MODELY VZNIKU A ELIMINACE EKONOMICKÝCH REGIONÁLNÍCH DISPARIT JAKO ÚLOHY OPTIMÁLNÍHO ŘÍZENÍ

Pavel Pražák

Úvod

Většina států je administrativně členěna na menší samosprávné regiony. Takové členění, které má obvykle historické kořeny, je pro správu státu nutné, nicméně jeho existence přináší také řadu problémů, které jsou řešeny v rámci nástrojů regionálního rozvoje. V tomto textu budou popsány dva problémy, které se týkají ekonomického vývoje regionů. První problém se zabývá problematikou možného vzniku regionálních disparit. Druhý problém řeší naopak možnosti jejich zmenšování. Regionální disparity zde budeme úzce chápat jako rozdíly mezi ekonomickou výkonností příslušných regionů, takže půjde o určitý typ ekonomické regionální disparity. Základní popis problémů vychází z článků [11] a [12].

Je známo, že cílem regionální politiky je rozvoj regionů zaměřený na jejich soudržnost a zvyšování konkurenceschopnosti. Jak bude ukázáno v prvním modelu, je efektivnější alokovat investice a koncentrovat ekonomické aktivity do těch regionů, které mají vyšší produktivitu, viz také [7] nebo [11]. Tímto způsobem však může docházet k ekonomickému zaostávání těch regionů, které mají produktivitu nižší. Tyto regiony se tak mohou stát méně konkurenceschopné a v zájmu zachování soudržnosti bude účelné uskutečnit jisté přerozdělení příjmů mezi produktivnějšími a méně produktivnějšími regiony. Aby se možné rozdíly mezi produktivitou regionů a případnými příjmy obyvatel v těchto regionech zmenšovaly, provádí centrální vlády intervence do regionálního rozvoje. Může například docházet k přesměrování investic vlády do infrastruktury méně rozvinutých regionů. Cílem takových snah je posílit kapitálovou vybavenost obyvatel těchto regionů, přispět ke zvýšení technologické úrovně regionů a tak posílit jejich konkurenceschopnost. Druhý model uvedený v tomto článku, který vychází z publikací [6] a [9], se tedy bude zabývat přerozdělováním příjmů regionů a investicemi do jejich infrastruktury.

I když jsou oba modely založeny na odlišných ekonomických předpokladech – první model vychází z keynesiánského přístupu k modelování spotřeby (resp. úspor), druhý model je založen na předpokladech nové klasické ekonomie, kdy ekonomičtí agenti optimalizují své účelové funkce a přizpůsobují tomu své jednání – jsou v článku uvedeny společně, neboť umožňují prezentovat modelový přístup k regionální politice a ukazují použití teorie optimálního řízení, které je v této oblasti ekonomického výzkumu méně rozšířené, srv. [5]. Modely byly vybrány tak, aby ilustrovaly různé možnosti použití teorie optimálního řízení na konečném a nekonečném časovém horizontu, resp. možnosti řešení úloh s integrálním nebo terminálním fukcionálem.

1. Metodologie

Pro matematický popis ekonomického vývoje regionů budou použity modely formulované jako úlohy optimálního řízení. Tyto úlohy představují optimalizační problémy, jejichž cílem je nalézt maximum (nebo minimum) **účelového funkcionálu** pro proces, jehož **stav** je popsán obyčejnou diferenciální rovnicí, případně soustavou obyčejných diferenciálních rovnic. Dále je podstatné, že stav lze v každém čase ovlivnit proměnnou zvanou **řízení**. Hodnoty této proměnné lze volit libovolně z určité dané množiny tak, aby bylo dosaženo maximum účelového funkcionálu. Účelový funkcionál těchto úloh je zadán jako součet určitého integrálu a terminálního funkcionálu, tj. funkce, která ohodnocuje cílový stav. Pokud funkcionál obsahuje pouze integrální člen, mluvíme **Lagrangeově úloze**. Je-li účelový funkcionál tvořen pouze terminálním členem, mluvíme o **Mayerově úloze**. Obsahuje-li účelový funkcionál oba typy, jedná se o **Bolzovu úlohu**. V případě, že je třeba popsat velmi dlouhý proces, pak se v Lagrangeově úloze obvykle používá integrál s neomezenou horní mezí. V textu budeme používat Lagrangeovu úlohu a Mayerovu úlohu. Diferenciální rovnice představuje v dané úloze jistý typ vazby a obvykle je také zadána počáteční hodnota stavu.

Při řešení úlohy optimálního řízení se obvykle formulují nutné podmínky pro optimální proces, které jsou známé jako **Pontrjaginův princip maxima**, viz [9]. Při použití tohoto principu se nejdříve sestaví hamiltonián dané úlohy. Pomocí **hamiltoniánu** lze pak nalézt zmíněné nutné podmínky pro optimální proces: je formulován **princip maxima**, je sestavena **adjungovaná rovnice** pro pomocnou (adjungovanou) funkci a případně je formulována koncová podmínka pro tuto adjungovanou funkci, která se nazývá **podmínka transverzality**. Detailní popis úlohy optimálního řízení včetně Pontrjaginova principu maxima lze nalézt v zahraničních monografiích, např. v [4], [14] nebo [15].

2. Model optimální regionální alokace investic

Budeme se zabývat nějakým ekonomickým celkem, který je rozdělen na regiony. Konkrétně budeme uvažovat, že daný ekonomický celek tvoří pouze dva regiony. Tento předpoklad podstatně přispěje ke zjednodušení úvah a bude možné nalézt i analytické řešení formulovaného modelu včetně analýzy a interpretace tohoto řešení. Výrobu *i*-tého regionu označíme Y_i, kde *i*, $i \in \{1,2\}$ je index označující region 1 nebo region 2. Výroba každého regionu je rostoucí funkcí kapitálových vstupů, které označíme K_i, kde $i \in \{1,2\}$ takže růst kapitálu v každém regionu způsobí růst výroby tohoto regionu. Uvažujme dále, že příčinou růstu zásob kapitálu v daném regionu, je růst investic v tomto regionu. Předpokládejme, že investiční fondy, které vznikají z celkových úspor obyvatel daného ekonomického celku, jsou vloženy do centrální agentury a pak jsou alokovány do jednotlivých regionů. Nyní se nabízí otázka. Jak provést optimální alokaci investičního fondu do každého z obou regionů? Úvahy tohoto typu byly poprvé řešeny v práci [13], problémem se pak také zabýval článek [7]. Naše úvahy vycházejí hlavně z publikace [16], která navazuje na článek [17].

2.1 Matematická formulace problému

Produkční funkce i-tého regionu, $i \in \{1,2\}$ je dána výrazem

$$Y_i = b_i K_i \tag{1}$$

kde b_i, $b_i>0$, je reálná konstanta, která reprezentuje produktivitu kapitálu v *i*-tém regionu. Pro celkovou výrobu uvažované ekonomické jednotky pak můžeme psát vztah

$$Y = Y_1 + Y_2 = b_1 K_1 + b_2 K_2 \tag{2}$$

Je vhodné uvědomit si, že jak výroba Y_i *i*-tého regionu, tak kapitál K_i *i*-tého regionu, jsou funkce času t. Označíme-li *T*, *T*>0, plánovací horizont, pro který budeme model studovat, můžeme psát $t \in [0,T]$ a pro *i*-tý region také $Y_i=Y_i(t)$ nebo $K_i=K_i(t)$. V textu však budeme většinou používat zkrácený zápis bez proměnné označující čas *t*. Při konstrukci modelu se budeme odvolávat na obrázek 1, kde jsou uvedeny toky kapitálu.

Protože investiční fond, jehož objem v čase *t* označíme $Z=Z(t)$, pochází z úspor v obou regionech, můžeme psát

$$Z = s_1 Y_1 + s_2 Y_2 \tag{3}$$

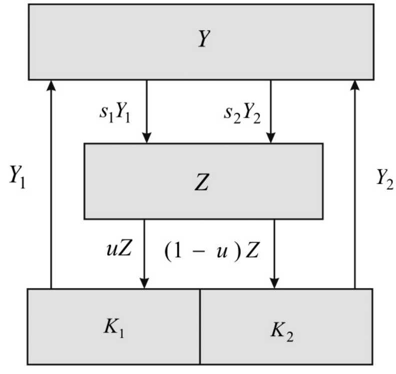
kde si, $s_i \in (0,1)$ pro $i \in \{1,2\}$ je sklon k úsporám v *i*-tém regionu. Pokud definujme $g_i = b_i s_i$ můžeme pomocí (1) předchozí vztah (3) pro objem investičních fondů přepsat ve tvaru

$$Z = g_1 K_1 + g_2 K_2 \tag{4}$$

Označme $u=u(t)$, $u \in [0, 1]$, relativní míru investičních fondů, které jsou alokovány do regionu 1, pak (1-*u*) představuje relativní míru investic, které jsou alokovány do regionu 2. Pokud v prvním přiblížení nebudeme uvažovat znehodnocení kapitálu, můžeme pro časový vývoj kapitálu pracovat s rovnicemi

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 &= uZ = u(g_1 K_1 + g_2 K_2) \\ \dot{K}_2 &= (1-u)Z = (1-u)(g_1 K_1 + g_2 K_2) \end{aligned} \tag{5}$$

Obr. 1: Schéma tvorby investičního fondu v ekonomické jednotce se dvěma regiony



Zdroj: vlastní

Počáteční hodnoty kapitálu v regionu 1 nebo v regionu 2, označíme

$$K_1(0) = K_1^0 \text{ , resp. } K_2(0) = K_2^0 . \tag{6}$$

Úlohou je pak nalézt takové rozložení investic z centrální agentury, aby byla získána maximální výroba *Y*(*T*) uvažované ekonomické jednotky v čase *T*, tj. bude třeba nalézt maximální výrobu na konci plánovacího období. Vzhledem k tomu, že $Y(T) = b_1K_1(T) + b_2K_2(T)$, lze formulovanou úlohu zapsat jako úlohu optimálního řízení následujícím způsobem: je třeba nalézt

$$\max_{u(t)}[b_1K_1(T) + b_2K_2(T)] \tag{7}$$

vzhledem k podmínkám daným diferenciálními rovnicemi (5), počátečními podmínkami (6) a danou řídící proměnnou *u*=*u*(t), u∈[0, 1]. Jedná se tedy o Mayerovu úlohu optimálního řízení.

2.2 Řešení problému

Úlohu budeme řešit pomocí Pontrjaginova principu maxima. Hamiltonián dané úlohy je

$$H(K_1, K_2, u, p_1, p_2) = p_1u(g_1K_1 + g_2K_2) + \tag{8}$$

$$+(1-u)p_2(g_1K_1 + g_2K_2)$$

$$= (u(p_1 - p_2) + p_2)(g_1K_1 + g_2K_2),$$

kde p_1=p_1(t), resp. p_2=p_2(t), jsou adjungované funkce, pro které platí adjungované rovnice. Tyto rovnice lze pro psát ve tvaru

$$\dot{p}_i = -\partial H / \partial K_i = -[up_1 + (1-u)p_2]g_i \tag{9}$$

s podmínkami transverzality

$$p_i(T) = \partial Y / \partial K_i (T) = b_i \tag{10}$$

Adjungované funkce mají roli pomocných proměnných a umožňují sestavit kritérium, podle kterého lze stanovit optimální řízení. Vzhledem k tomu, že b_i>0 pro $i \in \{1,2\}$ můžeme uvažovat o vývoji adjungovaných funkcí v 1. kvadrantu fázového diagramu s osami p_1 a p_2, viz obrázek 2. Není obtížné nahlédnout, že obě adjungované funkce jsou v tomto kvadrantu klesající funkcí času, neboť jejich derivace jsou záporné, srv. (9). Podle principu maxima je dále nutné vybrat takové optimální řízení aby v bodech spojitosti tohoto řízení platil vztah

$$H(K_1, K_2, u, p_1, p_2) \le H(K_1, K_2, \hat{u}, p_1, p_2). \tag{11}$$

Použijeme-li (8) je nutné, aby pro každé u ∈ [0, 1] platilo

$$(u(p_1 - p_2) + p_2)(g_1K_1 + g_2K_2) \le \tag{11}$$

$$\le (\hat{u}(p_1 - p_2) + p_2)(g_1K_1 + g_2K_2),$$

neboli

$$(u - \hat{u})(p_1 - p_2) \le 0. \tag{13}$$

Odtud pak získáme kritérium pro optimální alokaci investic ve tvaru

- $\hat{u}(t)=1$, jestliže $p_1(t)>p_2(t)$,
- $\hat{u}(t)=0$, jestliže $p_1(t)<p_2(t)$,
- $\hat{u}(t)$ není definováno, jestliže $p_1(t)=p_2(t)$.

Všimněme si, že z uvedeného tvaru (9) adjungovaných rovnic vyplývá, že

$$\dot{p}_1 / \dot{p}_2 = g_1 / g_2 . \qquad (14)$$

Upravíme-li tento vztah (14) a pak provedeme integraci v mezích od t do T, můžeme uplatnit podmínky transverzality. Nakonec lze úpravou získat vztah

$$p_2(t) = \frac{g_2}{g_1} p_1(t) + \frac{b_1 b_2}{g_1}(s_1 - s_2), \qquad (15)$$

který umožňuje zkonstruovat trajektorii řešení adjungovaných funkcí ve fázovém diagramu, a jak se ukáže, je klíčový pro další rozbor.

2.3 Fázový diagram

Chceme-li podrobněji popsat řešení, je vhodné zakreslit předchozí pozorování do fázového diagramu, tj. do diagramu, jehož osy souřadnic jsou označeny jmény adjungovaných proměnných p_1 a p_2. Již víme, že vývoj adjungovaných funkcí probíhá v 1. kvadrantu a obě funkce jsou v tomto kvadrantu klesající. To nám umožňuje zakreslit směrové pole, viz obrázek 2. Dále víme, že trajektorie řešení je podle (15) lineární funkce

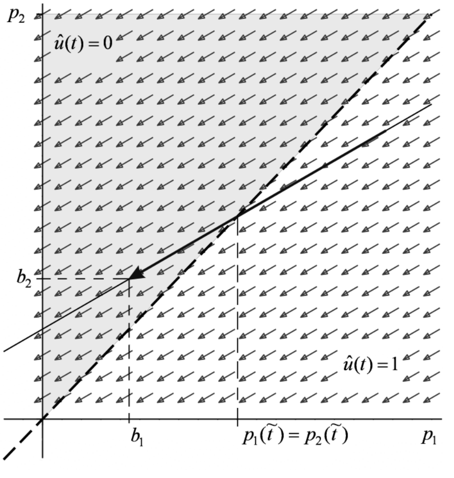
$$p_2(t) = k p_1(t) + q \qquad (16)$$

kde

$$k = \frac{g_2}{g_1} \text{ a } q = \frac{b_1 b_2}{g_1}(s_1 - s_2) \qquad (17)$$

takže jejím grafem je přímka se směrnicí k. V závislosti na hodnotách parametrů $g_1=s_1 b_1>0$ a $g_2=s_2 b_2>0$ má směrnice k hodnotu buď $k > 1$ nebo $0 < k \leq 1$, viz obrázek 2. Tvar řešení ovlivní i další parametry a podrobnější rozbor lze nalézt v následujícím odstavci. Podle kritéria pro optimální alokaci také víme, že v polorovině, v níž platí vztah $p_2>p_1$ má optimální řízení hodnotu $\hat{u}(t) = 0$ zatímco v druhé polorovině je $\hat{u}(t) = 1$.

Obr. 2: Ukázka fázového diagramu pro dvojici adjungovaných funkcí a trajektorií, pro kterou je $g_1 > g_2$, neboli $s_1 b_1 > s_2 b_2$



Zdroj: vlastní konstrukce pomocí počítačového algebraického systému Maple

2.4 Rozbor řešení

Protože $g_i = s_i b_i$ kde $i \in \{1,2\}$, lze z předchozího vztahu bezprostředně odvodit kritérium pro rozdíl adjungovaných funkcí

$$p_1(t) - p_2(t) = \frac{1}{s_2 b_2}[(s_1 b_1 - s_2 b_2) p_2(t) + b_1 b_2 (s_2 - s_1)]. \tag{18}$$

Tento vztah umožňuje popsat optimální strategie pro alokaci investic do prvního nebo druhého regionu.

(i) Je-li $s_1b_1>s_2b_2$ a $s_2>s_1$ nebo $s_1b_1>s_2b_2$ a $s_2=s_1$ nebo $s_1b_1=s_2b_2$ a $s_2>s_1$, je $p_1(t) - p_2(t) > 0$, takže $\hat{u}(t) = 1$ pro všechna $t \in [0,T]$. Za těchto podmínek tedy všechny investice směřují do prvního regionu a do druhého regionu nesměřují investice žádné. Podívejme se na tyto podmínky podrobněji. Ve všech třech případech je v prvním regionu vyšší výnos z kapitálu, takže region disponuje vyšší produktivitou, což znamená, že vložené investice jsou lépe využity. Všimněme si, že v prvním nebo ve třetím případě je v prvním regionu menší míra úspor než v regionu druhém, to znamená, že v regionu vzniká méně zdrojů pro investice, ale dochází k vyšší spotřebě. Díky vyšší produktivitě prvního regionu je však tento region vhodnější pro alokaci investic.

(ii) Je-li $s_1b_1<s_2b_2$ a $s_2<s_1$ nebo $s_1b_1<s_2b_2$ a $s_2=s_1$ nebo $s_1b_1=s_2b_2$ a $s_2<s_1$, je $p_1(t) - p_2(t) < 0$, takže $\hat{u}(t) = 0$ pro všechna $t \in [0,T]$. Za těchto podmínek jdou tedy všechny investice do druhého regionu a do prvního regionu nesměřují investice žádné. Situace je obdobná té předchozí s tím rozdílem, že regiony mají obrácenou pozici.

(iii) Je-li $s_1b_1>s_2b_2$ a přitom $s_2<s_1$, je rozbor trochu náročnější. V tomto případě může (18) nabývat jak kladné tak záporné hodnoty, takže je možné, že v jistém okamžiku dojde ke změně alokace investic mezi prvním a druhým regionem, viz obrázek 2. Je-li $b_1<b_2$, pak pro $t \in [0,\tilde{t}]$, je $\hat{u}(t) = 1$, nicméně pro $t \in [\tilde{t},T]$, je $\hat{u}(t) = 0$. Hodnota $\tilde{t}$,okamžiku změny režimu řízení je odvozena v sekci 2.6 a je charakterizována vztahem (21). Situaci, kdy dochází ke změně řízení, lze sledovat na obrázku 2, kde se trajektorie kříží s osou 1. kvadrantu fázového diagramu. V tomto případě je míra úspor v prvním regionu vyšší, ale region je méně produktivní, jeho výnos z kapitálu je nižší. Vzniká zde relativně více zdrojů pro investice, ale jejich investování je méně efektivní než v regionu druhém. Optimální alokace investic má následující scénář. V časovém intervalu $[0,\tilde{t}]$ směřují všechny investice do tohoto prvního regionu, pak dojde k výměně a v časovém intervalu $[\tilde{t},T]$ směřují všechny investice do druhého regionu. V případě, že $b_1 \geq b_2$ a první region není v produktivitě horší než region druhý je opět $\hat{u}(t) = 1$ pro každé $t \in [0,T]$, takže všechny investice směřují stále do tohoto efektivnějšího regionu.

(iv) Je-li $s_1b_1<s_2b_2$ a přitom $s_2>s_1$, je situace stejná, jako situace předchozí, s tím rozdílem, že se pozice regionů vymění.

(v) Je-li nakonec $s_1b_1=s_2b_2$ a přitom $s_2=s_1$, mají oba regiony stejné parametry, nabízejí stejné podmínky a model je indiferentní k libovolnému scénáři optimální alokace investic. Regiony prostě splynou do jedné oblasti, která je z pohledu plánování investic nerozlišitelná.

2.5 Poznámky

V rámci uvedeného matematického modelu bylo odvozeno, že investice by měly být optimálně rozdělovány tak, aby směřovaly do regionu s vyšším výnosem z kapitálu. Podle uvedeného modelu by takové rozdělení mělo přinést nejvyšší ekonomický efekt. Druhý region by tak ale zůstal bez investic a lze předpokládat, že by docházelo k jeho zaostávání (nejen ekonomickému). V tomto smyslu se pak lze domnívat, že snaha o optimální alokaci investic může vést k ekonomické disparitě regionů. O tomto existujícím jevu pojednávají např. publikace [8], [1], které hodnotí nejen ekonomickou výkonnost regionů ve vybraných oblastech České republiky. Model lze jistě modifikovat ať již na straně popisu jeho dynamiky nebo na straně volby účelového funkcionálu. V prvním případě by bylo možné předpokládat neoklasickou produkční funkci s více výrobními faktory, případně znehodnocení kapitálu. V druhém případě by bylo možné definovat jiný účelový funkcionál, viz např. [16], kde je jako alternativní účelový funkcionál uveden vztah pro kumulativní spotřebu na jednoho obyvatele uvažovaného ekonomického celku. Vzhledem k jednoduchosti modelu ho tak lze považovat za jistý prototyp a dobré východisko pro obecnější a podrobnější modely. Je však nutné počítat s tím, že takové modely budou obsahovat i nelineární členy a analýza optimálního řešení se bude muset více opírat o techniky numerické a výpočetní matematiky než o techniky analytické.

2.6 Odvození vztahu pro čas změny režimu řízení

V částech (iii) a (iv) sekce 2.4 byly popsány scénáře optimálního řízení, kdy v jistém okamžiku $\tilde{t}, \tilde{t} \in (0,T),$ došlo ke změně řízení. Hledejme tento časový okamžik, který je charakterizován podmínkou

$$p_1(\tilde{t}) = p_2(\tilde{t}).$$

V tomto případě lze (16) psát jako $p_2(\tilde{t}) = kp_2(\tilde{t}) + q,$ kde k a q jsou dány vztahy (17). Odtud pak máme

$$p_2(\tilde{t}) = \frac{1}{1-k} = \frac{b_1 b_2 (s_1 - s_2)}{s_1 b_1 - s_2 b_2}. \tag{19}$$

V případě, že pro $t \in [\tilde{t}, T]$ je $\hat{u}(t) = 0,$ viz případ (iii), lze adjungovanou rovnici (9) a podmínku transverzality (10) psát jako

$$\dot{p}_2(t) = -g_2 p(t),\ p_2(T) = b_2,$$

kde $g_2 = s_2 b_2$. Řešením této homogenní lineární diferenciální rovnice s koncovou podmínkou získáme

$$p_2(t) = b_2 e^{s_2 b_2 (T-t)}. \tag{20}$$

Použijeme-li nyní (19) a (20), můžeme pro okamžik změny řízení $\tilde{t}$ psát rovnici

$$b_2 e^{s_2 b_2 (T-\tilde{t})} = \frac{b_1 b_2 (s_1 - s_2)}{s_1 b_1 - s_2 b_2},$$

odkud

$$\tilde{t} = T - \frac{1}{s_2 b_2} \ln\left(b_1 \frac{s_1 - s_2}{s_1 b_1 - s_2 b_2} \right). \tag{21}$$

3. Model regionálního přerozdělování

Následující model, který vychází především z [6] a [9], se bude zabývat kvalitativně jinou analýzou než model předchozí. Budeme již předpokládat, že v dané ekonomické jednotce existují regiony s různými ekonomickými výkonnostmi a budeme chtít prokázat, že určitými vládními zásahy lze tyto rozdíly mezi regiony snižovat. Daný model tedy nenavazuje na model optimální alokace investic uvedený v předchozí části a bude nově formulován. Uvažujme opět určitou ekonomickou jednotku s jednou centrální vládou, která se skládá ze dvou regionů. Jeden z regionů bude rozvinutější a jeho obyvatelé budou mít vyšší příjmy, zatímco druhý region bude méně rozvinutý a jeho obyvatelé budou mít nižší příjmy. Veličiny popisující bohatší region budeme značit indexem r (rich), veličiny vztahující se k chudšímu regionu budeme značit indexem p (poor). Model vychází z předpokladů volného kapitálu a nemobilní práce, tj. nedochází k dramatickému stěhování pracovníků za prací do bohatšího regionu. V modelu nebudeme uvažovat chování domácností, zaměříme se pouze na sektor firem a sektor vlády, neboť pro závěry, které zde chceme prezentovat, tyto úvahy postačují.

3.1 Firmy

Uvažujme, že v každém regionu $i, i \in \{r, p\},$ existuje velké množství konkurenčních firem, které pro svoji produkci Y_i využívají soukromý kapitál K_i a práci L_i. Úhrnný produkt je pak využit pro spotřebu a soukromé i veřejné investice. Budeme předpokládat, že firmy mají stejnou produkční Cobb-Douglasovu funkci

$$Y_i = A_i K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha}, \tag{22}$$

kde A_i reprezentuje technologickou úroveň firem v regionu i a α resp. $1 - \alpha$ představuje koeficient pružnosti produkce vzhledem ke kapitálu, resp. k práci. V souvislosti s prováděnými úvahami se lze domnívat, že technologická úroveň produkce závisí na infrastruktuře regionu. Tato závislost, která výrazně ovlivňuje podobu modelu, bude specifikována později. Pro časový vývoj soukromého kapitálu budeme uvažovat vztah

$$\dot{K}_i(t) = I_i(t) - \delta K_i(t), \tag{23}$$

kde I_i reprezentuje hrubé investice do soukromého kapitálu v regionu i a δ, $\delta \in (0,1)$ reprezentuje míru znehodnocení kapitálu. Jestliže nebudeme uvažovat náklady na instalaci investic a normalizujeme-li cenu za jednotku kapitálu, lze současnou hodnotu toku čistého zisku firmy v každém regionu $i, i \in \{r, p\},$ vyjádřit funkcionálem

$$(t)K_i(t)^{\alpha} L_i(t)^{1-\alpha} - w_i(t)L_i(t)\} - I_i(t)] \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\int_0^t r_i(v)dv \right) dt, \tag{24}$$

kde $\tau, \tau \in (0,1)$, je míra zdanění určená centrální vládou, $w_i(t)$ představuje mzdové náklady v čase t na jednu pracovní jednotku v regionu i a $r_i(t)$ představuje úrokovou míru v čase t v regionu i. Cílem firem je maximalizovat (24) vzhledem k omezení (23). To je Lagrangeova úloha optimálního řízení, ve které jsou řídícími proměnnými práce L_i a investice I_i. Kapitál K_i je stavová proměnná. Jestliže aplikujeme Pontrjaginův princip maxima, získáme následující nutné podmínky pro optimální řešení.

$$(1-\alpha)A_i(t)\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}\right)^{\alpha} = w_i(t), \tag{25}$$

a

$$(1-\tau)\alpha A_i(t)\left(\frac{K_i(t)}{L_i(t)}\right)^{\alpha-1} = r_i(t)+\delta, \tag{26}$$

kde $t \in [0,\infty)$. Z podmínky (25) je zřejmé, že jednotková cena práce je přímo úměrná mezní produkci práce a z podmínky (26) vyplývá, že součet okamžité úrokové míry a znehodnocení kapitálu je přímo úměrný mezní produkci kapitálu. Protože mezi oběma regiony dochází k volnému pohybu kapitálu v rámci ekonomické jednotky s jednou centrální vládou, je úroková míra v obou regionech stejná, tj. $r_p(t) = r_r(t)$. Z (26) pak vyplývá, že pro každé $t \in [0,\infty)$ platí

$$A_r(t)\left(\frac{K_r(t)}{L_r(t)}\right)^{\alpha-1} = A_p(t)\left(\frac{K_p(t)}{L_p(t)}\right)^{\alpha-1} \tag{27}$$

3.2 Vládní sektor

Vláda se snaží přerozdělovat své příjmy ve výši $\tau(Y_r(t)+Y_p(t))$ tak, aby zvýšila konkurenceschopnost chudšího regionu. Na základě tohoto rozhodnutí bude v tomto regionu docházet k větším investicím do infrastruktury než v bohatším regionu. Veřejné investice do nevýrobní oblasti v tomto modelu nebudeme uvažovat. Označme G_i kapitál ve formě infrastruktury regionu $u, u \in [0,1]$ a označme míru vládního přerozdělování, tj. vláda do chudšího regionu přesune navíc produkci z bohatšího regionu ve výši $u \cdot \tau \cdot Y_r(t)$. Budeme-li na infrastrukturu nahlížet jako na nemobilní kapitál, můžeme pro jeho časový vývoj napsat podobné rovnice jako pro časový vývoj soukromého kapitálu, viz (23), tj.

$$\dot{G}_r(t) = \tau(1-u)Y_r(t) - \delta G_r(t) \tag{28}$$

resp.

$$\dot{G}_p(t) = \tau(Y_p(t) + uY_r(t)) - \delta G_p(t), \tag{29}$$

kde, jak bylo uvedeno dříve, δ, $\delta \in$ (0,1) reprezentuje znehodnocení kapitálu.

Posledním předpokladem modelu bude popis způsobu, jakým dochází k technologickému pokroku v produkční funkci (22). V [2] je uveden argument, podle kterého lze účinek veřejných výdajů na produktivitu modelovat v produkční funkci tak, že tato funkce vykazuje konstantní výnosy z rozsahu soukromého i veřejného kapitálu. Tyto úvahy jsou dále modifikovány v monografii [3], kde se uvažuje, že veřejné výdaje přispívají k produkci ve stejném rozsahu jako práce. V tomto modelu předpokládáme, že veřejné výdaje přispívají k budování infrastruktury, kterou pak považujeme za veřejný kapitál, který přispívá k produkci regionu. Budeme tedy předpokládat, že infrastruktura obohacuje práci a přispívá k produkci ve stejném rozsahu, tj. uvažujme model endogenního technologického pokroku obohacujícího práci ve tvaru

$$A_i(t) = AG_i(t)^{1-\alpha}, \tag{30}$$

kde A, $A > 0$ je konstanta reprezentující obecnou úroveň technologie společnou v obou regionech. Tento předpoklad znamená, že zvýšení úrovně veřejných výdajů na infrastrukturu v daném regionu vede ke zlepšení technologické úrovně daného regionu. Toto je podstatný předpoklad modelu a bylo by možné uvažovat komplexnější vztah pro technologickou úroveň, nicméně matematická analýza takového modelu by si pak vyžádala mnohem více prostoru. Produkční funkce (22) má za daného předpokladu tvar

$$Y_i = AK_i^{\alpha}(G_i L_i)^{1-\alpha} \tag{31}$$

a vztah (27) lze pomocí této produkční funkce přepsat do tvaru

$$\frac{K_r(t)}{G_r(t)\cdot L_r(t)} = \frac{K_p(t)}{G_p(t)\cdot L_p(t)}, \tag{32}$$

který bude použit v následujícím rozboru a který platí pro každé $t \in [0,\infty)$.

3.3 Relativní míra zaostalosti chudšího regionu

Podle uvedených předpokladů závisí produktivita regionu na regionální infrastruktuře. Ta je však imobilní a v čase se rozvíjí a přizpůsobuje pomalu. Abychom mohli sledovat, jak se hodnoty produktivity v určitém regionu mění v čase, zavedeme relativní míru produktivity chudšího regionu vzhledem k bohatšímu regionu jako poměr

$$\Omega(t) = \frac{y_p(t)}{y_r(t)} = \frac{Y_p(t)/L_p(t)}{Y_r(t)/L_r(t)}. \qquad (33)$$

Výpočet následujícího vztahu je technicky náročnější, proto je uveden samostatně v odstavci 4.5. Pro tempo růstu relativní míry produktivity chudšího regionu vzhledem k bohatšímu regionu můžeme nalézt

$$\gamma_\Omega = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \tau A\left(\frac{K_p}{G_p L_p}\right)^\alpha \left[L_p - L_r + uL_r\left(\frac{G_r}{G_p} + 1\right)\right], \qquad (34)$$

kde jsme pro zjednodušení zápisu vynechali označení pro čas *t*. Pro tento vztah lze nalézt některé ekonomické interpretace. Připomeňme krátce, že vztah (34) byl odvozen pro ekonomickou jednotku se dvěma regiony, ve kterých existuje jednotná úroková míra a platí předpoklad stejné obecné úrovně technologie, tj. firmy v obou regionech si mohou půjčovat finanční prostředky za stejných podmínek a mají přístup ke stejným technologiím. Dále se v modelu předpokládalo, že se obyvatelstvo chudšího regionu masivně nestěhuje za lepšími podmínkami do bohatého regionu. Následující úvahy se týkají pouze vzájemného vztahu produktivity v chudším a bohatším regionu, netýkají se celkového růstu produktu v dané ekonomické jednotce.

- Je-li $u = 0$ tj. nedochází-li k přerozdělování produktu regionů, pak může produktivita v chudším regionu podle (34) růst, tj. $\gamma_\Omega > 0$, jestliže $L_p > L_r$, tj. tehdy, využívá-li chudší region více práce než bohatší region. Jestliže naopak $L_p < L_r$, tj. bohatší region využívá více práce než chudší region, pak při nulovém přerozdělování dochází k dalšímu zaostávání produktivity chudšího regionu vzhledem k bohatšímu regionu, tj. $\gamma_\Omega < 0$. Pokud je však v regionech srovnatelné využití práce, tj. platí $L_p - L_r \approx 0$ nemůže samotný pohyb soukromého kapitálu vést k vyrovnání produktivity v obou regionech a regionální rozdíly zůstávají stejné.
- Ze vztahu (34) vyplývá, že $\gamma_\Omega > 0$, právě tehdy, když platí

$$u > \frac{L_r - L_p}{L_r} \cdot \frac{G_p}{G_r + G_p}. \qquad (35)$$

Především si uvědomme, že výraz na pravé straně předchozí nerovnosti (35) je číslo menší než jedna. Protože $u \in [0,1]$, vyplývá z tohoto pozorování, že vždy existuje hodnota u přerozdělování veřejných příjmů mezi regiony, při které je možné začít vyrovnávat produktivitu chudšího regionu a přibližovat ji k produktivitě regionu bohatšího.

Nyní nastává otázka, jak nastavit hodnotu tohoto přerozdělování tak, aby se úroveň produktivity obou regionů v čase vyrovnala. Podobně jako v článku [6] lze navrhnout postupné snižování úrovně přerozdělování podle vztahu

$$u = 1 - f(\Omega), \qquad (41)$$

kde *f* je kladná rostoucí funkce definovaná na [0,1] a $f(\Omega(0)) \in [0,1], f(1) = 1,$ které povede k postupnému vyrovnávání produktivity obou regionů.

- Vztah (33) vyjadřující tempo růstu γ_Ω relativní míry produktivity v chudším regionu vzhledem k bohatšímu regionu obsahuje také multiplikátor

$$\tau A\left(\frac{K_p}{G_p L_p}\right)^\alpha = \tau\left[A_p, \left(\frac{K_p}{L_p}\right)^\alpha\right] \cdot \frac{1}{G_p}, \qquad (42)$$

ze kterého vyplývá, že toto tempo růstu je přímo úměrné meznímu produktu práce v chudším regionu [srv. vztahy (25) a (30)], že je přímo úměrné míře zdanění produktu v dané ekonomické jednotce a že je nepřímo úměrné hodnotě infrastruktury v chudším regionu. Odtud pak vyplývá, že se chudšímu regionu bude dařit dohánět produktivitu bohatšího regionu tím rychleji, čím vyšší má mezní produkt práce, čím nižší je okamžitá hodnota infrastruktury v tomto regionu a čím vyšší je míra zdanění v dané ekonomické jednotce, takže centrální vláda disponuje vyššími prostředky pro investice do infrastruktury.

3.4 Poznámky

Uvedený analytický model reprezentuje základní představy o přerozdělování veřejných příjmů určité ekonomické jednotky a jejich alokaci do infrastruktury regionů dané ekonomiky. V zájmu zjednodušení se jednalo o ekonomickou jednotku, která se skládala ze dvou regionů – bohatšího regionu s vyšší produktivitou a chudšího regionu s nižší produktivitou. V rámci modelu bylo ukázáno, že produktivita chudšího modelu může konvergovat k produktivitě bohatšího regionu ve dvou případech – jestliže chudší region využívá práci více než region bohatší nebo jestliže centrální vláda provádí dostatečné přerozdělování svých veřejných příjmů a provádí více investic do infrastruktury regionu chudšího. Vzhledem k jednoduchosti modelu nelze očekávat odpovědi na to, jaké konkrétní projekty zlepšení infrastruktury regionu povedou ke zlepšení konkurenceschopnosti daného regionu. To by si vyžádalo určité případové studie o tom, jak který projekt oživuje konkrétní ekonomiku regionu. Nicméně model potvrzuje, že investice do infrastruktury méně produktivního regionu, vedou k vyšší produktivitě tohoto regionu.

3.5 Odvození vztahu pro tempo růstu relativní míry produktivity chudšího regionu vzhledem k bohatšímu regionu

V sekci 3.3 jsme zavedli tempo růstu relativní míry produktivity chudšího regionu vzhledem k bohatšímu regionu, pro které jsme uvedli vztah (34). V této sekci ukážeme, jak tento vztah nalézt. Abychom výpočet zjednodušili, zavedeme následující označení

$$\kappa(t)=\frac{K_p(t)}{K_r(t)},\lambda(t)=\frac{L_p(t)}{L_r(t)},\gamma(t)=\frac{G_p(t)}{G_r(t)}, \quad (43)$$

kde $t\in[0,\infty)$. Pomocí tohoto označení lze vztah (32) přepsat ve tvaru

$$\kappa(t)=\lambda(t)\gamma(t). \quad (44)$$

Použijeme-li dále (31), můžeme pro relativní míru produktivity chudšího regionu vzhledem k bohatšímu regionu definovanou vztahem (33) psát

$$\Omega(t)=\kappa(t)^{\alpha}\lambda(t)^{-\alpha}\gamma(t)^{1-\alpha} \quad (45)$$

V dalších výpočtech budeme opět proměnnou *t* označující čas vynechávat. Z (45) pak plyne, že pro tempo růstu relativní míry produktivity chudšího regionu vzhledem k bohatšímu regionu platí

$$\gamma_{\Omega}=\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}=\alpha\frac{\dot{\kappa}}{\kappa}-\alpha\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}+(1-\alpha)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}. \quad (46)$$

Podobně ze vztahu (44) plyne, že

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa}=\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}. \quad (47)$$

Dosadíme-li tento výsledek do (46) a využijeme-li význam označení pro γ uvedený v (43), získáme postupně

$$\gamma_{\Omega}=\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}=\frac{\dot{G}_p}{G_p}-\frac{\dot{G}_r}{G_r}. \quad (48)$$

Využijeme-li dále vztahy uvedené v diferenciálních rovnicích (28) a (29) pro časový vývoj infrastruktury, obdržíme pomocí (48) vztah

$$\gamma_{\Omega}=\tau\left(\frac{Y_p+uY_r}{G_p}\right)-\tau(1-u)\frac{Y_r}{G_r}. \quad (49)$$

Pomocí (31) odtud získáme

$$\gamma_{\Omega}=\tau A\left(\left(\frac{K_p}{G_pL_p}\right)^{\alpha}L_p+u\left(\frac{K_r}{G_rL_r}\right)^{\alpha}\frac{G_rL_r}{G_p}-(1-u)\left(\frac{K_r}{G_rL_r}\right)^{\alpha}L_r\right). \quad (50)$$

Použijeme-li nakonec (32), získáme po následné úpravě hledaný vztah (34).

Závěr

Při řízení ekonomických jednotek rozdělených do regionů čelí centrální vlády různým výzvám. Na jedné straně sledují ekonomické cíle, když se snaží co nejlépe využít svých příjmů a investovat je do těch oblastí, které jsou nejvíce produktivní, protože takové investice jsou efektivní. Tímto způsobem však může docházet ke vzniku disparit mezi různými regiony a ke ztrátě konkurenceschopnosti regionů s menší produktivitou. Na druhé straně vlády sledují i politické cíle, kdy se snaží eliminovat rozdíly v ekonomické výkonnosti regionů, aby zabránily nerovnoměrnému vývoji regionů, který by vedl k nespokojenosti části obyvatel v méně rozvinutých regionech. To by mohlo vést ke snížení soudržnosti regionů. Aby se dané jevy eliminovaly, mohou centrální vlády zvyšovat konkurenceschopnost méně rozvinutých regionů tak, že investují část svých příjmů z rozvinutějších regionů do infrastruktury méně rozvinutých regionů. V článku byly prezentovány dva analytické modely, které se snažily popsat takové chování centrálních vlád a ukázat na účinnost jednotlivých rozhodnutí. Tyto modely mohou sloužit jako východisko k modelům podobného typu, případně mohou být obohaceny o další a podrobnější předpoklady. Při formulaci modelů a jejich řešení byly použity metody teorie optimálního řízení. V oblasti regionálního rozvoje je použití těchto metod méně obvyklé než v teorii ekonomického růstu, viz [3]. Popsané problémy tak mohou sloužit jako příklady využití méně standardních metod v oblasti regionální ekonomiky a doplnit tak aplikace uvedené v [5].

Článek vznikl za podpory Grantové agentury ČR při řešení projektu č. 402/09/0405 „Rozvoj nestandardních optimalizačních metod a jejich aplikace v ekonomii a managementu.“

Literatura

[1] BACHMANN P. Disparity obcí v oblasti poskytování informací. *E+M Ekonomie a management.* 2010, roč. 13, č. 2, s. 125–136. ISSN 1212-3609.

[2] BARRO, R. J. *Government spending in a simple model of endogeneous growth. Journal of Political Economy.* 1990, Vol. 98, Iss. 5, s. 103–125. ISSN 0022-3808.

[3] BARRO, R. J., SALLA-I-MARTIN, X. *Economic Growth.* 2nd ed. London: MIT Press, 2004. ISBN 0-262-02553-1.

[4] BRUNOVSKÝ P. *Matematická teória optimálného riadenia.* Bratislava: Alfa, 1980. ISBN 978-80-8057-793-3.

[5] ČADIL J. *Regionální ekonomie, teorie a aplikace.* Praha: Nakladatelství C. H. Beck, 2010. ISBN 978-80-7400-191-8.

[6] FUNKE, M., STRULIK, H. Growth and convergence in a two-region model: The hypothetical case of Korean unification. *Journal of Asian Economics.* 2005, Vol. 16, Iss. 2, s. 255–279. ISSN 1049-0078.

[7] INTRILIGATOR M. D. Regional Allocation of Investment: Comment, The Quarterly *Journal of Economics.* 1964, Vol. 78, Iss. 4, s. 659–662. ISSN 0033-5533.

[8] KALA T., KOMÁRKOVÁ J., SEDLÁK P. *Management pro řešení disparit. Disparity v hospodaření obcí v Královéhradeckém a v Pardubickém kraji.* Hradec Králové: Gaudeamus, 2008. ISBN 978-80-7041-395-1.

[9] ONO, Y., SHIBATA, A. Spill-over effects of supply-side changes in two-country economy with capital accumulation. *Journal of International Economics.* 1992, Vol. 33, Iss. 1/2, s. 127–146. ISSN 0222-1996.

[10] PONTRJAGIN, L. S., BOLTJANSKIJ, V. G., GAMKRELIZE, R. V., MIŠČENKO E. F. *Matematičeskaja teorija optimalnych procesov.* Moskva: Fizmatgiz, 1961. Český překlad Praha: SNTL, 1964.

[11] PRAŽÁK, P. Jednoduchý model optimální regionální alokace investic. In *Sborník příspěvků konference Hradecké ekonomické dny 2010, 2. díl.* Hradec Králové: Gaudeamus, 2010. s. 64–68. ISBN 978-80-7435-041-2.

[12] PRAŽÁK, P. *Matematický model regionálního přerozdělování. In Mezinárodní vědecká konference Hradecké ekonomické dny 2011: Ekonomický rozvoj a management regionů, 1. díl.* Hradec Králové: Gaudeamus, 2011. s. 270–275. ISBN 978-80-7435-100-6.

[13] RAHMAN, M. Regional allocation of investment: An Aggregative Study in the Theory of Development Programming. The Quarterly *Journal of Economics.* 1963, Vol. 77, Iss. 1, s. 26–39. ISSN 0033-5533.

[14] SEIERSTAD, A., SYDSÆTER, K. *Optimal control theory with economic applications.* Amsterdam: North-Holland, 1986. ISBN 0-444-87923-4.

[15] SETHI, S. P., THOMPSON, G. L. *Optimal Control Theory, Applications to Management Science and Economics.* Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 0-7923-8608-6.

[16] TAKAYAMA, A. *Mathematical economics. 2nd ed.* Cambridge: Cambridge University Press, 1985. ISBN 0-521-31498-4.

[17] TAKAYAMA, A. Regional allocation of investment: A Further Analysis, The Quarterly *Journal of Economics.* 1967, Vol. 81, Iss. 2, s. 330–337. ISSN 0033-5533.

RNDr. Pavel Pražák, Ph.D.
Univerzita Hradec Králové
Fakulta informatiky a managementu
Katedra informatiky a kvantitativních metod
pavel.prazak@uhk.cz

Doručeno redakci: 14. 2. 2011
Recenzováno: 7. 4. 2011, 2. 5. 2011
Schváleno k publikování: 5. 4. 2012

Abstract

MODELS OF EMERGENCE AND ELIMINATION OF REGIONAL ECONOMIC DISPARITIES AS OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Pavel Pražák

The paper deals with two issues related to the existence of regions and their economic development. While the first problem concerns the issue of the possible emergence of regional disparities, the second one solves the contrary, the possibility of reducing the existing regional disparities. Regional disparities are understood quite narrowly in this paper, covering just the area of the difference between the economic productivity of the regions.

It is known that the objective of regional policy is the regional development aimed at increasing the cohesion of regions and their competitiveness. As will be shown in the first model it is more efficient to allocate investment and concentrate economic activity in those regions that have higher productivity. In this way, regions with lower productivity may get behind those regions that have higher productivity. These regions will then become less competitive and in order to maintain cohesion of regions it would be useful to make some redistribution of income between more productive and less productive regions. To the possible differences in productivity between regions the government directs investment in infrastructure to less developed regions. The aim of such efforts is to improve the equipment of the population of the given region, to improve the technological level of the region and to strengthen the competitiveness of that region. This is the reason why the second mathematical model, described in this paper, deals with income redistribution and regional investments in their infrastructure. Both models are formulated as optimal control problems in continuous time and Pontryagin maximum principle is used to locate optimal solutions finally.

Key Words: regional development, regional disparities, investment, infrastructure, optimal control problems, Pontryagin maximum principle.

JEL Classification: R11, C61.