ANALÝZA DLHOPISOV S VLOŽENÝMI OPCIAMI

Jozef Glova, Tomáš Sabol

Úvod

Citlivosť teoretickej ceny dlhopisu s fixným príjmom (ďalej pre jednoduchosť len "dlhopisu") je meraná ako percentuálna zmena ceny pri jednotkovej zmene úrokovej sadzby. Dlhopis s vyššou cenovou citlivosťou na zmenu úrokovej sadzby reaguje výraznejšie na zmenu úrokovej sadzby, t.j. v prípade rastu úrokovej sadzby, dôjde k výraznejšiemu poklesu ceny dlhopisu a v prípade poklesu úrokovej sadzby, dôjde k výraznejšiemu rastu ceny. Výpočet durácie (tzv. Macaulayho durácie), ako nástroja pre analýzu a riadenie portfólia dlhopisov, sa používa už viac ako 70 rokov [3]. Tento pohľad na oblasť cenných papierov s fixným príjmom je všeobecne zaužívaný a pri dodržaní určitých predpokladov aj dostatočne presný. Z nášho pohľadu je však nevyhnutné dôsledne si uvedomiť všetky predpoklady aplikácie tohto prístupu a následne tieto predpoklady oslabovať tak, aby bol celý koncept aplikovateľný aj s ohľadom na špecifické vlastnosti rôznych druhov dlhopisov.

Macaulayho model, resp. model modifikovanej durácie, je založený na výrazných obmedzeniach. Preto je nutné presne porozumieť týmto predpokladom, aby sme vedeli vhodne interpretovať výsledky modelu. Je tiež nevyhnutné si uvedomiť, že daný model sa dá použiť len pre malé zmeny vo výnosnosti dlhopisu. Je možné ukázať, že dlhopisy s rovnakou hodnotou durácie, majú pri väčších zmenách výnosnosti inú reálnu zmenu teoretickej ceny. z tohto pohľadu sa zvyčajne odporúča z dôvodu spresnenia výpočtu využiť aj kvadratický člen Taylorovho rozvoja, tzv. konvexitu dlhopisu.

Ďalším predpokladom použitia Macaulayho, resp. modifikovanej durácie pre stanovenie novej teoretickej ceny dlhopisu je skutočnosť, že uvažujú len rovnomerný posun v celom spektre výnosovej krivky, tzv. paralelný posun v rovnakom rozsahu pozdĺž celej výnosovej krivky, pozri [4].

Dokonca niektorí z autorov, napríklad [6] a [7], uvažujú len konštantnú hodnotu úrokových sadzieb pre jednotlivé splatnosti vo výnosovej krivke, tzv. "plochý charakter" výnosovej krivky. Pri uvažovaní tohto výrazne zjednodušujúceho predpokladu, je možné pre takýto prípad odvodiť zjednodušený vzťah pre rýchle určenie (odhadu) hodnoty durácie, ako je uvedené v [5]. Z pohľadu reality je výnosnosť funkciou doby splatnosti, z čoho plynie, že časová štruktúra výnosovej krivky len veľmi zriedka vykazuje paralelné zmeny ("plochý priebeh").

V prípade, ak predpokladáme neparalelné zmeny vo výnosovej krivke, otázka je, akú hodnotu výnosnosti zvoliť na popis takýchto zmien - krátkodobé, strednodobé alebo dlhodobé? Rovnako dôležitým predpokladom, ktorý obsahuje vzťah pre výpočet durácie s použitím klasicky poňímaného kritéria čistej súčasnej hodnoty je, že uvažované peňažné toky v podobe kupónov a nominálnej hodnoty sú presne definované - jednak z pohľadu veľkosti peňažnej sumy, ale aj z pohľadu doby splatnosti, kedy nastanú. V tomto ohľade nie je uvažovaná možnosť zmien načasovania týchto peňažných tokov, ktorá by mohla zmeniť teoretickú cenu dlhopisu.

Vzhľadom na tieto obmedzenia sa v praxi zaužíval prístup pre odhad cenovej citlivosti teoretickej ceny dlhopisu na zmenu úrokovej sadzby, ktorý sa nazýva efektívna durácia, príp. rozšírený aj o efektívnu konvexitu. Práve na pozadí tohto prístupu, s využitím poznatkov z oceňovania finančných opcií, poukážeme na spôsob merania cenovej citlivosti typov dlhopisov, ktoré obsahujú vložené opčné práva.

1. Meranie cenovej citlivosti teoretickej ceny dlhopisu

Teoretická cena dlhopisu je vyjadrená ako súčasna hodnota očakávaných (budúcich) peňažných tokov plynúcich z dlhopisu v podobe kupónových platieb a výplaty nominálnej hodnoty dlhopisu na konci doby splatnosti dlhopisu, teda:

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1 + y_0)^t} \tag{1.1}$$

kde

P_0 - aktuálna teoretická cena dlhopisu

C_t - peňažný tok plynúci z dlhopisu (kupón, resp. nominálna hodnota) na konci časovej periódy, tieto peňažné toky okrem kupónových platieb obsahujú aj úhradu nominálnej hodnoty dlhopisu na konci doby splatnosti,

T - počet období do splatnosti dlhopisu,

t - časová perióda, po uplynutí ktorej je realizovaný peňažný tok z dlhopisu,

y_0 - aktuálny výnos do splatnosti dlhopisu.

Pre finančnú prax je dôležité poznať odpoveď na otázku, ako sa zmení teoretická cena cenného papiera s fixným príjmom pri zmene výnosnosti, teda, ak sa zmení počiatočná hodnota úrokovej sadzby y_0 na hodnotu y_1, pričom $y_1=y_0+\Delta y$, odkiaľ $\Delta y=y_1- y_0$.

Ak je hodnota Δy malá, môžeme hodnotu novej teoretickej ceny vypočítať prostredníctvom rozvoja vzťahu (1.1) do Taylorovho radu, kde teoretickú cenu P uvažujeme ako funkciu úrokovej sadzby y, teda platí $P(y)=f(y)$. z pohľadu počiatočnej hodnoty úrokovej sadzby y_0 a jej zmeny o hodnotu Δy, bude nová teoretická cena P_1 vyjadrená ako:

$$P(y_1)=P(y_0)+\frac{1}{1!}\cdot P'(y_0)\cdot(y_1-y_0)+\frac{1}{2!}\cdot P''(y_0)\cdot(y_1-y_0)^2+\ldots \qquad (1.2)$$

Uvažovaním len absolútneho a lineárneho člena Taylorovho radu (1.2) môžeme určiť novú teoretickú cenu dlhopisu ako:

$$P(y_1)=P(y_0)-\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot C_t}{(1+y_0)^{t+1}}\cdot(y_1-y_0) \qquad (1.3)$$

Pričom pre zmenu teoretickej ceny podľa vzťahu (1.1) platí:

$$P'(y_0)=-\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot C_t}{(1+y_0)^{t+1}}=\frac{1}{(1+y_0)}\cdot\sum_{t=1}^{n}\frac{-t\cdot C_t}{(1+y_0)^{t}}$$

Po násobení oboch strán rovnice výrazom $\left(-\frac{1+y_0}{P_0}\right)$ dostaneme:

$$\frac{-P'(y_0)\cdot(1+y_0)}{P_0}=\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{-t\cdot C_t}{(1+y_0)^t}}{P_0}=D \qquad (1.4)$$

kde D je tzv. Macaulayho durácia (Macaulay, 1938). Relatívna zmena teoretickej ceny dlhopisu sa nazýva modifikovaná durácia a platí pre ňu vzťah:

$$\frac{-P'(y_0)}{P_0}=\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{-t\cdot C_t}{(1+y_0)^t}}{P_0}\cdot\frac{1}{(1+y_0)}=\frac{D}{(1+y_0)} \qquad (1.5)$$

Rovnica (1.5) je pritom základom pre vyjadrenie cenovej citlivosti teoretickej ceny dlhopisu vzhľadom na zmenu úrokovej sadzby.

V prípade, ak uvažujeme prvé tri členy Taylorovho radu podľa (1.2), dostaneme presnejší výpočet teoretickej ceny dlhopisu:

$$P_1=P_0-\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot C_t}{(1+y_0)^{t+1}}\cdot(y_1-y_0)+\frac{1}{2}\cdot\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot(t+1)\cdot C_t}{(1+y_0)^{t+2}}\cdot(y_1-y_0)^2 \qquad (1.6)$$

kde $P''(y_0)$ sa nazýva konvexita, pričom pre ňu platí:

$$P''(y_0)=\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot(t+1)\cdot C_t}{(1+y_0)^{t+2}}=\frac{1}{(1+y_0)^2}\cdot\sum_{t=1}^{n}\frac{t\cdot(t+1)\cdot C_t}{(1+y_0)^{t}}=K \qquad (1.7)$$

Novú teoretickú cenu dlhopisu je teda možné využitím vzťahov (1.4), (1.7) a (1.2) zapísať ako:

$$P_1=P_0+\frac{1}{(1+y_0)}\cdot D\cdot(y_1-y_0)+\frac{1}{2}\cdot K\cdot(y_1-y_0)^2 \qquad (1.8)$$

Takéto odvodenie základného vzťahu pre cenovú citlivosť a stanovenie novej teoretickej ceny dlhopisu je možné bežne nájsť v základnej ekonomickej literatúre.

Duráciu a konvexitu však pre určité typy dlhopisov nemôžeme vypočítať priamo, napríklad pre dlhopisy založené cennými papiermi, pretože ich peňažné toky sú neisté. v praxi sa však používajú oceňovacie modely, ktoré môžeme použiť pre ocenenie cenných papierov pre rôzne charakteristiky emisie sekurizovaného dlhu v podobe dlhopisov. Jeden z postupov na určenie priemernej doby splatnosti, ktorý je rozšírený najmä v praxi, sa nazýva efektívna durácia.

2. Efektívna durácia a konvexita

Efektívna durácia a konvexita merajú citlivosť teoretickej ceny dlhopisu pri rovnomernej zmene úrokových sadzieb pre rôzne doby splatnosti vo výnosovej krivke. Postupnosť krokov pri výpočte efektívnej durácie a efektívnej konvexity je nasledovná. Odhadneme očakávanú zmenu výnosnosti do doby splatnosti Δy a určíme teoretickú cenu dlhopisu v prípade očakávaného rastu výnosnosti do splatnosti, teda $P_+ = P(y_0 + \Delta y)$; a rovnako pre prípad poklesu výnosnosti do splatnosti, teda $P_- = P(y_0 - \Delta y)$. Efektívna durácia D^E sa vypočíta ako aproximácia sklonu krivky teoretickej ceny dlhopisu ako funkcie úrokovej sadzby relatívne k teoretickej cene dlhopisu P_0 v bode y_0:

$$D^E = \frac{[P_- - P_+]}{2 \cdot P_0 \cdot \Delta y} \tag{1.9}$$

Efektívnu konvexitu potom určíme ako:

$$C^E = \frac{[P_+ + P_- - 2 \cdot P_0]}{P_0 \cdot (\Delta y)^2} \tag{1.10}$$

Z pohľadu použitia modifikovanej durácie a efektívnej durácie nie sú takmer žiadne rozdiely v prípade, ak uvažujeme dlhopisy neobsahujúce opčné práva (napr. v podobe skoršieho uplatnenia alebo zvolateľnosti). Pri relatívne malých očakávaných zmenách výnosnosti sú aj matematicky takmer identické. Výrazne rozdiely ale dostaneme pri uvažovaní zmien peňažných tokov dlhopisu spôsobených zmenou výnosovej sadzby dlhopisu.

3. Analýza dlhopisov s vloženými opciami

Jedným z príkladov dlhopisov s vloženou opciou je zvolateľný dlhopis. Takýto dlhopis je relatívne bežný, pričom jeho špecifikom je, že obsahuje doložku, ktorá umožňuje skoršie umorenie dlhopisu (zvolanie) zo strany emitujúcej firmy, teda dlžníka. Samozrejmosťou je dohodnutá cena dlhopisu v prípade zvolania, ako aj časový interval, resp. presný časový údaj, kedy je možné zvolanie uskutočniť. Ide v podstate o predaj call opcie zo strany kupujúceho v prospech predávajúceho dlhopisu. Realizačná cena, resp. cena zvolania (call price) je vopred určená. Spravidla je tiež daná perióda, počas ktorej nie je možné dlhopis zvolať.

Iným typom dlhopisov s vloženými opciami sú dlhopisy s vloženou put opciou. Tieto obsahujú doložku o možnom skoršom umorení dlhopisov zo strany držiteľa dlhopisu, a to vo vopred definovanom čase a za vopred definovanú cenu. v podstate ide zo strany držiteľa dlhopisu o kúpu put opcie spoločne s dlhopisom.

Najznámejším modelom v oblasti oceňovania opčných práv je Black-Scholesov model [1]. Tento model uvažuje s európskou call a put opciou na akciu, u ktorej nie je uvažované vyplácanie dividend. z pohľadu charakteru podkladového aktíva sa však pre náš prípad z pohľadu štruktúry podkladového aktíva skôr hodí tzv. Blackov model [2]. Je však potrebné vykonať príslušné úpravy, aby mohol byť aplikovateľný aj pre určenie hodnoty opčného kontraktu na dlhopis. Uvažujme európsku call opciu na podkladové aktívum, ktorého teoretická cena je . Pri určení hodnoty opcie uvažujeme:

1. predpoklad, že $\ln V_T$ sa riadi normálnym rozdelením s priemernou hodnotou F_0 a smerodajnou odchýlkou $\sigma \cdot \sqrt{T}$;
2. diskontovanie očakávanej výplaty -ročnou sadzbou (to je ekvivalent násobenia očakávanej výplaty P(0,T)),

kde P(0,T) je súčasná teoretická cena dlhopisu s nulovým kupónom splatného v čase T a smerodajnou odchýlkou $\sigma \cdot \sqrt{T}$.

Výplata opcie v čase T je $\max(V_T - K, 0)$. Predpoklad lognormálneho rozdelenia hodnôt V_T vedie k záveru, že očakávaná výplata je:

$$E(V_T) \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)$$

kde $E(V_T)$ je očakávana hodnota V_T a

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(V_T)}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{E(V_T)}{K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

Keďže uvažujeme, že platí $E(V_T) = F_0$, potom hodnota opcie je:

$$c = P(0,T) \cdot [F_0 \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)] \text{ pre call opciu,} \tag{1.11}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_0}{K}\right) - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}.$$

Obdobne, hodnota p korešponduje s put opciou definovanou ako:

$$p = P(0,T) \cdot [K \cdot N(-d_2) - F_0 \cdot N(-d_1)]. \tag{1.12}$$

kde:

c - hodnota call opcie;
p - hodnota put opcie;

- F - budúca cena V pre opčný kontrakt so splatnosťou T;
- F_0 - aktuálna cena podkladového aktíva;
- K - realizačná cena akcie v termíne splatnosti opčného kontraktu;
- T - čas do splatnosti opčného kontraktu;
- V_T - hodnota V v čase T;
- $P(0,T)$ - súčasná teoretická cena dlhopisu s nulovým kupónom splatného v čase T a smerodajnou odchýlkou $\sigma \cdot \sqrt{T}$;
- σ - volatilita ceny podkladového aktíva, teda F.

Rovnice (1.11) a (1.12) môžeme použiť na určenie hodnoty opcie s F_0, rovnej forwardovej cene dlhopisu F_B. Rovnako, σ bude rovná volatilite forwardovej ceny dlhopisu σ_B. Rovnice pre ocenenie európskej call, resp. put opcie na dlhopis ~~v~~yzerajú nasledovne:

$$c = P(0,T) \cdot [F_B \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)] \quad \text{pre call opciu,} \tag{1.13}$$

$$p = P(0,T) \cdot [K \cdot N(-d_2) - F_B \cdot N(-d_1)] \quad \text{pre put opciu.} \tag{1.14}$$

Výšku forwardovej ceny dlhopisu pritom môžeme určiť pomocou vzťahu

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)} \tag{1.15}$$

kde B_0 je cena dlhopisu v súčasnosti a I je súčasná hodnota kupónov, ktoré budú vyplatené počas životnosti opcie.

Predchádzajúce vzťahy budeme nižšie aplikovať v praktickom príklade, ktorý umožní lepšie pochopiť spôsob výpočtu hodnoty call opcie na dlhopis. Uvažujme s 24 mesačnou call opciou na päť ročný dlhopis s nominálnou hodnotou 1000 € (pri splatnosti opcie bude mať dlhopis do splatnosti ešte tri roky). Ďalej uvažujme, že aktuálna spotová cena dlhopisu je 1000 €, realizačná cena je 1050 €; pričom 24 mesačná bezriziková sadzba (definovaná sadzbou LIBOR) je 10 % p.a. a volatilita forwardovej ceny dlhopisu o 24 mesiacov je 10 % na ročnej báze. Dlhopis vypláca polročný kupón pri ročnej kupónovej sadzbe 10 % p.a., teda pri hodnotách kupónových platieb vo výške 50 €. Tieto platby budú realizované v 6., 12., 18. a 24. mesiaci životnosti dlhopisu. Uvažujeme, že základné bezrizikové sadzby pre termíny realizácie výplat kupónov dlhopisu sú vo výške 10 % p.a. Súčasná hodnota kupónových platieb (I) je teda rovná:

$$I = 50 \cdot [(1+0{,}10)^{-0{,}5} + (1+0{,}10)^{-1{,}0} + (1+0{,}10)^{-1{,}5} + (1+0{,}10)^{-2{,}0}] = 177{,}79 \text{ €}$$

Forwardová cena dlhopisu podľa (1.15) je rovná:

$$F_B = (1000 - 177{,}79) \cdot (1+0{,}10)^{2{,}0} = 994{,}88 \text{ €}$$

Ak bude realizačná cena vyplatená pri uplatnení dlhopisu, potom parametre pre rovnicu (1.13) sú takéto:

$F_B = 994{,}88$ €; $K = 1050$ €;
$P(0,T) = (1+0{,}1)^{-2} = 0{,}8265$; $\sigma_B = 0{,}10$ a $T = 2$

V tomto prípade je cena call opcie rovná 28,01 €.

V prípade uvažovania put opcie by jej hodnota, vychádzajúc z obdobných predpokladov, bola rovná 73,14 €. v prípade, že realizačná cena je reálne vyplatená v neskoršom čase, ako pri uplatnení dlhopisu, je potrebné potom ešte upraviť hodnotu realizačnej ceny o časovú hodnotu peňazí za daný časový interval.

4. Hodnotenie dlhopisov s obsiahnutými opčnými právami

Aplikáciou modelu uvedeného v predchádzajúcej časti je možné poukázať na využiteľnosť prístupu efektívnej durácie a konvexity na meranie cenovej citlivosti dlhopisov, ktoré obsahujú vložené opčné práva. Našou snahou je poukázať na vplyv opčných práv obsiahnutých v dlhopisoch na teoretickú cenu dlhopisu, a to vzhľadom na zmenu úrokovej sadzby.

Pre výpočet a následnú interpretáciu využijeme už zadefinovaný príklad z odvodenia modelu pre určenie hodnoty európskej call, resp. put opcie vloženej k dlhopisu. Použitím efektívnej durácie a efektívnej konvexity si ukážeme, ako je možné merať citlivosť zmeny ceny pre dlhopisy bez vložených opčných práv a zároveň pre dlhopisy, u ktorých uvažujeme s existenciou takýchto opčných práv. v našej aplikácii, uvažujúc predchádzajúci príklad, ďalej uvažujeme trojicu dlhopisov s vlastnosťami uvedenými v Tab. 1.

Ak použijeme Blackov model s uvažovanou zmenou vo výške 50 bázických bodov (nahor aj nadol), potom dostaneme výsledné zmeny cien dlhopisov. Ak použijeme notáciu uvedenú vyššie pre efektívnu duráciu a konvexitu (rovnice (1.9) a (1.10)), potom P_- zodpovedá cene v prípade poklesu úrokovej miery a P_+ zodpovedá teoretickej cene v prípade rastu úrokovej miery; P_0 označuje aktuálnu cenu a Δy zasa predpokladaný posun v časovej štruktúre výnosovej krivky. V Tab. 2 sú uvedené teoretické ceny dlhopisov vypočítané použitím efektívnej durácie a konvexity.

sun v časovej štruktúre výnosovej krivky nahor P_+ a nadol P_- o 50 bázických bodov (bb) a následným dosadením týchto hodnôt do rovnice pre výpočet efektívnej durácie (1.9). Jednotlivé ceny sú zhrnuté v Tab. 2. Výpočet efektívnej durácie vyzerá takto:

Tab. 1: Charakteristiky uvažovaných dlhopisov

Dlhopis	Splatnosť (v rokoch)	Kupón (p.a. platený polročne)	Zvolateľný (s call opciou)	Uplatniteľný (s put opciou)	Bežná cena (% nominálnej hodnoty)
A	5	10,00 %	-	-	100,00 %
B	5	10,00 %	na konci 2. roku	-	100,00 %
C	5	10,00 %	-	na konci 2. roku	100,00 %

Zdroj: vlastné spracovanie

$$D^E = \frac{[1019{,}54 - 980{,}93]}{2 \cdot 1000{,}00 \cdot 0{,}005} = 3{,}86$$

Obdobne môžeme vypočítať efektívnu konvexitu, a to dosadením do vzťahu (1.10), teda:

$$C^E = \frac{[980{,}93 + 1019{,}54 + 2 \cdot 1000{,}00]}{1000{,}00 \cdot (0{,}005)^2} = 18{,}75$$

Z pohľadu určenia teoretickej ceny dlhopisu s vloženou call, resp. put opciou je potrebné vychádzať z nasledujúcich vzťahov pre prispôsobenie teoretickej ceny dlhopisu s vloženými opciami, teda:

$P_{A,c} = P_B - c$, pre teoretickú cenu dlhopisu s vloženou call opciou (1.16)

$P_{A,p} = P_B + p$, pre teoretickú cenu dlhopisu s vloženou put opciou (1.17)

kde

PA,c - teoretická cena dlhopisu s vloženou call opciou;

PA,p - teoretická cena dlhopisu s vloženou put opciou;

PB - teoretická cena dlhopisu bez opcie;

c - hodnota call opcie;

p - hodnota put opcie.

Dlhopis bez opcie

Efektívnu duráciu jednoduchého dlhopisu dostaneme výpočtom teoretickej ceny pre očakávaný po-

Pre jednoduchý dlhopis bez opčných práv je hodnota modifikovanej durácie 3,86 a hodnota konvexity 18,73. Tieto hodnoty sú veľmi blízke hodnotám efektívnych ukazovateľov durácie a konvexity v Tab. 3. To poukazuje na skutočnosť, že v prípade jednoduchého dlhopisu a pri malých zmenách vo výnosnosti sú hodnoty týchto rozdielnych ukazovateľov takmer identické.

Tab. 2 ilustruje efekt posunu časovej štruktúry na efektívnu duráciu a efektívnu konvexitu u dlhopisu bez vloženej opcie. Efektívna durácia narastá pri klesajúcej výnosnosti z toho dôvodu, že pri poklese výnosnosti sa sklon závislosti teoretická cena/vý-

Tab. 2: Zmena ceny z dôvodu posunu časovej štruktúry úrokových sadzieb o 50 bázických bodov

Premenná	Pôvodná cena	Posun nahor o 50 bb, P_+	Posun nadol o 50 bb, P_-
Cena dlhopisu bez opcie	1000,00	980,93	1019,54
Cena dlhopisu s opciou pre zvolateľnosť	1073,14	1060,09	1086,81
Cena dlhopisu s opciou pre uplatniteľnosť	971,99	957,01	986,93

Zdroj: vlastné výpočty

Tab. 3: Hodnoty efektívnej durácie a konvexity

Hodnoty vypočítaných ukazovateľov efektívnej durácie a konvexity pre zmeny teoretických cien dlhopisov pri uvažovanom posune o 50 bb v časovej štruktúre výnosovej krivky

	Efektívna durácia	Efektívna konvexita
Cena dlhopisu bez opcie	3,86	18,75
Cena dlhopisu s opciou pre zvolateľnosť	3,08	-2,28
Cena dlhopisu s opciou pre uplatniteľnosť	2,49	23,31

Zdroj: vlastné výpočty

nos stáva strmší, pričom efektívna (aj modifikovaná) durácia je úmerná smernici dotyčnice k tejto krivke (čiže prvej derivácii) v zvolenom bode. Napríklad v prípade efektívnej durácie pri znížení výnosnosti o -500 bázických bodov je jej hodnota 4,05 a klesá na hodnotu 3,67 pri vysokej miere rastu (posun o +500 bázických bodov). Obr. 1 ilustruje tento fenomén; ak rastie výnosnosť (úroková sadzba), sklon závislosti teoretickej ceny a výnosu v absolútnej hodnote klesá. v prípade posunu časovej štruktúry úrokových sadzieb nahor (teda pri rastúcich úrokových sadzbách), výnosnosť do splatnosti dlhopisu bez opčného práva narastá približne o rovnakú hodnotu. Ako narastá výnosnosť, konvexita dlhopisu klesá. Obr. 1 znázorňuje túto vlastnosť.

Ako výnosnosť rastie, zakrivenosť (alebo miera zmeny sklonu) klesá. Potvrdzujú to aj výsledky uvedené v Tab. 4, ktoré platia pre dlhopis bez opčných práv. Hodnoty efektívnej konvexity sa zmenšujú pri rastúcej výnosnosti. Napríklad efektívna konvexita pri veľmi malých výnosnostiach (posun o -500 bázických bodov) je 20,33 a klesá k hodnote 17,26 pri vysokých sadzbách (posun o + 500 bázických bodov).

Týmto sme jasne demonštrovali dokázateľné vlastnosti dlhopisov bez opčných práv. Hodnoty modifikovanej durácie a konvexity pre dlhopis bez opčných práv sú takmer identické s ukazovateľom efektívnej durácie a konvexity pre dlhopis bez opčných práv, viď Tab. 4.

Dlhopis s call opciou

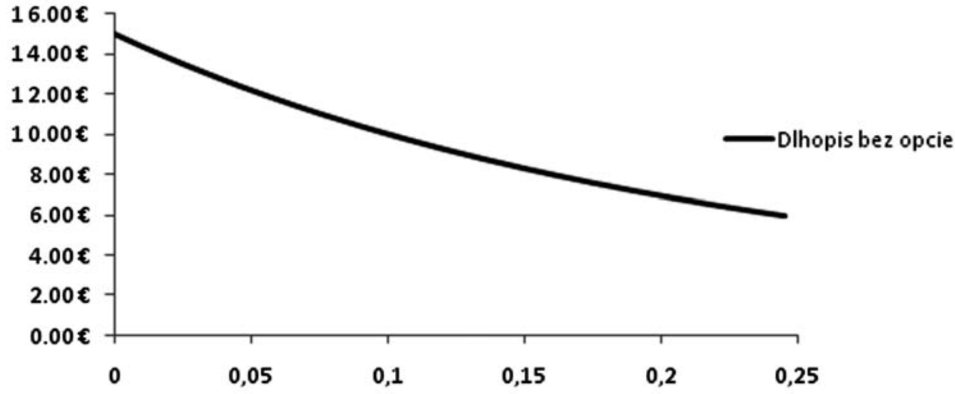
Efektívnu duráciu dlhopisu s vloženou call opciou vypočítame zo zmeny cien pri posunoch v časovej štruktúre nahor (P_+) alebo nadol (P_-) o 50 bázických bodov a ich dosadením do rovnice pre výpočet efektívnej durácie (1.9). Jednotlivé ceny sú

Tab. 4: Efektívna durácia a konvexita pre rozličné zmeny (posuny) v časovej štruktúre u troch dlhopisov

Posun časovej štruktúry (bb)	Dlhopis bez opcie		Dlhopis s opciou pre zvolateľnosť		Dlhopis s opciou pre uplatniteľnosť	
	Efektívna durácia	Efektívna konvexita	Efektívna durácia	Efektívna konvexita	Efektívna durácia	Efektívna konvexita
-500	4,05	20,33	2,43	-6,02	3,43	29,61
-250	3,96	19,53	2,76	-5,89	2,95	28,14
-100	3,90	19,06	2,95	-4,09	2,67	25,59
0	3,86	18,75	3,08	-2,28	2,49	23,31
+100	3,82	18,45	3,19	-0,13	2,33	20,75
+250	3,77	17,99	3,32	3,38	2,12	16,70
+500	3,67	17,26	3,46	8,83	1,88	10,64

Zdroj: vlastné výpočty

Obr. 1: Vzťah medzi teoretickou cenou a výnosnosťou u dlhopisu bez opčného práva



Zdroj: vlastné spracovanie

vyjadrené v Tab. 2, pre teoretickú cenu dlhopisu s vloženou call opciou (teda s právom skoršej zvolateľnosti dlhopisu), pre teoretickú cenu dlhopisu s vloženou put opciou (teda s právom skoršej uplatniteľnosti dlhopisu. Je potrebné si uvedomiť, že tieto ceny berú do úvahy zmeny peňažných tokov prameniacich z vložených opčných práv (call opcia). Výpočet efektívnej durácie bude vyzerať takto:

$$D^E = \frac{[986{,}93 - 957{,}01]}{2 \cdot 971{,}99 \cdot 0{,}005} = 3{,}08$$

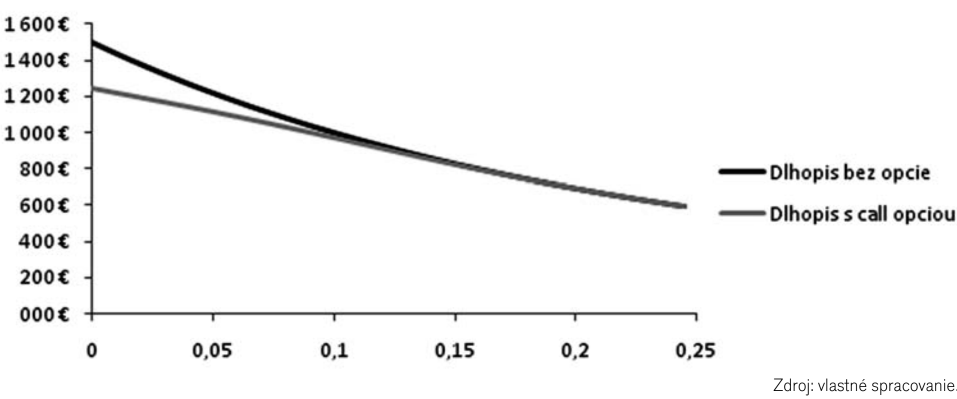
Obdobne, pre výpočet efektívnej konvexity v rovnici (1.10) platí

$$C^E = \frac{[957{,}01 + 986{,}93 + 2 \cdot 971{,}99]}{971{,}99 \cdot (0{,}005)^2} = -2{,}28$$

Vzťah medzi posunom v úrokových sadzbách a efektívnou duráciou je ilustrovaný v Tab. 4 a na Obr. 2. s rastúcou úrokovou sadzbou, efektívna durácia dlhopisu s vloženou opciou (call opcia) rastie. Napríklad efektívna durácia pri nízkej úrokovej sadzbe (posun o -500 bázických bodov) je 2,43 a rastie na hodnotu 3,46 pri relatívne vysokej úrokovej sadzbe (posun o +500 bázických bodov).

To odzrkadľuje skutočnosť, že ako úrokové sadzby rastú, pravdepodobnosť zvolania dlhopisu klesá, pričom výsledkom je, že dlhopis sa začína správať z pohľadu jeho teoretickej ceny ako dlhopis bez vložených opcií; z tohto dôvodu rastie tiež jeho efektívna durácia. Naopak, ak úrokové sadzby klesajú, narastá pravdepodobnosť, že dlho-

Obr. 2: Dlhopis bez vložených opcií a s uvažovanou call opciou



Zdroj: vlastné spracovanie.

pis a jeho efektívna durácia sa budú správať ako dlhopis s dvojročnou duráciou, pretože call opcia bude efektívna v dvoch rokoch. V prípade výrazného poklesu úrokových sadzieb, narastá pravdepodobnosť zvolania dlhopisu upisovateľom v období dvoch rokoch. Obdobne pri veľmi nízkych alebo nízkych sadzbách je rozdiel medzi efektívnou duráciou a modifikovanou duráciou veľký; pri veľmi vysokých sadzbách je rozdiel malý.

Dlhopis s put opciou

Efektívnu duráciu pre dlhopisy s put opciou vypočítame pomocou vzťahov (1.9) a (1.17), a to pre uvažovanú zmenu v časovej štruktúre výnosovej krivky smerom nahor P_+ a nadol P_- o hodnotu 50 bázických bodov a následným dosadením týchto hodnôt do rovnice (1.9). Výsledné ceny sú uvedené v Tab. 2. Je potrebné zdôrazniť, že tieto ceny berú do úvahy meniace sa peňažné toky spôsobené vloženou put opciou. Výpočet bude vyzerať takto:

$$D^E = \frac{[1086{,}81 - 1060{,}09]}{2 \cdot 1073{,}14 \cdot 0{,}005} = 2{,}49$$

Obdobne, efektívna konvexita sa vypočíta pomocou (1.15) takto:

$$C^E = \frac{[1060{,}09 + 1086{,}81 + 2 \cdot 1073{,}14]}{1073{,}14 \cdot (0{,}005)^2} = 23{,}31$$

Keďže dlhopis s vloženou put opciou sa správa rozdielne oproti predchádzajúcim dvom dlhopisom, sú hodnoty jeho efektívnej durácie a konvexity veľmi rozdielne oproti hodnotám dlhopisu bez opcie, resp. dlhopisu s vloženou call opciou.

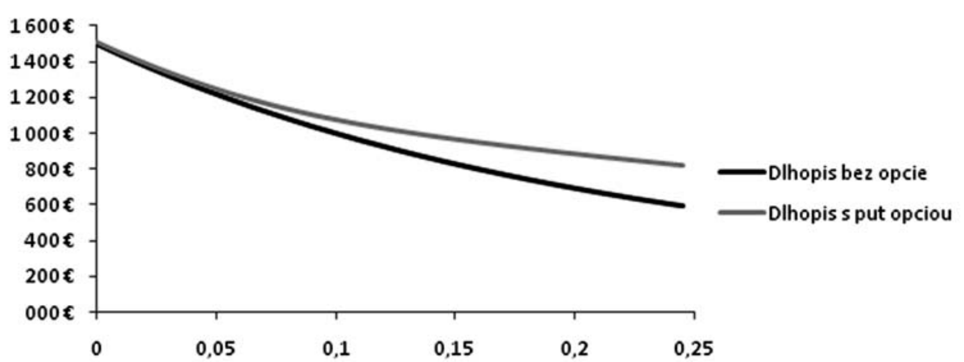
5. Záver

Durácia je základným nástrojom pre určenie citlivosti ceny dlhopisu na zmenu úrokovej sadzby. Macaulayho durácia, resp. z nej odvodená modifikovaná durácia má viacero nedostatkov. Jedným z nich je aj nezohľadnenie možných opčných práv, ktoré sú vložené v kontrakte pri kúpe dlhopisu, a to na strane veriteľa (call opcie) alebo dlžníka (put opcia). Keďže tieto modely nie sú pre tieto prípady použiteľné, je potrebné použiť iné modely.

Jedným z nich je model efektívnej durácie, ktorý sme popísali v našom príspevku. Keďže samotný model definuje len zmenené hodnoty dlhopisov v prípade posunov štruktúry výnosovej krivky o určenú hodnotu bázických bodov, bolo potrebné zadefinovať, ako sa na hodnote dlhopisu prejaví hodnota takýchto možných práv. Pre určenie hodnoty týchto práv vychádzame z Blackovho modelu, ktorý modifikujeme pre účely ocenenia opčných práv vložených k dlhopisu. Takýto postup nám umožňuje definovať hodnotu týchto práv, následne hodnotu dlhopisu, ako aj hodnoty možných zmien v prípade zmeny štruktúry úrokových sadzieb, čo nám nakoniec umožní určiť hodnoty efektívnej durácie a efektívnej konvexity, ktoré sú, na základe realizovaných výpočtov, odlišné od hodnôt durácie a konvexity u dlhopisov bez vložených opčných práv.

Na základe spracovaných modelov je možné konštatovať, že durácia ako indikátor cenovej citlivosti dlhopisu v podobe Macaulayho, resp. modifikovanej durácie je použiteľná v prípade dlhopisov a iných finančných nástrojov s fixným príjmom,

Obr. 3: Dlhopis bez vložených opcií a s vloženou put opciou



Zdroj: vlastné spracovanie.

ak tieto neobsahujú žiadne opčné práva, ktoré by modifikovali hodnotu dlhopisu počas doby životnosti dlhopisu, a rovnako iba pre prípady, kde uvažujeme len s paralelným posunom štruktúry výnosovej krivky. Pre všetky ostatné prípady je možné, samozrejme po potrebných úpravách, ako sme to demonštrovali aplikáciou a prispôsobením Blackovho modelu, použiť v článku odvodený a analyzovaný model efektívnej durácie.

Článok bol spracovaný s podporou projektu VEGA č. 1/0897/10 "Meranie a riadenie úrokového rizika (IntRate-RiskMetrics)".

Literatúra

[1] BLACK, F., SCHOLES, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy.* 1973, roč. 81, č. 3, s. 637-654. ISSN 00223808.
[2] BLACK, F. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics.* 1976, roč. 3, č. 3, s. 167-179. ISSN 0304-405X.
[3] MACAULAY, F. R. *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856.* New York: National Bureau of Economic Research, Publication No. 33, 1938. ISBN 0-87014-032-9.
[4] NAWALKHA, S. K., SOTO, G. M., BELIAEVA, N. A. *Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course.* 1st ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005. ISBN 0471427241.
[5] ŠOLTÉS, V. Vplyv doby splatnosti a kupónovej sadzby obligácie na zmenu jej teoretickej ceny pri zmene úrokovej sadzby na kapitálovom trhu. *Ekonomický časopis.* 2004, roč. 52, č. 6, s. 756-761. ISSN 0013-3035.
[6] ŠOLTÉS, V. Durácia kupónovej obligácie ako kritérium cenovej citlivosti obligácie vzhľadom na zmenu úrokových sadzieb. *Ekonomický časopis.* 2004, roč. 52, č. 1, s. 108-114. ISSN 0013-3035.
[7] ŠOLTÉS, V., ŠOLTÉS, M. Maximálna a limitná hodnota durácie kupónovej obligácie. *E+M Ekonomie a Management.* 2007, roč. 10, č. 4, s. 87-91. ISSN 1212-3609.

Ing. Jozef Glova, PhD.
Technická univerzita v Košiciach
Ekonomická fakulta
Katedra bankovníctva a investovania
jozef.glova@tuke.sk

prof. Ing. Tomáš Sabol, PhD.
Technická univerzita v Košiciach
Ekonomická fakulta
Katedra bankovníctva a investovania
tomas.sabol@tuke.sk

Doručeno redakci: 3. 12. 2010
Recenzováno: 12. 1. 2011, 8. 2. 2011
Schváleno k publikování: 1. 7. 2011

ABSTRACT

ANALYSIS OF BONDS WITH EMBEDDED OPTIONS

Jozef Glova, Tomáš Sabol

This paper deals with the price sensitivity of fixed-income securities to the interest rate changes, expressing a dominant source of financial risk the financial institutions or other market participants manage.

The most common modelling technique used by practitioners for measuring and managing the bond price sensitivity is the Macaulay's duration normally expressed in the modified duration form, also known as weighted average maturity of the bond, or the bond price sensitivity to the interest rate changes.

Taking into account the fact that the standard concept of the duration has its limitations as the accuracy for small yield changes, a nonparallel shift in the yield curve or option-free bond assumption, we derive and describe the effective duration and convexity models for determining the expected theoretical price of the bonds with embedded options enabling the bond redemption prior to the maturity.

To demonstrate computation and effect of the embedded option in a bond contract we use fundamental characteristic of an option-free bond and two most common types of embedded options - call option and put options giving the issuer the right to call or prepay the debt obligation prior to the scheduled principal payment date (call option) or giving the investor the right to require the issuer to purchase the bond at a specified price (put option).

To determine the theoretical price of the embedded option rights we use these two methods coupled with the modified Black model to cope with limitation of the traditional Macaulay's duration approach. The results show a significant impact of the embedded options on the effective duration and convexity of fixed income securities.

Key words: *Duration, price elasticity, pricing of fixed-income securities, embedded options, Black's model.*

JEL Classification: *C41, D14, G31.*