

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta elektrotechnická

Katedra technologií a měření

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vyšetření elektrického pole svazkových vodičů

Plzeň 2014

Iveta Petrášová

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: Bc. Iveta PETRÁŠOVÁ
Osobní číslo: E12N0027P
Studijní program: N2612 Elektrotechnika a informatika
Studijní obor: Komerční elektrotechnika
Název tématu: Vyšetření elektrického pole svazkových vodičů
Zadávací katedra: Katedra technologií a měření

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

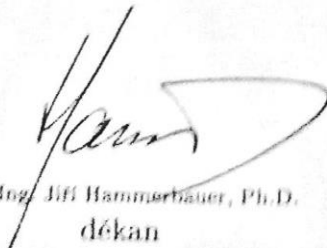
1. Vysvětlete fyzikální princip působení svazkových vodičů.
2. Proveďte matematickou formulaci pro výpočet elektrického pole v okolí svazkových vodičů
 - a) pomocí MKP,
 - b) pomocí Fredholmovy integrální rovnice.
3. Proveďte numerické řešení matematických modelů ad 2 pro různé geometrické konfigurace svazku vodičů. Porovnejte obě numerické metody řešení.
4. Navrhněte experimentální ověření provedených výpočtů a podle možnosti tento návrh laboratorně realizujte.
5. Formulujte závěry pro optimální volbu svazkového vodiče pro danou přenosovou soustavu vvn.

Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího
Rozsah pracovní zprávy: 30 - 40 stran
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická
Seznam odborné literatury:


1. Mayer D.: Elektrodynamika pro energetiku, BEN, Praha 2006

Vedoucí diplomové práce: Prof. Ing. Daniel Mayer, DrSc.
Katedra teoretické elektrotechniky

Datum zadání diplomové práce: 14. října 2013
Termín odevzdání diplomové práce: 12. května 2014


Doc. Ing. Jiří Hammarbauer, Ph.D.
děkan




Doc. Ing. Vlastimil Škodík, CSc.
vedoucí katedry

V Plzni dne 14. října 2013

Abstrakt

Práce je zaměřena na vyšetření elektrického pole svazkových vodičů, v tomto případě na vyšetření rozložení elektrické intenzity na povrchu daného vodiče. V úvodních kapitolách je popsána charakteristika svazkových vodičů a princip jejich vzájemného fyzikálního působení. Následující kapitoly pak předkládají řešení pro dva svazkové vodiče, a to pomocí Fredholmovy integrální rovnice a Metody konečných prvků (MKP). Fredholmova rovnice je řešena v programu Matlab7.1 a MKP je aplikována v programu Agros2D. V konečné fázi budou obě řešení porovnána a následně vybrán nejvhodnější vodič.

Klíčová slova

Svazkový vodič, Fredholmova integrální rovnice, Metoda konečných prvků, elektrické pole, elektrická intenzita, plošná hustota.

Abstract

The thesis is focused on the examination of the electric field of the bundle conductors. In this case, the thesis is involved in examination of the distribution of the electric intensity on the surface of the conductor. At the beginning it is described the characteristics of the bundle conductors and the principle of the mutual physical effects. Further chapters present solutions for both of the conductors by using the Fredholm`s integral equation and Finite element method (FEM). Fredholm`s equation was solved in the Matlab7.1 application and FEM was solved in the Agros2D program. At the end both of the solutions will be compared and the most useful one will be selected for our situation.

Key words

Bond conductor, Fredholm integral equation, Finite element method, electric field, electric field intensity, areal density.

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

V Plzni dne 12.5. 2014

Jméno příjmení
....Iveta Petrášová....

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucímu předložení diplomové práce panu Prof. Ing. Danielu Mayerovi, DrSc. za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah

ÚVOD	10
1 ELEKTROSTATICKÉ POLE A SVAZKOVÉ VODIČE	11
1.1 ELEKTROSTATICKÉ POLE	12
1.1.1 Rovnice elektrostatického pole	12
1.1.2 Charakteristické veličiny elektrostatického pole	13
1.2 SVAZKOVÝ VODIČ	15
1.2.1 Charakteristika	15
1.2.2 Výhody použití svazkových vodičů	16
2 FYZIKÁLNÍ PŮSOBENÍ EL. POLE VE SVAZKOVÝCH VODIČÍCH	17
3 VYMEZENÍ CÍLŮ DIPLOMOVÉ PRÁCE	21
4 ŘEŠENÍ SVAZKOVÝCH VODIČŮ POMOCÍ FREDHOLMOVY INTEGRÁLNÍ ROVNICE	
1. DRUHU	22
4.1 ODVOZENÍ FREDHOLMOVY ROVNICE.....	22
4.2 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ FREDHOLMOVY ROVNICE	23
4.3 ČÍSELNÉ PŘÍKLADY	25
4.3.1 Počet svazků $n = 4$	26
4.3.2 Počet svazků $n = 8$	29
5 ŘEŠENÍ SVAZKOVÝCH VODIČŮ JAKO OKRAJOVÉ ÚLOHY ELEKTROSTATIKY	33
5.1 ŘEŠENÍ OKRAJOVÝCH ÚLOH.....	33
5.2 MKP (PRINCIP METODY).....	34
5.2.1 Diskretizace definiční oblasti	36
5.2.2 Potenciál uvnitř konečných prvků	36
5.2.3 Energetický funkcionál	38
5.2.4 Minimalizace energetického potenciálu	39
5.3 ČÍSELNÉ PŘÍKLADY	40
5.3.2 Svazkový vodič $n = 4$	41
5.3.3 Svazkový vodič $n = 8$	55
5.3.4 Porovnání metod řešení	68
ZÁVĚR	70
SEZNAM LITERATURY	71
PŘÍLOHY	73
ALGORITMUS PROGRAMU MATLAB7.1 PRO SVAZKOVÝ VODIČ $N = 4$:	73
ALGORITMUS PROGRAMU MATLAB7.1 PRO SVAZKOVÝ VODIČ $N = 8$:	75

Seznam symbolů

E	elektrická intenzita
σ	plošná hustota
φ	elektrický potenciál
ε_0	permitivita vakua
Q	náboj působící na vodič jednotkové délky
n	počet vodičů svazku
τ	náboj působící na vodič o jednotkové délce
r	poloměr vodiče svazku
R	polovina vzdálenosti vodičů svazku
N	počet úseků
Ω	oblast pro definici okrajové úlohy
Γ	hranice oblasti definující okrajovou úlohu
F	energetický funkcionál

Úvod

Svazkové vodiče jsou využívány zejména v přenosových soustavách. Je tomu tak hlavně kvůli možnosti ovlivnit rozložení plošné hustoty na povrchu vodiče, tím pádem snížit hodnotu kritické elektrické intenzity. Pokud by tato hodnota byla překročena, může na vedení dojít ke vzniku nežádoucího jevu – koróny, která na vedení způsobuje nežádoucí ztráty. Tato práce je zaměřena právě na vyšetření elektrického pole v okolí svazkových vodičů.

První kapitola popisuje elektrické a následně elektrostatické pole. Uvedeme si zde rovnice, které popisují elektrostatické pole, jedná se o druhou a třetí Maxwellovu rovnici. V další části budou uvedeny veličiny, které toto pole charakterizují a které budou následně užívány k výpočtům hodnot elektrické intenzity. Na závěr této kapitoly uvedeme charakteristiku svazkových vodičů, důvod a výhody jejich užívání.

Druhá kapitola popisuje princip fyzikálního působení těchto vodičů a definici celého problému naší práce. Ve třetím bodu práce budou vymezeny cíle práce, tedy formulace výpočtového algoritmu pomocí MKP a Fredholmovy rovnice a následně tyto příklady ilustrujeme numerickými příklady.

Čtvrtá kapitola naší práce je věnována Fredholmově rovnici. V první části si upřesníme odvození této rovnice, následně pro ní budeme řešit konkrétní příklady pro dané svazkové vodiče. Výpočty budou provedeny pomocí programu Matlab7.1.

V poslední kapitole budeme řešit dané problémy pomocí metody MKP. Nejprve si opět vymežíme všechny potřebné kroky k užití této metody. Samotné řešení provedeme tentokrát v programu Agros2D.

Řešení rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče pomocí dvou výše uvedených problémů bude zároveň také experimentálním ověřením.

1 Elektrostatické pole a svazkové vodiče

V této kapitole bych se ráda objasnila základní pojmy, kterými se bude práce zabývat, to znamená od charakteristiky elektrostatického pole a popisu základních veličin, které toto pole charakterizují, po popsání svazkového vodiče.

Elektrické pole se nachází v okolí každého elektricky nabitého tělesa. Je to tedy takové pole, kde se projevuje působení elektrické síly, jejíž příčina je způsobena elektrickým nábojem. Všechny nám dosud známé látky se skládají z atomů, které jsou za normálních podmínek navenek v elektricky neutrálním stavu. Teprve při kontaktu s jinými tělesy získají buď nadbytek elektronů (získáme záporně nabitě atomy) nebo nedostatek elektronů (získáme kladně nabitě atomy). Takže máme dva základní náboje – kladný a záporný náboj. Lze říci, že vzájemné silové působení elektrických nábojů je tedy realizováno pomocí elektrického pole. Jednotkou elektrického náboje je coulomb (dle francouzského fyzika Ch. Coulomba). Většinou se v praxi pracuje spíše s menšími násobky této jednotky, neboť náboj o velikost 1C je poměrně velký, proto pracujeme převážně s milicoulomby a mikrocoulomby. Při výpočtech se lze často setkat s pojmem elementární náboj, což je veličina

$$e=1,602 \times 10^{-19} \text{ C.}$$

Jak jsme se již dozvěděli, elektrické pole je způsobené ve své podstatě působením kladně nebo záporně nabitých částic. To znamená, že aktivačním prvkem je tedy těleso s nevykompenzovaným elektrickým nábojem. Pokud je toto pole časově proměnné, hovoříme spíše o magnetickém poli. Fyzikální podstatou elektrického pole je nábojová polarizace Smolinových základních objektů vakua EO (Elementary Object of Vacuum), navenek se projevující liniovým uspořádáním směrů vnější polarizace EO – siločárami. Lze zavést veličinu tučnost siločáry, čímž můžeme graficky vyznačit intenzitu polarizace EO samostatně v každém bodě prostoru, kterým siločára prochází. Následně tato siločára vyjadřuje i směr polarizace a intenzitu v každém takovém bodě.[3] [4]

Elektrické pole má svoje charakteristickou rozměry, které jsou závislé na velikosti náboje, na druhé mocnině vzdálenosti od tělesa a současně i na vlastnostech, které má prostředí v okolí tělesa. V souvislosti s elektrickým polem je často skloňován pojem intenzita elektrického pole, kdy elektrický náboj ve svém okolí vytvoří elektrické pole o určité intenzitě, lze ji

vyjádřit pomocí vztahu odvozeného z působení elektrostatické síly F na pole vytvořené nábojem Q na jiný zkušební náboj q . [5]

Elektrické pole má tedy svoji velikost, intenzitu a směr. Směrem rozumíme působení síly na náboj v konkrétním elektrickém poli, jenž působí od kladně nabitého tělesa k záporně nabitému tělesu.

S výše zmíněnou závislostí na čase lze elektrické pole rozdělit na několik částí podle [4]:

- nestacionární elektrické pole – časově proměnné elektrické pole
- stacionární elektrické pole – časově neproměnné elektrické pole
- elektrostatické pole – případ stacionárního pole bez pohybu elektrických proudů

Elektrické pole lze dále dělit z hlediska jeho tvaru, jenž je znázorněn pomocí již zmíněných siločar a ekvipotenciálních ploch. S tím souvisí tvar tělesa a pozice všech nabitých těles umístěných v okolí. Podle tvaru tedy dle [5] dělíme na:

- homogenní pole – siločáry jsou rovnoběžné přímky
- radiální pole – siločáry jsou přímky procházející jedním bodem
- radiálně zakřivené

1.1 Elektrostatické pole

Pro naši práci je zásadní se seznámit právě s elektrostatickým polem. Jak bylo uvedeno výše, elektrostatické pole je stacionárním polem, to znamená, je časově neproměnným. Elektrostatické pole existuje jen v prostředí nevodivém. V tomto prostředí totiž nedochází k pohybu elektrických nábojů, tudíž ani ke vzniku proudu. Ve vodivém prostředí díky pohybu nábojů dochází ke vzniku proudu za vzniku magnetického pole.[12]

1.1.1 Rovnice elektrostatického pole

Pro popis chování elektrostatického pole využíváme dvou Maxwellových rovnic, konkrétně se

jedná o druhou a třetí rovnici, jak je uvedeno ve [12].

2. Maxwellova rovnice:

$$\bullet \text{ Integrální tvar} \quad \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.1.1)$$

$$\bullet \text{ Diferenciální tvar} \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (1.1.2)$$

Pozn.: Tato rovnice vyjadřuje, že oběhové elektrické napětí v elektrostatickém poli je nulové.

3. Maxwellova rovnice:

$$\bullet \text{ Integrální tvar} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (1.1.3)$$

$$\bullet \text{ Diferenciální tvar} \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1.1.4)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

Pozn.: Tato rovnice vyjadřuje, že veškerý náboj se rozloží pouze na povrchu vodiče.

1.1.2 Charakteristické veličiny elektrostatického pole

Elektrostatické pole charakterizují dle [11]:

- intenzita elektrického pole
- elektrický potenciál
- elektrické napětí
- elektrická polarizace
- elektrická indukce a kapacita

Ze všech těchto uvedených veličin jsou nejdůležitějšími intenzita elektrického pole a jeho elektrický potenciál. Těmito veličinami se budeme blížeji zabývat v této kapitole, neboť právě ony budou hrát důležitou roli v další fázi práce.

1.1.2.1 Intenzita elektrického pole

Elektrický náboj ve svém okolí vytvoří elektrické pole o určité intenzitě. Tuto intenzitu lze vyjádřit pomocí vztahu odvozeného z působení elektrostatické síly F na pole vytvořené nábojem Q na jiný zkušební náboj q . [5]

$$E = \frac{F}{q} \quad , \quad (1.1.5)$$

$$E = \frac{F}{q} = k \frac{Qq}{r^2} \cdot \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (1.1.6)$$

V tabulce níže jsou pro zajímavost uvedeny velikosti intenzity u některých konkrétních příkladů. [5]

Tab. 1: Intenzity el. pole v určitých konkrétních případech, převzato z [5]:

Elektrické pole	Velikost intenzity (N C ⁻²)
<i>Na povrchu jádra uranu</i>	3×10^{22}
<i>Uvnitř atomu vodíku</i>	5×10^{11}
<i>Při elektrickém průrazu vzduchu</i>	3×10^6
<i>V blízkosti nabitého válce fotokopírovacího stroje</i>	10^5
<i>V blízkosti nabitého plastického hřebenu</i>	10^3
<i>V dolní vrstvě atmosféry</i>	10^2
<i>Uvnitř měděného vodiče v elektrických obvodech</i>	10^{-2}

1.1.2.2 Elektrický potenciál

Pro definici elektrického potenciálu vyjdeme ze vztahu

$$E = \text{grad } \varphi. \quad (1.1.7)$$

Elektrický potenciál nám poslouží ke zjednodušení řešení případů elektrostatických polí, pokud nelze příklad vyřešit přímým řešením, kdy zjistíme přímo hodnoty vektorů **E** a **D**. Pro nepřímá řešení těchto rovnic tedy zavádíme elektrický potenciál. Výhodou tohoto řešení je náhrada vektorového pole skalárním. [12]

1.2 Svazkový vodič

Svazkový vodič je druh vodiče venkovního vedení s jednotným geometrickým uspořádáním paralelních vodičů tvořících jednu fázi nebo jeden pól vedení.

1.2.1 Charakteristika

U vedení vvn a zvn se zpravidla používá tzv. svazkových vodičů. Znamená to, že každá fáze není tvořena jedním vodičem, ale svazkem několika vodičů, které mají od sebe vzdálenost d . Počet vodičů n ve svazku je různý (dvojsvazek $n=2$, trojsvazek $n=3$, čtyřsvazek $n=4$). U napětí 220 kV a většího nahrazujeme jednotlivé vodiče vedení zpravidla svazkovými vodiči, přičemž u vedení s napětíovou hladinou 400 kV je použití těchto vodičů nezbytné. Pro napětí 220 kV se používá dvojsvazkový vodič, u vedení s napětím 400 kV lze užít dvojsvazkový nebo třisvazkový vodič, u vedení s ještě vyššími napětíovými hladinami lze použít čtyřsvazkové vodiče. Pro napětí zvláště nebo ultra vysoké lze použít dokonce až šesti nebo dokonce osmisvazkové vodiče. [8][9]

Svazkový vodič tvoří soubor n paralelních vodičů ve vzdálenosti od sebe 25 – 60 cm. V této poloze jsou přidržovány kovovými rozpěrkami. Ve svazkových vodičích je nižší povrchový gradient a tím jsou tedy nižší i ztráty korónou a rušení telekomunikací. Při výpočtu parametrů vedení je nutné dosazovat za poloměr vodiče tzv. účinný neboli ekvivalentní poloměr svazku r_e , tento poloměr lze odvodit z potenciálních koeficientů svazku vodičů. Symetrický svazkový vodič obsahující n vodičů je ekvivalentní s takovým vodičem, jehož poloměr je podle [8][9]:

$$r_e = \sqrt[n]{r \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot \dots \cdot d_{1n}} \quad (1.2.1)$$

kde:

r_epoloměr jednoho vodiče,

a_{1n}vzdálenost středů ostatních vodičů od středu jednoho vodiče

npočet vodičů ve svazku.

Dalším důsledkem svazkových vodičů je zmenšení podélné indukčnosti vedení asi o 15 %, zvětšení provozní (příčné) kapacity, zvětšení proudové zatížitelnosti, zmenšení náchylnosti ke kmitání, zvětšení přidavného zatížení námrazou a větrem, zvětšení investičních nákladů a montážní náročnosti. [8]

1.2.2 Výhody použití svazkových vodičů

Výhody použití podle [8]:

- na povrchu těchto vodičů lze pozorovat nižší hodnoty intenzity elektrického pole, než u jediného, tzv. ekvivalentního, vodiče, toto souvisí především s menšími ztrátami korónou, neboť tato začíná při vyšším napětí, proto tedy menší ztráty a menší rušení telekomunikačního signálu,
- možnost zvýšení proudového zatížení vodičů, díky většímu povrchu těchto vodičů a možnosti odvodu vyššího tepla do okolí,
- nižší provozní indukčnost a z toho plynoucí menší úbytek napětí,
- snazší celková manipulace,
- zlepšení obecně mechanických vlastností.

2 Fyzikální působení el. pole ve svazkových vodičích

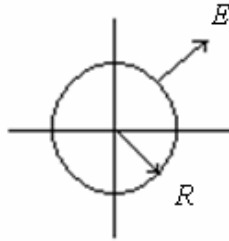
V důsledku odpudivých sil, kterými na sebe navzájem působí částice vodiče, se částice nesoucí elektrický náboj přesunou na jeho povrch. Elektrický náboj je tedy rozložen na povrchu vodiče. V důsledku toho vzniká elektrická intenzita. Pokud bude elektrická intenzita vodiče větší než elektrická intenzita vzduchu, může za účasti vysokého napětí dojít ke vzniku samostatného výboje. Tento výboj vznikající na silně zakřivených plochách vodiče označujeme jako korónu, jež vzniká právě za předpokladu, že dojde k překročení počátečního napětí a elektrická intenzita na povrchu vodiče bude větší než elektrická intenzita okolního vzduchu. Koróna je jedním z hlavních důvodů použití svazkového vodiče na vysokonapěťových úrovních, neboť způsobuje velké energetické ztráty na vedení. Ztráty, jež způsobuje koróna, jsou úměrné čtverci rozdílu mezi provozním napětím a počátečním napětím, jenž má koróna. U vysokonapěťových vedení tedy užíváme svazkových vodičů ke snížení celkové elektrické intenzity. [13][16]

Abychom tedy mohli omezit ztráty vzniklé působením koróny, musíme snížit elektrickou intenzitu vodiče na úroveň menší, než je intenzita okolního prostředí. Tím pádem musí dojít ke snížení plošné hustoty rozložení náboje, který je s určitou hustotou rozložen na ploše povrchu vodiče. [12][16]

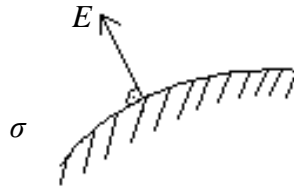
Pro tento problém budeme prvotně vycházet ze vztahu, který získáme z Coulombovy věty uvedenou v následujícím znění ve [12]: *“Vodič, na jehož povrchu je náboj o hustotě σ , je v prostředí o permitivitě ϵ . Na povrchu vodiče bude potom intenzita elektrického pole”*:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.1)$$

kdy $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$.



Obr. 1: Působení intenzity na povrchu jednoduchého vodiče.



Obr. 2: Plošná intenzita na povrchu vodiče.

Na obrázku 1 máme směr působení elektrické intenzity na povrchu jednoduchého vodiče. Na obrázku dva je znázorněna plošná hustota náboje na povrchu tělesa. Nyní tedy ilustrujme vztahy pro výpočet elektrické intenzity na povrchu jednoduchého vodiče s poloměrem R . [16]

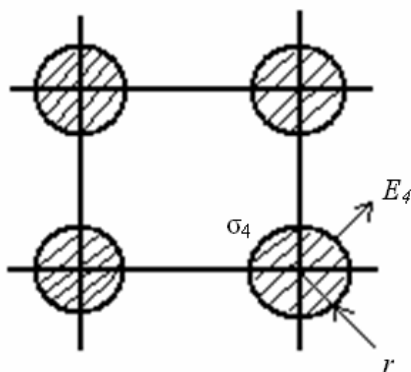
Do základního vztahu (2.1) nyní dosadíme vztah pro výpočet plošné hustoty,

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R \varepsilon_0}, \quad (2.2)$$

potom tedy z rovnice (2.1) dostaneme:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi R \varepsilon_0} \quad (2.3)$$

Rovnice (2.3) je tedy rovnicí pro intenzitu elektrického pole pro jednoduchý vodič s poloměrem R . V následujících několika krocích si odvodíme vzoreček pro intenzitu elektrického pole pro svazkový vodič s počtem svazků $n = 4$ s poloměrem r znázorněným na obrázku 3.

Obr.3: Svazkový vodič s počtem svazků $n = 4$.

Pro svazkový vodič je nutno uvažovat, že se ve svazku nacházejí nyní čtyři vodiče se stejným poloměrem r . Potom tedy obvod vodiče:

$$o = 2\pi r \cdot 4. \quad (2.4)$$

Po dosazení do vzorce intenzity dostaneme dle [14]:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2 \times 4 \pi r \varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{8 \pi r \varepsilon_0} \quad (2.5)$$

Nyní se pokusíme zjistit, v jakém poměru jsou intenzity k sobě navzájem. Jednoduchý vodič má plochu:

$$S = \pi R^2 \quad (2.6)$$

Svazkový vodič má plochu na kterou působí intenzita elektrického pole:

$$S_4 = 4 \pi r^2. \quad (2.7)$$

Pokud položíme $S = S_4$, potom dostaneme:

$$\pi R^2 = 4 \pi r^2 \quad (2.8)$$

$$R^2 = 4 r^2$$

$$R = 2r$$

$$r = R/2$$

Po dosazení do vzorce pro intenzitu:

$$E_4 = \frac{1}{2} E \quad (2.9)$$

Potom tedy obecný vzorec pro hodnotu intenzity svazkového vodiče tvořeného n svazky:

$$E_n = \frac{1}{\sqrt{n}} E \quad (2.10)$$

Při takovémto postupu by se mohlo zdát, že k vyšetření intenzity elektrického pole u svazkových vodičů je možno využít jen uvedený obecný vzorec. Bohužel, jak již bylo řečeno výše, každý z vodičů svazku je ovlivňován svojí vlastní plošnou hustotou. Pokud by k výpočtu stačil takový postup, plošná hustota každého vodiče by musela být na každém místě povrchu vodiče stejná. Jelikož ve svazku počítáme s několika vodiči, je každý z těchto vodičů ovlivňován nábojem okolního vodiče. Při tomto jevu dochází mezi částicemi na povrchu jednotlivých vodičů k odpuzování, poněvadž se jedná o částice se stejně orientovaným elektrickým nábojem. Rovnici (2.10) bychom mohli použít jen v tom případě, že jednotlivé vodiče by byly ve velké vzdálenosti od sebe, tudíž by nedocházelo k vzájemnému odpuzování nábojů na povrchu. Toto je ale v případě svazkových vodičů nereálná myšlenka, je tedy nutné vycházet z předpokladu, že jednotlivé náboje na povrchu na sebe působí, tudíž je nutné brát v potaz různé rozložení plošné hustoty na povrchu těchto vodičů. [8][12][16]

3 Vymezení cílů diplomové práce

1. Formulujte výpočtový algoritmus pro stanovení intenzity elektrického pole na povrchu vodičů svazku pro n celé.
2. Použijte jednak Fredholmovu integrální rovnici, jednak řešení okrajové úlohy MKP.
3. Popsané vztahy ilustруйте numerickými příklady.

4 Řešení svazkových vodičů pomocí Fredholmovy integrální rovnice 1. druhu

4.1 Odvození Fredholmovy rovnice

Pro vyšetření intenzity elektrického pole na povrchu vodiče je nutno nejprve vyšetřit právě plošnou hustotu, viz výše. Předpokládáme pro naše výpočty elektrické pole dvojrozměrné. Nejprve si určíme hodnotu elektrického potenciálu, který indukuje každý vodič o jednotkové délce, náboji τ a poloměru r . Postup při odvození Fredholmovy rovnice nalezneme v [8] a [12].

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{r} \quad (4.1.1)$$

Pokud nyní vezmeme v úvahu k -tý vodič tohoto svazku, vymezíme na křivce l_k , kterou je vodič ohraničený, délkový element dl_k . Na tomto elementu se bude nacházet náboj $\sigma_k dl_k$. Tento náboj bude následně v B (vně vodiče) indukovat potenciál, ze kterého následně získáme integrál přes povrch kruhového vodiče, je tedy nutno počítat s křivkovými integrály, v tomto případě přes křivku l dle [8] a [12].

$$\begin{aligned} d\varphi(r) &= \frac{\sigma_k dl_k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{|r_k - r_B|} \\ \varphi(r) &= \oint_{l_k} \frac{\sigma_k dl_k}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{|r_k - r_B|} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Po vyjádření integrální tvaru rovnice výše, musíme brát v potaz, že obdobně tomu tak bude i u ostatních $n - 1$ vodičů, tedy že i tyto budou indukovat v daném bodě B potenciály. Potenciály vypočítáme obdobně jako výše, v konečné fázi bude třeba je superponovat, vytvoříme tedy součet řady těchto potenciálů. Získaný potenciál dále normujeme, shodně s postupem uvedeným v [8] a [12].

$$\varphi(r_B) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \sigma_k \ln \frac{1}{|r_k - r_B|} dl_k \quad (4.1.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r_B) = 0 \quad (4.1.4)$$

Nyní jsme z předchozích rovnic schopni vyjádřit Fredholmovu rovnici 1. druhu, (*pozn. bod B leží na povrchu vodiče, neznámou je opět σ_k*)

$$\sum_{k=1}^n \oint_l \sigma_k(r_k) \ln \frac{1}{|r_k - r_B|} dl_k = 2\pi\epsilon_0 \varphi_k \quad (4.1.5)$$

Pomocí Fredholmovy rovnice 1. druhu jsme nyní schopni vyřešit námi žádanou hustotu náboje $\sigma_k(r_k)$. Jsme tedy schopni určit tuto hustotu v každém bodě povrchu uvedeného k -tého vodiče.

Povrch námi zkoumaného vodiče je v podstatě jakousi ekvipotenciální plochou, proto tedy intenzita elektrického pole $E_k(r_k)$, které působí na vodič, bude mít ve svém vektoru jen normálovou složku. Tuto intenzitu jsme schopni určit ze vztahu níže. Díky určení maximální hodnoty intenzity lze následně určit, zda na povrchu vodiče může vzniknout koróna. Zjištění provedeme jednoduše, a to porovnáním získané hodnoty s kritickou hodnotou elektrické intenzity, která by byla podmíněná pro vznik koróny. [8][12]

$$E_{rk} = \frac{\sigma_k(r_k)}{\epsilon_0} \quad (4.1.6)$$

4.2 Numerické řešení Fredholmovy rovnice

Následující kapitola je zaměřena na numerické řešení Fredholmovy rovnice. Protože se jedná o stěžejní část práce, je zde uveden postup „krok po kroku“ nutný k vyřešení problému.

Jak bylo uvedeno výše, povrch vodiče byl popsán pomocí jeho obrysových křivek l_k . Tyto křivky nyní rozdělíme na N_k úseků. Vzniklé úseky budou mít všechny stejnou délku δl_k . Pokud budeme postupovat dostatečně důsledně a dělení úseků bude provedeno s požadovanou

jemností, lze předpokládat, že náboj na každém z těchto úseků s povrchovou hustotou σ_{ki} bude konstantní. Nyní je potřeba zjistit vzdálenost mezi středem i -tého úseku Δl_{ki} a j -tého úseku Δl_{kj} : [8][12]

$$|r_k - r_B| = \sqrt{(x_{ki} - x_{kj})^2 + (y_{ki} - y_{kj})^2} \quad (4.2.1)$$

Pro tento případ tedy zapíšeme Fredholmovu rovnici. Problém může vzniknout, pokud by $i=j$. Budou – li si hodnoty rovny, nemohli bychom se vyhnout dělení nulou, což není možné. Proto tedy tento člen zapíšeme v následujícím tvaru, jenž je uveden v [8] a [12]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^{N_i} \sigma_k \ln \frac{1}{|r_{ki} - r_{ki}|} \Delta l_{ki} + 2 \sigma_k \int_0^{\Delta l_{ki}/2} \ln \frac{dr_k}{|r_k|} = 2\pi\epsilon_0 \varphi \quad (4.2.2)$$

Je – li námi zvolený úsek Δl_{ki} úsečka, můžeme integrální rovnici spočítat analyticky:

$$\int_0^{\Delta l_{ki}/2} \ln \frac{dr_k}{|r_k|} = \frac{\Delta l_{ki}}{2} \left(1 - \ln \frac{\Delta l_{ki}}{2} \right) \quad (4.2.3)$$

Pro numerické řešení následně zapíšeme rovnici (4.2.4) pro každý z úseků Δl_{ki} ($k=1 \dots n$, $i=1 \dots N_{ki}$). Tímto způsobem jsme nyní získali soustavu algebraických rovnic zveřejněnou v [8] a [12]:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^{N_i} \sigma_k \ln \frac{1}{|r_{ki} - r_{ki}|} \Delta l_{ki} + 2 \sigma_k \int_0^{\Delta l_{ki}/2} \ln \frac{dr_k}{|r_k|} = 2\pi\epsilon_0 \varphi \quad (4.2.4)$$

$$A\sigma = 2\pi\epsilon_0 \varphi \quad (4.2.5)$$

Kde $A(m,n) = [apq]$, $p,q = 1 \dots m$

$$p \neq q : a_{pq} = \Delta l_p \ln \frac{1}{|r_p - r_q|} \quad (4.2.6)$$

$$p = q : a_{pq} = \frac{\Delta l_p}{2} \left(1 - \ln \frac{\Delta l_p}{2} \right) \quad (4.2.7)$$

$\sigma(m,1)$ = sloupcový vektor hledaných hustot náboje na diskretizovaném povrchu vodičů,

$\varphi(m, l) =$ sloupcový vektor potenciálu jednotlivých vodičů.

Uvedená metoda umožňuje respektovat elektrostatické působení všech vodičů soustav, tedy všechny svazkové vodiče všech fází, případně vliv země.

4.3 Číselné příklady

Řešení Fredholmovy rovnice bylo provedeno v programu Matlab7.1. Nejprve si provedeme řešení pro svazkové vodiče s počtem svazků $n = 4$ a s počtem svazků $n = 8$. Pro tento problém budou definovány následující vstupní hodnoty:

- $\varphi = 100\text{kV}$
- $r = 0,01\text{m} = 1\text{cm}$
- vzdálenost vodičů ve svazku $R = 0.15\text{m} = 15\text{cm}$
- $\varepsilon_0 = 8,854187818 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
- $N_k = 50$

Jednotlivé případy budou ještě dále řešeny pro případ velké vzdálenosti mezi vodiči k důkazu, že elektrická intenzita bude symetricky rozložena na povrchu, a dále pro jediný ekvivalentní vodič. V prvním případě bylo nutno nadefinovat vstupní hodnoty uvedené výše. Povrch jednotlivých vodičů byl diskretizován, zvolená hodnota je $N_k = 50$. Pro svazkový vodič se zadanou vzdáleností vodičů provedeme řešení Fredholmovy rovnice pomocí programu Matlab7.1. Pro případ řešení vodičů ve velké vzdálenosti od sebe a jediného ekvivalentního vodiče budeme řešit následující rovnice:

$$Q = \int_S \sigma dS = \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta l_i \quad (4.3.1)$$

Řešení výše uvedené rovnice bude celkový náboj působící na jednotku délky jednoho vodiče dle [8] a [12]. Po dosažení této hodnoty aplikujeme nejprve pro vodiče ve velké vzdálenosti:

$$E_n = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} \quad (4.3.2)$$

Pro jediný ekvivalentní vodič:

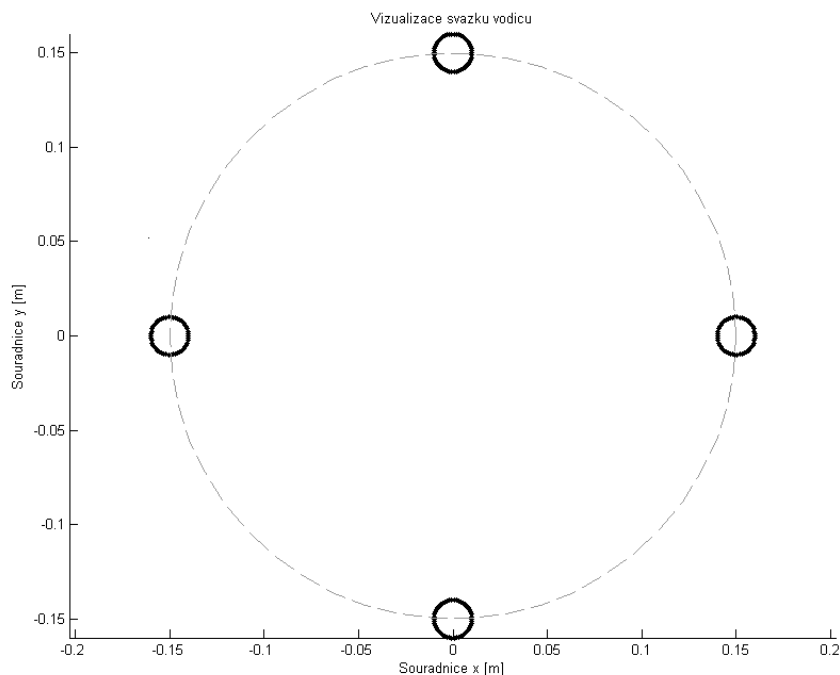
$$E_n = \frac{nQ}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{1}{r} \quad (4.3.3)$$

4.3.1 Počet svazků $n = 4$

Nejprve se tedy zaměříme na řešení svazkového vodiče s počtem svazků $n = 4$.

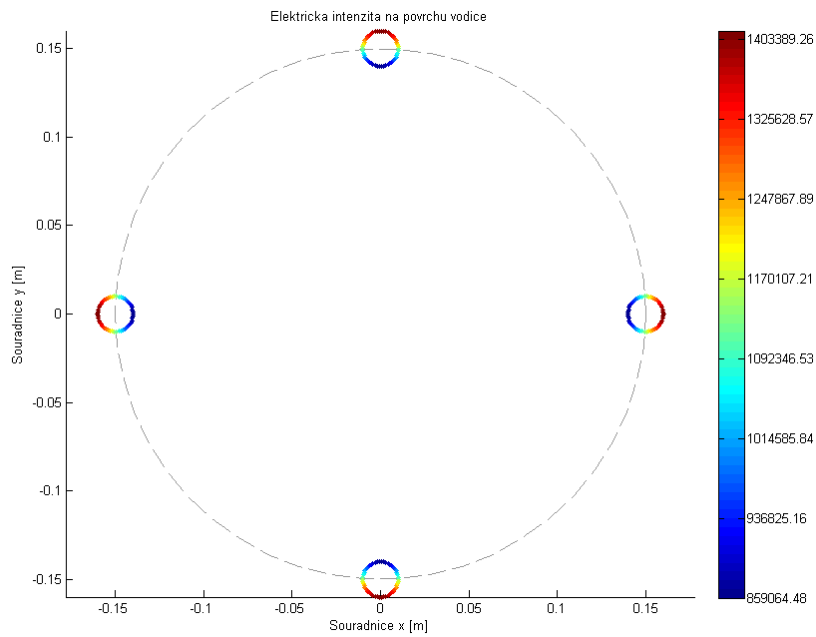
4.3.1.1 Vodiče ve vzdálenosti 30cm

Na následujícím obrázku je zobrazen daný vodič a jeho rozměry.

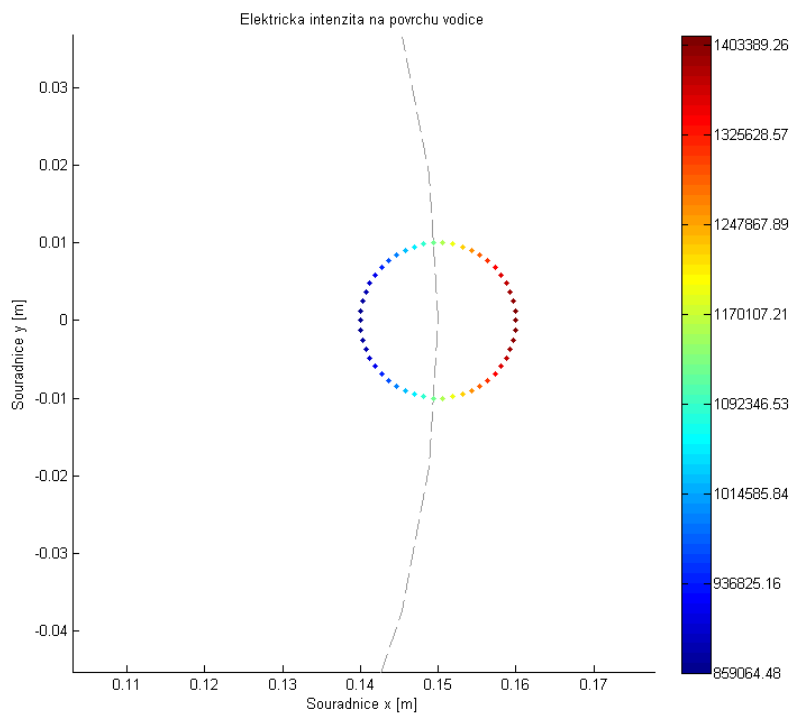


Obr. 4: Vizualizace svazku.[18]

Při pohledu na obrázek č.5 vidíme rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče, kdy vzdálenost svazků je 30cm. Nejprve je zde znázorněn pohled na celý vodič, následně jsme zobrazili přiblížení pro větší přehlednost o hodnotě elektrické intenzity na povrchu jednotlivých vodičů svazku, viz obrázek č. 6 , kde je zachycen vodič na pravé straně svazku.



Obr. 5: Elektrická intenzita na povrchu svazkového vodiče. [18]



Obr. 6: Elektrická intenzita na povrchu pravého vodiče svazku. [18]

Řešením Fredholmovy rovnice pro svazkový vodič $n = 4$, kdy je vzdálenost mezi vodiči 30cm, jsme získali následující hodnoty elektrické intenzity:

$$E_{n \max} = 14,03 \text{ kV/cm}$$

$$E_{n \min} = 8,59 \text{ kV/cm}$$

Po vyřešení rovnice jsme nyní schopni určit celkový náboj na jednotku délky jednotlivých vodičů Q , který je nutný k dalším výpočtům.

$$Q = \int_S \sigma dS \simeq \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta l_i = 6,3134 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}$$

4.3.1.2 Vodiče daleko od sebe

Nyní si předvedeme řešení pro svazkový vodič se stejnými parametry, ale v případě, že by vodiče byly umístěny daleko od sebe, abychom dokázali symetrické rozložení elektrické intenzity. Pro tento případ použijeme vzorec (4.3.2):

$$E_n = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{6,3134 \cdot 10^{-7}}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{0,01} = 11,34 \text{ kV/cm}$$

Hodnota intenzity je tedy:

$$\mathbf{E_n = 11, 34kV/cm}$$

4.3.1.3 Jediný ekvivalentní vodič

Pro jediný ekvivalentní vodič bude stěžejní hodnota poloměru, odvozená dle druhé kapitoly. Potom tedy $r_1 = 2r = 0,02\text{m}$.

Budeme-li uvažovat tento ekvivalentní vodič, spočteme rozložení elektrické intenzity na povrchu vodiče následovně pomocí vztahu (4.3.3):

$$E_n = \frac{nQ}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{4 \cdot 6,3134 \cdot 10^{-7}}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{0,02} = 22,70 \text{ kV/cm}$$

Hodnota pro elektrickou intenzitu na povrchu jediného ekvivalentního vodiče:

$$\mathbf{E_{n1} = 22, 70kV/cm}$$

4.3.1.4 Hodnoty elektrické intenzity pro $n = 4$

Následující tabulka shrnuje řešení Fredholmovy rovnice pro jednotlivé problémy.

Tabulka 1: Intenzita na povrchu svazkového vodiče:

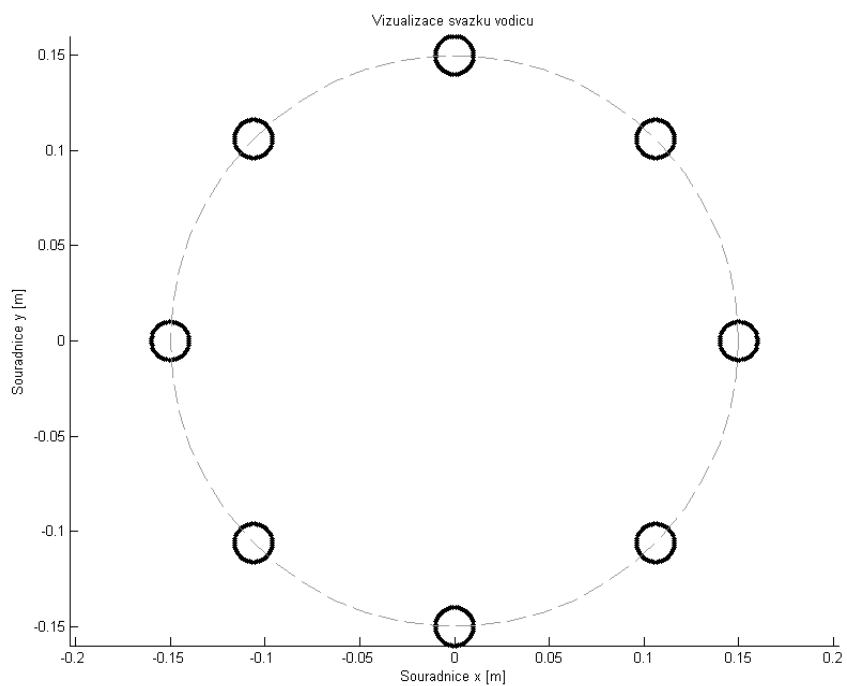
Typy vodiče	E_n [kV/cm]	E_n / E_{n1}
svazkový vodič $n = 4$	$E_{n \max} = 14,03 \text{ kV/cm}$	0,630
	$E_{n \min} = 8,59 \text{ kV/cm}$	0,378
Svazkový vodič s velkou vzdáleností mezi jednotlivými vodiči	$E_n = 11,34 \text{ kV/cm}$	0,400
Jediný ekvivalentní vodič	$E_{n1} = 22,70 \text{ kV/cm}$	-

4.3.2 Počet svazků $n = 8$

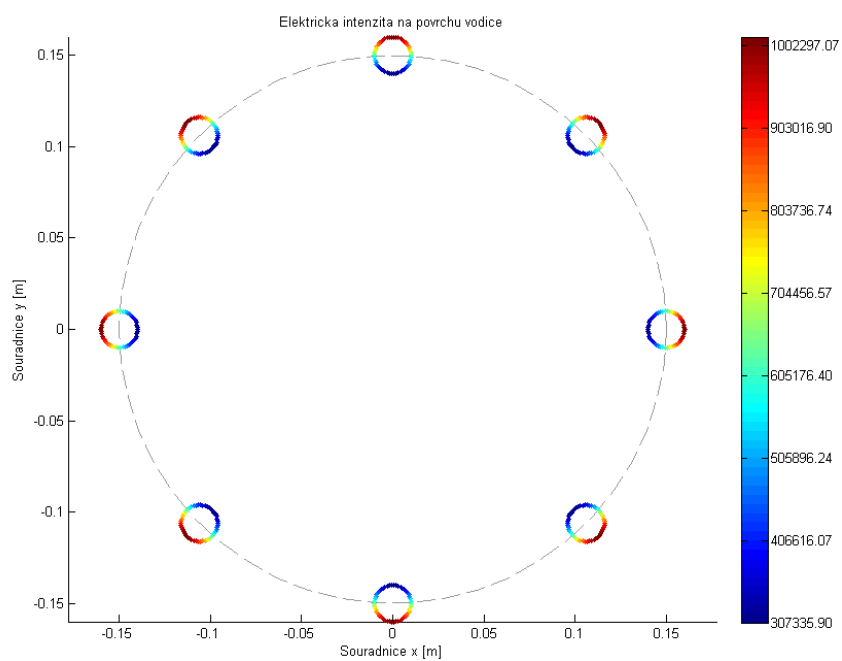
V následující kapitole přistoupíme k řešení svazkového vodiče s počtem svazků $n = 8$, který bude mít stejné rozměry jednotlivých vodičů svazku a stejnou vzdálenost mezi těmito vodiči jako vodič v předchozím případě. Řešena je opět Fredholmova rovnice, výsledky jsou zobrazeny pomocí programu Matlab7.1. Výpočty jsou prováděny stejně jako u svazkového vodiče $n = 4$.

4.3.2.1 Vodiče ve vzdálenosti 30cm ve svazku

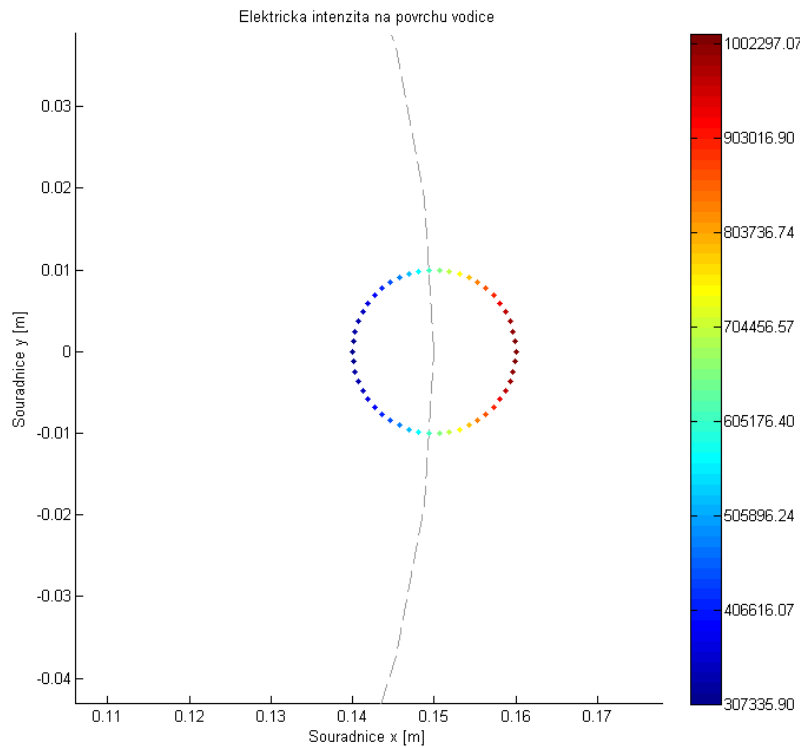
Prvním krokem je opět řešení rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče, kdy jsou jednotlivé svazky vzdáleny 30cm. Na obrázcích níže je uvedena vizualizace svazku vodičů, následně rozložení elektrické intenzity na povrchu jednotlivých vodičů.



Obr. 7: Vizualizace svazku. [18]



Obr. 8: Elektrická intenzita na povrchu svazkového vodiče. [18]



Obr. 9: Elektrická intenzita na povrchu pravého vodiče svazku. [18]

Pro svazkový vodič s počtem svazků $n = 8$ jsou hodnoty elektrické intenzity následující:

$$E_{n \max} = 10,02 \text{ kV/cm}$$

$$E_{n \min} = 3,07 \text{ kV/cm}$$

Nyní jsme schopni opět vyřešit náboj Q , který působí na jednotku délky jednoho vodiče, a to pro hodnotu svazkového vodiče $n = 8$.

$$Q = \int_S \sigma dS \simeq \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta l_i = 3,5536 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}$$

4.3.2.2 Vodiče daleko od sebe

Nyní si předvedeme řešení pro velkou vzdálenost, postupujeme shodně jako u svazkového vodiče $n = 4$. Budeme tedy řešit opět dle rovnic (4.3.2).

$$E_n = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1} = \frac{3,5536 \cdot 10^{-7}}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{0,01} = 6,39 \text{ kV/cm}$$

Pro velké vzdálenosti bude hodnota elektrické intenzity:

$$E_n = 6,39 \text{ kV/cm}$$

4.3.2.3 Jediný ekvivalentní vodič

Pro jediný ekvivalentní vodič budeme uvažovat vodič s následujícím poloměrem:

$$r_1 = \sqrt[8]{r} = \sqrt[8]{0,01} = 0,02854 \text{ m}$$

Budeme – li řešit jediný ekvivalentní vodič s poloměrem uvedeným výše, je jasné, že elektrická intenzita bude v každém bodě povrchu nabývat stejné hodnoty, jelikož zde nedochází k žádnému ovlivňování. Pro tento případ řešíme rovnici (4.3.3).

$$E_n = \frac{nQ}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{8 \cdot 3,5536 \cdot 10^{-7}}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{0,02} = 18,07 \text{ kV/cm}$$

Hodnota elektrické intenzity pro jediný ekvivalentní vodič svazkového vodiče $n = 8$ je:

$$E_{n1} = 18,07 \text{ kV/cm}$$

4.3.2.4 Hodnoty elektrické intenzity pro $n = 8$

Pro přehlednost si opět uvedeme tabulku se získanými hodnotami elektrické intenzity pro svazkový vodič s počtem svazků $n = 8$.

Tabulka 2: Intenzita na povrchu svazkového vodiče.

Typy vodiče	E_n [kV/cm]	E_n / E_{n1}
svazkový vodič $n = 8$	$E_{n \max} = 10,02 \text{ kV/cm}$	0,555
	$E_{n \min} = 3,07 \text{ kV/cm}$	0,170
Svazkový vodič s velkou vzdáleností mezi jednotlivými vodiči	$E_n = 6,39 \text{ kV/cm}$	0,353
Jediný ekvivalentní vodič	$E_{n1} = 18,07 \text{ kV/cm}$	-

5 Řešení svazkových vodičů jako okrajové úlohy elektrostatiky

5.1 Řešení okrajových úloh

V této kapitole si přiblížíme princip řešení okrajových úloh. Ve výkladu se omezíme jen na dvojrozměrné elektrostatické pole, které je pro tuto práci zásadní. Oblast, pro kterou bude definována okrajová úloha, budeme značit Ω . Hranici této oblasti označíme Γ . Tuto oblast budeme nyní uvažovat jako hladkou křivku po částech. [8][12]

Vymezená oblast Ω bude vyplněna n dielektriky. Uvedená dielektrika vytvářejí suboblasti Ω . Předpokládejme, že platí $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$. Tato dielektrika považujeme za izotropní, homogenní a lineární. Díky tomuto předpokladu víme, že permitivity ε_i budou konstanty ($i=1, \dots, n$). Místo styku suboblastí je rozhraním Γ_{ij} . Body uvnitř jednotlivých oblastí jsou regulární, body na rozhraní budou neregulární. [8][12]

Na následujících stránkách si podrobněji přiblížíme nutné podmínky a postup k řešení okrajové úlohy. K tomuto je třeba znát několik následujících kroků uvedených v [12]:

- definiční oblast Ω , suboblasti a permitivity pro jednotlivé suboblasti,
- rovnice pro skalární potenciál φ v jednotlivých suboblastech,
- okrajové podmínky, tj. podmínky pro potenciál φ na hranici Γ definiční oblasti Ω ,
- podmínky na rozhraní, tj. podmínky pro potenciál φ na rozhraní Γ_{ij} suboblastí.

Pokud bude definiční oblast omezená, jedná se o okrajovou úlohu vnitřní. Pokud bude hranice této oblasti buď z části, nebo celá v nekonečnu, hovoříme o okrajové úloze vnější. Rovnici pro potenciál lze vyjádřit ve tvaru Poissonovy rovnice, která bude platit pro body uvnitř suboblastí, tedy pro regulární body prostoru. [12]

$$\Delta\varphi_i = \frac{-\rho_i}{\varepsilon_i} \quad (5.1.1)$$

Pozn.: Často bývá $\rho_i=0$, potom pracujeme s Laplaceovou rovnicí:

$$\Delta\varphi_i=0 \quad (i=1, \dots, n)$$

5.2 MKP (princip metody)

Metoda konečných prvků neboli Finite Element Method (FEM), dále jen MKP, je numerickou metodou sloužící k řešení mnoha inženýrských problémů jako je například průběh napětí, deformace vlastních frekvencí, proudění tepla, elektromagnetické jevy, proudění tekutin apod. Tato metoda je založena na principu vytvoření fyzikálního modelu. Její vznik je datován přibližně do padesátých let minulého století. Jak se postupem času vyvíjela výpočetní technika, rozvíjela se spolu s ní i MKP. Původně metoda vznikla pro výpočty v leteckém, kosmickém, jaderném a vojenském průmyslu, později byla využívána i jako metoda pro akademické účely. První publikaci o MKP uveřejnili Zienkiewicz a Cheung, ale počátky byly odvozeny již od Hrennikoffa a Couranta ve čtyřicátých letech minulého století. Oba tito průkopníci užívali sice metodu zcela odlišně, ale jejich postup se shodoval v tom nejzásadnějším, což je nejprve rozdělit množinu na její podoblasti. V šedesátých letech minulého století byla již v NASA užívána aplikace pracující na principu MKP, jednalo se o software NASTRAN. Tato metoda byla používána již mnohem dříve, než byl hotov její přesný matematický zápis, tedy kdy se jednalo spíše o intuitivní metodu. Nejčastěji se používá ke kontrole již navržených zařízení, nebo (stejně jako v tomto případě) se lze s její pomocí stanovit kritické místo zkoumaného objektu. Princip MKP je založen na diskretizaci spojitého kontinua do určitého počtu prvků. Velkou výhodou aplikace MKP je možnost jejího uplatnění také u „sdrůžených problémů“, rozumějme tedy pro analýzu technických systémů, kde se současně uplatňuje více fyzikálních polí (elektromagneticko-tepelné apod.). [8][12][17]

Metoda vychází z tzv. Lagrangeova principu, to znamená, že těleso musí být v rovnovážném stavu, pokud bude celková polohová energie deformace soustavy minimální. Abychom mohli MKP aplikovat, musíme tedy nejprve daný problém rozdělit na konečný počet prvků. Každý z těchto prvků je charakterizován dle [12] a [17] :

- dimenzí
- tvarem
- počtem uzlů

- polohou uzlů

Uzly vyjadřují množinu bodů, ve kterých hledáme neznámé parametry řešení. Kvalitu výsledků ovlivňuje hustota a topologie těchto prvků.[17]

Jelikož se jedná o numerickou metodu, můžeme řešit i problémy na složitých tělesech, což v analytických metodách nelze. Analytické metody mohou řešit jen problémy s jednoduchými elementárními tělesy. U MKP dostáváme výsledek v konečném počtu bodů, pokud jakkoliv měníme parametry, je nutno úlohu nadefinovat znovu pro aktuální zadání.[12][17]

Nyní se blíže zaměříme na postup při aplikaci MKP. Pokud uvažujeme určitý elektrostatický systém s elektrickým potenciálem $\varphi(x,y)$, tento potenciál lze určit pomocí variačního principu. Mějme tedy všechny funkce $\varphi(x,y)$, jež budou splňovat okrajové podmínky na hranici Γ z oblasti Ω . Z množiny těchto funkcí bude právě jedna funkce φ taková, pro kterou je veličina níže na svém minimu. Řešení této okrajové úlohy je tedy vyjádřeno funkcí $\varphi(x,y)$, jak je uvedeno ve [12].

$$F\{\varphi(x,y)\} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy \quad (5.2.1)$$

Rovnice výše je vlastně vyjádřením energie elektrostatického pole námi zvolného systému, v tomto případě se jedná o tvar válcovitého tělesa. Ω je podstavou tohoto válce v rovině (x,y) o jednotkové výšce. Proto tedy řešení rovnice je nazýváno též energetickým funkcioálem. Pro hledání funkcioálu využíváme tedy variační metody, u MKP je aplikována tzv. Ritzova-Galerginova metoda.[12]

Postup při aplikaci MKP dle [12] a [17]:

1. Diskretizace vnější oblasti.
2. Určit rozložení potenciálu uvnitř konečných prvků.
3. Určení energetického funkcioálu.
4. Minimalizace energetického funkcioálu.

Pozn.: Funkcionálem rozumíme tzv. „funkci funkcí“. Rozdíl mezi těmito dvěma pojmy je ten, že funkcionál oproti funkci přiřazuje právě jedno reálné číslo ke každé funkci (funkce přiřazuje právě jedno reálné číslo ke každému reálnému číslu).

5.2.1 Diskretizace definiční oblasti

Diskretizaci definiční oblasti provádíme pomocí tzv. triangulace. Pomocí triangulace je možné poměrně přesně aproximovat rozhraní Γ námi zvolené oblasti Ω . Při triangulaci dochází k nahrazení této oblasti tzv. polygonální oblastí. Principem triangulace je prolnutí oblasti Ω sítí trojúhelníků, provedeme tedy sjednocení konečného počtu trojúhelníků. Při provedení triangulace očekáváme jeden z následujících případů dle [17]:

- Trojúhelníky nemají ani jeden bod společný (jsou disjunktní).
- Trojúhelníky mají společnou jednu stranu.
- Trojúhelníky mají společný právě jeden vrchol.

Pozn.: Pokud je oblast Ω definována jako sjednocení několika vlastních suboblastí (vyjádřením několika různých prostředí), je nutno provést triangulaci tak, aby nedošlo k průniku žádného z trojúhelníků do rozhraní. Uzly v tomto případě budou vrcholy trojúhelníků a trojúhelníky jsou konečnými prvky. [17]

5.2.2 Potenciál uvnitř konečných prvků

Potenciál konečných prvků a jeho rozložení dostaneme z následujícího postupu. Nejprve je nutno pro dostatečně malý konečný prvek (nyní p -tý trojúhelník) provést aproximaci rozložení potenciálu uvnitř tohoto prvku. To lze provést pomocí Lagrangeovy lineární interpolace, tedy polynomem 1. stupně. Potom tedy dle [17]:

$$\varphi_p(x, y) = a + bx + cy \quad (5.2.2)$$

a, b, c konstanty

Konstanty a , b , c určíme z rovnice pro potenciály ve vrcholech p -tého trojúhelníka, obdobně dle postupu uvedeného v [17]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{pi} \\ \varphi_{pj} \\ \varphi_{pk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_{pi} \\ \varphi_{pj} \\ \varphi_{pk} \end{bmatrix} \quad (5.2.4)$$

Dosazení konstant a , b , c :

$$\varphi_p = \alpha_i(x, y)\varphi_{pi} + \alpha_j(x, y)\varphi_{pj} + \alpha_k(x, y)\varphi_{pk} \quad (5.2.5)$$

Přičemž:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} (x_j y_k - x_k y_j) & (y_j - y_k)x & (x_k - x_j)y \\ (x_k y_i - x_i y_k) & (y_k - y_i)x & (x_i - x_k)y \\ (x_i y_j - x_j y_i) & (y_i - y_j)x & (x_j - x_i)y \end{bmatrix} \quad (5.2.6)$$

Δ je v tomto případě obsah p -tého trojúhelníka:[17]

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i)] \quad (5.2.7)$$

Z rovnice pro vyjádření potenciálu viz výše, je možno určit potenciál libovolného bodu uvnitř p -tého trojúhelníka pomocí známých potenciálů na vrcholech. Pro výše vyjádřené funkce lze tedy poměrně jednoduše potvrdit, že pro funkce α_i , α_j , α_k bude platit, podle [17]:

- Uzel i : $\alpha_i = 1$, ve zbytku uzlů $\alpha_i = 0$.
- Uzel j : $\alpha_j = 1$, ve zbytku uzlů $\alpha_j = 0$
- Uzel k : $\alpha_k = 1$, ve zbytku uzlů $\alpha_k = 0$

Pro body uvnitř p -tého trojúhelníka a na jeho hranicích:[17]

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k = 1.$$

5.2.3 Energetický funkcionál

Pro energii elektrostatického pole jakéhokoliv p -tého trojúhelníka platí:[17]

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon E^2 dx dy \tag{5.2.8}$$

Pokud tedy známe energii, lze určit i energetický funkcionál, jak se lze dočíst v [17]:

$$F \{ \varphi(x, y) \} = W_p \tag{5.2.8}$$

Potom pro lineární dielektrikum:

$$F_p = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} (\text{grad} \varphi_p)^2 dx dy = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \tag{5.2.9}$$

Pokud do předchozích rovnic dosadíme derivovaný potenciál, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_p(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \varphi_{pi} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \varphi_{pj} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \varphi_{pk} \\ \frac{\partial \varphi_p(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \varphi_{pi} + \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \varphi_{pj} + \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} \varphi_{pk} \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Jednotlivé potenciály jsou charakterizovány podle [17] takto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_j - y_k) & \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_k - y_j) \\ \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_k - y_i) & \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_i - y_k) \\ \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_i - y_j) & \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta} (y_j - y_i) \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Lze zapsat i pomocí nové symboliky:

$$\begin{array}{ccc}
 \beta_i = x_j y_k - x_k y_j & \beta_j = x_k y_i - x_i y_k & \beta_k = x_i y_j - x_j y_i \\
 \gamma_i = y_j - y_k & \gamma_j = y_k - y_i & \gamma_k = y_i - y_j \\
 \delta_i = x_k - x_j & \delta_j = x_i - x_k & \delta_k = x_j - x_i
 \end{array} \tag{5.2.12}$$

Potom tedy:

$$\varphi_p(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \sum_{q=i,j,k} (\beta_i - \gamma_q x - \delta_q y) \tag{5.2.13}$$

$$\frac{\partial \varphi_p(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} \sum_{q=i,j,k} \gamma_q \varphi_q \tag{5.2.14}$$

5.2.4 Minimalizace energetického potenciálu

Energetický funkcionál z celé oblasti Ω , který bude obsahovat množinu konečných prvků M , bude tvořen superpozicí všech funkcionálů všech p -tých trojúhelníků. [17]

$$F\{\varphi(x, y)\} = \sum_{p=1}^M F_p \tag{5.2.15}$$

Funkcionál lze minimalizovat pomocí derivace, postup provádíme dle potenciálů v uzlech. Získané derivace položíme rovny nule. [17]

$$\frac{\partial F(\varphi)}{\partial \varphi_n} = \sum_{p=1}^M \frac{\partial F_p(\varphi)}{\partial \varphi_n} = 0 \tag{5.2.16}$$

Hodnoty z předchozí rovnice dosadíme do rovnice pro energetický funkcionál lineárního dielektrika, poté dostaneme dle [17] následující řešení:

$$F_p = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\sum_{q=i,j,k} \beta_q \varphi_q \frac{1}{2\Delta} \right)^2 + \left(\sum_{q=i,j,k} \gamma_q \varphi_q \frac{1}{2\Delta} \right)^2 \right] dx dy =$$

$$= \frac{\varepsilon}{8\Delta} [(\beta_i \varphi_i + \beta_j \varphi_j + \beta_k \varphi_k)^2 + (\delta_i \varphi_i + \delta_j \varphi_j + \delta_k \varphi_k)^2] \quad (5.2.17)$$

Funkcionál derivujeme podle jednotlivých souřadnic, výsledné G_p je symetrická matice v [17] zapsaná ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_p}{\partial \varphi_i} \\ \frac{\partial F_p}{\partial \varphi_j} \\ \frac{\partial F_p}{\partial \varphi_k} \end{pmatrix} = G_p \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \varphi_k \end{bmatrix} \quad (5.2.18)$$

$$G_p = \frac{\varepsilon}{4\Delta} \begin{vmatrix} \beta_i \beta_i + \delta_i \delta_i & \beta_i \beta_j + \delta_i \delta_j & \beta_i \beta_k + \delta_i \delta_k \\ \beta_j \beta_i + \delta_j \delta_i & \beta_j \beta_j + \delta_j \delta_j & \beta_j \beta_k + \delta_j \delta_k \\ \beta_k \beta_i + \delta_k \delta_i & \beta_k \beta_j + \delta_k \delta_j & \beta_k \beta_k + \delta_k \delta_k \end{vmatrix} \quad (5.2.19)$$

Nyní můžeme seskupit počet konečných prvků p . Máme sestavenou homogenní rovnici

$$G\varphi = 0 \quad (5.2.20)$$

Kde:

$$\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]$$

Přičemž G je čtvercovou maticí s N řádky a sloupci, které odpovídají uzlům sítě. [17]

5.3 Číselné příklady

Následující příklady jsou řešeny pomocí MKP v programu Agros2D. Nejprve jsme provedli řešení pro počet svazků $n = 4$, následně pro $n = 8$. Řešení je patrné v kapitolách níže.

5.3.1.1 Vstupní data

Nejprve je v programu nutné nastavit, jaký problém je pro naše úsilí zásadním. Nejprve si volíme základní vstupní údaje:

- Fyzikální pole – elektrostatické pole

- Souřadnicový systém – kartézský systém
- Typ sítě – triangle - trojúhelníky

Námi zvolené fyzikální pole bude elektrostatické. Souřadnicový systém zvolíme kartézský, je zde ještě možnost volby osově symetrického souřadného systému, ale pro tento případ bude vhodnější právě kartézský systém. Typ sítě potřebné k řešení jsme zvolili trojúhelníkovou, vše viz obrázky níže. V elektrostatickém poli si nadefinujeme potřebný materiál a okrajové podmínky:

- Materiál okolí – vzduch
- Okrajové podmínky:
 1. Neumannova okrajová podmínka
 2. Vliv země
 3. Počáteční podmínka - potenciál $\varphi = 100\text{kV}$

Pro správný náčrt je nutné znát všechny vstupní hodnoty:

- $\varphi = 100\text{kV}$
- $r = 0,01\text{m} = 1\text{cm}$
- vzdálenost vodičů ve svazku: $R = 0.15\text{m} = 15\text{cm}$
- $\epsilon_0 = 8,854187818 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

Pro konečné zobrazení hodnot je nutné nastavit 2D postprocesor. Můžeme volit z několika možností. Ze skalárního zobrazení, kontur nebo vektorového zobrazení. Nejprve si zvolíme zobrazení pomocí kontur, kde si necháme vykreslit rozložení elektrické intenzity. Výsledky poté vykreslíme ještě pomocí skalárního zobrazení.

5.3.2 Svazkový vodič $n = 4$

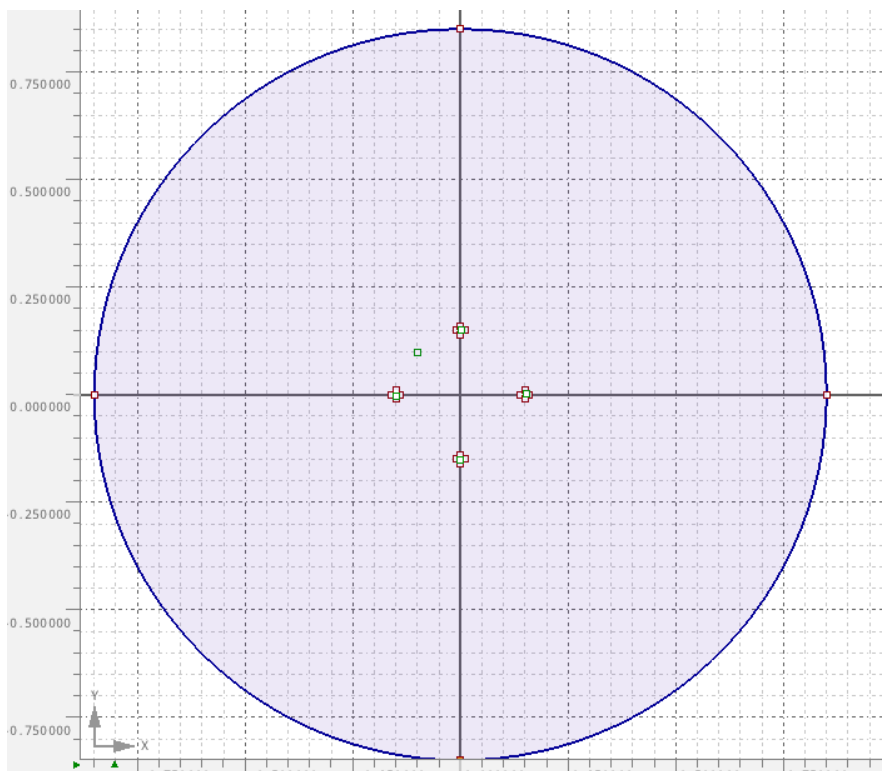
Tato kapitola je zaměřena na svazkový vodič s počtem svazků $n=4$. Nejprve jsou pomocí programu Agros2D určena řešení pro klasický svazkový vodič, jehož vzdálenost je běžně užívaných 30cm, tedy $R = 15\text{cm} = 0.15\text{m}$. Aby bylo patrné ovlivňování vodičů mezi sebou, uvedeme si i variantu případu, kdy budou vodiče od sebe ve velké vzdálenosti, tudíž by k jejich ovlivňování docházet nemělo. Jako poslední případ prověříme jediný ekvivalentní vodič a rozložení jeho hustoty na povrchu.

5.3.2.1 Vodiče ve vzdálenosti 30cm

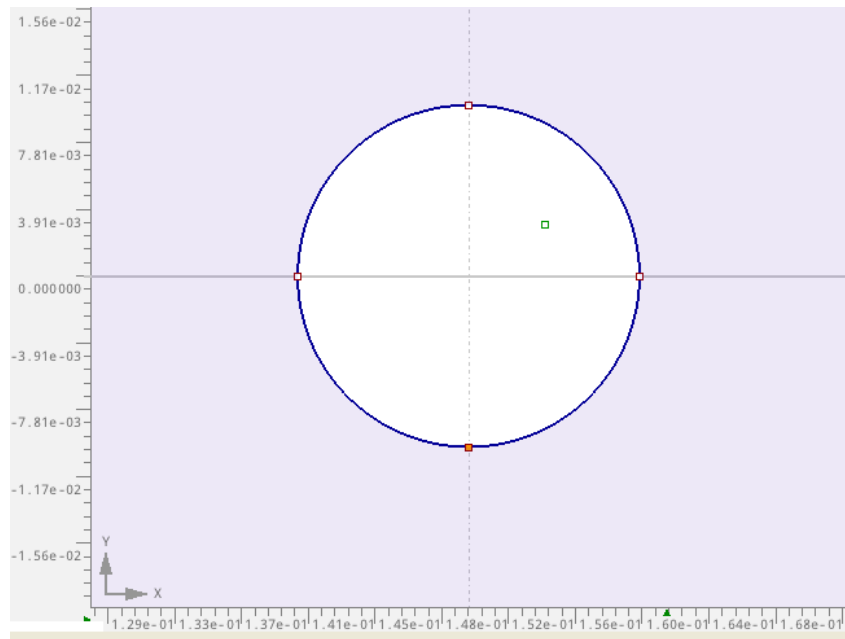
Jak již bylo řečeno výše, nákres provádíme v kartézském systému souřadnic s trojúhelníkovým typem sítě. Pro tento typ máme definován materiál a okrajové podmínky dle předchozí kapitoly. Nákres sám sestává z následujících částí, řešeno v [19]:

- 20 uzlů
- 20 hran
- 5 značek oblasti
- Jeden materiál
- Tři okrajové podmínky

Takto sestavený základní nákres je na obrázcích níže, nejprve pro všechny vodiče svazku a poté bližší zobrazení pro jeden z vodičů.

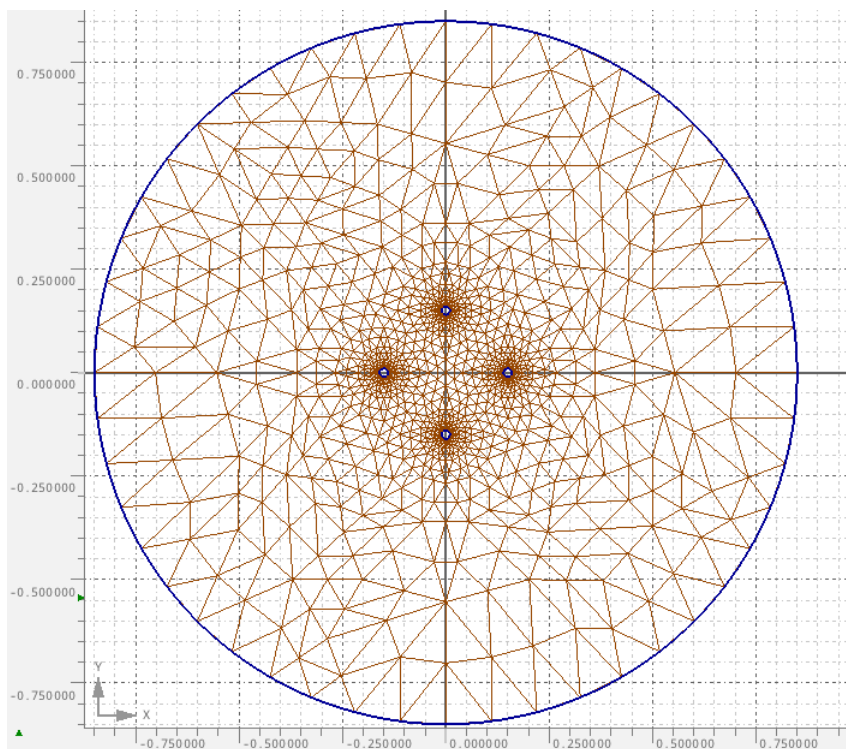


Obr. 10: Nákres svazkového vodiče. [19]

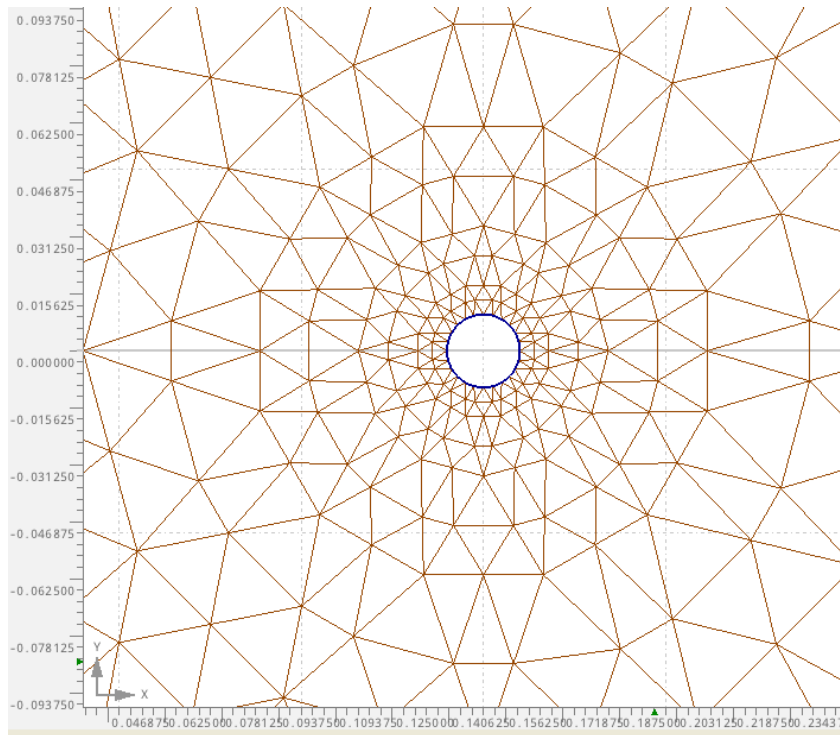


Obr. 11: Nákres pro jeden vodič svazku. [19]

Na obrázcích níže je pak znázorněna řešená trojúhelníková síť v programu Agros2D. Opět je zobrazena nejprve pro všechny vodiče svazku, poté pro lepší přehlednost je přiblížena na jeden z vodičů daného svazku.

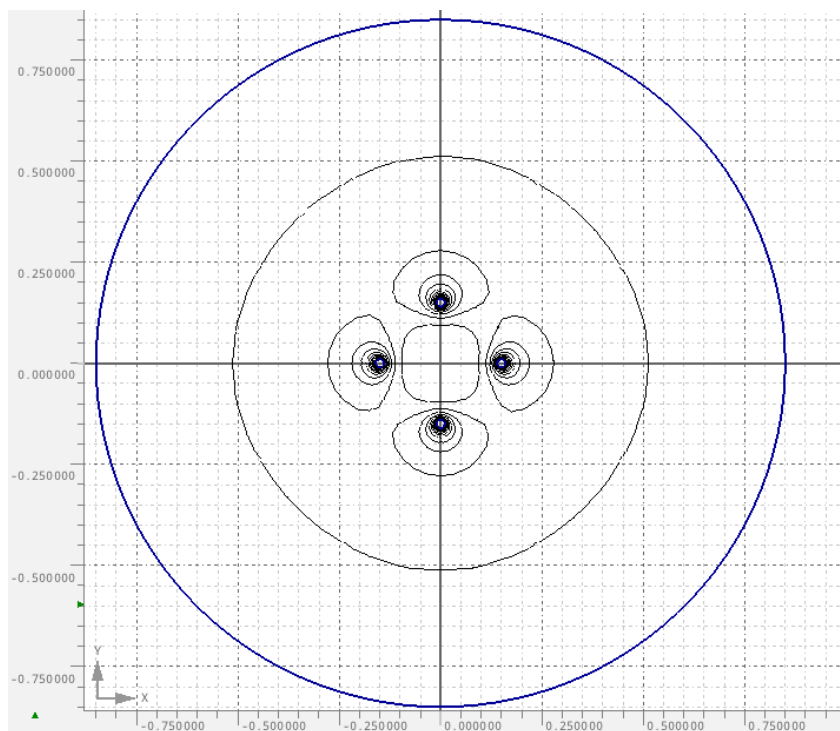


Obr. 12. Řešená síť pro svazkový vodič. [19]



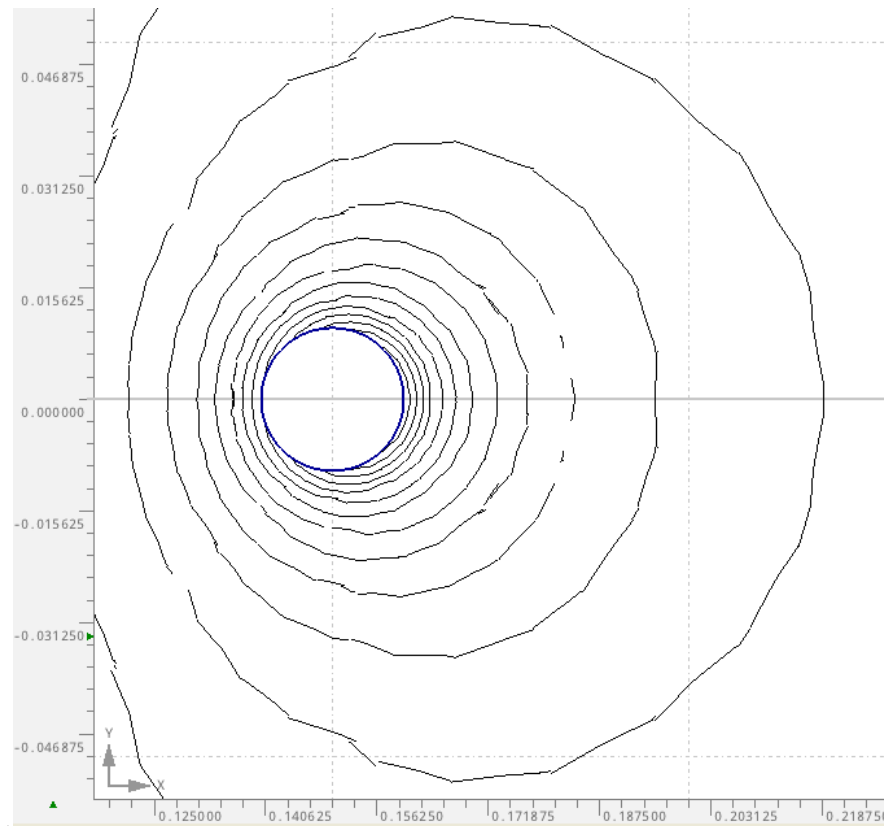
Obr. 13: Síť pro jeden vodič svazku. [19]

Po definování vstupních hodnot, materiálů a okrajových podmínek můžeme přistoupit k samotnému řešení problémů. Na následujících obrázcích tedy vidíme rozložení elektrické intenzity, opět nejprve pro celý svazek, nejprve zobrazeno jen pomocí kontur.



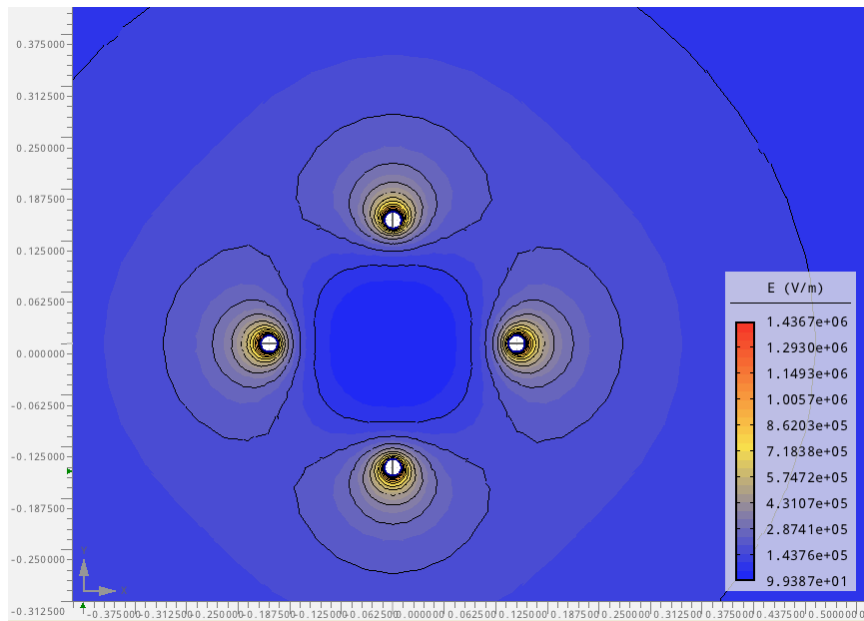
Obr. 14: Rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče. [19]

Pro přehlednost rozložení na pravém vodiči svazku na obrázku č. 15:

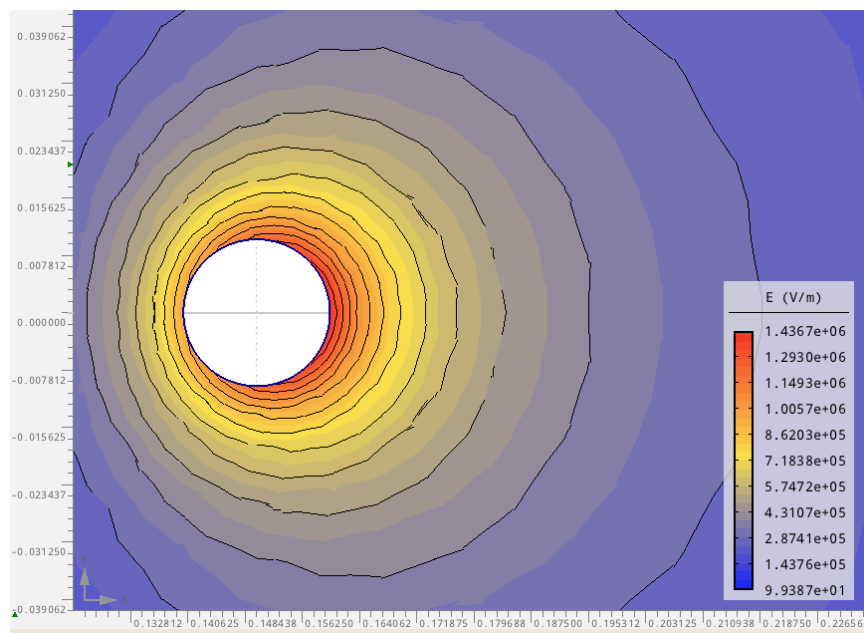


Obr. 15: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]

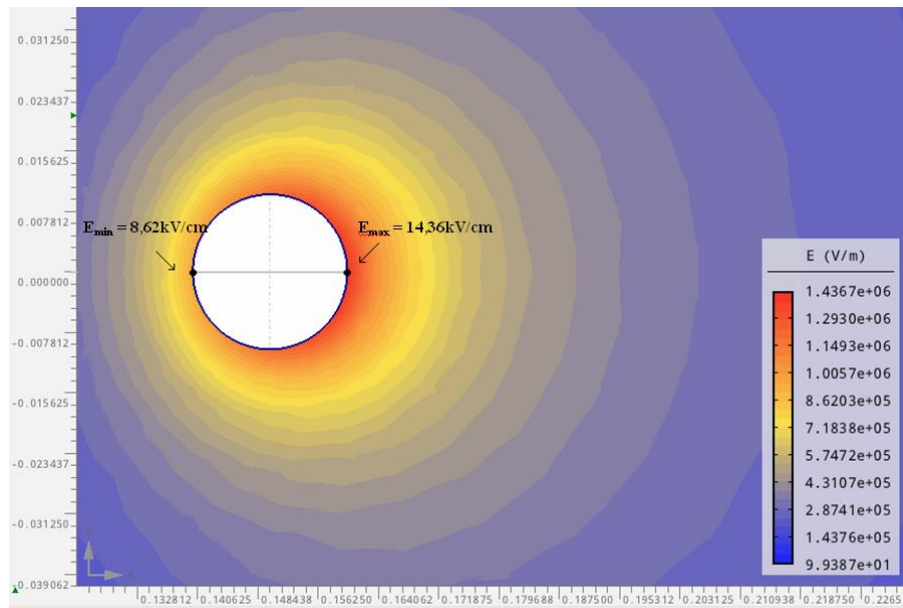
Následující řešení je vykresleno kromě kontur i pomocí skalárního zobrazení. Jsou zde tedy již patrné hodnoty elektrické intenzity, lze z obrázku již určit hodnotu maximální i minimální. Pro přesnost opět uvedeme i s přiblížením, jelikož při záběru z dálky není rozložení elektrické intenzity na povrchu vodičů svazku zcela patrné. Zobrazení je opět provedeno pro pravý vodič svazku.



Obr. 16: Rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče. [19]



Obr. 17: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]



Obr. 18: Elektrická intenzita na povrchu pravého vodiče svazku. [19]

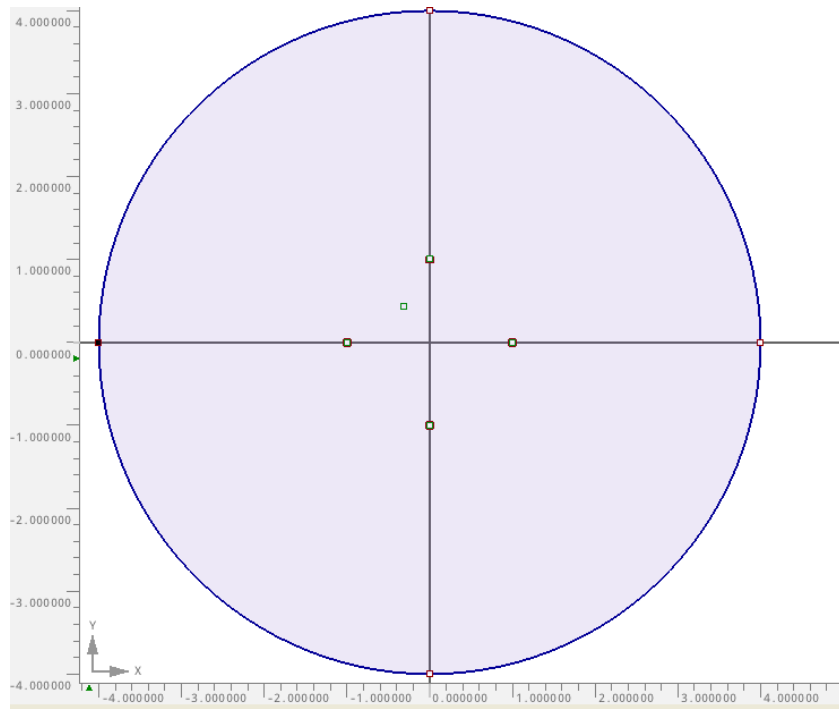
Z následujících obrázků je tedy patrná minimální i maximální hodnota elektrické intenzity na povrchu jednoho vodiče svazku při jejich počtu $n = 4$. Potom tedy:

$$\mathbf{E}_{n \max} = 14,36/\text{cm}$$

$$\mathbf{E}_{n \min} = 8,62\text{kV}/\text{cm}$$

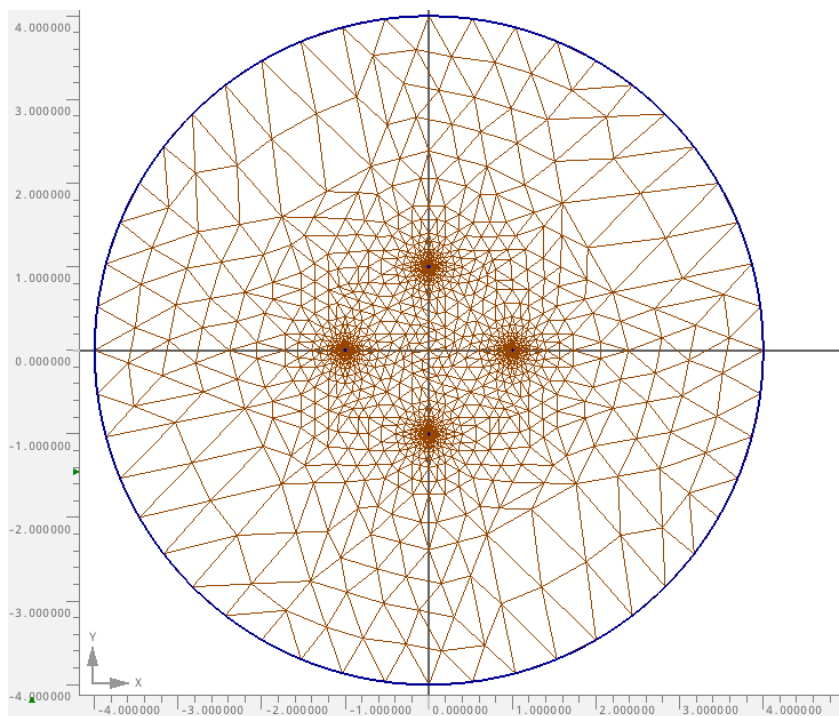
5.3.2.2 Vodiče ve velké vzdálenosti od sebe

Nyní, abychom si ověřili, že je skutečně nutno počítat se vzájemným působením vodičů na sebe, a že elektrická intenzita pro tyto vodiče souvisí úzce s jejich vzdáleností, si uvedeme příklad, kdy budou jednotlivé vodiče svazku umístěny ve velké vzdálenosti. Jednotlivé vstupní parametry korespondují s parametry pro předchozí případ, změní se jen vzdálenost mezi vodiči. Opět je zde tedy stejný počet uzlů, hran, značek oblastí, materiálů i okrajových podmínek. Základní náčrt je patrný na obrázku níže.

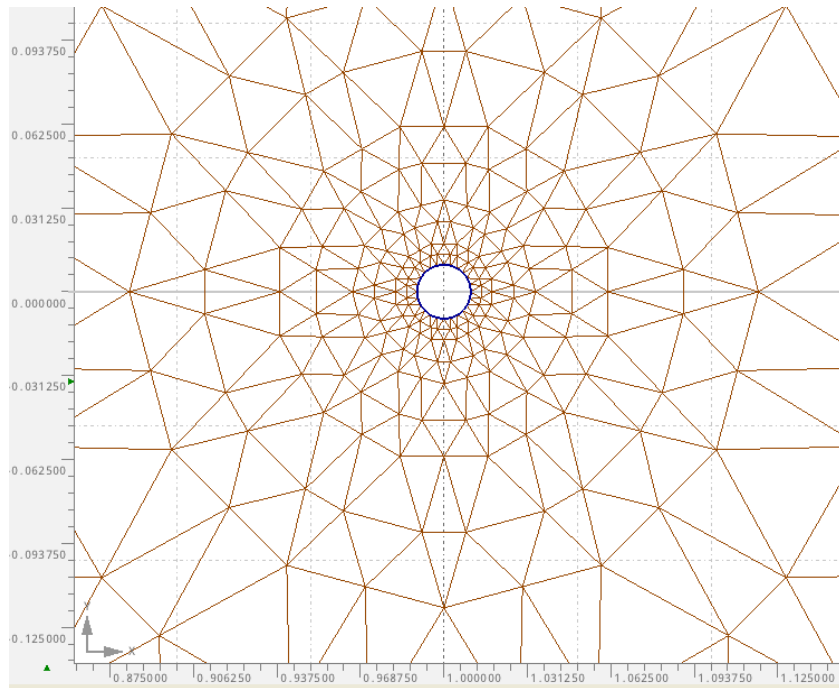


Obr.19: Nákres svazkový vodič. [19]

Nyní následuje opět zobrazení triangulace, tedy vykreslení řešené trojúhelníkové sítě, nejprve pro celou soustavu, následně pro přiblížení na jeden z vodičů pro větší přesnost.

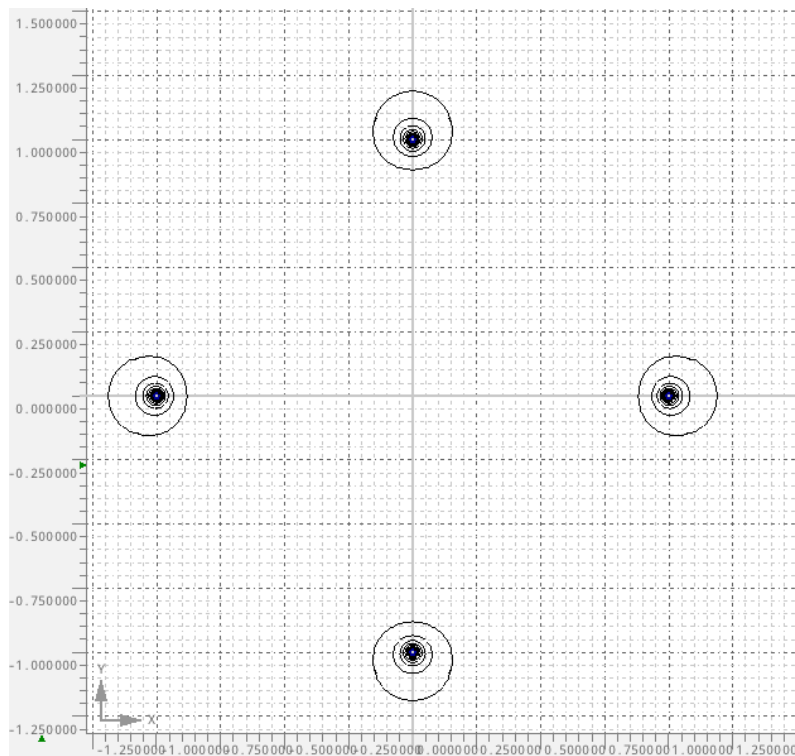


Obr. 20: Řešená síť pro svazkový vodič. [19]

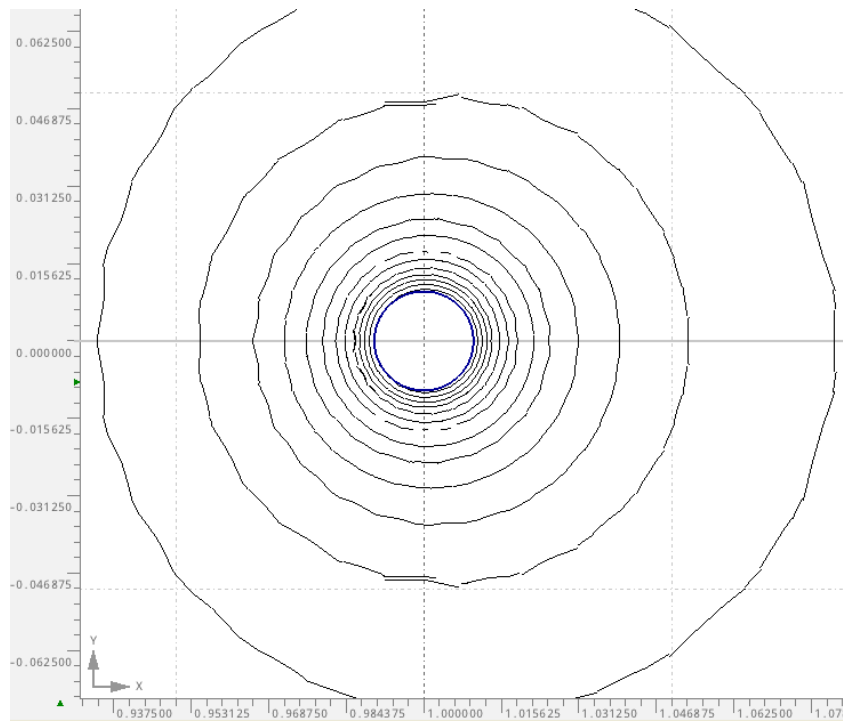


Obr. 21: Řešená síť pro pravý vodič svazku. [19]

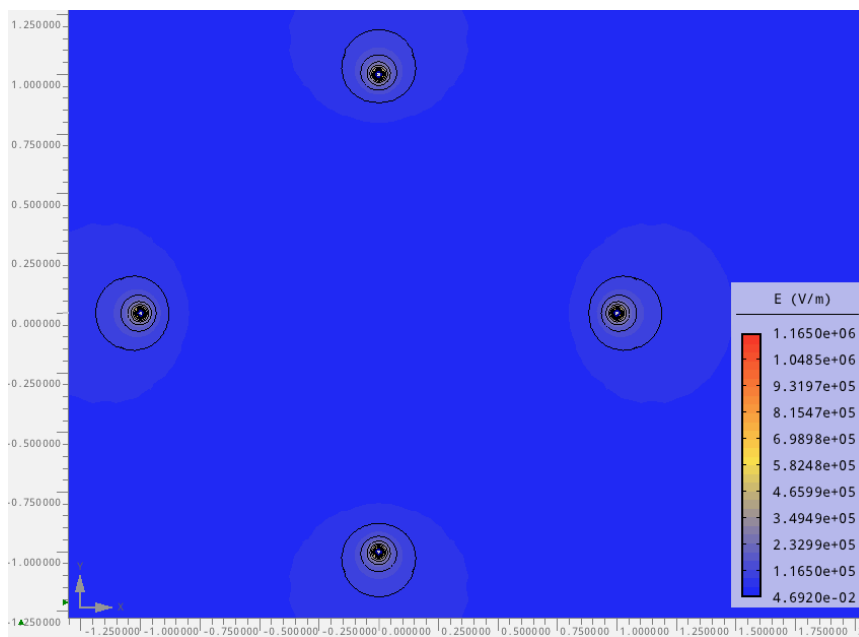
Po proložení oblasti trojúhelníkovou sítí lze přistoupit k řešení. Níže vidíme opět vykreslení intenzity, nejprve pomocí samotných kontur, poté i se skalárním zobrazením, kde si lze ověřit, že hodnota intenzity na povrchu jednotlivých vodičů svazku je všude stejná.



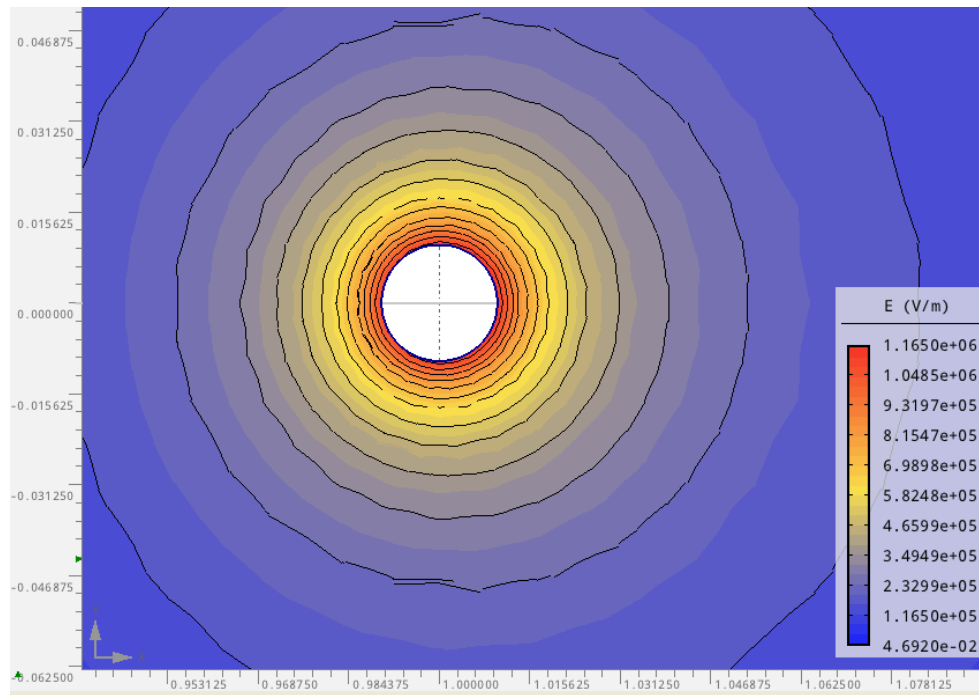
Obr. 22: Rozložení elektrické intenzity na povrchu vodiče. [19]



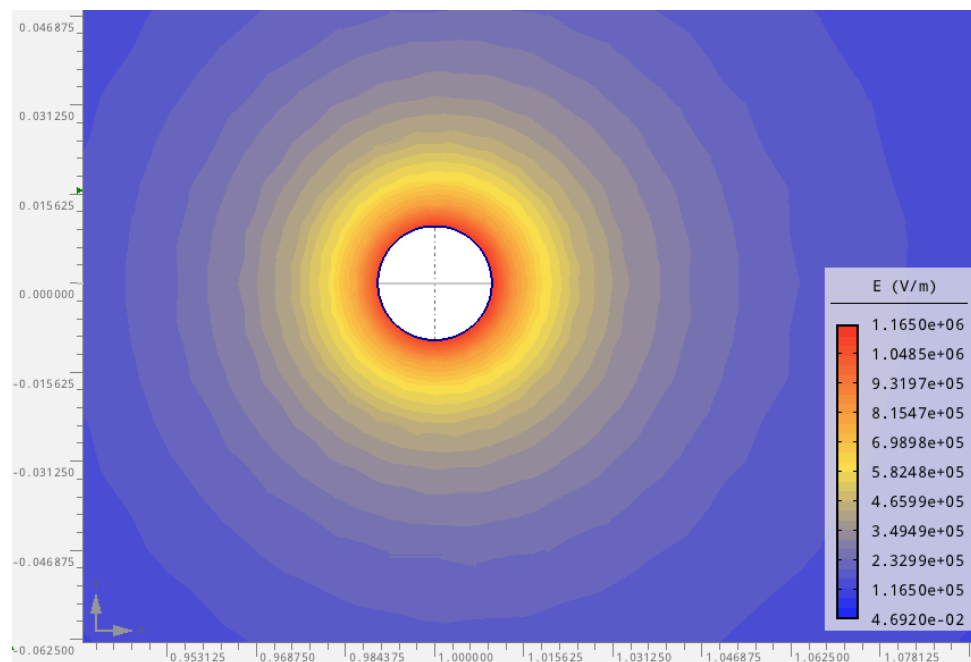
Obr. 23: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]



Obr. 24: Rozložení elektrické intenzity na povrchu vodiče. [19]



Obr. 25: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]



Obr. 26: Elektrická intenzita na povrchu pravého vodiče svazku. [19]

Je zcela patrné dle uvedených zobrazení, že hodnota intenzity souvisí se vzdáleností jednotlivých vodičů. Pokud bychom vodiče umístili dostatečně daleko od sebe, platil by

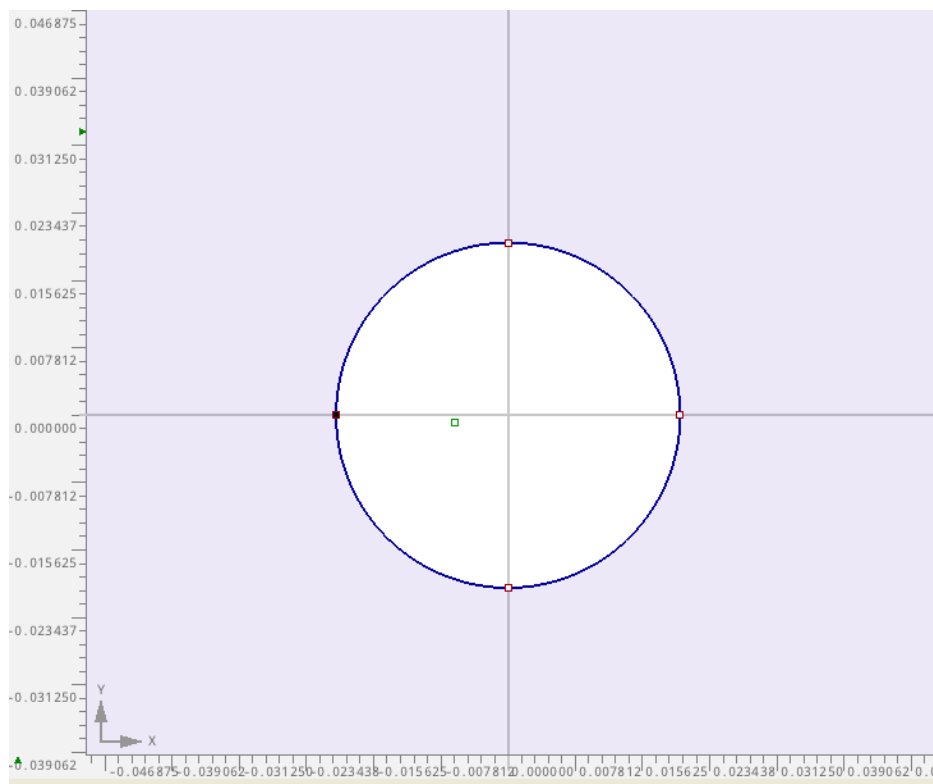
předpoklad uvedený ve druhé kapitole, tedy že by se nijak elektrostaticky neovlivňovaly. Nyní tedy vidíme, že intenzita nabývá po celém povrchu hodnoty:

$$E_n = 11,65 \text{ kV/cm}$$

5.3.2.3 Jeden ekvivalentní vodič

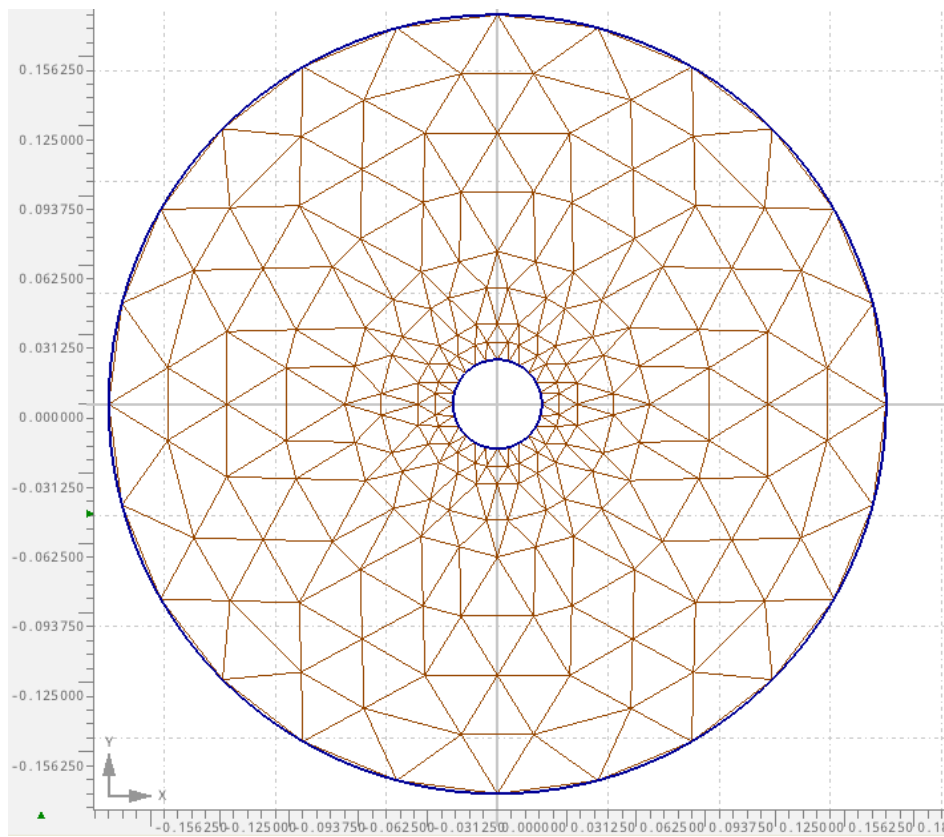
Abychom si vytvořili jasný názor na daný problém, použijeme srovnání svazkového vodiče s jedním ekvivalentním vodičem. Nahradíme tedy svazkový vodič jediným vodičem, který bude mít poloměr $r = 2r_1$. Nákres by nyní tvořilo:

- 8 uzlů
- 8 hran
- 2 značky oblasti
- Jeden materiál
- Tři okrajové podmínky

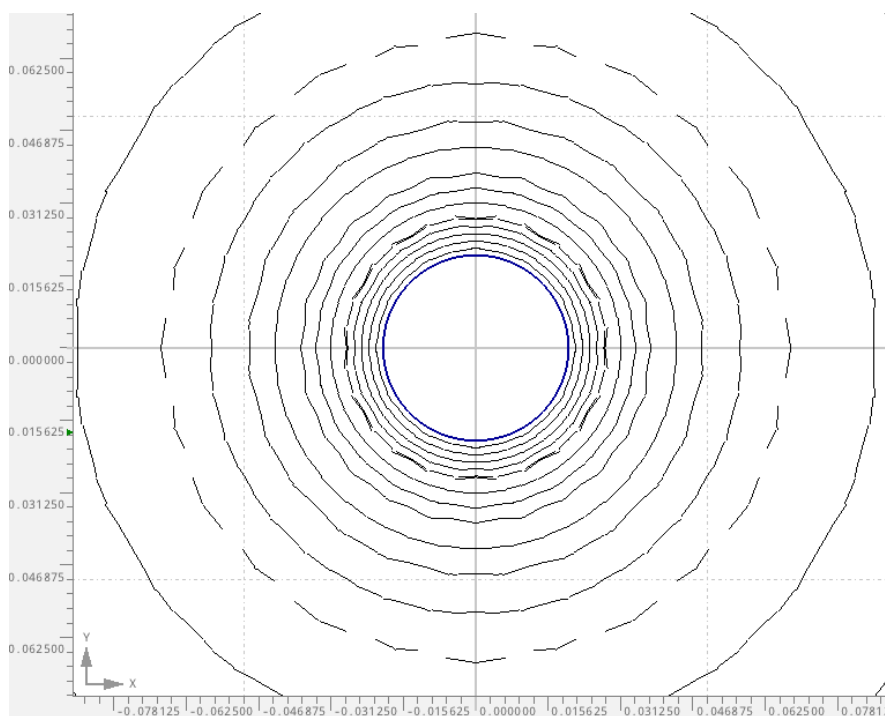


Obr. 27: Nákres jediného ekvivalentního vodiče. [19]

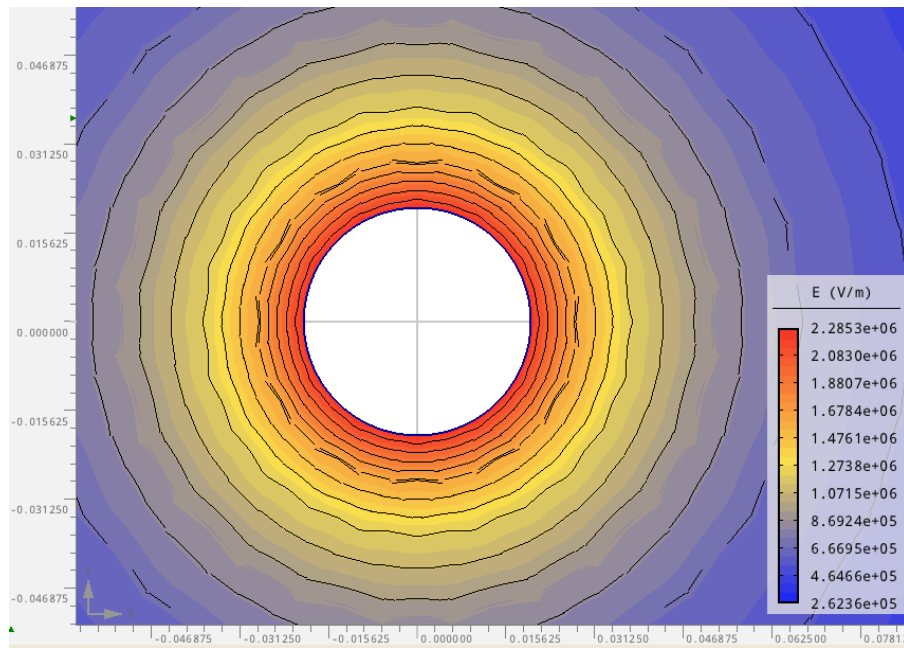
Na obrázku č. 28 vidíme rozložení trojúhelníkové sítě. Rozložení elektrické intenzity a její dosažená hodnota na povrchu tohoto vodiče jsou patrné na obrázcích č. 29, 30 a 31.



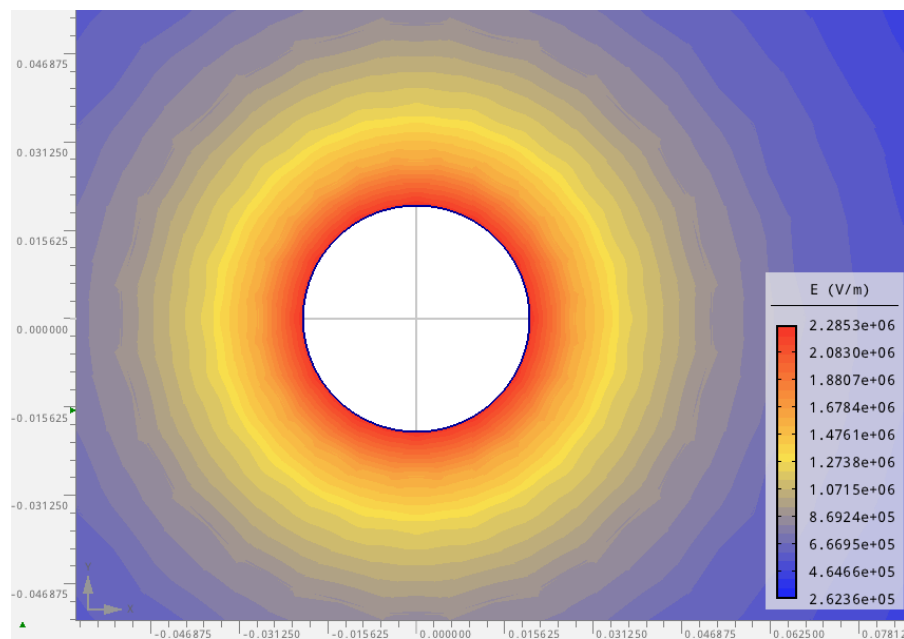
Obr. 28: Řešená síť pro jediný ekvivalentní vodič. [19]



Obr. 29: Rozložení elektrické intenzity na povrchu jediného ekvivalentního vodiče. [19]



Obr. 30: Rozložení elektrické intenzity na povrchu jediného ekvivalentního vodiče. [19]



Obr. 31: Elektrická intenzita na povrchu jediného ekvivalentního vodiče. [19]

Hodnota elektrické intenzity pro jeden ekvivalentní vodič:

$$E_{n1} = 22,85 \text{ kV/cm}$$

5.3.2.4 Hodnoty elektrické intenzity pro $n = 4$

V následující tabulce si provedeme zhodnocení výsledků elektrické intenzity pomocí MKP v programu Agros2D pro svazkový vodič s počtem svazků $n = 4$. Veškeré hodnoty jsou uvedeny v tabulce níže.

Tabulka 3: Elektrická intenzita pro svazkový vodič $n = 4$.

Typy vodiče	E_n [kV/cm]	E_n / E_{n1}
svazkový vodič $n = 4$	$E_{n \max} = 14,36 \text{ kV/cm}$	0,628
	$E_{n \min} = 8,62 \text{ kV/cm}$	0,377
Svazkový vodič s velkou vzdáleností mezi jednotlivými vodiči	$E_n = 11,65 \text{ kV/cm}$	0,509
Jediný ekvivalentní vodič	$E_{n1} = 22,85 \text{ kV/cm}$	-

5.3.3 Svazkový vodič $n = 8$

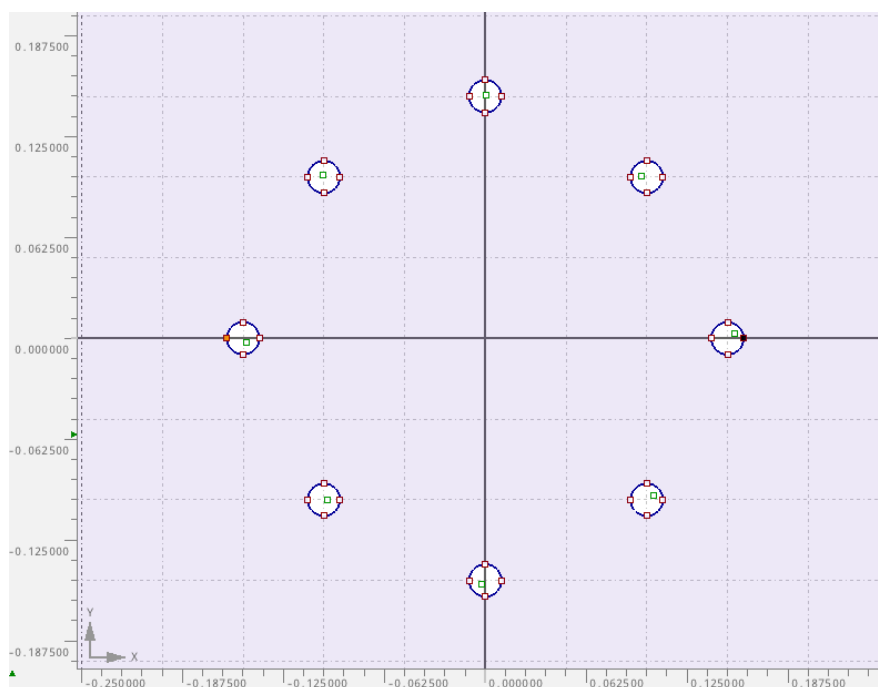
Následující kapitola se zabývá aplikací MKP na svazkový vodič s počtem svazků $n = 8$. Postup bude obdobný jako v předešlé kapitole. Nejprve určíme řešení pro vodič se svazky vzdálenými 30cm, stejně jako předtím bude tedy $R = 15\text{cm}$. Následně porovnáme s řešením pro svazky umístěné daleko od sebe a vyjádříme si hodnoty pro jediný ekvivalentní vodič.

5.3.3.1 Vodiče ve vzdálenosti 30cm

Postupujeme stejně jako v předchozí kapitole, opět se tedy pohybujeme v kartézské soustavě souřadnic s trojúhelníkovým typem sítě. Pro náčrtek svazkového vodiče s počtem svazků $n = 8$ máme tyto údaje o náčrtu:

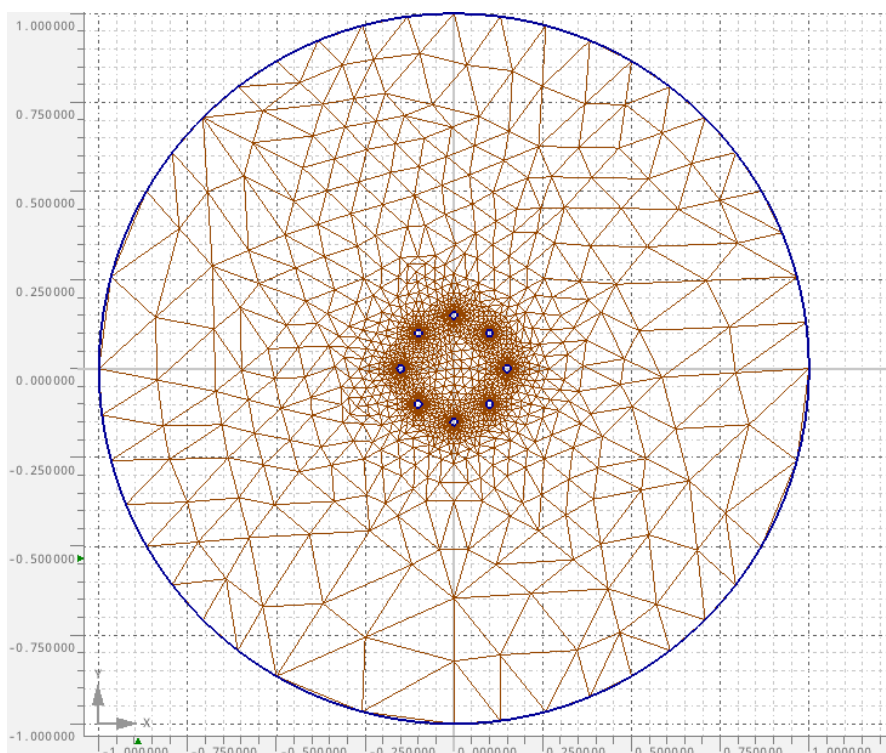
- 36 uzlů
- 36 hran
- 9 značek oblasti
- Jeden materiál
- Tři okrajové podmínky

Takto určené schéma viz na obrázku níže.

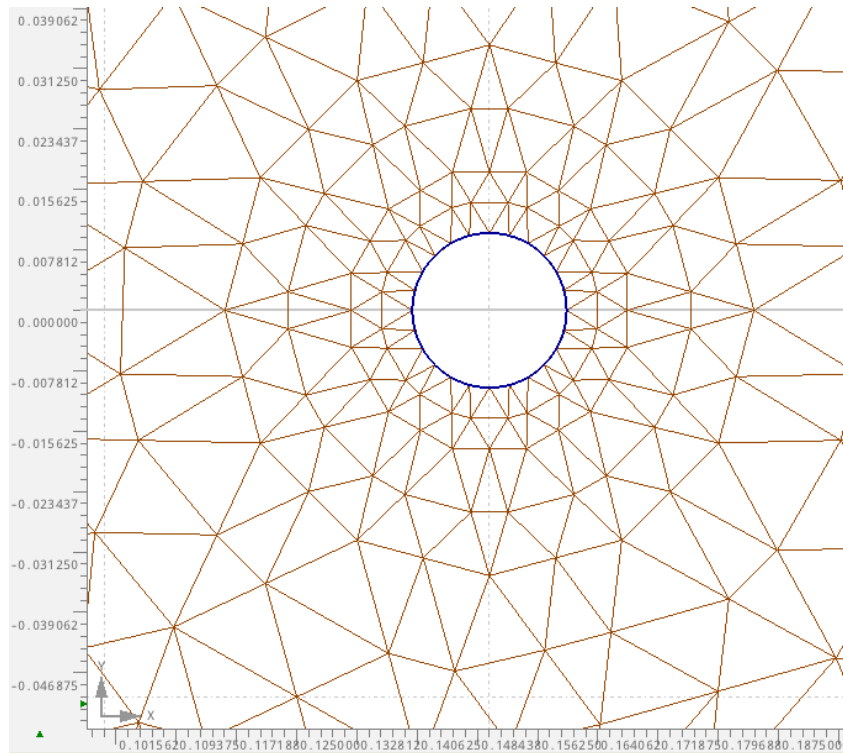


Obr. 32: Nákres svazkového vodiče. [19]

Pokud máme hotový nákres, můžeme jej proložit trojúhelníkovou sítí, a tedy oblast triangulovat. Na obrázcích níže je triangulace zachycená nejprve pro celou oblast, potom opět přiblížená pro jeden vodič svazku.

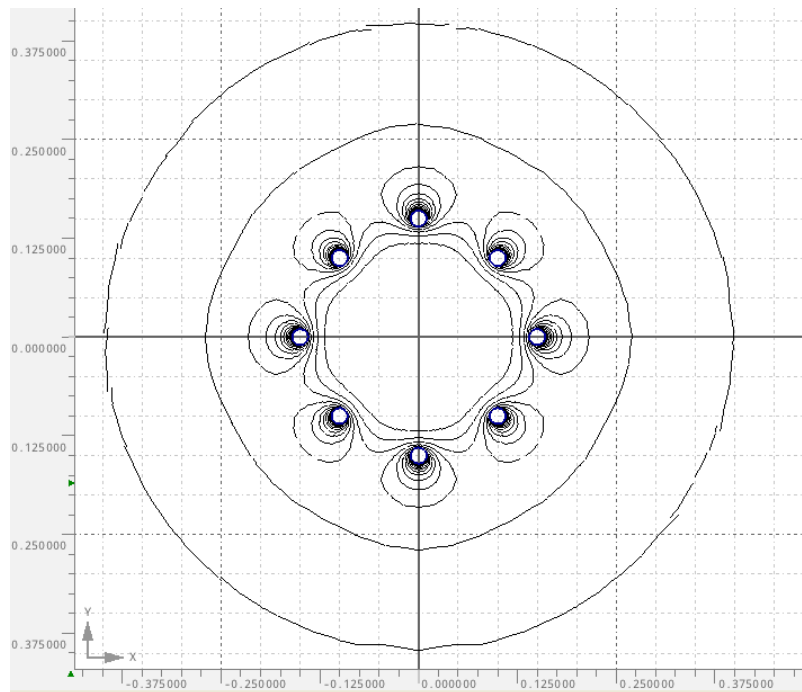


Obr. 33: Řešená síť pro svazkový vodič. [19]

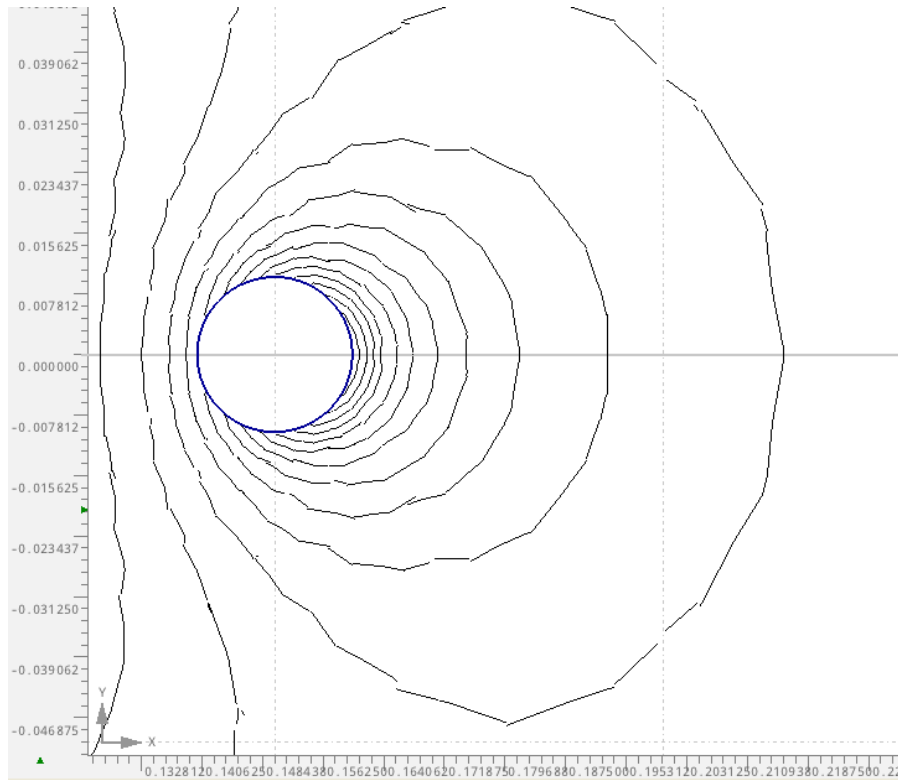


Obr. 34: Řešená síť pro pravý vodič svazku. [19]

Dalším krokem je určení rozložení elektrické intenzity na povrchu daného vodiče. Obrázky číslo 35 a 36 toto rozložení zachycují, pohled zblízka je opět na vodič zprava.

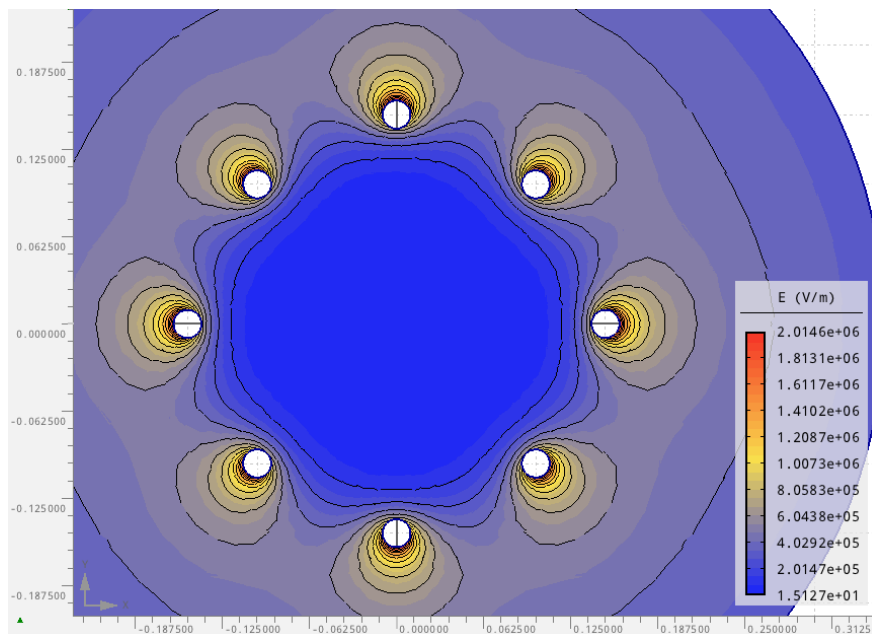


Obr. 35: Rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče. [19]

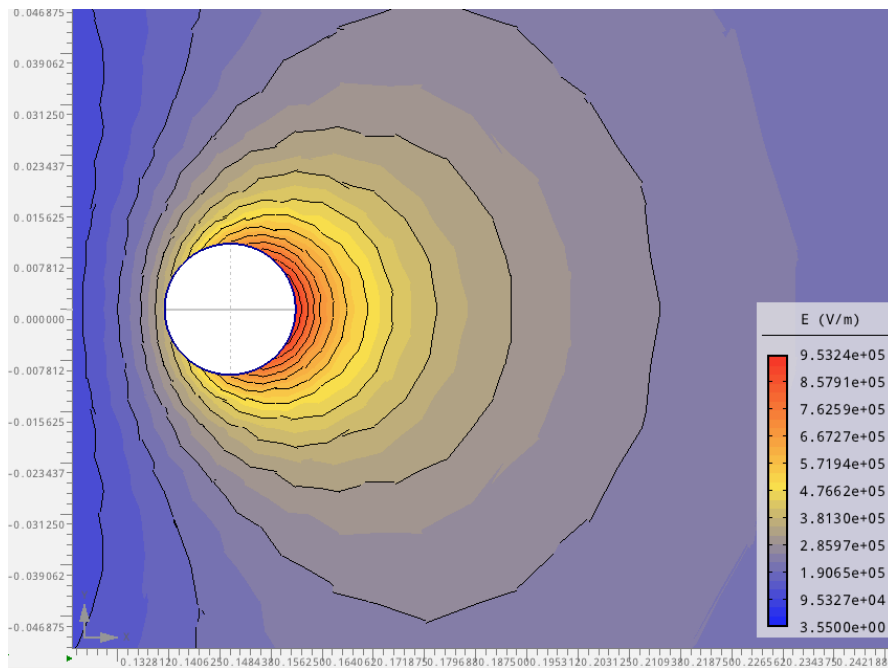


Obr. 36: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]

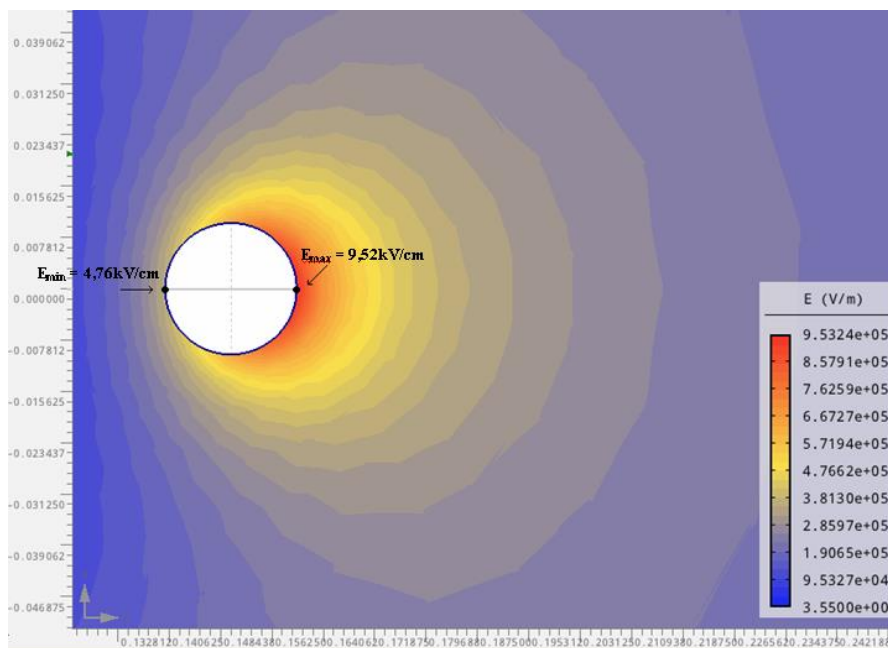
Pro přehlednost jsme opět kontury doplnili skalárním zobrazením, díky čemuž máme přehled o rozložení elektrické intenzity na povrchu vodiče. Po přiblížení na vodič zprava jsme schopni určit její maximální a minimální hodnotu.



Obr. 37: Rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče. [19]



Obr. 38: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]



Obr. 39: Elektrická intenzita na povrchu vodiče. [19]

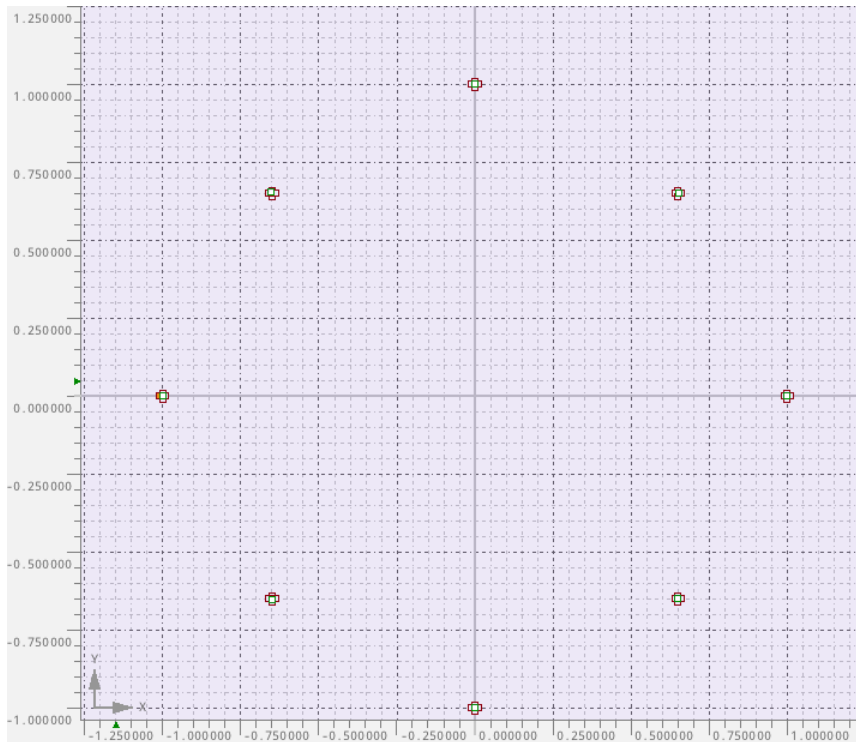
Hledané maximální a minimální hodnoty elektrické intenzity na povrchu vodiče svazku jsou tedy:

$$E_{n \max} = 9,53 \text{ kV/cm}$$

$$E_{n \min} = 4,76 \text{ kV/cm}$$

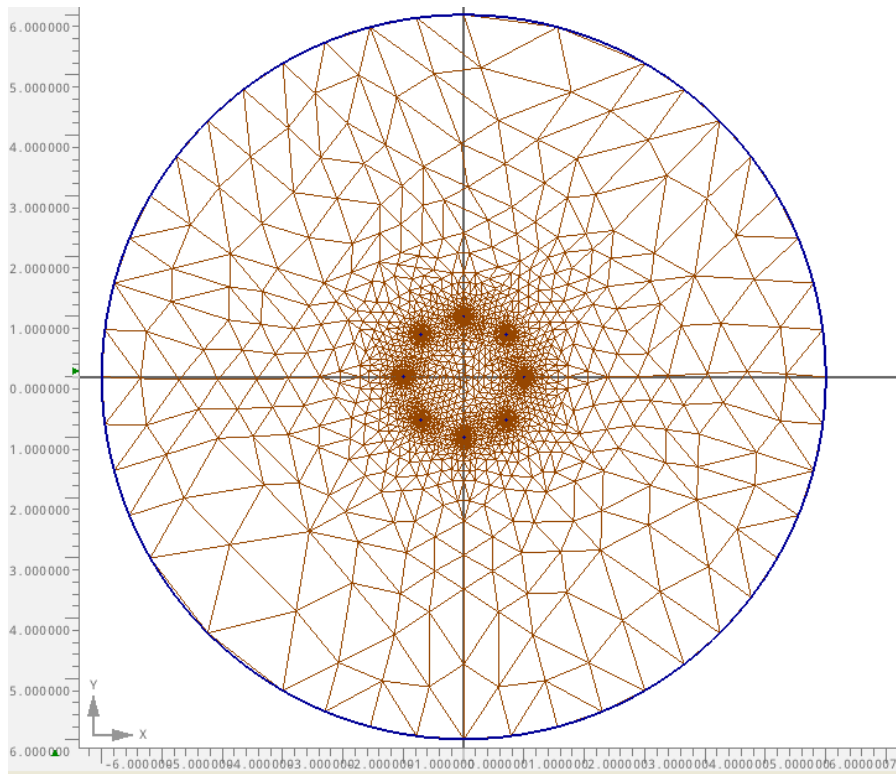
5.3.3.2 Vodiče ve velké vzdálenosti od sebe

Pro nákres vodičů umístěných ve velké vzdálenosti od sebe bude opět platit stejný konstrukční postup, jen s tím rozdíle, že se opět změní vzdálenost R . Toto schéma bude charakterizováno stále stejným počtem uzlů, hran, množstvím oblastí, stejnými materiály i okrajovými podmínkami. Uvedeme si tedy pouze schéma celého nákresu, jelikož pro jednotlivé vodiče svazku bude vypadat stejně jako v předchozí kapitole.

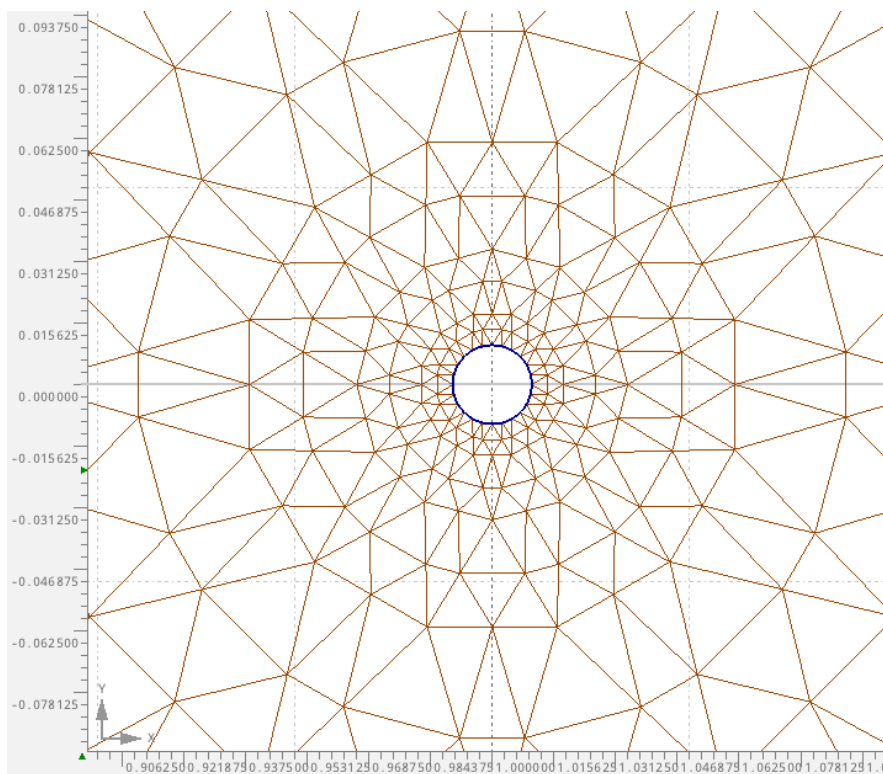


Obr. 40: Nákres svazkového vodiče. [19]

Proložení trojúhelníkovou sítí je znázorněno na následujících obrázcích.

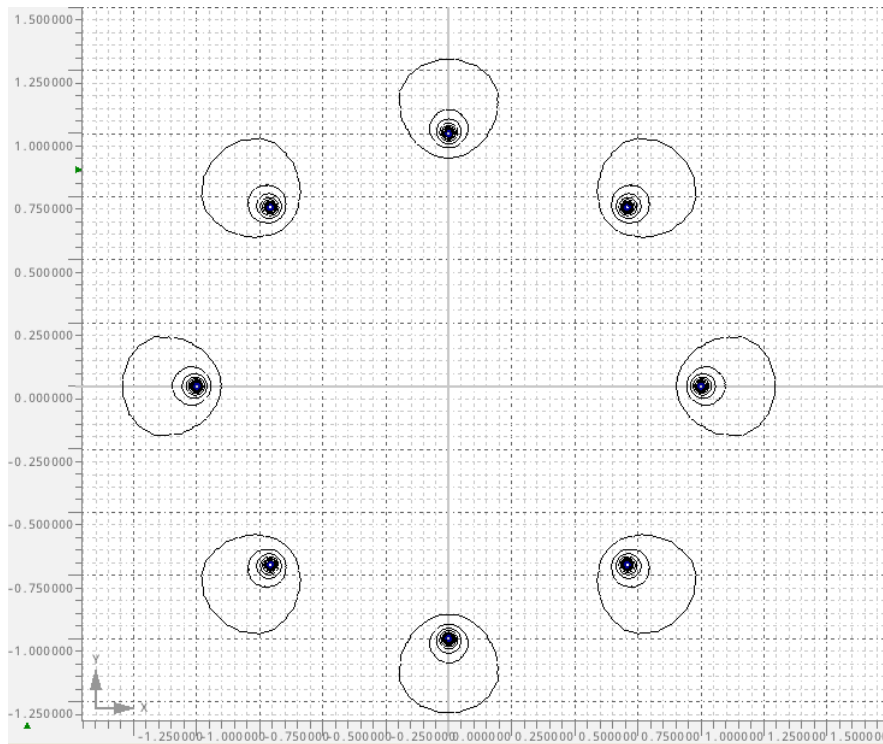


Obr. 41: Řešená síť pro svazkový vodič. [19]

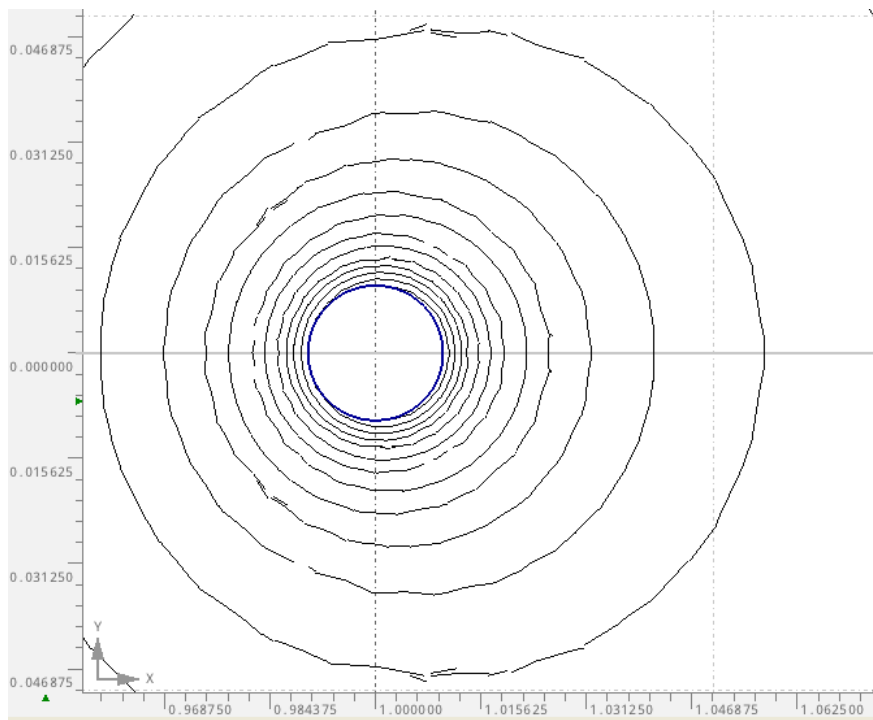


Obr. 42: Řešená síť pro pravý vodič svazku. [19]

Elektrická intenzita rozložená na povrchu vodičů svazku je znázorněna níže, nejprve pro celou oblast, poté je přiblížena opět na vodič umístěný vpravo.

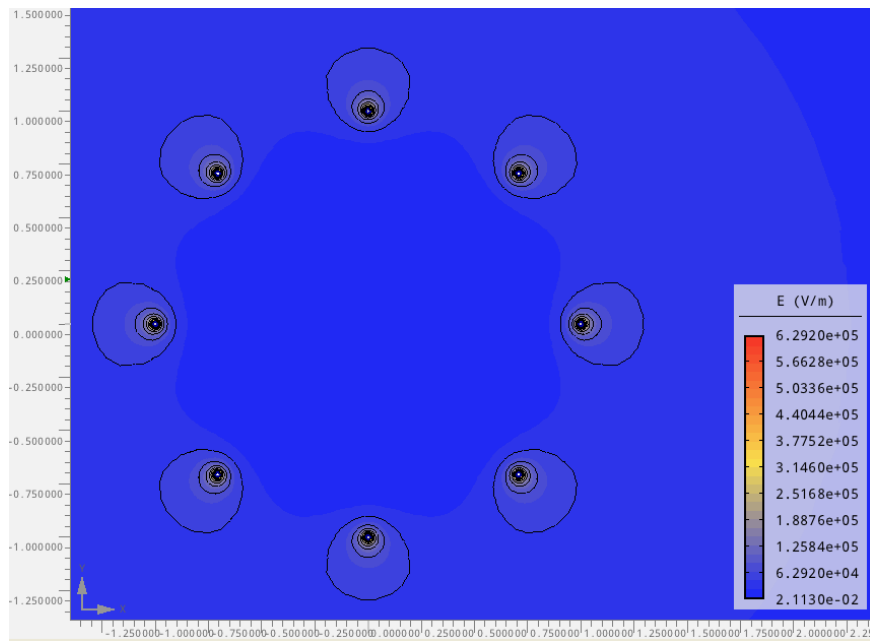


Obr. 43: Rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče. [19]



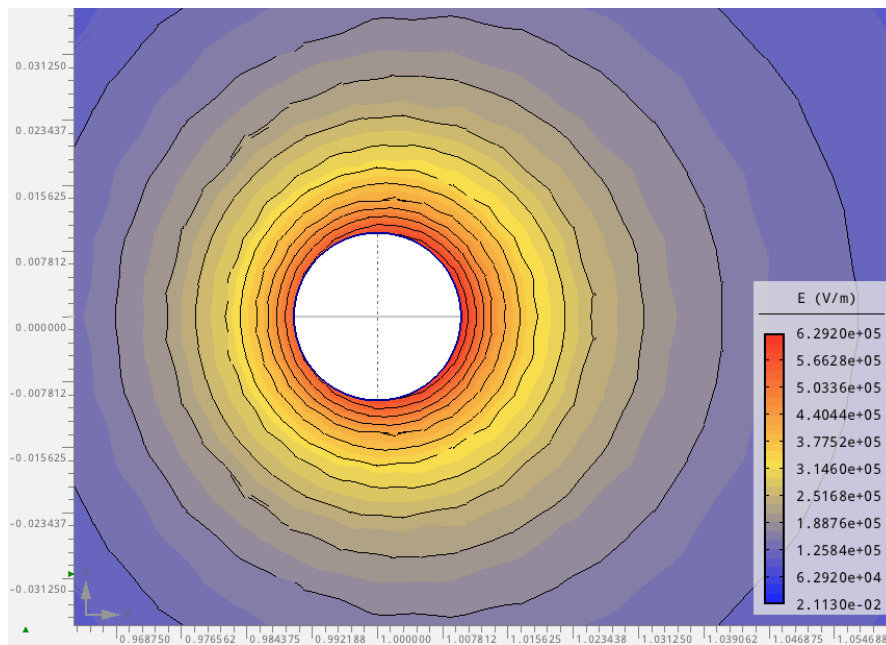
Obr. 44: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]

Pro lepší názornost uvedeme i schéma se skalárním zobrazením.



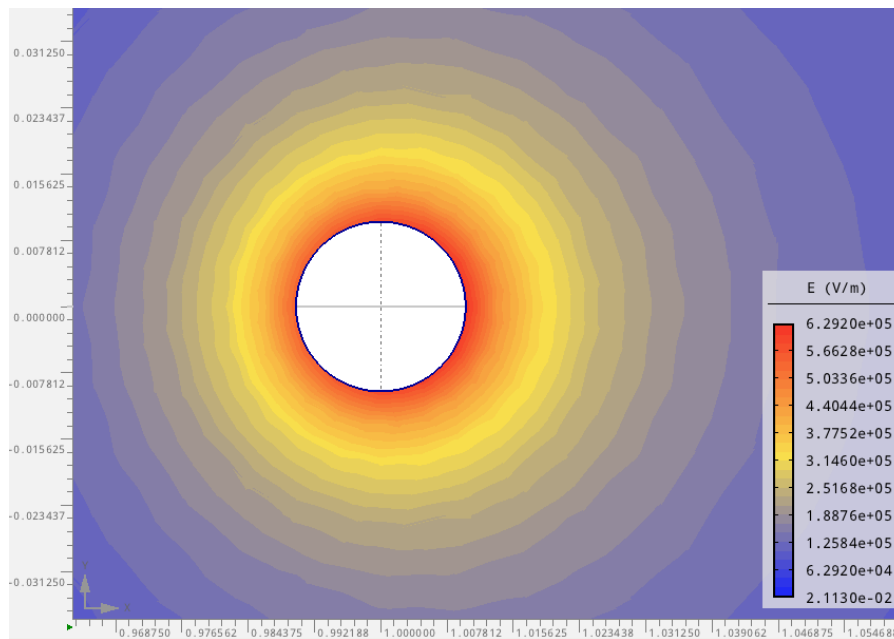
Obr. 45: Rozložení elektrické intenzity na povrchu svazkového vodiče. [19]

Bližší pohled na vodič zprava:



Obr. 46: Rozložení elektrické intenzity na povrchu pravého vodiče svazku. [19]

Pro lepší orientaci ještě náhled na jeden vodič svazku bez kontur.



Obr. 47: Elektrická intenzita na povrchu pravého vodiče svazku. [19]

Na obrázku je jasně patrné, že elektrická intenzita je téměř symetricky rozložena po celém povrchu. Její hodnota je tedy:

$$E_n = 6,29\text{kV/cm}$$

5.3.3.3 Jediný ekvivalentní vodič

Stejně jako v předchozí kapitole, provedeme i nyní řešení pro jediný ekvivalentní vodič.

Poloměr tohoto vodiče bude nyní:

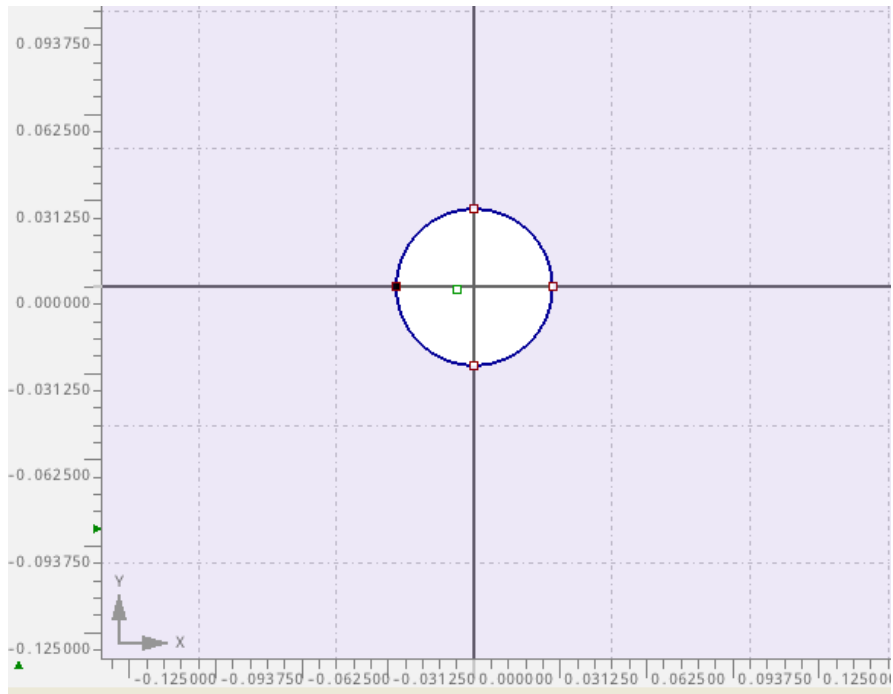
$$r_1 = \sqrt[8]{8} r = \sqrt[8]{8} 0,01 = 0,02854 \text{ m}$$

Postupovat budeme jako v předchozím případě, přičemž údaje o nákrese budou vypadat takto.

- 8 uzlů
- 8 hran
- 2 značky oblasti
- Jeden materiál

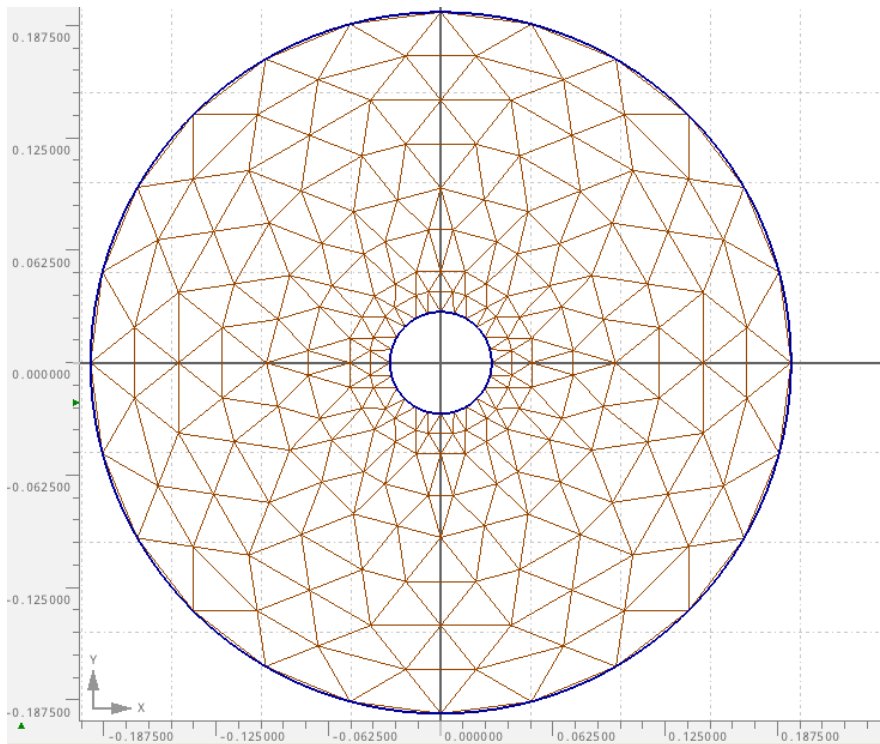
- Tři okrajové podmínky

Nákres pro jednotlivý vodič bude tedy vypadat následovně:



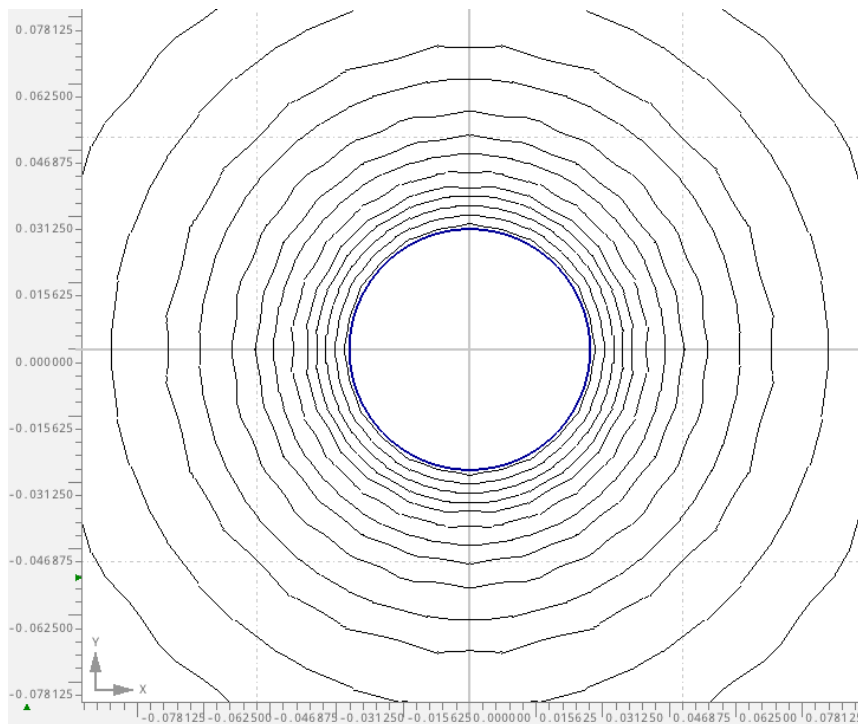
Obr. 48: Nákres pro jediný ekvivalentní vodič. [19]

Triangulace oblasti bude vypadat následovně, viz obrázek níže.

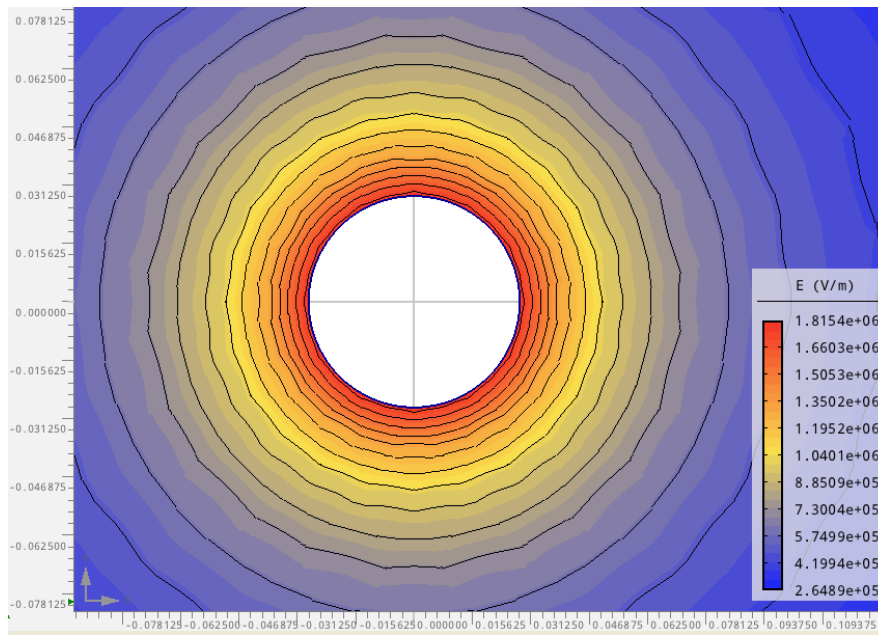


Obr. 49: Řešená síť pro jediný ekvivalentní vodič[19].

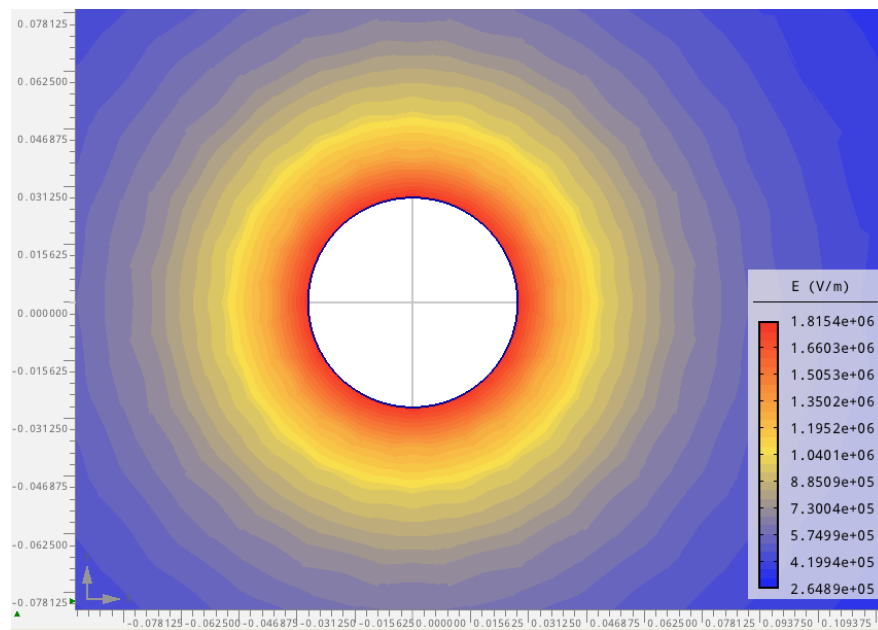
Pro jediný ekvivalentní vodič máme tedy rozložení elektrické intenzity odpovídající obrázku č. 50. Na následujících obrázcích je rozložení opět zobrazeno i se skalárním rozložením.



Obr. 50: Rozložení elektrické intenzity na povrchu jediného ekvivalentního vodiče. [19]



Obr. 51: Rozložení elektrické intenzity na povrchu jediného ekvivalentního vodiče. [19]



Obr. 52: Elektrická intenzita na povrchu jediného ekvivalentního vodiče. [19]

Hodnota elektrické intenzity pro jediný ekvivalentní vodič nahrazující svazkový vodič s počtem svazků $n = 8$ je tedy:

$$E_1 = 18,15 \text{ kV/cm}$$

5.3.3.4 Hodnoty elektrické intenzity pro $n = 8$

V následující tabulce shrneme výsledné hodnoty elektrické intenzity pro svazkový vodič $n=8$.

Tabulka 4: Elektrická intenzita pro svazkový vodič $n = 8$.

Typy vodiče	E_n [kV/cm]	E_n / E_{n1}
svazkový vodič $n = 8$	$E_{n \max} = 9,53 \text{ kV/cm}$	0,525
	$E_{n \min} = 4,76 \text{ kV/cm}$	0,262
Svazkový vodič s velkou vzdáleností mezi jednotlivými vodiči	$E_n = 6,29 \text{ kV/cm}$	0,347
Jediný ekvivalentní vodič	$E_1 = 18,15 \text{ kV/cm}$	-

5.3.4 Porovnání metod řešení

Nyní je možné porovnat obě uvedená řešení. Jak je na první pohled patrné, hodnoty svazkového vodiče s počtem svazků $n = 8$ se jeví jako adekvátní pro naše měření. Po zjištění kritické hodnoty intenzity, tj. rozložení elektrické intenzity na povrchu jediného ekvivalentního vodiče a jejím následným porovnáním s hodnotami intenzity pro svazkový vodič je jasné, že maximální hodnota $E_{n\max}=10,02 \text{ kV/cm}$ a minimální $E_{n\min}=3,07 \text{ kV/cm}$ jsou více než přijatelné pro realizaci tohoto vodiče v přenosové soustavě s počátečním napětím 100kV. Kritická hodnota elektrické intenzity je v tomto případě přijatelnější také pro svazkový vodič $n = 8$, což je ovšem jen teoretický předpoklad. V reálném prostředí by byl užít spíše čtyřsvazkový vodič, který je zpravidla užíván pro zmiňované napětí, osmisvazkový vodič se zpravidla aplikuje na vedení s ultra vysokým napětím.

Porovnání výsledků obou metod viz v tabulkách níže. V předloženém srovnání je možné pozorovat, že výsledky, až na některé drobné odchylky, vycházejí takřka totožně. Odchylky mohou být dány například nepřesnostmi ze zaokrouhlování.

Tabulka 5: Elektrická intenzita pro svazkový vodič $n = 4$:

Řešení	Svazkový vodič $n = 4$	Vodiče daleko od sebe	Jediný ekvivalentní vodič
Fredholmova rovnice	1) $E_{n \max} = 14,03 \text{ kV/cm}$ 2) $E_{n \min} = 8,59 \text{ kV/cm}$	$E_n = 11,34 \text{ kV/cm}$	$E_{n1} = 22,70 \text{ kV/cm}$
E_n / E_{n1}	1) 0,618 2) 0,378	0,500	-
MKP	1) $E_{n \max} = 14,36 \text{ kV/cm}$ 2) $E_{n \min} = 8,62 \text{ kV/cm}$	$E_n = 11,65 \text{ kV/cm}$	$E_{n1} = 22,85 \text{ kV/cm}$
E_n / E_{n1}	1) 0,628 2) 0,377	0,509	-

Tabulka 6: Elektrická intenzita pro svazkový vodič $n = 8$:

Řešení	Svazkový vodič $n = 8$	Vodiče daleko od sebe	Jediný ekvivalentní vodič
Fredholmova rovnice	1) $E_{n \max} = 10,02 \text{ kV/cm}$ 2) $E_{n \min} = 3,07 \text{ kV/cm}$	$E_n = 6,39 \text{ kV/cm}$	$E_{n1} = 18,07 \text{ kV/cm}$
E_n / E_{n1}	1) 0,555 2) 0,170	0,354	-
MKP	1) $E_{n \max} = 9,53 \text{ kV/cm}$ 2) $E_{n \min} = 4,76 \text{ kV/cm}$	$E_n = 6,29 \text{ kV/cm}$	$E_{n1} = 18,15 \text{ kV/cm}$
E_n / E_{n1}	1) 0,525 2) 0,262	0,347	-

Závěr

Předložená práce je zaměřena na popis a vyšetření elektrického pole ve svazkových vodičích. V první kapitole umožňuje stručný náhled do problematiky elektrostatického pole a svazkových vodičů, jejichž vzájemné fyzikální působení je vysvětleno ve druhé kapitole.

Třetí kapitola vymezuje stěžejní cíle, tedy formulovat výpočtový algoritmus pro stanovení intenzity elektrického pole na povrchu svazkových vodičů pro n celé. V tomto případě bylo $n=4$ a $n=8$. Dalším cílem bylo vyřešit rozložení intenzity pro uvedené svazkové vodiče nejprve pomocí Fredholmovy integrální rovnice a následně jako řešení okrajové úlohy Metody konečných prvků (MKP). Oba tyto problémy měly být doplněny numerickými příklady. Řešením Fredholmovy integrální rovnice se zabývá kapitola čtvrtá. Výpočet byl proveden v programu Matlab7.1 i s následnou vizualizací problému. Výpočtový algoritmus byl vytvořen pro svazkový vodič s počtem svazků $n = 4$ a $n = 8$. Pro jednotlivé svazky bylo uvažováno řešení v obvyklé vzdálenosti jednotlivých vodičů, dále řešení pro vodiče umístěné ve velké vzdálenosti od sebe a pro jediný ekvivalentní vodič. Právě porovnání těchto jednotlivých hodnot je stěžejní k určení kritické hodnoty elektrické intenzity, neboť při jejím překročení hrozí vznik koróny. Svazkové vodiče se na přenosových soustavách užívají právě k omezení ztrát způsobených korónou. MKP byla řešena v páté kapitole pro stejné případy, rozložení elektrické intenzity na povrchu jednotlivých vodičů bylo realizováno pomocí programu Agros2D.

V tomto případě bylo jako experimentální ověření daného problému bráno porovnání výstupních hodnot elektrické intenzity v jednotlivých příkladech pomocí dvou výše uvedených programů. Na konci práce jsou zobrazeny hodnoty jednotlivých intenzit a jejich srovnání ve dvou tabulkách. Z tabulky je patrné, že vhodnější variantou užití by byl teoreticky svazkový vodič s počtem svazků $n = 8$. V reálném případě se ovšem na vedení užívá pro uvažovanou hodnotu spíše dvojsvazkových vodičů, čtyřsvazkové se většinou užívají od 400kV výše. Zmiňovaný vodič osmivazkový je aplikován spíše při ultra vysokém napětí.

Seznam literatury

- [1] MAYER, Daniel. Dějiny elektrotechniky. Vyd. 1. Plzeň: Západočeská univerzita, 1997, 148 s. ISBN 80-708-2376-3.
- [2] MAYER, Daniel. Pohledy do minulosti elektrotechniky: Objevy, myšlenky, vynálezy, osobnosti. 1. vyd. České Budějovice: KOPP, 1999, 382 s. ISBN 80-723-2092-0.
- [3] JANDORA, Radek. Elektrické pole [online]. 2004 [cit. 2014-01-13]. Dostupné z: <http://radek.jandora.sweb.cz/f13.htm>
- [4] TECHMANIA. Elektřina a magnetismus: Elektrické pole [online]. 2008 [cit. 2014-01-13]. Dostupné z: http://www.techmania.cz/edutorium/art_exponaty.php?xkat=fyzika&xser=456c656b74f8696e612061206d61676e657469736d7573h&key=12
- [5] Elektrické pole. In: [online]. 2010 [cit. 2014-01-13]. Dostupné z: <http://www.ulozto.cz/xc8R8US/elektricke-pole-pdf#download>
- [6] ING. KOSTKA, Tomáš. ELEKTROTECHNIKA I: PŘENOS ELEKTRICKÉ ENERGIE [online]. STŘEDNÍ ŠKOLA, HAVÍŘOV-ŠUMBARK, SÝKOROVA 1/613. [cit. 2014-01-13]. Dostupné z: http://www.outech-havirov.cz/skola/files/knihovna_eltech/eti/prenos_ee.pdf
- [7] Přenosová soustava. 2009. Dostupné z: <http://www.gvp.cz/~vondrackova/Fyzika/3.E-%20refer%C3%A1ty%20-elektromagnetismus../03-P%C5%99enosov%C3%A1%20soustava%20energetiky-Bed%C5%99ich09.pdf>
- [8] MAYER, Daniel. Elektrodynamika v energetice. 1. vyd. Praha: BEN - technická literatura, 2005, 278 s. ISBN 80-730-0164-0.
- [9] Rozvodné sítě: Vodiče [online]. 2004 [cit. 2014-01-13]. Dostupné z: <http://jjohnyk.sweb.cz/elektrotechnika/12.htm>
- [10] ČEPS, a.s. Čeps, a.s.: Přenosové služby [online]. 2013 [cit. 2014-01-13]. Dostupné z: <https://www.ceps.cz>
- [11] Veličiny elektrostatického pole. In: [online]. 2007 [cit. 2014-05-10]. Dostupné z: https://ucitel.sps-prosek.cz/~exnerova/Z%C3%A1klady%20elektrotechniky/Elektrostat_shrnut%C3%AD_Ex.pdf
- [12] MAYER, Daniel. Aplikovaný elektromagnetismus: úvod do makroskopické teorie elektromagnetického pole pro elektrotechnické inženýry. 1. vyd. České Budějovice: Kopp, 2012, 531 s. ISBN 978-80-7232-424-8.

- [13] ELEKTROSTATICKÉ POLE. [online]. 2008 [cit. 2014-05-10]. Dostupné z:<http://www.kf.elf.stuba.sk/KrempaskyFyzika/19.pdf>
- [14] VYBÍRAL, Bohumil. ELEKTROSTATIKA. In: [online]. 2012 [cit. 2014-05-10]. Dostupné z:<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elstat.pdf>
- [15] Encyklopedie fyziky: Elektrické pole, elektrická intenzita. [online]. 2009 [cit. 2014-05-10]. Dostupné z:<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/222-elektricke-pole-elektricka-intenzita>
- [16] Odborné konzultace s vedoucím práce panem Prof. Ing. Danielem Mayerem, DrSc.
- [17] MARTIN VRBKA, Martin a Michal VAVERKA. Metoda konečných prvků. [online]. 2010 [cit. 2014-05-12]. Dostupné z: http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska1_mkp.pdf
- [18] Aplikace programu Matlab7.1.
- [19] Aplikace programu Agros2D.

Přílohy

Algoritmus programu Matlab7.1 pro svazkový vodič $n = 4$:

```

%% Skript pro výpočet elektrického pole ve svazku vodičů
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Vstupní parametry
%
% Geometrie úlohy a vlastnosti prostředí
r = 0.01;           % poloměr vodiče
R = 0.15;          % poloměr svazku
n = 4;             % počet vodičů ve svazku
phi = 100000;     % elektrický potenciál
eps = 8.854e-12;  % permitivita prostředí
%
% Diskretizace
ncirc = 50;        % počet diskretizačních bodů po obvodu vodiče
circ = zeros(ncirc,2); % matice s polohou bodů na povrchu kružnice
coor = zeros(n*ncirc,2); % matice s polohou bodů na povrchu vodičů
A = zeros(n*ncirc); % matice el. vlastností vodiče
f = ones(n*ncirc,1); % vektor potenciálu v daných bodech vodiče
% Výpočet důležitých veličin
%
l = pi * r / ncirc; % polovina vzdálenosti sousedících bodů (lp / 2)
alpha = 2 * pi / ncirc; % uhel mezi dvěma body diskretizace
beta = 2 * pi / n; % uhel mezi dvěma sousedními vodiči
%
% Výpočet polohy bodů na kružnici se středem v počátku
for i = 1:ncirc
    circ(i,1) = r * cos(alpha * (i - 1)); % souřadnice x
    circ(i,2) = r * sin(alpha * (i - 1)); % souřadnice y
end
%
% Výpočet polohy bodů na površích vodičů
for i = 1:n
    for j = 1:ncirc
        coor((i-1)*ncirc+j,1) = R * cos(beta * (i - 1)) + circ(j,1);
        coor((i-1)*ncirc+j,2) = R * sin(beta * (i - 1)) + circ(j,2);
    end
end
%
% Vykreslení situace
figure('Color','w');
hold on;
plot(coor(:,1),coor(:,2),'k. ');
plot([R/r*circ(:,1); R],[R/r*circ(:,2); 0],'--','Color',[.6 .6 .6]);
axis equal;
title('Vizualizace svazku vodiču');
xlabel('Souradnice x [m]');
ylabel('Souradnice y [m]');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Naplnění A a f
%
f = 2 * pi * eps * phi * f;

for i = 1:n*ncirc
    for j = 1:n*ncirc

```

```

        if i == j
            A(i,j) = 1 * (1 - log(1));
        else
            rij = sqrt((coor(i,1) - coor(j,1))^2 + (coor(i,2) -
coor(j,2))^2);
            A(i,j) = 2 * l * log(1 / rij);
        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Výsledky
%
sig = A \ f; % plošná hustota
q = 2 * l * sum(sig(1:ncirc)); % naboj
int = sig / eps; % intenzita
intmin = min(int);
intmax = max(int);
intint = (max(int) - min(int)) / 63;
%
% Vizualizace výsledků
figure('Color','w');
hold on;
map = colormap('jet');

plot([R/r*circ(:,1); R],[R/r*circ(:,2); 0],'--','Color',[.6 .6 .6]);
for i = 1:n*ncirc
    ind = round((int(i) - intmin) / intint) + 1;
    plot(coor(i,1),coor(i,2),'.','color',map(ind,:));
end

label = {num2str(intmin, '%.2f'),' ',' ',' ',' ',' ',' ',num2str(intmax, '%.2f')};
for i = 1:6
    label{i+1} = num2str(intmin + 9*i*intint, '%.2f');
end
colorbar('YTick',1:9:64,'YTickLabel',label);

axis equal;
title('Elektrická intenzita na povrchu vodice')
xlabel('Souradnice x [m]');
ylabel('Souradnice y [m]');

```

Algoritmus programu Matlab7.1 pro svazkový vodič $n = 8$:

```

%% Skript pro výpočet elektrického pole ve svazku vodičů
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Vstupní parametry
%
% Geometrie úlohy a vlastnosti prostředí
r = 0.01;           % poloměr vodiče
R = 0.15;          % poloměr svazku
n = 8;             % počet vodičů ve svazku
phi = 100000;     % elektrický potenciál
eps = 8.854e-12;  % permitivita prostředí
%
% Diskretizace
ncirc = 50;        % počet diskretizačních bodů po obvodu vodiče
circ = zeros(ncirc,2); % matice s polohou bodů na povrchu kružnice
coor = zeros(n*ncirc,2); % matice s polohou bodů na povrchu vodičů
A = zeros(n*ncirc); % matice el. vlastností vodiče
f = ones(n*ncirc,1); % vektor potenciálu v daných bodech vodiče
% Výpočet důležitých veličin
%
l = pi * r / ncirc; % polovina vzdálenosti sousedících bodů (lp / 2)
alpha = 2 * pi / ncirc; % uhel mezi dvěma body diskretizace
beta = 2 * pi / n; % uhel mezi dvěma sousedními vodiči
%
% Výpočet polohy bodů na kružnici se středem v počátku
for i = 1:ncirc
    circ(i,1) = r * cos(alpha * (i - 1)); % souřadnice x
    circ(i,2) = r * sin(alpha * (i - 1)); % souřadnice y
end
%
% Výpočet polohy bodů na površích vodičů
for i = 1:n
    for j = 1:ncirc
        coor((i-1)*ncirc+j,1) = R * cos(beta * (i - 1)) + circ(j,1);
        coor((i-1)*ncirc+j,2) = R * sin(beta * (i - 1)) + circ(j,2);
    end
end
%
% Vykreslení situace
figure('Color','w');
hold on;
plot(coor(:,1),coor(:,2),'k. ');
plot([R/r*circ(:,1); R],[R/r*circ(:,2); 0],'--','Color',[.6 .6 .6]);
axis equal;
title('Vizualizace svazku vodiču');
xlabel('Souradnice x [m]');
ylabel('Souradnice y [m]');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Naplnění A a f
%
f = 2 * pi * eps * phi * f;

for i = 1:n*ncirc
    for j = 1:n*ncirc
        if i == j
            A(i,j) = 1 * (1 - log(1));
        else
            rij = sqrt((coor(i,1) - coor(j,1))^2 + (coor(i,2) -
coor(j,2))^2);

```

```

        A(i,j) = 2 * l * log(1 / rij);
    end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% Výsledky
%
sig = A \ f; % plošná hustota
q = 2 * l * sum(sig(1:ncirc)); % naboj
int = sig / eps; % intenzita
intmin = min(int);
intmax = max(int);
intint = (max(int) - min(int)) / 63;
%
% Vizualizace výsledků
figure('Color','w');
hold on;
map = colormap('jet');

plot([R/r*circ(:,1); R],[R/r*circ(:,2); 0],'--','Color',[.6 .6 .6]);
for i = 1:n*ncirc
    ind = round((int(i) - intmin) / intint) + 1;
    plot(coor(i,1),coor(i,2),'.','color',map(ind,:));
end

label = {num2str(intmin, '%.2f'),' ',' ',' ',' ',' ',' ',num2str(intmax, '%.2f')};
for i = 1:6
    label{i+1} = num2str(intmin + 9*i*intint, '%.2f');
end
colorbar('YTick',1:9:64,'YTickLabel',label);

axis equal;
title('Elektricka intenzita na povrchu vodice')
xlabel('Souradnice x [m]');
ylabel('Souradnice y [m]');

```