History of Analytic Geometry*, Dover Publications, Mineola, NY, 2004.

[50] Bradley, R. E. & Sandifer, C. E. (eds.): *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, Elsevier, Amsterdam–Oxford 2008.

[51] Bruhns, C.: Bohnenberger, Johann Gottlieb Friedrich v. In: *Allgemeine Deutsche Biographie (ADB)*. Bd. 3, Duncker & Humblot, Leipzig 1876, S. 81 f.

[52] Bruhns, C. (ed.): *Johann Franz Encke, königl. Astronom und Director der Sternwarte in Berlin. Sein Leben und Wirken.* Ernst Julius Günther, Leipzig 1869.

[53] Bruhns, K. C.: Gerling: Christian Ludwig. In: *Allgemeine Deutsche Biographie* (ADB). Bd. 9, Duncker & Humblot, Leipzig 1879, S. 26–29.

[54] Bruhns, K. C.: Harding, Karl Ludwig. In: *Allgemeine Deutsche Biographie (ADB)*. Bd. 10, Duncker & Humblot, Leipzig 1879, S. 593 f.

[55] Budinský, B.: *Analytická a diferenciální geometrie*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1983.

[56] Bühler, W. K.: *Gauss: A Biographical Study*, Springer Verlag, Berlin 1981.

[57] Bugge, Thomas. Katalog der Deutchen Nationalbibliothek. `http://d-nb.info/gnd/117153249` [cit. 17. 7. 2013]

[58] Bugge, Thomas. Katalog des Bibliotheksverbundes Bayern. `http://www.gateway-bayern.de/opensearch?rfr_id=LinkedOpenData3ABeacon&res_id=BVB&rft_id=info3Apnd2F117153249` [cit. 17. 7. 2013]

[59] Bundschuh, F. A.: Bohnenberger, Johann Gottlieb v.. In: *Neue Deutsche Biographie (NDB)*. Bd. 2, Duncker & Humblot, Berlin 1955.

[60] Burris, S., *Gauss and Non-Euclidean Geometry*, Waterloo, 2003.

[61] Calinger, R.: *A Contextual History of Mathematics*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.

[62] Calinger, R. (ed.): *Classics of Mathematics*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

[63] Carmo, M. P. do: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1976.

[64] Carmo, M. P. do: *Differential Forms and Applications*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1994.

[65] *Charles Henry Gauss Family Papers.*
`http://homepages.rootsweb.ancestry.com/~schmblss/`

[66] Carnot, L. N. M.: *De la corrélation des figures de géométrie*, Duprat, Paris 1801.

[67] Carnot, L. N. M.: *Géométrie de position*, Duprat, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, Paris 1803.

[68] Carnot, L. N. M., Schumacher, H. C.: *Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie*, J. F. Hammerich, Altona 1810.

[69] Čada, V. Geodetické základy státních mapových děl 1. poloviny 19. století a lokalizace do S-JTSK. In *Historické mapy. Zborník referátov z vedeckej konferencie*. Bratislava 2005.

[70] Daniels, N., Lobacevsky: Some Anticipactions of later Views on the Relation between Geometry and Physics, *Isis* 66, 1 (1975), 75–85.

[71] Dauben, J. W. & Scriba, C. J. (eds.): *Writing the History of Mathematics: Its Historical Development*. Birkhäuser Verlag, Berlin 2002.

[72] Demjančuk, N.: *O povaze vědy. Fenomenologie*. Nakladatelství Epocha, Praha 2011.

[73] Derrida, J.: *Tradice vědy a skrývání smyslu*. OIKOYMENH, Praha 2003.

[74] Dunnington W. D.: *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. The Mathematical Association of America, New York, 2004. (Reprint z roku 1955 s dodatky J. Graye)

[75] Encke, J. F.: Über Interpolation. *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, 55 (1830), 265–284. Uvedené také v *Gesammelte Mathematische und Astronomische Abhandlungen*, sv. 1, F. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, Berlin, 1888, 1–20.

[76] Engel, F.: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, B. G. Teubner, Leipzig 1895.

[77] Engelmann, R.: *Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel*, Band 3, Wilhelm Engelmann, Leizig 1876.

[78] Euler, L., *The Euler Archive. A Digital Library Dedicated to the Work and Life of Leonhard Euler.*
`http://www.eulerarchive.org/`

[79] Ewald, W.: *From Kant to Hilbert*, vol. I. a II., Clarendon Press, Oxford 2005.

[80] Fauvel, J. & Gray, J.: *The History of Mathematics. A Reader*, Palgrave Macmillian, Oxford 1987.

[81] Ferreirós, J. & Gray, J. (eds.): *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford University Press, Oxford 2006.

[82] Fiala, J.: Teorie a dějiny. Dějiny teorií a teorie dějin. *Acta FF* 3/2010, 11–13.

[83] Fiala, J.: Fenomenologie matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* (1998) 43, 60–64.

[84] Fiala, J.: *Henri Poincaré: Číslo – prostor – čas.* OPS & Vydavatelství ZČU, Kanina–Plzeň 2010.

[85] Gauss, R.: *Robert Gauss to Felix Klein – September 3, 1912.* `http://homepages.rootsweb.ancestry.com/~schmblss/`

[86] Gerdes, D.: *Die Lilienthaler Sternwarte 1781 bis 1818*, Verlag M. Simmering, Lilienthal 1991.

[87] Gilles, D.: *Revolutions in Mathematics.* Clarendon Press, Oxford 1992.

[88] Greenberg, J. L.: *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[89] Gray, J.: *Worlds Out of Nothing*, Springer Verlag, London–Dordrecht–Heidelberg–New York 2011.

[90] Gray, J.: *Plato's Ghost*, Princeton University Press, Princeton, NJ 2008.

[91] Greenberg, M. J.: *Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, Freeman & Co. 2007.

[92] Grison, E.: Lazare Carnot et le Grand Comité de Salut Public. In: *Sabix – Bulletin de la Societé des Amis de la Bibliothèque' de l'École polytechnique*, 23(2000), S. 15–21.

[93] Günther, S.: Peters, Christian Friedrich August. In: *Allgemeine Deutsche Biographie* (ADB). Band 25, Duncker & Humblot, Leipzig 1887, S. 485–487.

[94] Günther, S.: Zach, Franz Xaver von. In: *Allgemeine Deutsche Biographie, herausgegeben von der Historischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Bd. 44 (1898), S. 613–615.

[95] Halbwachs, M.: *On Collective Memory*, University of Chicago Press, Chicago 1992.

[96] Hall, T.: *Carl Friedrich Gauss: A Bibliography*, 1970.

[97] Hegel, G. W. F.: *Malá logika*, Nakladatelství Svoboda, Praha, 1992.

[98] Heidegger, M.: *Bytí a čas*, OIKOYMENH, Praha 1996.

[99] Herschel, J. F. W.: *A Brief Notice of the Life, Researches, and Discoveries of Friedrich Wilhelm Bessel*, George Barclay, London 1847.

[100] Hlavatý, V.: *Differenciální přímková geometrie*, Česká akademie věd a umění, Praha 1941.

[101] Hlavatý, V.: *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet*, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha 1937.

[102] Horský, Z.: *Koperník a české země*, Pavel Mervart, Červený Kostelec 2011.

[103] Husserl, E.: O původu geometrie, *Revue internationale de Philosophie* 1 (1936)(2). (Též Příloha III. ke kapitole 9a, str. 44). In Edmund Husserl: *Krize evropských věd*, str. 383–410. Překl. Oldřich Kuba. Academia, Praha 1996).

[104] Husserl, E.: *Krize evropských věd*. Překl. Oldřich Kuba. Academia, Praha 1996.

[105] Ivory, J.: On the Attractions of Homogeneous Ellipsoids. In *Proceedings of the Royal Society of London; Philosophical Transactions of the Royal Society*, s. 345–372, Royal Society of London, London 1809.

[106] Ivory, J.: James Ivory. In: *Proceedings of the Royal Society*. Philosophical Magazine, 22(1843), No. 143, s. 142–148.

[107] Jordan, W.: Bohnenberger. In: *Zeitschrift für Vermessungswesen*. Bd. 26, Konrad Wittwer, Stuttgart 1897.

[108] Kant, I.: *Kritika čistého rozumu*. Překl. Jaromír Loužil, Jiří Chotaš, Ivan Chvatík. OIKOYMENH, Praha 2001.

[109] Katz, V.: *A History of Mathematics. An Introduction*, Pearson Education, Boston 2009.

[110] Kelmann, D.: *Die Vermessung der Welt*. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg 2005. Český překlad *Vyměřování světa*. Transl. Tomáš Ditmer. Nakladatelství Vakát, Praha 2007.

[111] Klein, F.: Gauß' wissenschaftliches Tagebuch 1796–1814. Mit Anmerkungen. *Mathematische Annalen* 57 (1903), 1–34.

[112] Kline, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York 1972.

[113] Knott, R.: Weber, Wilhelm. In: *Allgemeine Deutsche Biographie (ADB)*. Bd. 41, Duncker & Humblot, Leipzig 1896, S. 358–361.

[114] Koch, J. (1997): Die Messung der Braaker Basis 1820 und 1821 im Rahmen der Landestriangulation Dänemarks und Hannovers. In *Mitt. Gauß-Gesellschaft Göttingen*, 34(1997), s. 11–23.

[115] Koch, J. W. (ed.): *Der Briefwechsel von Johann Georg Repsold mit Carl Friedrich Gau und Heinrich Christian Schumacher*, Koch, Holm 2000.

[116] Koch, J. W.: *Der Hamburger Spritzenmeister und Mechaniker Johann Georg Repsold (1770–1830): ein Beispiel für die Feinmechanik im norddeutschen Raum zu Beginn des 19. Jahrhunderts*. Univ. diss., Hamburg 2001.

[117] Kohout, V.: *Diferenciální geometrie*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha 1971.

[118] Kolmogorov, A. N. & Yushkevich, A. P. (eds.): *Mathematics of the 19th Century*. Mathematical Logic. Algebra. Number Theory. Probability Theory. Birkhäuser, Basel 2001.

[119] Kolmogorov, A. N. & Yushkevich, A. P. (eds.): *Mathematics of the 19th Century*. Geometry. Analytic Function Theory. Birkhäuser, Basel 1996.

[120] Kolmogorov, A. N. & Yushkevich, A. P. (eds.): *Mathematics of the 19th Century*. Constructive Function Theory. Ordinary Differential Equations. Calculus of Variations. Theory of Finite Differences. Birkhäuser, Basel 1998.

[121] Kopal, Z.: Friedrich Wilhelm Bessel – An Apprsciation. In *Astrophysics and Space Science* 10 (1985), s. 3–10.

[122] Kořistka, K. F. E.: O pracích a vynálezech Gaussových v oboru geodesie. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 6 (1877), No. 4, 174–183.

[123] Laplace, P. S.: Des attractions des sphéroïdes homogènes terminés par des surfaces du second ordre. In *Traité de mécanique céleste*, tom. II, livre III, ch. 1, s. 5–22, Duprat, Paris VII (1797).

[124] Lawrynowicz, K.: *Friedrich Wilhelm Bessel 1784–1846*, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin 1995.

[125] Legendre, A.-M. *Éléments de géométrie*. Firmin Didot, Paris 1794.

[126] Legendre, A.-M., *Mémoire sur les opérations trigonométriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*. Mémoires (Histoire) de l'Academie Royale de Paris, Paris 1787.

[127] Meijering, E.: A Chronology of Interpolation. From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing. *Proceedings of the IEEE*, 90 (2002), No. 3, 319–342.

[128] Merlau-Ponty, M.: *Viditelné a neviditelné*, OIKOYMENH, Praha 1998.

[129] Merlau-Ponty, M.: *Svět vnímání*, OIKOYMENH, Praha 2008.

[130] Merzbach, U. C. & Boyer, C. B.: *A History of Mathematics*, Wiley, Hoboken, NJ 2011.

[131] Müller H., Krieger, K. F. & Vollrath, H.: *Dějiny Německa*. NLN, s.r.o., nakladatelství Lidové noviny, Praha, 1995.

[132] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F.: Carl Friedrich Hindenburg. In: *MacTutor History of Mathematics archive*, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrew, St Andrew, Scotland 2005.

[133] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F.: James Ivory. In: *MacTutor History of Mathematics archive*, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrew, St Andrew, Scotland 2005.

[134] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F.: Johann Christian Martin Bartels. In: *MacTutor History of Mathematics archive*, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrew, St Andrew, Scotland 2009.

[135] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F.: Wilhelm Eduard Weber. In: *MacTutor History of Mathematics archive*, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrew, St Andrew, Scotland 2009.

[136] Peters, C. F. A.: Todes-Anzeige. In: *Astronomische Nachrichten* 97 (1880) 5, s. 113–114.

[137] Peters, C. F. A.: Fellows deceased, list of Peters, C. F. A. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 41 (1881)(2), s. 193–194.

[138] Pfaff, J. W. A.: *Werke von Johann Wilhelm Andreas Pfaff*. DSpace Universitätsbibliothek Tartu, Tartu 2002–2011. `http://dspace.utlib.ee/dspace/handle/10062/4819` [cit. 17.7.2013]

[139] Prékopa,A. & Molnár, E.: *Non-Euclidena Geometries*, Springer Netherlands, 2006.

[140] Reich, K.: *Der Hamburger Mechanikus und Sprützenmeister Johann Georg Repsold*, Univ. Hamburg, Hamburg 1998.

[141] Reich, K.: Euler's Contribution to Differential Geometry and its Reception. In Bradley, R. E. & Sandifer, C. E. (eds.): *Leonhard Euler: Life, Work and Legancy*, 479–502, Elsevier, Amsterdam-New York 2007.

[142] Reich, K.: Schumacher, Heinrich Christian. In: *Neue Deutsche Biographie (NDB)*. Band 23, s. 739 f., Duncker & Humblot, Berlin 2007.

[143] Reinhard, M.: *Le grand Carnot*, 2. vyd., Hachettte, Paris 1994.

[144] Repsold, J. A.: H. C. Schumacher. In: *Astronomische Nachrichten.* Band 208 (1918), Nr. 4970–71, 17–34.

[145] Ricoeur, P.: Phénomenologie et herméneutique: en venant de Husserl. In Ricoeuer, P., *Du text à l'action*, 43–81. Seuil, Paris 1986.

[146] Ricoeur, P.: *Memory, History, Forgetting.* University of Chicago Press 2004.

[147] Ricoeur, P.: *Čas a vyprávění III.* Překl. Miroslav Petříček. OIKOYMENH, Praha 2007.

[148] Robert, F.: Základ a fundování. In Maurice Merlau–Ponty: *Založení a podstata.* OIKOYMENH, Praha 2011.

[149] Röd, W., *Novověká filosofie II*, Oikoymenh, Praha 2004.

[150] Rota, G.-C.: Fenomenologie matematické pravdy. Překl. Jiří Fiala. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 43 (1998), 65–72.

[151] Rükl, A.: *Atlas Měsíce.* Aventinum, Praha 1991,

[152] Sarton, G.: *The Study of the History of Mathematics.* Dover, New York 1955.

[153] Schlesinger, L.: *Über Gauss Arbeiten zur Funktionentheorie.* Neubearbeitung des Aufsatzes aus Heft III der Materialien für eine wissenschaftliche Biografie von Gauss gesammelt von F. Klein und M. Brendel. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1912.

[154] Scholz, E.: Carl F. Gauss, el "gran triángulo" y los fundamentos de la geometría, *La Gaceta de la RSME* 8.3 (2005), 683–712.

[155] Scholz, E.: C. F. Gauß' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren, In M. Folkerts, R. Seisink (eds.) *Form, Zahl, Ordnung. Studien zur Wissenschafts- und Technikgeschichte. Ivo Schneider zum 65. Geburtstag.*, Franz Steiner Verlag, Stuttgart 2004.

[156] Schumacher, H. C.: Solution généralede ce problème. . . , *Bulletin des sciences mathématiques, astronomie, physiques et chimiques*, tom. VI (1826), 96–100.

[157] Sinaceur, H.: *Jean Cavaillès. Philosophie mathématique.* PUF, collection "Philosophies", Paris 1994.

[158] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, Publish or Perish, Inc., Houston, TX 2005.

[159] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. II, Publish or Perish, Inc., Houston, TX 1999.

[160] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. III, Publish or Perish, Inc., Houston, TX 1999.

[161] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. IV, Publish or Perish, Inc., Houston, TX 1999.

[162] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. V, Publish or Perish, Inc., Houston, TX 1999.

[163] *Sternwarte in Lilienthal.* `http://www.youtube.com/watch?v=xzVyiFEHiGY`. [cit. 17. 7. 2013]

[164] Studnička, F. J.: O povaze Gaussově. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* 6 (1877), No. 4, 162–169.

[165] Švec, L., Macura, V., Štol, P.: *Dějiny Pobaltských zemí*, NLN–Nakladatelství Lidové noviny, Praha 1996.

[166] Tent, M. B. V.: *The Prince of Mathematics*, A K Peters, Wellesley, MA 2006.

[167] Torge, W.: *Geschichte der Geodäsie in Deutschland*, De Gruyter, Berlin 2007.

[168] Větrovcová, M.: Hermeneutika arabské matematiky dynastie Abbásovců. In Písařová, P. & Šašková, K. (eds.). *Stopy v šafránu.* Vydavatelství ZČU, Plzeň 2012 (v tisku).

[169] Volk, O.: Gerling, Christian Ludwig. In: *Neue Deutsche Biographie* (NDB). Bd. 6, Duncker & Humblot, Berlin 1964, S. 308.

[170] Vopěnka, P.: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*, Práh, Praha 2000.

[171] Vopěnka P.: *Rozpravy s geometrií: Otevření neeukleidovských geometrií světů. Trýznivé tajemství.* Vesmír, Praha, 1995.

[172] Vopěnka, P.: *Velká iluze matematiky XX. století a nové základy.* Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni & Nakladatelství KONIÁŠ, Plzeň 2011.

[173] Vopěnka, P.: Benediktová Větrovcová, M., Ostřanský, B.: *Al-Chvárizmí: Aritmetický a algebraický traktát*. OPS, Nymburk 2009.

[174] Wangerin, A. (ed.): *Ueber Kartenprojection. Abhandlungen Von Lagrange (1779) Und Gauss (1822)*, Wilhelm Engelmann, Leipzig 1891.

[175] Wangerin, A. (ed.): *Drei Abhandlungen Über Kartenprojection Von Leonhard Euler (1777).*, Wilhelm Engelmann, Leipzig 1898.

[176] Wangerin, A. (ed.): *Ueber Die Anziehung Homogener Ellipsoide. Abhandlungen Von Laplace (1782), Ivory (1809), Gauss (1813), Chasles (1838) Und Dirichlet (1839)*, Wilhelm Engelmann, Leipzig 1890.

[177] Waltershausen, W. S. von, *Gauss, a Memorial*, Colorado Springs, CO 1966.

[178] Weisstein, E. W.: Gauss's Interpolation Formula, *MathWorld-A Wolfram Web Resource*
`http://mathworld.wolfram.com/GaussInterpolationFormula.html`

[179] West, K.: *Profiles in Mathematics: Carl Friedrich Gauss*, Morgan Reynolds, Greensboro NC 2009.

[180] Wussing, H. & Arnold, W., *Bibliophien bedeutender Mathematiker*, Berlin 1983.