Modifikovanie tvaru neuniformovaných racionálnych B-spline a Beta-spline kriviek.

RNDr. Mária Imrišková, KMDG SvF STU, Radlinského 11,813 62 Bratislava

RNDr. Soňa Kudličková CSc, KG MFF UK Mlynská dolina, 842 15 Bratislava

Neuniformované racionálne B-spline a β-spline krivky sú veľmi mnohostranným nástrojom v systémoch CAD a CAGD a v súčasnosti sa tešia širokej popularite. Modifikáciu tvaru krivky návrhár dosiahne nielen zmenou polohy niektorého vrchola riadiaceho polygóna ale i zmenou váhy vrchola riadiaceho polygóna, resp. zmenou tvarovacích parametrov β_{1i}, β_{2i}, ktoré sú ľubovoľné skalárne veličiny. Voľba týchto skalárnych veličín vyžaduje od návrhára značnú skúsenosť a trpezlivosť. Naviac, návrhári neradi pracujú s číslami. A za tým účelom popíšeme metódy ako geometricky interpretovať tieto čísla, čím dáme návrhárovi možnosť pracovať len s vrcholmi riadiaceho polygóna, resp. s ramenom riadiaceho polygóna.

Z teórie spline kriviek vieme, že racionálna B-spline krivka je špeciálnym prípadom racionálnej β-spline krivky. Preto zadefinujeme racionálnu β-spline krivku a B-spline krivku získame pre hodnoty tvarovacích parametrov $\beta_{1i}= 1$ a $\beta_{2i}= 0$.

Racionálna β-spline krivka 3-tieho stupňa v *3D* [2,4,5,6] je vektorová racionálna polynomická funkcia v tvare :

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i V_i G_i(t,\beta_{1i},\beta_{2i})}{\sum_{i=0}^{n} w_i G_i(t,\beta_{1i},\beta_{2i})} = \sum_{i=0}^{n} V_i R_i(t,\beta_{1i},\beta_{2i}) \qquad (1)$$

kde : $t \in T$

postupnosť $T = \{ t_0, t_1, \dots, t_m \}$, $m = n+4$ je *uzlový vektor*,

t_i - *uzol*, interval $\langle t_i, t_{i+1})$ - *uzlový interval*;

V_i - riadiace vrcholy v E^3 ; $\quad i=0,1,\dots,n$

$w_i > 0$ - kladné čísla - váhy; $\quad i=0,1,\dots,n$

$\beta_{1i} > 0$ - kladné čísla (parametre asymetrie krivky),

$\beta_{2i} \geq 0$ - nezáporné čísla (parametre symetrie krivky) definované v každom spoji susedných segmentov, $\quad i=3,\dots,n+1$

$G_i(t,\beta_{1i},\beta_{2i})$ - bázická β-spline funkcia 3-tieho stupňa definovaná pre uzol t, pre parametre β_{1i}, β_{2i} a

$$R_i(t,\beta_{1i},\beta_{2i}) = \frac{w_i G_i(t,\beta_{1i},\beta_{2i})}{\sum_{i=0}^{n} w_i G_i(t,\beta_{1i},\beta_{2i})}$$ je racionálna β-spline funkcia

V ďalšom postupe :

- uzlový vektor je rastúca postupnosť, tj. $t_i < t_{i+1}$, $i=0,\dots,m$ a
- váhy spĺňajú podmienky:

$$w_0,\ w_n > 0 \quad \text{a} \quad w_j \geq 0,\ j=1,\dots,n-1 \qquad (2)$$

Tieto požiadavky zabezpečujú nezápornosť β-spline bázických funkcií $G(t,\beta_{1i},\beta_{2i})$. Metódy pre vyčíslenie bodov takejto krivky sú uvedené v prácach [6,7,8].

1. Zmena parametrov β_1, β_2

Tvarovacie parametre β_1/β_2 hovoria o asymetrickom/symetrickom priebehu krivky v bode spoja jej dvoch segmentov. Prirodzene, zmena parametra β_{1i}/β_{2i} vyvolá zmenu len na i-tom a (i+1)-vom segmente.

V práci [3] B.A.Barsky uviedol Farinovu a Boehmovu metódu ako danú β-spline krivku popísať Bezierovou krivkou. Túto metódu možno využiť i na voľbu/zmenu parametrov β_{1i}/β_{2i}.

Uvedieme základnú myšlienku tejto metódy :

Na každom ramene riadiaceho polygóna $V_{i-3}V_{i-2}$ krivky (obr. i.1) leží dvojica vrcholov $W_{i,1}$ a $W_{i,2}$ $(W_{i,1} \neq W_{i,2})$, $i = 3,\dots,n+2$ (vnútorné vrcholy riadiaceho polygóna Bezierovej krivky), pričom pre segmenty $V_{i-3}W_{i,1}$, $W_{i,1}W_{i,2}$ a $W_{i,2}V_{i-2}$ platí :

i.1 $\qquad \gamma_i \;:\; 1 \;:\; \beta^2_{1,i+1}\gamma_{i+1}$

kde γ_i je definované vzťahom :

i.2
$$\gamma_i = \frac{2\,(1+\beta_{1i})}{\beta_{2,i} + 2\,\beta_{1,i}(1+\beta_{1,i})}, \qquad i = 3,\dots,n+2$$

Označme

i.3.a $$(V_{i-3} V_{i-2} W_{i,1}) = d_i = - \frac{\gamma_i}{1 + p_{i+1}}$$

i.3.b $$(V_{i-3} V_{i-2} W_{i,2}) = s_i = - \frac{1 + \gamma_i}{p_{i+1}}$$

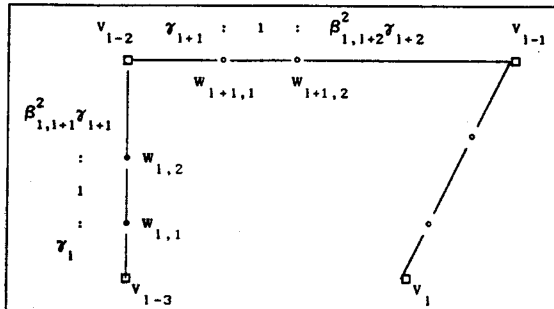
kde $p_{i+1} = \beta^2_{i+1} \cdot \gamma_{i+1}$, pre $i = 3, .., n+1$.

Z (*i*.3a, b a *i*.2) , dostaneme

i.4 $$\gamma_i = - d_i \frac{s_i - 1}{d_i - s_i}$$

i.5.a $$\beta_{1,i} = \sqrt{p_i / \gamma_i}$$

i.5.b $$\beta_{2,i} = \frac{2 (1 + \beta_{1,i}) - 2 \gamma_i \beta_{1,i} (1 + \beta_{1,i})}{\gamma_i}.$$



Obrázok I.1 Umiestnenie vnútorných Bezierovych vrcholov pre kubický Beta-spline

Teraz nás zaujímajú možnosti zmeny hodnôt parameterov $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}$.

Parameter $\beta_{1,i}$ ovplyvníme zmenou polohy bodu $W_{i,1}$ (obr.i.1). Zo vzťahov (i.3.a, b) vyplýva

i.6
$$\gamma_i = -d_i \, (1 + \beta^2_{1,i} \gamma_i)$$
$$\beta_{1,i} = \sqrt{-(1+\gamma_{i-1})/s_{i-1}\gamma_i} \, .$$

Ak bod $W_{i,1}$ približujeme k vrcholu V_{i-3}, tak hodnota $\beta_{1,i}$ sa zväčšuje (blíži do nekonečna) a vplyvom toho (i+1)-vý krivkový segment je priťahovaný smerom k ramenu $V_{i-3}V_{i-2}$ riadiaceho polygóna. Naopak ak sa bod $W_{i,1}$ vzďaľuje od V_{i-3}, tak hodnota $\beta_{1,i}$ sa blíži k nule a i-ty krivkový segment je priťahovaný sme-

rom k ramenu $V_{i-4}V_{i-3}$ riadiaceho polygóna.

Pri zmene parametra $\beta_{2,i}$ je potrebné určiť novú polohu bodu $W_{i-1,2}$ a následne určiť γ_i podľa vzťahu

i.7 $$\gamma_i = - \frac{(1 + \gamma_{i-1})}{s_{i-1} \beta^2_{1,i}}$$

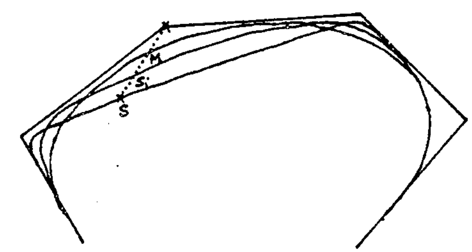
a hodnotu $\beta_{2,i}$ zo vzťahu (i.5.b) .

Ak Bezierov vrchol $W_{i-1,2}$ sa približuje k riadiacemu vrcholu V_{i-3}, tak hodnota $\beta_{2,i}$ rastie do nekonečna a i-ty a (i+1)-vý segment sú priťahované smerom k vrcholu V_{i-3} riadiaceho polygóna.

II. Zmena váhy w_i

V tejto časti priradíme váham, ktoré sme doposiaľ chápali ako nezáporné čísla, geometrický význam. Tento prístup použil L.-Piegl vo svojich prácach k modifikovaniu B-spline kriviek (plôch) [1]. Váha w_i, $i = 1, .., n-1$, vplýva na tvar krivky len na intervale uzlov $[t_i, t_{i+4})$. Teda tam, kde sú nenulové bázické funkcie pre daný segment krivky. Definujme nasledujúce body (obr. ii.1) pre pevnú hodnotu parametra $t \in [t_i, t_{i+4})$:

ii.1
$$S = C (t, w_i = 0)$$
$$M = C (t, w_i = 1)$$
$$S_i = C (t, w_i \neq \{ 0,1 \})$$



obrázok II.1. Definovanie bodov pre pevnú hodnotu parametra t

Body M, S_i môžeme vyjadriť :

ii.2
$$M = S + u (V_i - S)$$
$$S_i = S + v (V_i - S)$$

kde

ii.3
$$u = \frac{G_l(t,\beta_{11},\beta_{21})}{\sum\limits_{l\neq j=0}^{n} w_j G_j(t,\beta_{11},\beta_{21}) + G_l(t,\beta_{11},\beta_{21})}$$

ii.4
$$v = \frac{w_l G_l(t,\beta_{11},\beta_{21})}{\sum\limits_{j=0}^{n} w_j G_j(t,\beta_{11},\beta_{21})} = R_l(t,\beta_{11},\beta_{21})$$

To znamená, že body M, S, S_l, V_l sú kolineárne a ich dvojpomer (V_l S M S_l) sa rovná váhe w_l. Teda váha má zaujímavú geometrickú vlastnosť, ktorú môžeme využiť pri modelovaní tvaru krivky. V súvislosti s modelovaním je dôležité uviesť :

- ak váha w_l rastie/klesá, tak súčasne rastie/klesá i hodnota v a krivka je priťahovaná/odtláčaná k/od riadiacemu/riadiaceho vrcholu V_l.
- ak sa S_l posúva po priamke prechádzajúcej riadiacim vrcholom V_l, tak krivka mení svoj tvar želaným spôsobom, nasledovne
  - ak sa S_l približuje k V_l, hodnota v sa približuje k 1 a preto váha w_l rastie do nekonečna, tzn. treba sa vyvarovať pretečeniu.
  - v opačnom prípade sa S_l približuje k bodu S.

Doteraz sme sa zaoberali priťahovaním krivky k jednému riadiacemu vrcholu. Vo väčšine aplikácií sa požaduje meniť tvar časti krivky vzhľadom na dva vybrané riadiace vrcholy. Tento problém môžeme riešiť súčasným priťahovaním/odtláčaním krivky ku/od 2 riadiacim/riadiacich bodom/bodov krivky.

Predpokladajme, že vybrané riadiace vrcholy sú susedné, tj. vrcholy V_k, V_{k+1}. Chceme dosiahnuť pritiahnutie/odtlačenie časti krivky k/od týmto/týchto vrcholom/vrcholov, za predpokladu, že prepočítame len váhy w_k a w_{k+1} (obr. ii.2).

Určme body :

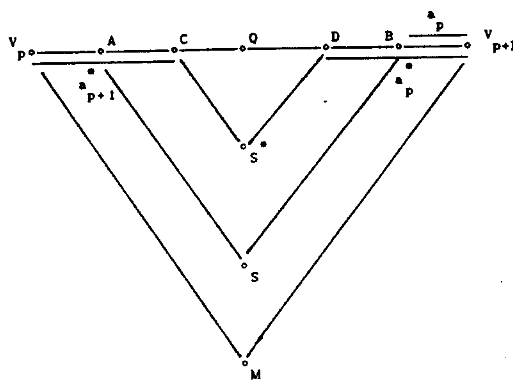
$$S = C\,(t,\ t \in [t_k, t_{k+4}) \cap [t_{k+1}, t_{k+5});\ w_k,\ w_{k+1} > 0\,).$$

$$M = C\,(\,t,\ w_k = w_{k+1} = 0\,)$$

Bod S môžeme vyjadriť i nasledovne :

$$S = (\,1 - a_k - a_{k+1})M + a_k V_k + a_{k+1} V_{k+1}$$

kde
$$a_k = \frac{w_k G_k(t,\beta_{11},\beta_{21})}{\sum\limits_{j=0}^{n} w_j G_j(t,\beta_{11},\beta_{21})}; \quad a_{k+1} = \frac{w_{k+1} G_{k+1}(t,\beta_{11},\beta_{21})}{\sum\limits_{j=0}^{n} w_j G_j(t,\beta_{11},\beta_{21})}$$



obrázok II.2 Ilustrácia k definovaniu bodov pre simultánne priťahovanie/odtláčanie

To znamená, že bod S leží v rovine s barycentrickou súradnicovou sústavou $\langle M;\ V_k,\ V_{k+1}\rangle$, v ktorej bod M je jej začiatkom.

Nech bod S^* je nová pozícia bodu S. Nás zaujíma ako sa zmenia váhy w_k, w_{k+1}. Ich nové hodnoty označíme w^*_k a w^*_{k+1}. Vyjadrime bod S° v barycentrickej súradnicovej sústave $\langle M;\ V_k,\ V_{k+1}\rangle$ nasledovne :

$$S^* = (\,1 - a^*_k - a^*_{k+1})M + a^*_k V_k + a^*_{k+1} V_{k+1}\,,\ \text{pričom}$$

$$a^*_k = \frac{w^\circ_k\, G_k(t,\beta_{11},\beta_{21})}{X}; \quad a^*_{k+1} = \frac{w^*_{k+1}\, G_{k+1}(t,\beta_{11},\beta_{21})}{X}$$

a

$$X = \sum_{0=j\neq k,\,k+1}^{n} w_j G_j(t,\beta_{11},\beta_{21}) + w^\circ_k\, G_k(t,\beta_{11},\beta_{21}) + w^*_{k+1} G_{k+1}(t,\beta_{11},\beta_{21})$$

Všimnime si, že hodnoty a_k, a_{k+1} a a°_k, a^*_{k+1} sa líšia len na pozíciach zviazaných s váhami w°_k, w^*_{k+1}. Predpokladajme, že váhy w°_k, w^*_{k+1} sú lineárne kombinácie váh w_k, w_{k+1} :

(ii.5) $w_k^{\bullet} = \beta_k w_k \qquad w_{k+1}^{\bullet} = \beta_{k+1} w_{k+1}.$

Neznáme β_k, β_{k+1} vyjadríme nasledovne :

(ii.6)
$$\beta_k = \frac{1-a_k-a_{k+1}}{a_k} : \frac{1-a_k^{\bullet}-a_{k+1}^{\bullet}}{a_k^{\bullet}}$$
$$\beta_{k+1} = \frac{1-a_k-a_{k+1}}{a_{k+1}} : \frac{1-a_k^{\bullet}-a_{k+1}^{\bullet}}{a_{k+1}^{\bullet}}$$

Pre takto vyjadrené hodnoty β_k a β_{k+1} predstavujú hodnoty a_k, a_{k+1}, $a_k^{\bullet}$, $a_{k+1}^{\bullet}$ barycentrické súradnice bodov A,B,C,D ležiacich na V_kV_{k+1} vzhľadom na súradnicovú sústavu $\langle M; V_k, V_{k+1}\rangle$ a platí

(ii.7)
$$a_k = \frac{|B-V_{k+1}|}{|V_{k+1}-V_k|} \; ; \qquad a_{k+1} = \frac{|A-V_k|}{|V_{k+1}-V_k|}$$
$$a_k^{\bullet} = \frac{|D-V_{k+1}|}{|V_{k+1}-V_k|} \; ; \qquad a_{k+1}^{\bullet} = \frac{|C-V_k|}{|V_{k+1}-V_k|}$$

pričom SA, $S^{\bullet}C$ sú rovnobežné s MV_k a SB, $S^{\bullet}D$ je rovnobežné s MV_{k+1}. Tento poznatok nám poskytuje možnosť následne vyčísľovať:

- jednu súradnicu bodov A,B,C,D na ramene V_kV_{k+1}
- hodnoty a_k, a_{k+1}, $a_k^{\bullet}$, $a_{k+1}^{\bullet}$ podľa (ii.7)
- hodnoty β_k, β_{k+1} podľa (ii.6) a
- nové hodnoty váh $w_k^{\bullet}$, $w_{k+1}^{\bullet}$ pre bod S° podľa (ii.5).

Nenulové hodnoty a_k, a_{k+1} získame vtedy, keď parameter t pre body M, S patrí do prieniku intervalov $[t_k, t_{k+4}) \cap [t_{k+1}, t_{k+5})$ a bod $S^{\bullet}$ je premiestňovaný vnútri trojuholníka MV_kV_{k+1}. Ak navyše zabezpečíme, že bod $S^{\bullet}$ sa pohybuje po priamke MS, tak krivka je priťahovaná/odtláčaná súmerne smerom k/od bodom/bodov V_k, V_{k+1}.

Vo všeobecnosti nie je nutné, aby body V_r a V_s boli susedné. Avšak pri výbere bodov V_r a V_s treba dávať pozor na parameter t. Jeho hodnota musí byť z prieniku intervalov $[t_r, t_{r+4}) \cap [t_s, t_{s+4})$. Teda podmienka $s-r \le 4$ určuje výber bodov V_r, V_s $(s > r)$.

IV. ZÁVER

Všetky uvedené zmeny sa dajú ľahko automatizovať. Vďaka geometrickej interpretácii parametrov β_1, β_2 a váh w_i návrhár ľahko modifikuje tvar krivky podľa svojich predstáv. Rozmýšľa iba v takých dimenziach ako je pritiahnutie/odtlačenie krivky smerom k/od zvolenému/zvoleného riadiaceho vrcholu resp. dvoch riadiacich vrcholov. Systém automaticky ponúkne návrhárovi vzdialenosť o akú sa krivka posúva, samozrejme i s možnosťou túto vzdialenosť zmeniť. Takto návrhár dosiahne i podstatné zmeny v tvare krivky pričom vlastný matematický model zostáva v pozadí.

Literatúra

[1] L.Piegl : Modifying the Shape of Rational B-splines. Part 1 Curves, CAD, volume 21, number 8, october 1989, pp. 509-518

[2] B.A.Barsky : Computer Graphics and Geometric Modeling Using Beta-splines, Springer-Verlag, Heidelberg 1988

[3] B.A.Barsky, T.D.DeRose : Parametric Curves, Tutorial Part Two : Geometric Continuity of parametric Curves : Constructions of Geometrically Continuous Splines, IEEE Computer Graphics & Applications, January 1990, pp. 60-68

[4] T.N.T.Goodman and K.Unsworth : Generation of Beta-spline Curves using a recurrence relation. In Fundamental Algorithms for Computer Graphics, R.A.Earnshaw, Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1985, pp. 325-357

[5] B.A.Barsky, J.C.Beautty, R.H.Bartels : An Introduction to splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling, Morgan Kaufman, San Mateo, Calif., 1987

[6] Barry Joe : Multiple Knot and Rational Cubic Beta Splines. ACM Transactions on Graphics, April 1989, Volume 8, number 8

[7] M. Imrišková : Automatic Modifying the shape of rational Beta-splines. Writen work to the minimum PhD. exam. Bratislava June, 1992

[8] B.K.Choi, W.S.Yoo and C.S.Lee : Matrix representation for NURB curves and surfaces. CAD, vol. 22, number 4, may 1990,p.235-240.