

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
**FAKULTA STROJNÍ**

Studijní program: N2301 Strojní inženýrství  
Studijní obor: 2301T001 Dopravní a manipulační technika

# **DIPLOMOVÁ PRÁCE**

Modelování a simulace motocyklů a jejich komponent

Autor: **Bc. Pavel FLORIAN**  
Vedoucí práce: **Ing. Roman ČERMÁK, PhD.**

Akademický rok 2014/2015

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Pavel FLORIAN**  
Osobní číslo: **S13N0016P**  
Studijní program: **N2301 Strojní inženýrství**  
Studijní obor: **Dopravní a manipulační technika**  
Název tématu: **Modelování a simulace motocyklů a jejich komponent**  
Zadávající katedra: **Katedra konstruování strojů**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

#### Základní požadavky:

Proveďte rešerši v oblasti modelovacích technik a nástrojů pro simulaci motocyklů. Sestavte simulační model terénního motocyklu a řešte model ve vybraném SW. Parametry modelu nastavte podle informací z literárních zdrojů nebo na základě měření (podle možností). Porovnejte vybrané konstrukční varianty rámu. Proveďte analýzu namáhání rámu a navrhnete opatření vedoucí k snížení hmotnosti rámu, eliminaci problematických míst v konstrukci. Podle potřeby proveďte tvarovou optimalizaci.

#### Základní technické údaje:

Technické parametry jsou uvedeny v příloze zadání.

#### Osnova diplomové práce:

1. Rešerše v zadané oblasti
2. Sestavení simulačního modelu ve vybraném SW
3. Provedení simulačních experimentů a vyhodnocení výsledků
4. Analýza namáhání rámu, optimalizace

Rozsah grafických prací: dle potřeby  
Rozsah pracovní zprávy: 50-70 stran A4  
Forma zpracování diplomové práce: tištěná/elektronická  
Seznam odborné literatury:

**DIXON, J. C.** *The Shock Absorber Handbook, Second Edition.* Chichester: John Wiley & Sons, 2007

**COSSALTER, V.** *Motorcycle Dynamics.* London: Lulu Press, 2006

**VLK, F.** *Teorie a konstrukce motocyklů 1.* Brno: František Vlk, 2004

**VLK, F.** *Teorie a konstrukce motocyklů 2.* Brno: František Vlk, 2004

*Podkladový materiál, výkresy, katalogy, apod. poskytnuté zadavatelem úkolu.*

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Roman Čermák, Ph.D.**

Katedra konstruování strojů

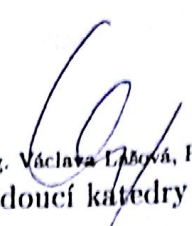
Konzultant diplomové práce: **Vladimír Vácha**  
VMMOTOR s.r.o.

Datum zadání diplomové práce: **22. září 2014**

Termín odevzdání diplomové práce: **22. května 2015**

  
Doc. Ing. Milan Edl, Ph.D.  
děkan



  
Doc. Ing. Václava Lábová, Ph.D.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 22. září 2014

## **Prohlášení o autorství**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou/diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě strojní Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne: .....

.....  
podpis autora

## ANOTAČNÍ LIST DIPLOMOVÉ PRÁCE

<b>AUTOR</b>	Příjmení Florian	Jméno Pavel		
<b>STUDIJNÍ OBOR</b>	2301T001 „Dopravní a manipulační technika“			
<b>VEDOUcí PRÁCE</b>	Příjmení (včetně titulů) Ing. Čermák, PhD.	Jméno Roman		
<b>PRACOVISŤE</b>	ZČU - FST - KKS			
<b>DRUH PRÁCE</b>	<b>DIPLOMOVÁ</b>	<b><del>BAKALÁŘSKÁ</del></b>	<b>Nehodící se škrtněte</b>	
<b>NÁZEV PRÁCE</b>	Modelování a simulace motocyklů a jejich komponent			

<b>FAKULTA</b>	strojní	<b>KATEDRA</b>	KKS	<b>ROK ODEVZD.</b>	2015
----------------	---------	----------------	-----	------------------------	------

### POČET STRAN (A4 a ekvivalentů A4)

<b>CELKEM</b>	63	<b>TEXTOVÁ ČÁST</b>	63	<b>GRAFICKÁ ČÁST</b>	0
---------------	----	---------------------	----	--------------------------	---

<p style="text-align: center;"><b>STRUČNÝ POPIS (MAX 10 ŘÁDEK)</b></p> <p><b>ZAMĚŘENÍ, TÉMA, CÍL POZNATKY A PŘÍNOSY</b></p>	<p>Tato práce se zabývá problematikou matematického modelování motocyklů. Byl vyvinut vlastní matematický model motocyklu, který byl následně verifikován díky komerčnímu systému ADAMS. Výsledky dynamických simulací jsou vstupem pro pevnostní ověření rámu a následnou topologickou optimalizaci, ze které plynou konstrukční úpravy rámu.</p>
<p style="text-align: center;"><b>KLÍČOVÁ SLOVA</b></p>	<p style="text-align: center;">MBS, MATLAB, motocykl, dynamika, MKP, ADAMS</p>

## SUMMARY OF DIPLOMA SHEET

<b>AUTHOR</b>	Surname Florian	Name Pavel
<b>FIELD OF STUDY</b>	2301T001“Transport and handling machinery“	
<b>SUPERVISOR</b>	Surname (Inclusive of Degrees) Ing. Čermák, PhD.	Name Roman
<b>INSTITUTION</b>	ZČU - FST - KKS	
<b>TYPE OF WORK</b>	<b>DIPLOMA</b>	<b>BACHELOR</b> Delete when not applicable
<b>TITLE OF THE WORK</b>	Modelling and simulation of motorcycles and their components	

<b>FACULTY</b>	Mechanical Engineering	<b>DEPARTMENT</b>	Machine Design	<b>SUBMITTED IN</b>	2015
----------------	------------------------	-------------------	----------------	---------------------	------

### NUMBER OF PAGES (A4 and eq. A4)

<b>TOTALLY</b>	63	<b>TEXT PART</b>	63	<b>GRAPHICAL PART</b>	0
----------------	----	------------------	----	-----------------------	---

<b>BRIEF DESCRIPTION</b>  <b>TOPIC, GOAL, RESULTS AND CONTRIBUTIONS</b>	This thesis deals with a mathematical modelling of motorcycles. A multibody mathematical model was developed and then verified thanks to ADAMS. Results of dynamic simulations are used as inputs for boundary conditions of frame FEM simulation and following topology optimization which results in modifications of the frame design.
<b>KEY WORDS</b>	MBS, MATLAB, motorcycle, dynamics, FEM, ADAMS

## **Poděkování**

Touto cestou bych rád poděkoval Ing. Romanu Čermákovi, PhD. za osobní přístup a mnoho cenných rad, bez kterých by tato práce nevznikla. Dále bych chtěl poděkovat Vladimíru Váchovi ze společnosti VM MOTOR s.r.o. za poskytnuté informace.

## Obsah

Úvod	10
Představení společnosti VM- Motor	11
1 Kinematika motocyklů	12
1.1 Klopení a řízení	13
1.2 Klonění	14
1.3 Kombinace klopení a řízení	15
1.4 Kinematický úhel řízení	16
1.5 Křivost trajektorie	17
2 Pneumatiky motocyklů	19
2.1 „Magic formula“	20
2.2 Přenos podélných sil	21
3 Stabilita motocyklů	23
3.1 Stabilita při nulové dopředné rychlosti	23
3.2 Stabilita při malé dopředné rychlosti	23
3.3 Stabilita při stacionárním zatáčení	24
3.4 Stabilita při nestacionárním zatáčení	26
4 Rozložení hmotnosti a momenty setrvačnosti	28
4.1 Rozložení hmotnosti mezi přední a zadní kolo	28
4.2 Momenty setrvačnosti	29
5 Redukce parametrů zavěšení kol	31
5.1 Redukce parametrů zavěšení předního kola	31
5.2 Redukce parametrů zavěšení zadního kola	32
6 Matematický model	37
6.1 Model kontaktu pneumatiky s vozovkou	39
6.2 Numerické řešení soustavy nelineárních diferenciálních rovnic	41
7 Multibody simulace v prostředí ADAMS/VI-Motorcycle	44
8 MKP analýza rámu	48
8.1 Stanovení okrajových podmínek.	48
8.2 Topologická optimalizace rámu	55
Závěr	58
Literatura	59
PŘÍLOHA č. 1	60



## Seznam obrázků

Obrázek 1 Prototyp VM 450 .....	11
Obrázek 2 Geometrické parametry motocyklu [1].....	12
Obrázek 3 Závlek a skluzová rychlost [1].....	13
Obrázek 4 Stykový bod a souřadný systém [1].....	14
Obrázek 5 Vztah mezi úhlem klonění a klopení s vlivem dalších parametrů [1] .....	15
Obrázek 6 Poloha stykových bodů [1] .....	16
Obrázek 7 Kinematický úhel řízení [1] .....	17
Obrázek 8 Pól pohybu a poloměr zatáčky [1] .....	18
Obrázek 9 Závislost křivosti trajektorie na úhlu natočení řídítek pro různé úhly klopení [1] .	18
Obrázek 10 Síly působící na pneumatiku [1] .....	19
Obrázek 11 Skluzová charakteristika [1] .....	20
Obrázek 12 Charakteristika pneumatiky podle Magic formule [4] .....	20
Obrázek 13 Poměry ve stykové ploše [1].....	21
Obrázek 14 Deformační charakteristika pneumatiky [3] .....	22
Obrázek 15 Diagonální a radiální pneumatika [3] .....	22
Obrázek 16 Zadní a půdorysný pohled na motocykl [3].....	23
Obrázek 17 Působení gyroskopického momentu při stacionárním zatáčení [1] .....	24
Obrázek 18 Gyroskopické účinky od napříč uloženého motoru [1] .....	25
Obrázek 19 Gyroskopické účinky u podélně umístěného motoru [1].....	26
Obrázek 20 Gyr. úč. od rotace řídítek [1] .....	27
Obrázek 21 Gyr. úč. při nájezdu do zatáčky [1].....	27
Obrázek 22 Akrobacie díky gyroskopickým účinkům [3] .....	27
Obrázek 23 Poloha těžiště v podélném směru [1].....	28
Obrázek 24 Schéma určení vertikální souřadnice těžiště [1] .....	29
Obrázek 25 Momenty setrvačnosti [1] .....	29
Obrázek 26 Měření momentu setrvačnosti.....	30
Obrázek 27 Redukovaná tuhost zavěšení předního kola [1].....	31
Obrázek 28 redukovaná tuhost zavěšení zadního kola [1].....	32
Obrázek 29 Schéma zavěšení s přepákováním .....	33
Obrázek 30 Zavěšení zadního kola .....	33
Obrázek 31 Závislost síly na poloze kola.....	34
Obrázek 32 Závislost převodové funkce na poloze .....	34
Obrázek 33 Část charakteristiky tlumiče – stlačení .....	35
Obrázek 34 Silový impuls .....	35
Obrázek 35 Zrychlení kola v absolutní hodnotě .....	36
Obrázek 36 Frekvenční spektrum .....	36
Obrázek 37 Schéma výpočtového modelu .....	37
Obrázek 38 Model kontaktu pneumatiky s vozovkou.....	39
Obrázek 39 Skok .....	41
Obrázek 40 Zrychlení rámu.....	42
Obrázek 41 Průběh úhlového zrychlení .....	42
Obrázek 42 Průběh zrychlení předního a zadního kola.....	43
Obrázek 43 Možnosti systému ADAMS [5] .....	44
Obrázek 44 Model motocyklu.....	45
Obrázek 45 Překážka v systému ADAMS .....	45
Obrázek 46 Zrychlení předního kola.....	46

Obrázek 47 Průběh síly v přední pružině .....	46
Obrázek 48 Průběh zrychlení v zadní pružině .....	47
Obrázek 49 Model rámu.....	48
Obrázek 50 Reakce v místě uchycení přední vidlice .....	50
Obrázek 51 Model bloku motoru .....	50
Obrázek 52 MKP model motoru .....	51
Obrázek 53 Deformace bloku motoru .....	51
Obrázek 54 Síť rámu včetně CBUSH1D elementů a zatížení.....	52
Obrázek 55 Napětí v rámu .....	52
Obrázek 56 Průběh napětí v nosníku.....	53
Obrázek 57 Průběh napětí v příčce .....	53
Obrázek 58 Deformace rámu .....	54
Obrázek 59 Dopad jezdce na jednu stupačku.....	54
Obrázek 60 Vstupní model pro topologickou optimalizaci .....	55
Obrázek 61 Iterace topologické optimalizace .....	55
Obrázek 62 Upravený návrh rámu .....	56
Obrázek 63 Průběh napětí Von Mises v upraveném návrhu .....	56
Obrázek 64 Deformace upraveného návrhu .....	56
Obrázek 65 Porovnání 3. vlastní frekvence .....	57

## Úvod

Motokrosově závody nabízejí zajímavou podívanou, při které se závodní technika dostává na hranice svých možností. Motocykly jsou vystaveny značnému dynamickému zatížení, které má navíc velmi nevyzpytatelný charakter. Při návrhu jednotlivých komponent se do velké míry vychází ze zkušeností a experimentálního testování. Aplikace metod matematického modelování v této oblasti není příliš rozšířená a jedním z cílů této diplomové práce je tento fakt částečně napravit. Za tímto účelem byl vyvinut nelineární matematický model motocyklu, který je zaměřen na studii dynamických poměrů při dopadu motocyklu po skoku. Výraznou část práce tvoří také MKP analýza rámu a topologická optimalizace, jež umožňuje nalézt nejvýhodnější tvar rámu z hlediska tuhosti a hmotnosti.

Způsob, jakým se motocykly pohybují, je značně rozdílný od automobilů, a proto je první část této práce věnována kinematické studii. Rovnice zde uvedené tvoří základ komerčních výpočetních systémů. Další výraznou odlišností je vliv gyroskopických efektů, který je u motocyklů zásadní.

## Představení společnosti VM- Motor

V roce 1992 se rozhodl úspěšný motokárový a automobilový jezdec Vladimír Vácha založit vlastní výrobní společnost, ve které by nabídl bohaté zkušenosti s vývojem a výrobou závodních motorů. Stará pravda říkající, že nejlepší laboratoří při vzniku a testování nových revolučních technických řešení a jejich dozrání je závodní okruh, se znovu potvrdila. V průběhu let se staly vyhledávané motokárové agregáty VM-Motor pojmem nejen v evropském, ale i ve světovém měřítku. Vlastní kovovýrobní provoz s vysokými nároky na kvalitu si v roce 2007 dokonce vysloužil získání certifikátu jakosti ISO 9001:2001 od společnosti TÜV SÜD Czech. V dílnách a laboratořích VM-Motor naleznete nejen moderní obráběcí stroje CNC, ale také vlastní slévárnu hliníku, což dělá společnost velice soběstačnou a nezávislou.

Společnost VM MOTOR je českým zástupcem italské společnosti Dell'Orto při distribuci karburátorů a jejich náhradních dílů a švédské společnosti Öhlins na prodej tlumičů, pérování a olejů.

V roce 2004 byla společností VM Motor odkoupena výrobní značka motocyklů Praga, včetně technického vybavení a také rozpracovaných motocyklů s úmyslem zachovat výrobu skutečně českého stroje. Po dlouhém vývoji, který si vyžádala zastaralá koncepce podvozků a motorů, vznikl prakticky nový stroj, který nemá s původní Pragou příliš mnoho společného.

Pod vývojem nového českého motocyklu VM Motor 610F Motocross je podepsán tým Bohumila Staši, neméně slavného syna slavného otce a jako testovací jezdec byl angažován jeden z našich nejúspěšnějších závodníků motokrosu a endura David Čadek. Z původní koncepce Pragy tak nezůstal, dalo by se říci, kámen na kameni. Převzato z [10].



Obrázek 1 Prototyp VM 450

## 1 Kinematika motocyklů

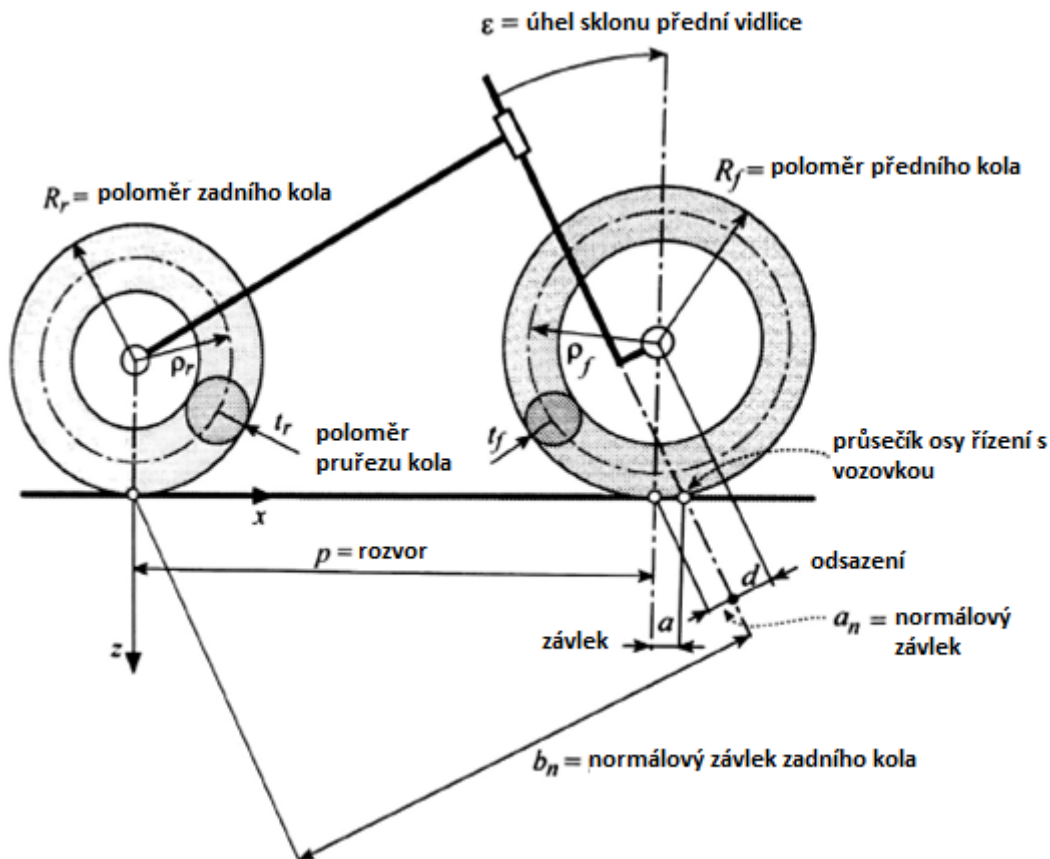
Při kinematickém rozboru zjednodušeného modelu motocyklu (Obrázek 2) předpokládáme, že pneumatiky jsou nedeformovatelné a neuvažujeme přední a zadní odpružení. Při těchto předpokladech lze motocykl popsat pomocí následujících parametrů:

$p$	rozvor
$d$	odsazení přední vidlice
$\varepsilon$	úhel sklonu přední vidlice
$R_r$	poloměr zadního kola
$R_f$	poloměr předního kola
$t_r$	poloměr průřezu předního kola
$t_f$	poloměr průřezu zadního kola

Další parametry lze vyjádřit v závislosti na výše uvedených:

$$a_n = R_f \sin \varepsilon - d \quad \text{normálový závlek předního kola}$$

$$a = a_n / \cos \varepsilon = R_f \tan \varepsilon - d / \cos \varepsilon \quad \text{závlek předního kola}$$



Obrázek 2 Geometrické parametry motocyklu [1]

Chování motocyklu ovlivňuje především rozvor, úhel přední vidlice a závlek. Hodnoty rozvoru se liší podle typu motocyklu. U skútrů se tato hodnota pohybuje okolo 1200 až 1300 mm, u menších motocyklů do 1350 mm, u středních do 1600 mm a vyšší hodnoty se objevují především u velkých cestovních motocyklů.

Obecně lze říci, že zvětšením rozvoru dosáhneme:

- nižší ohybové a torzní tuhosti rámu
- zvýšení minimálního poloměru otáčení
- zvýšení momentu potřebného k zatočení
- snížení přenosu hmotnosti při akceleraci a brzdění
- zvýšení směrové stability motocyklu

Primární funkcí závleku je vnést do řízení stabilitu. Také ovlivňuje chování při nájezdu do zatáčky. Uvažujeme motocykl pohybující se dopřednou rychlostí  $v$ . Stykový bod mezi pneumatikou a vozovkou má tutéž rychlost  $v$ . Vektor  $v$  tedy můžeme rozdělit na dvě složky.

- $\omega_f R_f$  představující rychlost valení
- $v_s$  představující skluzovou rychlost

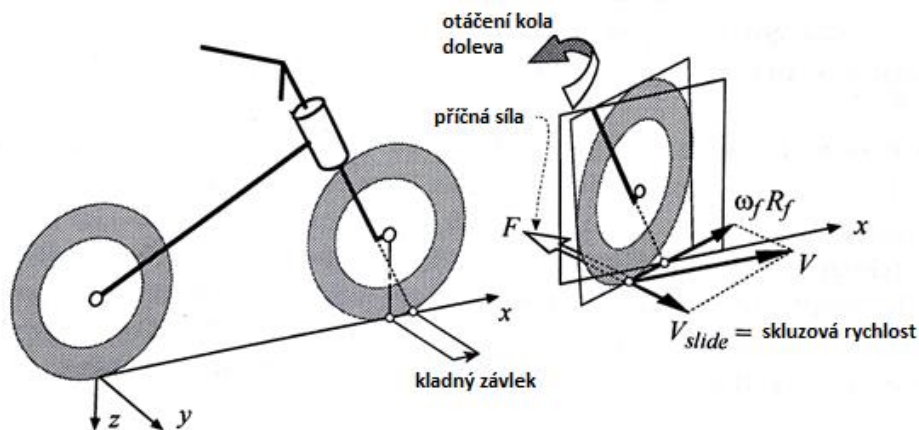
Díky skluzové rychlosti  $v_s$  vzniká třecí síla  $F_{ps}(F_{zs})$  působící na pneumatiku s opačným směrem než  $v_s$ . Na předním kole vzniká třecí moment:

$$M_{ps} = F_{ps} a_n \quad (1)$$

kde  $a_n$  je normálový závlek předního kola. Moment  $M_{ps}$  má stabilizující účinek, pokud je hodnota závleku kladná. Malé hodnoty závleku předního kola znamenají, že řízení jde zlehka a je citlivé na nerovnosti vozovky. Vysoké hodnoty závleku naopak zhoršují ovladatelnost při nízkých rychlostech. Obdobná je situace na zadním kole. Pro třecí moment na zadním kole platí

$$M_{zs} = F_{zs} b_n, \quad (2)$$

kde  $b_n$  je normálový závlek zadního kola.



Obrázek 3 Závlek a skluzová rychlost [1]

Důležité je si uvědomit, že hodnota závleku není konstantní, ale mění se v závislosti na několika parametrech, mezi něž patří úhel náklonu, úhel řízení a také profil pneumatik.

## 1.1 Klopení a řízení

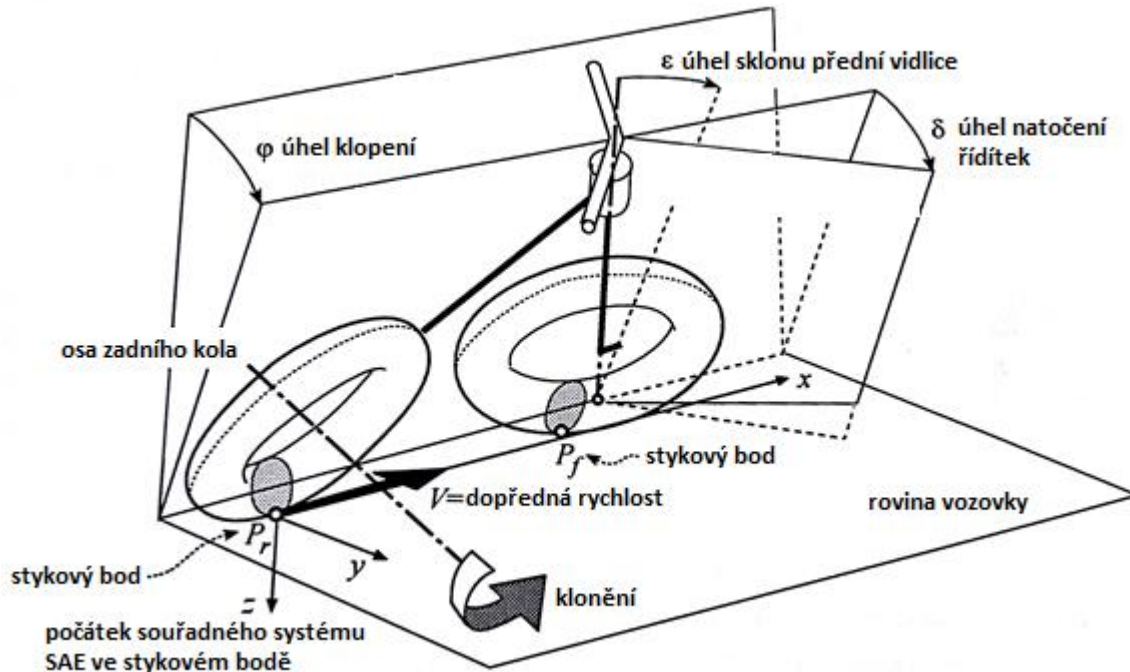
Uvažujeme motocykl pohybující se dopřednou rychlostí  $v$ , který v určitý moment začne zatáčet. Motocykl opustí vertikální polohu s nulovým úhlem řízení a naklopí se do pozice s úhlem klopení  $\phi$ . Z důvodu zachování rovnováhy dojde k natočení řídicích v závislosti na

rychlosti  $v$  a poloměru zatáčky. Díky natočení řídítek dojde k malé rotaci rámu okolo osy zadního kola, kterou nazýváme klonění.

Můžeme definovat dva souřadné systémy:

- Pohyblivý, definovaný dle SAE s počátkem ve stykovém bodě zadního kola s vozovkou
- Pevný, pevně spojený s motocyklem, přičemž pro nulový úhel klopení je počátek pevného souřadného systému totožný s počátkem pohyblivého systému

Na následujícím obrázku jsou patrné stykové body a souřadný systém SAE.



Obrázek 4 Stykový bod a souřadný systém [1]

## 1.2 Klonění

Úhel klonění je kladný proti směru hodinových ručiček. Kinematická analýza umožňuje odvodit rovnici vyjadřující úhel klonění jako funkci úhlu klopení, řízení, rozvoru, poloměru průřezu pneumatiky, poloměru střednice pneumatiky a sklonu přední vidlice:

$$\mu = \frac{(c_1 + c_2) \cos \varphi + c_3 \sin \varphi + t_f - t_r}{(c_4 + c_5) \cos \varphi}, \quad (3)$$

kde

$$c_1 = d \sin \varepsilon (1 - \cos \delta) + t_r - t_f \quad (4)$$

$$c_2 = \rho_f [\cos \varepsilon \cos(\beta' - \varepsilon) - \cos \delta \sin \varepsilon \sin(\beta' - \varepsilon) - 1] \quad (5)$$

$$c_3 = d \sin \delta + \rho_f \sin \delta \sin(\beta' - \varepsilon) \quad (6)$$

$$c_4 = p - d \cos \varepsilon (2 - \cos \delta) \quad (7)$$

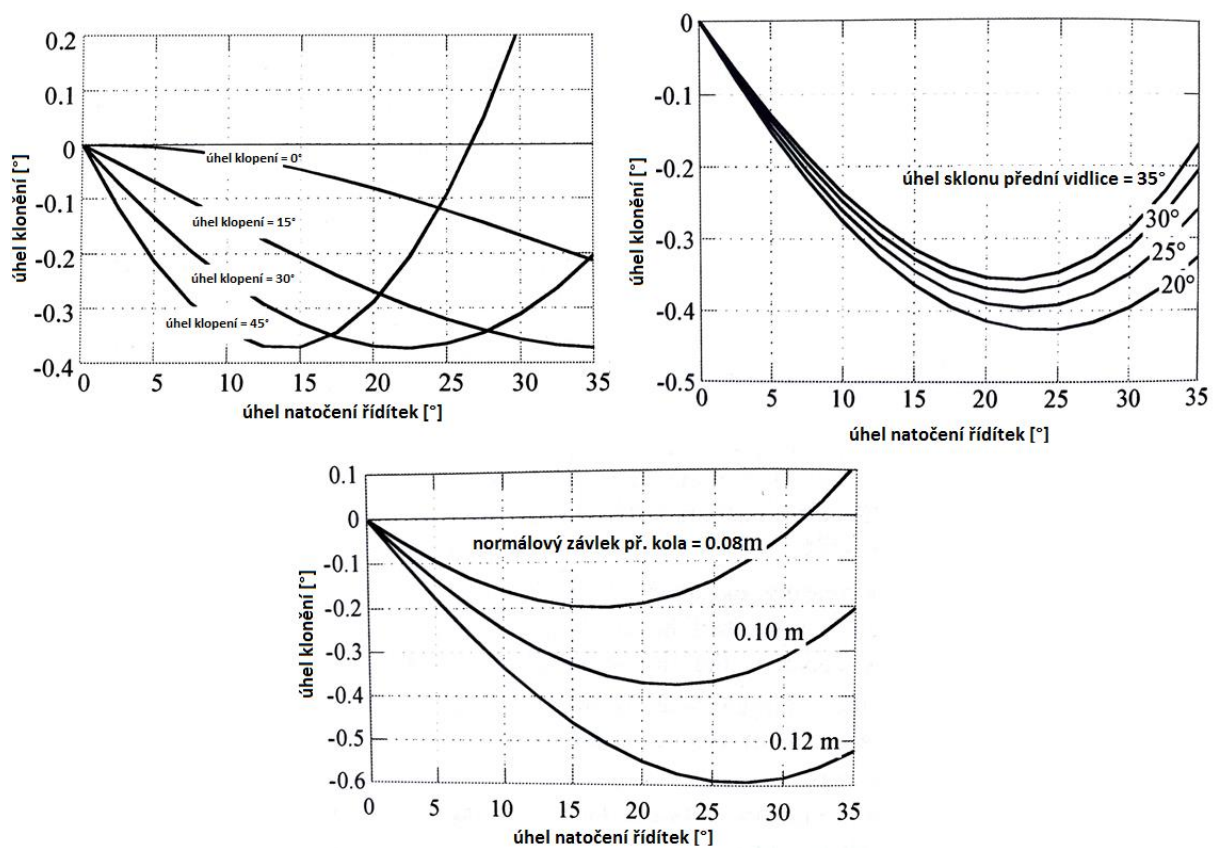
$$c_5 = \rho_f [\sin \varepsilon \cos(\beta' - \varepsilon) + \cos \delta \cos \varepsilon \sin(\beta' - \varepsilon)] \quad (8)$$



$$\beta' = \varepsilon + \arctan \left( \frac{\sin \delta \tan \varphi - \sin \varepsilon \cos \delta}{\cos \varepsilon} \right) \quad (9)$$

Pokud uvažujeme malé úhly řízení pneumatiky s nulovou tloušťkou, lze rovnici následovně zjednodušit; přičemž z rovnice plyne, že parametrem nejvíce ovlivňujícím klonivý pohyb je závlek předního kola.

$$\mu = -\frac{a_n}{p} \delta \tan \varphi \quad (10)$$



Obrázek 5 Vztah mezi úhlem klonění a klopení s vlivem dalších parametrů [1]

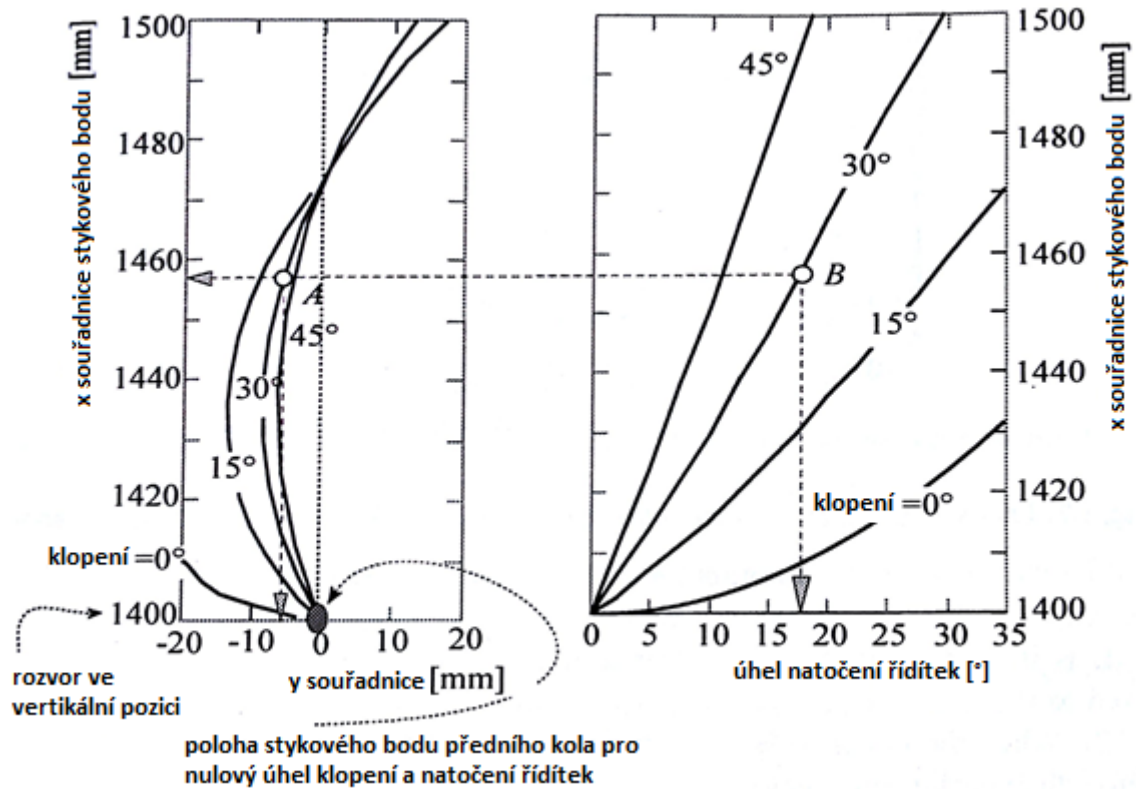
### 1.3 Kombinace klopení a řízení

Díky rotaci řídicíků dochází k příčnému a podélnému posuvu stykového bodu předního kola. Uvažujme motocykl, který se z vertikální polohy nakloní o úhel klopení  $\varphi$  a řídicíka jsou natočena o úhel  $\delta$ . Díky tomuto manévru dojde k posuvu stykového bodu  $P_f$  mimo rovinu rámu. Souřadnice bodu  $P_f$  lze vyjádřit v souřadném systému SAE

$$x_{P_f} = (c_1 + c_2) \sin \mu + (c_4 + c_5) \cos \mu \quad (11)$$

$$y_{P_f} = [-(c_1 + c_2) \cos \mu + (c_4 + c_5) \sin \mu] \sin \varphi + c_3 \cos \varphi - (t_f - t_r) \quad (12)$$





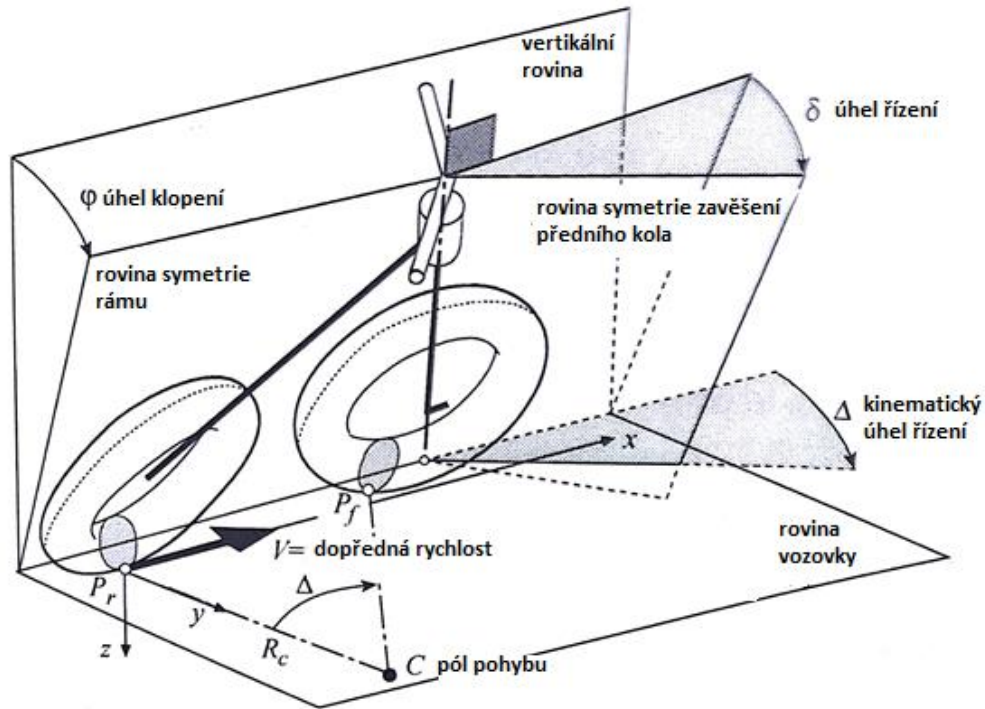
Obrázek 6 Poloha stykových bodů [1]

Obrázek 6 ukazuje příčné a podélné posunutí stykového bodu předního kola v závislosti na úhlu natočení řídicítek pro různé hodnoty úhlu klopení. S narůstajícím úhlem natočení řídicítek a úhlem klopení se stykový bod posunuje dopředu. Počáteční hodnota odpovídá rozvoru motocyklu. V příčném směru se bod nejprve posunuje vlevo (do záporných hodnot) a poté zpět. Jakmile se souřadnice dostane do kladných hodnot, dochází ke zmenšení úhlu natočení řídicítek a naopak k nárůstu úhlu klopení.

#### 1.4 Kinematický úhel řízení

Kinematický úhel řízení  $\Delta$  závisí na úhlu klopení  $\varphi$ , úhlu natočení řídicítek  $\delta$ , úhlu sklonu přední vidlice  $\varepsilon$  a úhlu klonění  $\mu$  následujícím způsobem:

$$\Delta = \arctan \left( \frac{\sin \delta \cos(\varepsilon + \mu)}{\cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta \sin(\varepsilon + \mu)} \right) \quad (13)$$



Obrázek 7 Kinematický úhel řízení [1]

Pro snazší pochopení lze říci, že úhel natočení řídítek  $\delta$  je úhel mezi rovinou předního a rovinou zadního kola. Kinematický úhel řízení  $\Delta$  je v podstatě promítnutí úhlu  $\delta$  do roviny vozovky.

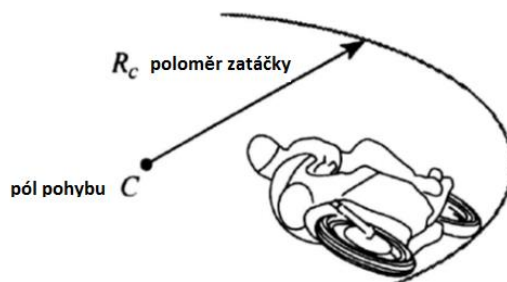
## 1.5 Křivost trajektorie

Závěrem celé kinematické studie je vyjádření křivosti trajektorie, po které se motocykl v zatáčce pohybuje. Předpokladem je, že nedochází k příčnému skluzu mezi koly a vozovkou. Křivost trajektorie  $C$  je převrácenou hodnotou poloměru trajektorie a lze ji vyjádřit jako funkci kinematického úhlu řízení a polohy předního stykového bodu:

$$C = \frac{\tan \Delta}{x_{Pf} + y_{Pf} \tan \Delta} \quad (14)$$

Pro malé úhly natočení řídítek lze vztah zjednodušit

$$C = \frac{\cos \varepsilon}{p \cos \varphi \left( 1 + \frac{R_f \cos \varepsilon}{p} \delta \tan \varphi \right)} \tan \delta \quad (15)$$

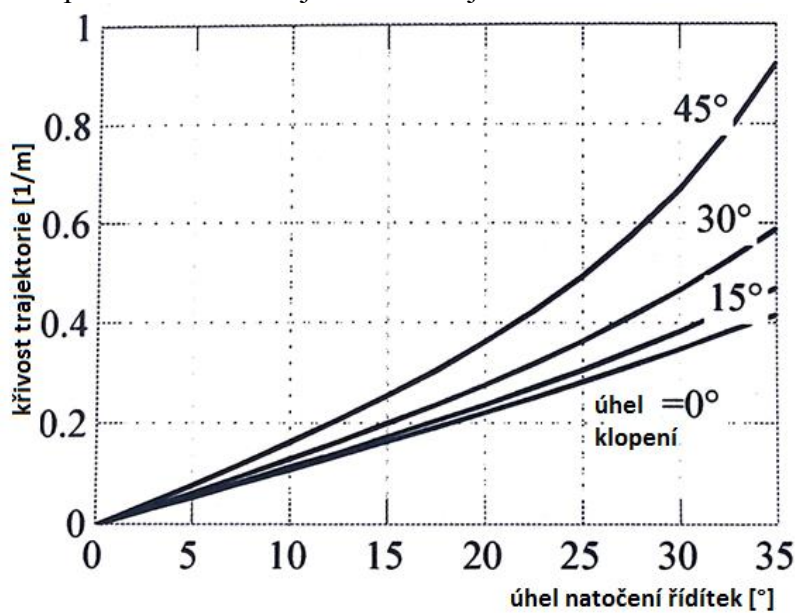


Obrázek 8 Pól pohybu a poloměr zatáčky [1]

Pokud vztah dále zjednodušíme, za předpokladu malých posunutí stykového bodu předního kola, lze křivost trajektorie vyjádřit následovně

$$C = \frac{\cos \varepsilon}{p \cos \varphi} \delta \quad (16)$$

Grafické znázornění předchozí rovnice je na následujícím obrázku.



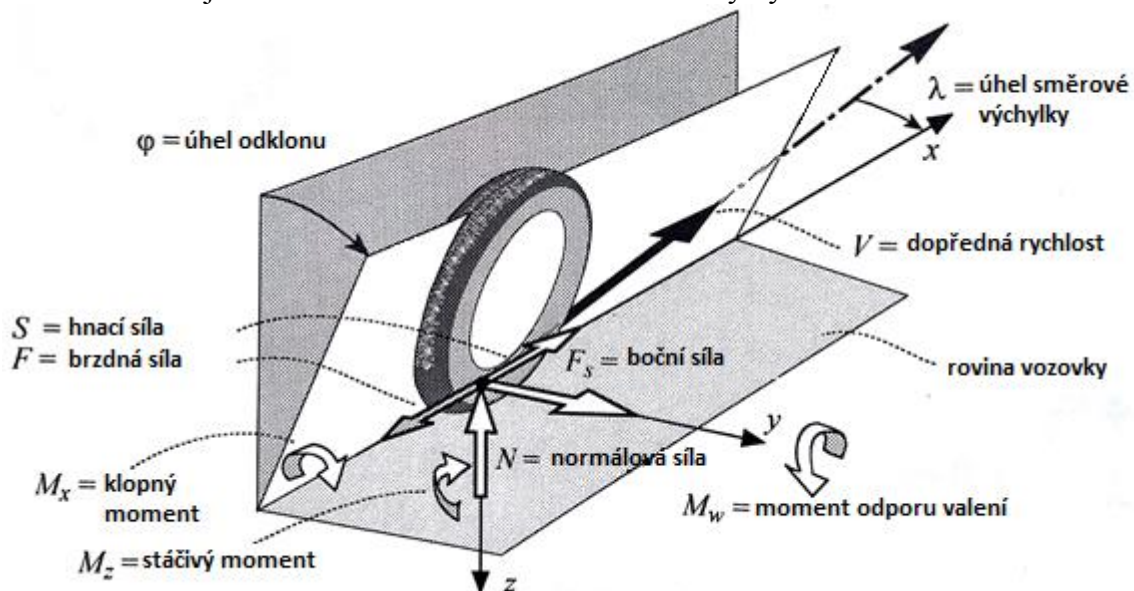
Obrázek 9 Závislost křivosti trajektorie na úhlu natočení řídicího pro různé úhly klopení [1]

## 2 Pneumatiky motocyklů

Pneumatiky jsou jedním z nejdůležitějších komponentů motocyklu. Jejich fundamentální vlastností je deformovatelnost, která umožňuje zachování kontaktu mezi kolem a vozovkou i při přejezdu přes malé nerovnosti. Kromě zlepšení komfortu pneumatiky umožňují přenos velkých hnacích i brzdných sil a také sil bočních. Interakce mezi pneumatikou a vozovkou může být vyjádřena pomocí působení třech sil a třech momentů, viz následující obrázek.

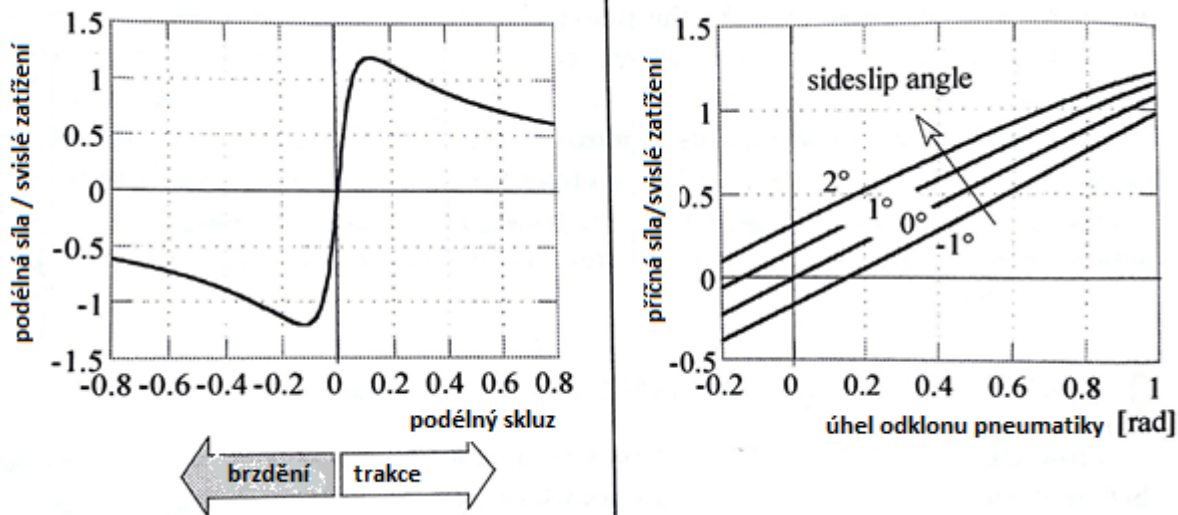
- Podélná síla působící rovnoběžně s průsečnicí roviny kola a roviny silnice procházející kontaktním bodem (předpokládá se kladná při akceleraci, záporná při brzdění)
- Vertikální síla kolmá na rovinu vozovky (kladná ve směru nahoru)
- Příčná (boční) síla v rovině vozovky kolmá na podélnou sílu
- Klopný moment okolo osy  $x$
- Moment valivého odporu okolo osy  $y$
- Stáčivý moment okolo osy  $z$

Na Obrázku 10 je zároveň znázorněn úhel směrové odchylky  $\lambda$



Obrázek 10 Síly působící na pneumatiku [1]

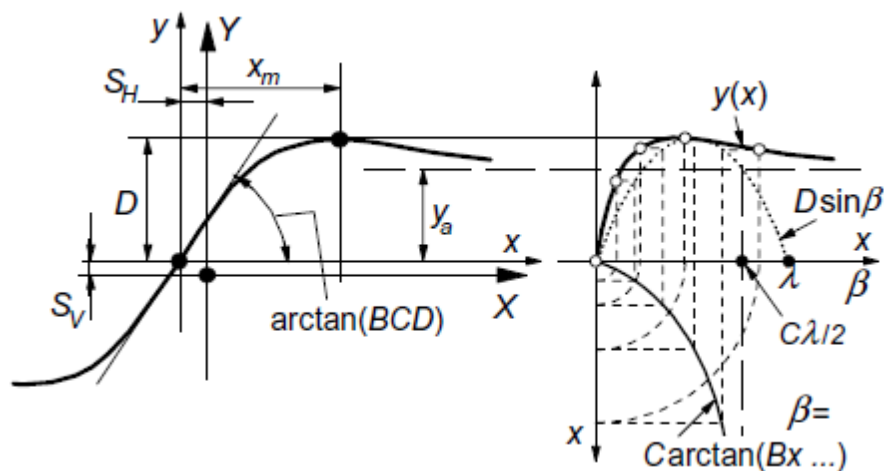
Na následujícím obrázku je znázorněna závislost mezi podélnými silami a skluzem a také závislost mezi příčnými silami a úhlem odklonu pneumatiky při různých hodnotách úhlu směrové odchylky. Vyjádření těchto vztahů je klíčové při matematickém modelování pneumatik a jsou jádrem matematického modelu prof. Pacejky „Magic formula“, jenž bude popsán v následující části.



Obrázek 11 Skluzová charakteristika [1]

## 2.1 „Magic formula“

Model chování pneumatiky prof. Pacejky byl poprvé nastíněn v roce 1993 a od té doby se téměř výhradně používá ve výpočetních systémech zaměřených na dynamiku vozidel. Základem modelu je experimentálně vyvinutý „kouzelný“ vztah vyjadřující podélnou, či příčnou sílu, nebo moment okolo osy z jako funkci skluzu.



Obrázek 12 Charakteristika pneumatiky podle Magic formuly [4]

$$y = D \sin (C \arctan (Bx - E(BX - \arctan Bx))) \quad (17)$$

$$Y(X) = y(x) + S_v \quad (18)$$

$$x = X + S_h, \quad (19)$$

kde

$Y$	výstupní proměnná ( $F_x, F_y, M_z$ )
$X$	vstupní proměnná
$B$	parametr tuhosti
$C$	parametr tvaru



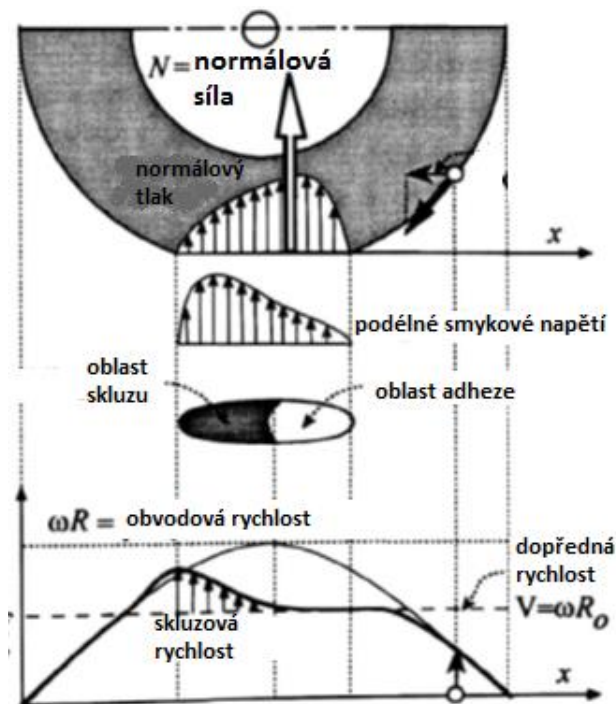
$D$	maximální hodnota
$E$	parametr křivosti
$S_H$	horizontální posunutí
$S_V$	vertikální posunutí

## 2.2 Přenos podélných sil

Podélné síly (hnací a brzděné) způsobují smyková napětí ve stykové ploše. V případě hnacích sil dochází ke stlačování vláken pneumatiky v stykové ploše. V případě brzděných sil je tomu naopak. Díky tomuto jevu vzniká rozdíl mezi skutečnou dopřednou rychlostí motocyklu a obvodovou rychlostí kol. Lze tedy definovat měrný podélný skluz  $\kappa$

$$\kappa = -\frac{v - \omega R}{v} \quad (20)$$

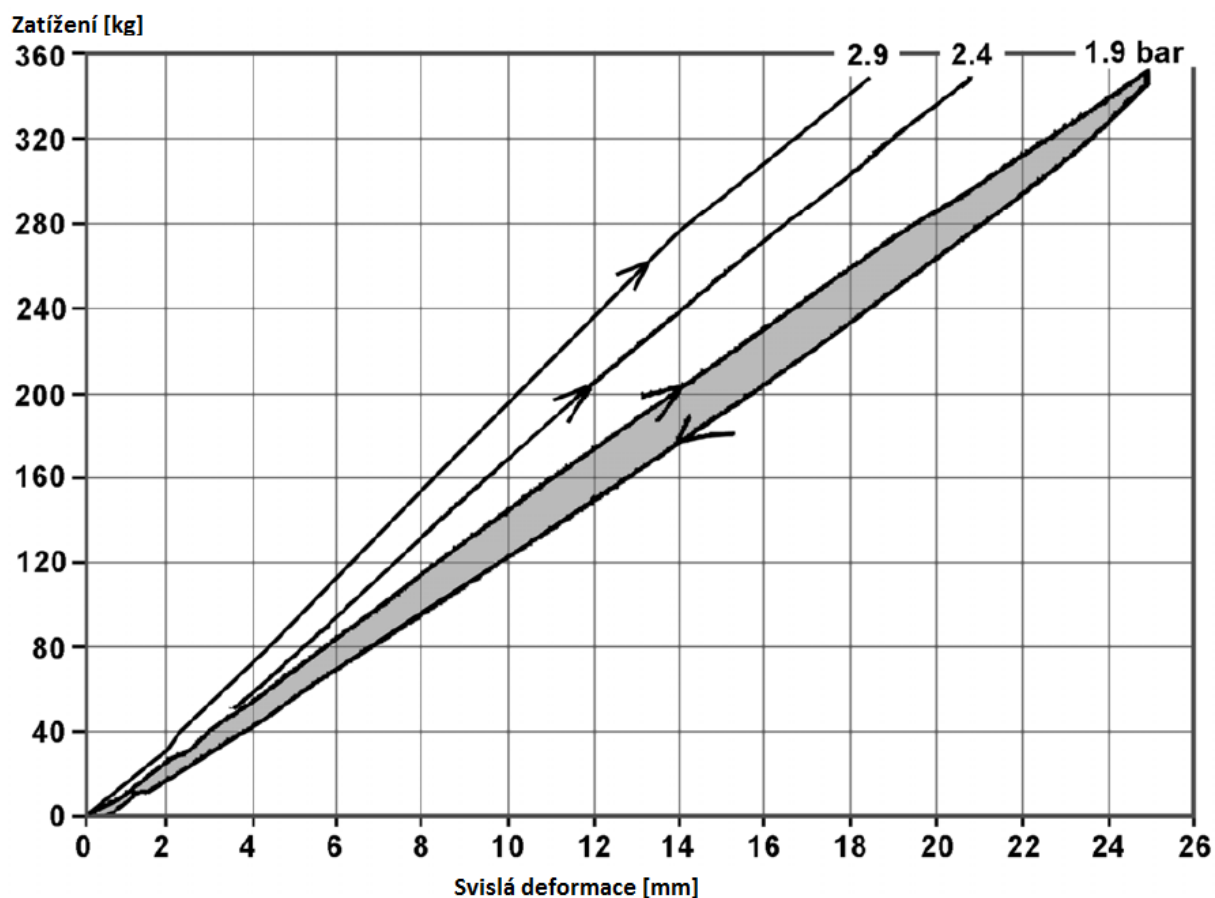
Skluz je kladný pro akceleraci a záporný pro brzdění. V jisté části dotykové plošky existuje oblast, kde je skluz nulový. Tato oblast se nazývá oblast adhezní (nebo také stacionární) soudržnosti. Naopak tam, kde je skluz nenulový, se vyskytuje třecí soudržnost, viz následující obrázek.



Obrázek 13 Poměry ve stykové ploše [1]

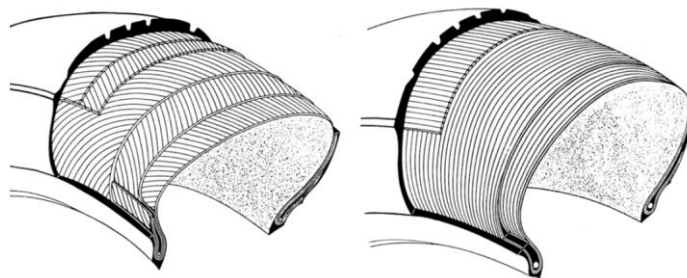
Čím více se pneumatika blíží svému limitu, tím roste oblast skluzu (třecí soudržnosti) a zmenšuje se oblast adheze. Ke ztrátě kontroly nad vozidlem dochází v případě, že oblast adheze je zcela nahrazena oblastí třecí soudržnosti.

Na následujícím obrázku je znázorněna deformační charakteristika pneumatiky pro různý tlak. Charakteristika není čistě lineární, ale má mírně degresivní tendenci. Rovněž je zde patrný hysterezní efekt pneumatiky, kdy plocha uvnitř křivky představuje utlumenou energii přeměněnou na teplo.



Obrázek 14 Deformační charakteristika pneumatiky [3]

Konstrukce pneumatik pro motocykly je principiálně podobná automobilovým pneumatikám. Rozlišujeme pneumatiky diagonální a radiální. V porovnání s automobily se u motocyklů ve větší míře uplatňují pneumatiky s dušemi.



Obrázek 15 Diagonální a radiální pneumatika [3]

### 3 Stabilita motocyklů

Problematika stability motocyklů jakožto jednostopých vozidel je mnohem komplexnější než stabilita vozidel dvoustopých. Svou pozornost můžeme zaměřit hned na několik oblastí, ve kterých se uplatňují různé principy.

#### 3.1 Stabilita při nulové dopředné rychlosti

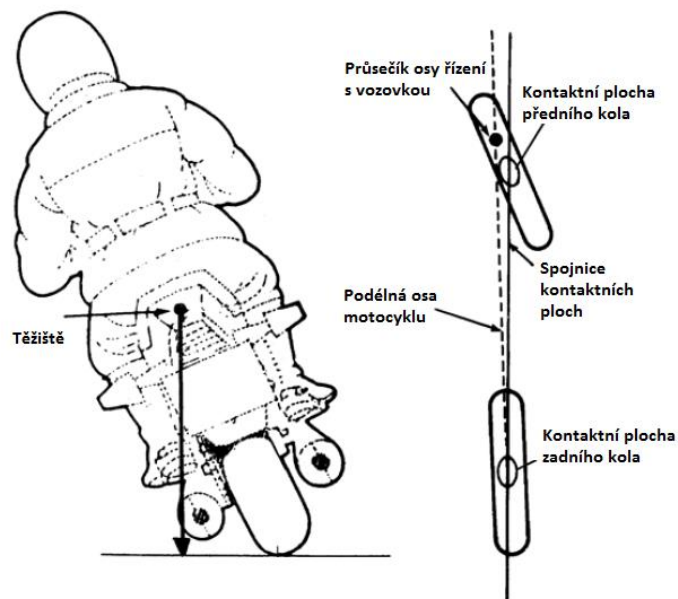
Uvažujme motocykl ve vzpřímené poloze s nulovým úhlem klopení a nulovou dopřednou rychlostí. V takovémto případě se motocykl nachází v labilní rovnovážné poloze s maximem potenciální energie a jakékoliv vychýlení z této polohy způsobí pád.

#### 3.2 Stabilita při malé dopředné rychlosti

Při pohybu malou dopřednou rychlostí je velmi obtížné držet se přímé trajektorie. Jezdec často pohybuje řídítky ze strany na stranu, aby zůstal ve vzpřímené poloze. Princip stability je založen na tom, že je potřeba, aby moment tíhové síly k ose spojující kontaktní plochy předního a zadního kola byl nulový. Pak bude motocykl v rovnováze. Prakticky to znamená, že chceme docílit toho, aby se společné těžiště motocyklu a jezdce nacházelo nad spojnici kontaktních ploch. Jakákoliv byt' sebemenší překážka způsobuje změnu polohy těžiště vůči této spojnici. Existují dva způsoby, jak docílit navrácení společného těžiště nad spojnici.

Pokud řidič pohybuje řídítky, mění se poloha kontaktní plochy předního kola a tím také směr spojnice kontaktních ploch. Jezdec tedy ovlivňuje zmiňovanou spojnici tak, aby se nacházela pod společným těžištěm.

Druhý způsob spočívá ve změně polohy společného těžiště motocyklu a jezdce. Jezdec tedy svým pohybem mění polohu svého těžiště, a tak ovlivňuje polohu i společného těžiště, aby se nacházelo nad spojnici kontaktních ploch.



Obrázek 16 Zadní a půdorysný pohled na motocykl [3]

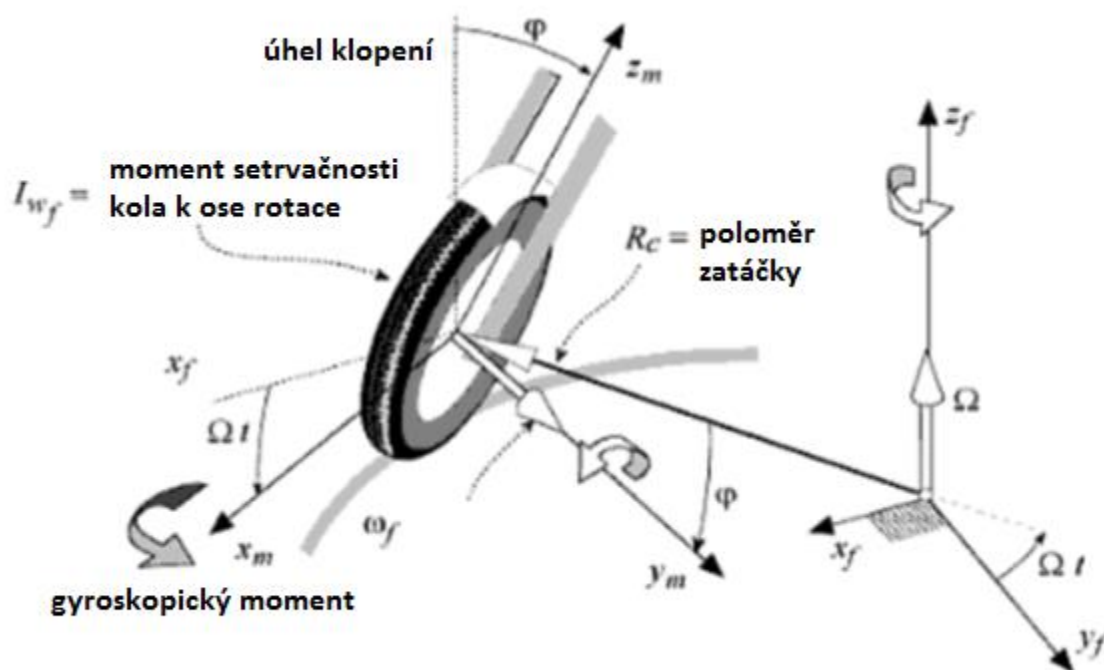


To, jaký ze dvou principů je v danou situaci výhodnější použít, závisí na mnoha aspektech, mezi něž můžeme zařadit výšku těžiště a hmotnost motocyklu, hmotnost jezdce, hodnotu závleku předního kola a další.

### 3.3 Stabilita při stacionárním zatáčení

Stacionární zatáčení se vyznačuje tím, že je při něm konstantní úhel klopení a konstantní úhel natočení řídicích. Motocykl se tedy pohybuje po kružnici s daným poloměrem. Ač se na první pohled tato situace může zdát jednoduchá, při hlubším zamyšlení zjistíme, že kola a některé rotující části pohonného ústrojí konají sférický pohyb. Sférický pohyb je velmi specifický a je definován tak, že při něm je jeden bod tělesa v klidu. V tomto případě se jedná o pól pohybu motocyklu ležícího ve středu křivosti trajektorie. Rovněž je unikátní tím, že při něm působí gyroskopické momenty způsobující přidavné dynamické namáhání.

U sférického pohybu rozlišujeme tři úhly – úhel precese, úhel nutace a úhel vlastní rotace. Více informací lze získat v [9]. Pokud svoji pozornost zaměříme na kolo motocyklu projíždějící zatáčkou (Obrázek 17), můžeme tyto úhly snadno identifikovat. Úhlu precese odpovídá rotační pohyb kolem středu křivosti zatáčky, tedy osy  $z_f$ , s konstantní úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Úhlu nutace odpovídá úhel klopení  $\varphi$  a konečně úhel vlastní rotace je spjat s otáčením kola okolo osy  $y_m$  konstantní úhlovou rychlostí předního kola  $\omega_f$ .



Obrázek 17 Působení gyroskopického momentu při stacionárním zatáčení [1]

Literatura se přesně neshoduje, které jednotlivé účinky spadají pod gyroskopické momenty, nicméně podle [1] definujeme gyroskopický moment jako

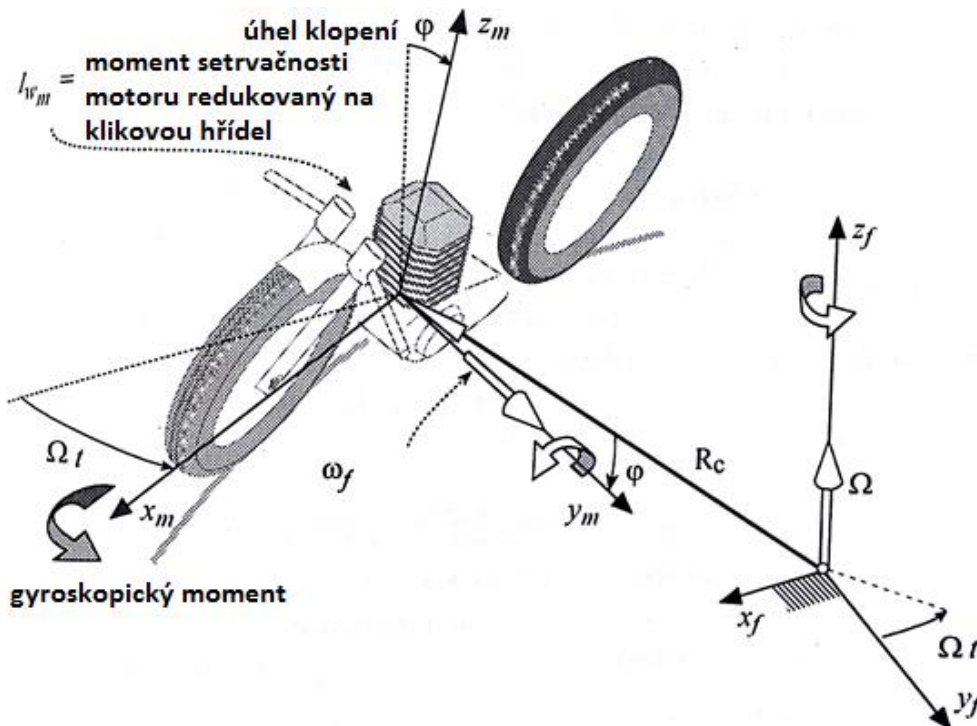
$$M_g = I_{w_f} \left( \omega_f \Omega - \frac{\Omega^2 \sin \varphi}{2} \right) \cos \varphi \quad (21)$$

Vzhledem k tomu, že poloměr kola je výrazně menší než poloměr zatáčení, je i úhlová rychlost  $\Omega$  kolem středu křivosti zatáčky výrazně menší než úhlová rychlost otáčení předního kola  $\omega_f$ . S těmito předpoklady lze rovnici [1] zjednodušit:

$$M_g = I_{w_f} \omega_f \cos \varphi \quad (22)$$

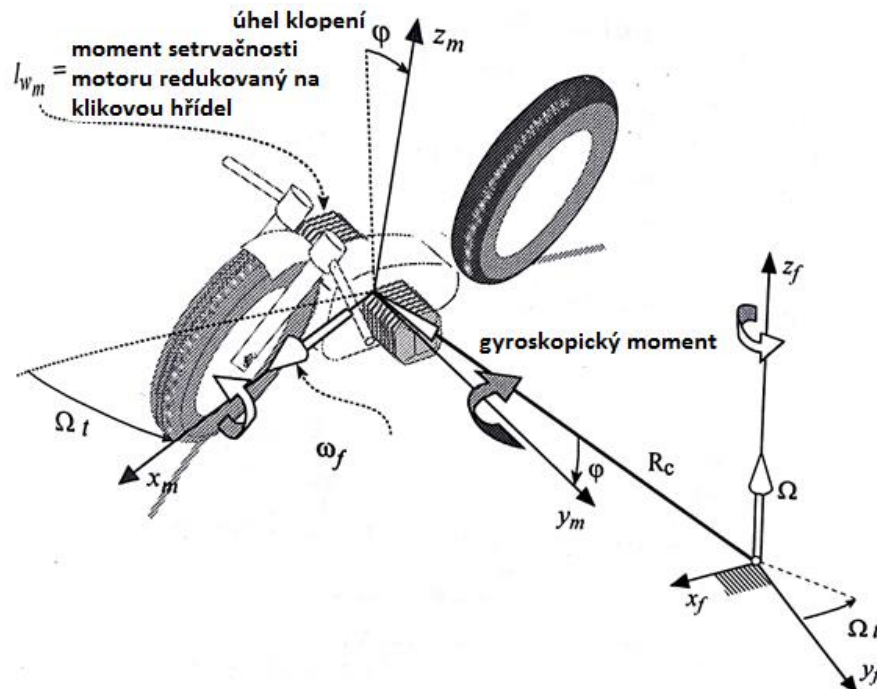
Obdobná je situace u zadního kola, a pokud zanedbáme fakt, že přední a zadní kolo mají mírně odlišný úhel klopení, lze jejich gyroskopické účinky jednoduše sečíst. Z Obrázku 17 je také patrné, že gyroskopické účinky kola mají tendenci napřimovat motocykl. Při stacionárním zatáčení tedy musí být v rovnováze gyroskopické momenty s momentem odstředivé síly a momentem tíhové síly, který vznikne díky naklonění motocyklu. To, že gyroskopické momenty nejsou zanedbatelné, je dokázáno v [1], kde se uvádí, že pro rychlost 144 km/h, poloměr zatáčení 200m a úhel klopení  $39^\circ$  gyroskopické momenty kol dosahují asi 23 Nm.

Je nutné si uvědomit, že kola nejsou jedinými rotujícími částmi motocyklu. Jestliže máme motocykl s napříč uloženým motorem (Obrázek 19), klikový hřídel se otáčí ve stejném smyslu jako kola a gyroskopické účinky mají obdobný charakter. Důležitým krokem je správně provést redukci hmot a odvodit redukovaný moment setrvačnosti.



Obrázek 18 Gyroskopické účinky od napříč uloženého motoru [1]

U podélně umístěného motoru je hřídel orientován po směru jízdy, viz Obrázek 19. Jestliže je smysl otáčení klikové hřídele stejný jako na obrázku, gyroskopický moment má tendenci zdvihát motocykl na zadní kolo.



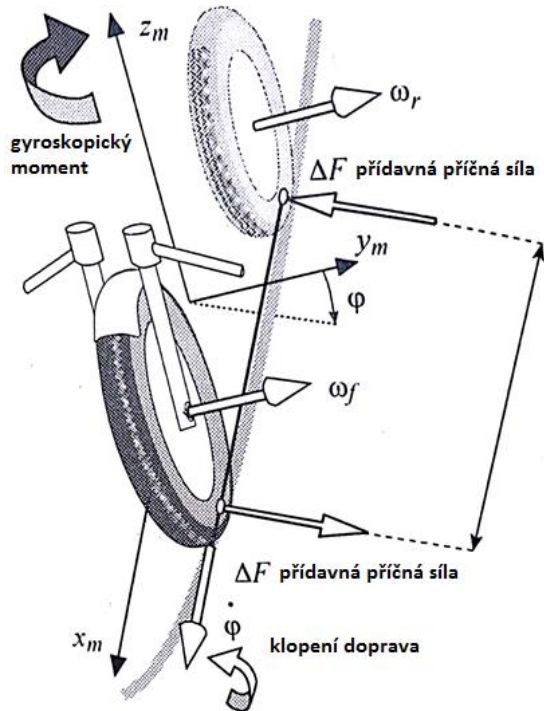
Obrázek 19 Gyroskopické účinky u podélně umístěného motoru [1]

### 3.4 Stabilita při nestacionárním zatáčení

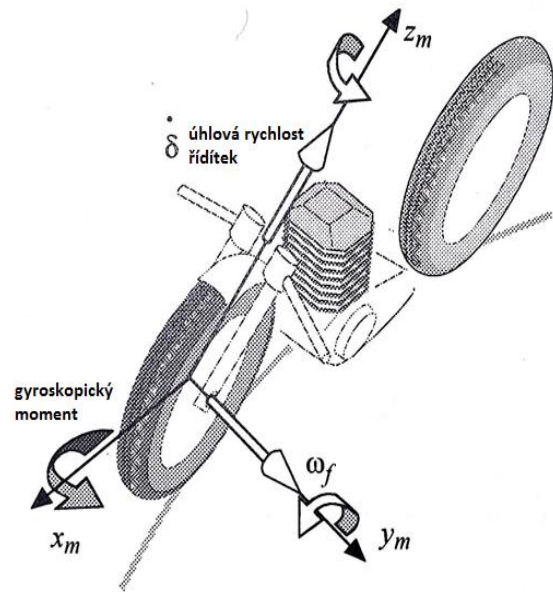
Nestacionární zatáčení je spjato především s nájezdem a výjezdem ze zatáčky. V prvním kroku budeme uvažovat v prvním kroku nekonstantní úhel klopení a poté také nekonstantní úhel natočení řídicíků. Důležité je zmínit, že při nestacionárním zatáčení nezanikají gyroskopické účinky uvedené v podkapitole o stacionárním zatáčení. Při nestacionárním zatáčení vznikají nové gyroskopické účinky, které se superponují na ty již existující.

Nejprve uvažujme nájezd do pravotočivé zatáčky. Motocykl se naklápí doprava a díky rotaci kol vzniká gyroskopický moment, jenž má tendenci stáčet motocykl do směru zatáčky. Díky tomuto momentu vznikají ve stykových plochách pneumatik přídavné příčné síly, jak je patrné z Obrázku 21. Naopak při výjezdu ze zatáčky dochází ke zmenšování úhlu klopení a gyroskopický moment má opačný směr.

Jestliže budeme uvažovat situaci, kdy dochází k rotaci řídicíků (Obrázek 20), vznikají rovněž gyroskopické účinky. Tento jev je pro nezkušeného jezdce poměrně nezvyklý. Pokud se motocykl pohybuje určitou rychlostí s nulovým úhlem klopení a zatočí řídicíky na jednu stranu, motocykl se naklopí na opačnou stranu a má tendenci pohybovat se proti směru původního jezdcova impulsu. Tento jev se nazývá protisměrné řízení (v angličtině často counter-steering) a je účinnou metodou pro rychlou změnu směru jízdy, pokud se v cestě objeví nečekaná překážka.



Obrázek 21 Gyr. úč. při nájezdu do zatáčky [1]



Obrázek 20 Gyr. úč. od rotace řídktek [1]

Na následujícím obrázku je ukázáno, že s využitím gyroskopických účinků mohou jezdcí freestyle motokrosu předvádět akrobatické triky. Situace na obrázku je docílena pomocí rotace řídktek za předpokladu, že se otáčí přední kolo. Natočením řídktek na opačnou stranu jezdec motocykl vyrovná.



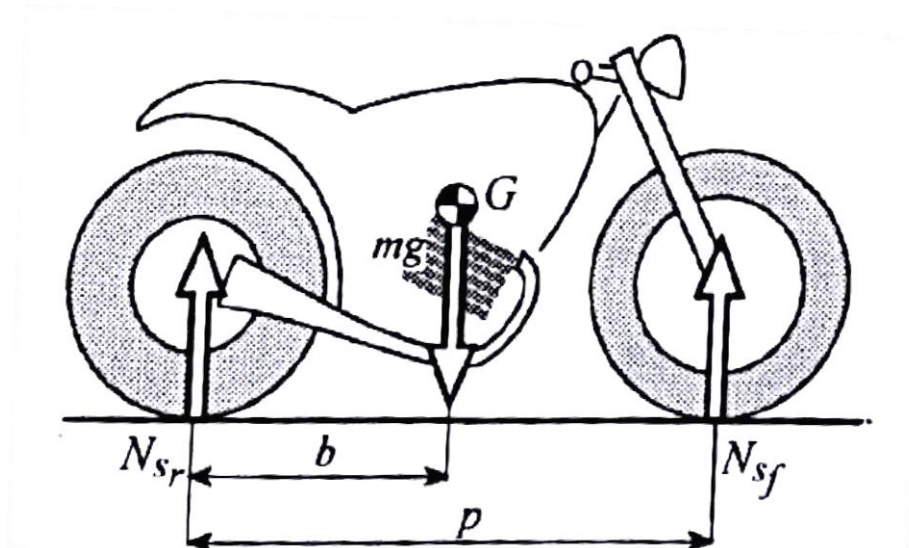
Obrázek 22 Akrobacie díky gyroskopickým účinkům [3]



## 4 Rozložení hmotnosti a momenty setrvačnosti

Na trhu se vyskytuje nepřeberné množství různých motocyklů s rozličnými jízdními vlastnostmi. Jejich hmotnost začíná pod 100 kilogramy u těch nejmenších a může se vyšplhat až k 400 kilogramům u opravdu velkých motocyklů. Právě hmotnost a parametry s ní spojené mají zásadní vliv na chování motocyklů a proto je pro přesné simulace nezbytné znát tyto parametry co nejpřesněji.

### 4.1 Rozložení hmotnosti mezi přední a zadní kolo



Obrázek 23 Poloha těžiště v podélném směru [1]

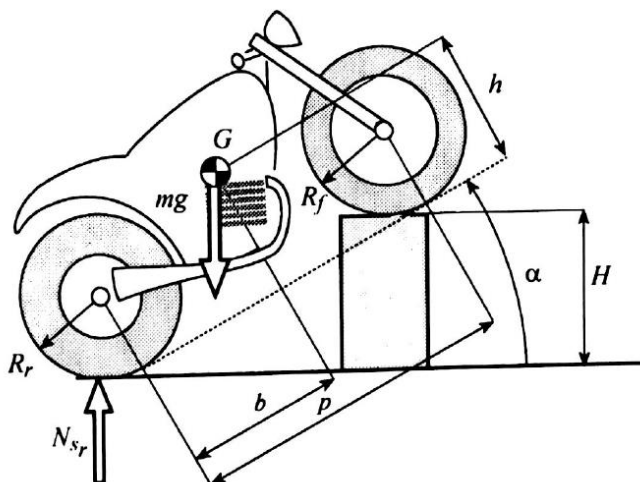
Na obrázku výše jsou znázorněny proměnné, ze kterých lze určit polohu těžiště v podélném směru. Vycházíme ze souřadného systému SAE s počátkem ve stykovém bodě zadního kola s vozovkou. Veličinu  $b$  lze jednoduše určit z podmínky momentové rovnováhy k počátku souřadného systému:

$$b = \frac{N_{sf}}{mg} p \quad (23)$$

Po naměření příslušných hodnot na motocyklu VM450 zjistíme, že hodnota  $b = 684$  mm. Rozložení hmotnosti je 47,2% na předním kole a 52,8% na kole zadním. Určení polohy těžiště ve vertikálním směru je o něco náročnější. Princip metody je založen na tom, že známe polohu těžiště v horizontálním směru a přední kolo umístíme na vyvýšenou podložku se známou výškou, viz následující obrázek. Tímto dojde k nárůstu normálové reakce na zadním kole a výšku těžiště určíme pomocí vztahu:

$$h = \left( \frac{N_{sr} p}{mg} - (p - b) \right) \cot \left[ \arcsin \left( \frac{H}{p} \right) \right] + \frac{R_r + R_f}{2} \quad (24)$$

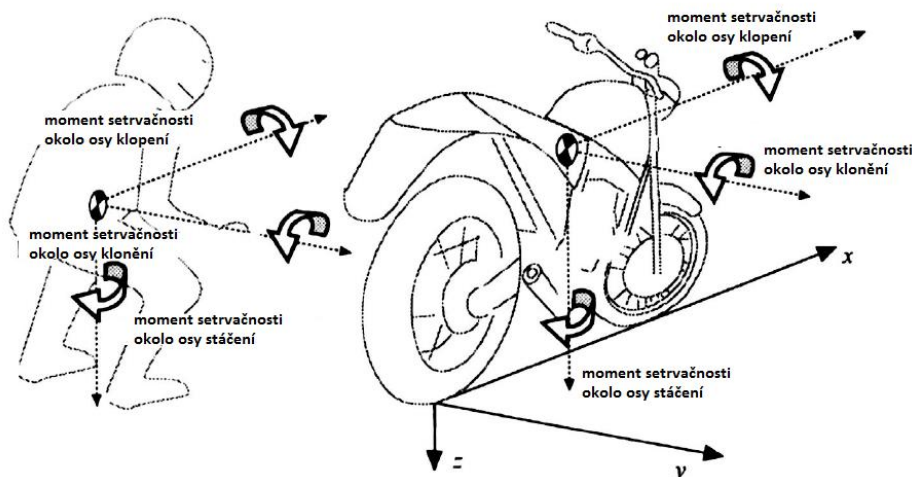
kde všechny obsažené proměnné jsou vyobrazeny na Obrázku 24. Po dosazení získáme výšku těžiště od vozovky  $h = 536$  mm.



Obrázek 24 Schéma určení vertikální souřadnice těžiště [1]

## 4.2 Momenty setrvačnosti

Kromě rozložení hmotnosti mezi přední a zadní kolo hrají klíčovou roli momenty setrvačnosti. Obecně u při simulacích určujeme u motocyklu i jezdce momenty setrvačnosti kolem tří os, viz následující obrázek.



Obrázek 25 Momenty setrvačnosti [1]

V tabulce níže jsou uvedeny typické hodnoty pro gyrační poloměry  $r_g$ . Pokud u tělesa známe gyrační poloměr a hmotnost, příslušný moment setrvačnosti získáme následovně:

$$I = mr_g^2 \quad (25)$$

Tabulka 1 Gyrační poloměry [1]

	Klopení - $r_g$ [m]	Klonění - $r_g$ [m]	Stáčení - $r_g$ [m]
Motocykl	0,18 - 0,28	0,45 - 0,55	0,41 - 0,52
Jezdec	0,23 - 0,28	0,23 - 0,28	0,15 - 0,19

V našem konkrétním případě není nutná znát všechny momenty setrvačnosti, ale jen momenty setrvačnosti okolo osy klonění, jelikož se jedná o simulaci rovinného modelu.

Moment setrvačnosti motocyklu byl získán experimentálně na principu fyzikálního kyvadla. Pokud se fyzikální kyvadlo kýve okolo určité osy, lze k této ose určit moment setrvačnosti, známe-li hmotnost tělesa, polohu těžiště a periodu kmitu. Platí následující vztah:

$$I_s = \frac{mglT^2}{4\pi^2}, \quad (26)$$

kde  $I_s$  je moment setrvačnosti k ose kývání,  $m$  hmotnost tělesa,  $l$  vzdálenost osy kývání od těžiště tělesa a  $T$  perioda kmitu. Na následujícím obrázku je fotka z měření, které probíhalo přímo ve společnosti VM MOTOR.



Obrázek 26 Měření momentu setrvačnosti

Na základě měření lze podle rovnice (4) získat moment setrvačnosti okolo osy kývání. Nicméně v našem případě je potřeba znát moment okolo osy klonění, která prochází těžištěm. Za tímto účelem byla aplikována Steinerova věta ve tvaru:

$$I_t = I_s - ml^2 \quad (27)$$

Záporné znamínko v rovnici (27) respektuje fakt, že k ose procházející těžištěm je moment setrvačnosti nejmenší. Po dosazení rovnice (26) do (27) získáme výsledný moment setrvačnosti okolo osy klonění  $I_t = 26,54 \text{ kgm}^2$ .

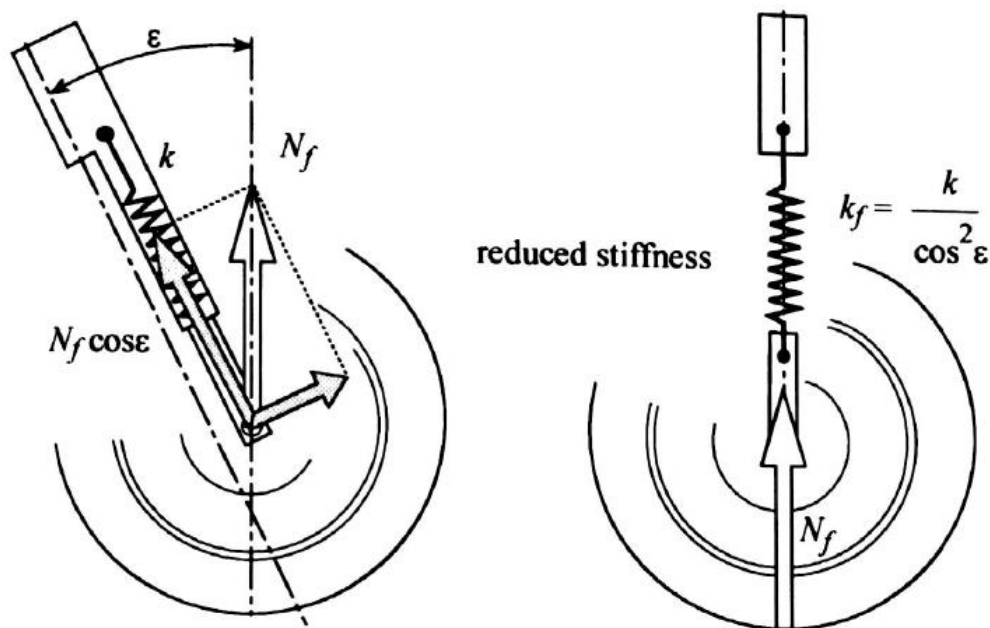
Jestliže chceme brát v potaz vliv jezdce na celkový moment setrvačnosti, je nutné nejprve určit novou polohu těžiště soustavy motocykl-jezdce. Poté, známe-li hmotnost jezdce a příslušný gyrační poloměr, vypočteme moment setrvačnosti jezdce k těžištní ose jezdce. Na závěr opět aplikujeme Steinerovu větu tak, abychom určili celkový moment setrvačnosti k ose procházející novou polohou těžiště. Je ovšem důležité zmínit, že nepředpokládáme vzájemný pohyb těžiště jezdce a motocyklu, což by znamenalo nekonstantní moment setrvačnosti.

## 5 Redukce parametrů zavěšení kol

Jak je patrné ze schématu výpočtového modelu (obr.), zavěšení předního i zadního kola je jednoduše nahrazeno pružinou a tlumičem. Pokud bychom neudělali žádná opatření a pro výpočet jednoduše použili parametry původního motocyklu, výsledky by byly značně nepřesné. Pro lepší výsledky je nezbytné provést redukci parametrů zavěšení kol, která se týká tuhosti pružin, konstanty tlumení tlumičů a hmotnosti neodpružených hmot.

### 5.1 Redukce parametrů zavěšení předního kola

Postup při redukci parametrů předního zavěšení je o poznání jednodušší ve srovnání se zadním zavěšením. Princip je znázorněn na Obrázku 27.



Obrázek 27 Redukovaná tuhost zavěšení předního kola [1]

Myšlenka při redukci předního zavěšení je založena na tom, že pokud je původní a ekvivalentní zavěšení vystaveno stejnému vertikálnímu zatížení, musí u obou docházet ke stejnému vertikálnímu posunutí. Pro redukovanou tuhost  $k_f$  tedy platí:

$$k_f = \frac{k}{\cos^2 \varepsilon}, \quad (28)$$

kde  $k$  je tuhost původního zavěšení a  $\varepsilon$  úhel sklonu přední vidlice. V případě tlumičů je idea obdobná – vertikální rychlosti musí být v obou případech stejné. Pro redukovanou konstantu tlumení  $b_f$  tedy platí:

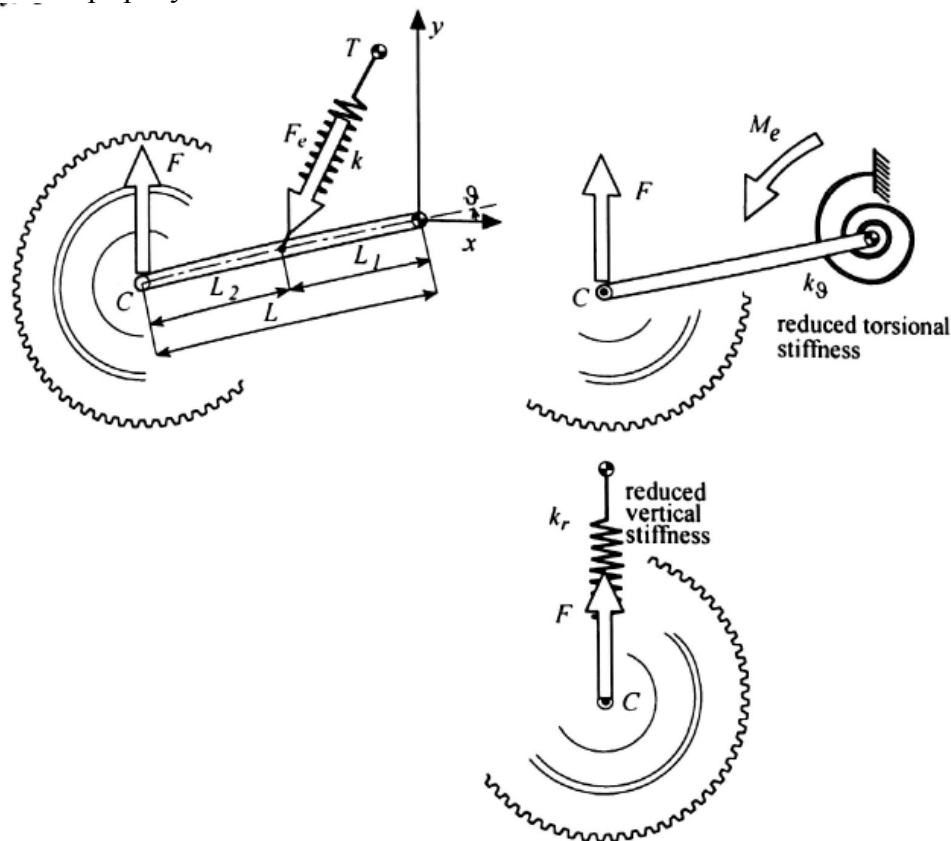
$$b_f = \frac{b}{\cos^2 \varepsilon} \quad (29)$$

Hmotnost neodpružených hmot je v obou případech shodná a není ji třeba přepočítávat.



## 5.2 Redukce parametrů zavěšení zadního kola

U zavěšení zadního kola je situace o poznání složitější. V našem konkrétním případě je obtížnost umocněna tím, že se v zavěšení vyskytuje přepákování, jež má vliv na zdvihovou funkci. Samotné řešení je provedeno pomocí pohybové simulace v prostředí NX s následnou Fourierovou transformací. Nicméně na následujícím obrázku je uveden postup redukce pro jednodušší případy.



Obrázek 28 redukovaná tuhost zavěšení zadního kola [1]

Redukci lze v tomto případě provést dvěma způsoby. Můžeme určit redukovanou torzní tuhost, nebo redukovanou vertikální tuhost. V obou případech nejprve potřebujeme určit převodovou funkci  $\tau$  mezi rychlostí deformace pružiny a úhlovou rychlostí kyvné vidlice, nebo vertikální rychlostí kola. V našem případě se jedná o druhou variantu. Ekvivalentní redukovaná síla  $F$  závisí na převodové funkci a síle v pružině  $F_e$

$$F = F_e \tau_{m,y_c} \quad (30)$$

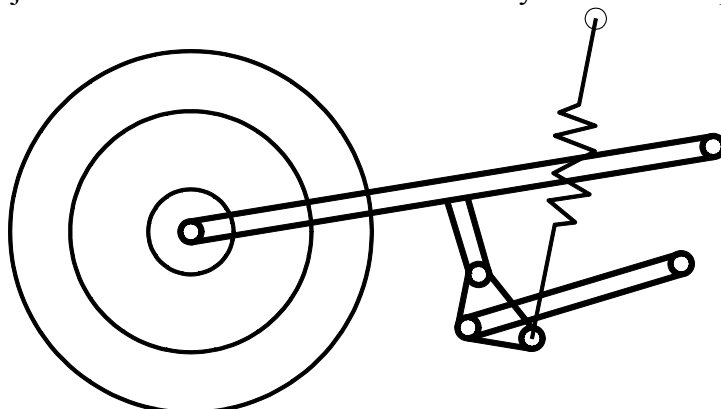
Kde tedy  $\tau_{m,y_c}$  je převodová funkce mezi rychlostí deformace pružiny a vertikální rychlostí kola. Pokud máme závislost síly na deformaci, tuhost je vyjádřena směrnici tečny k této křivce, kterou získáme pomocí derivace. To je klíčová myšlenka při výpočtu redukované tuhosti:

$$k_r = \frac{\partial}{\partial y_c} F \cong k \tau_{m,y_c}^2 \quad (31)$$

Vztah pro redukovanou konstantu tlumení je obdobný:

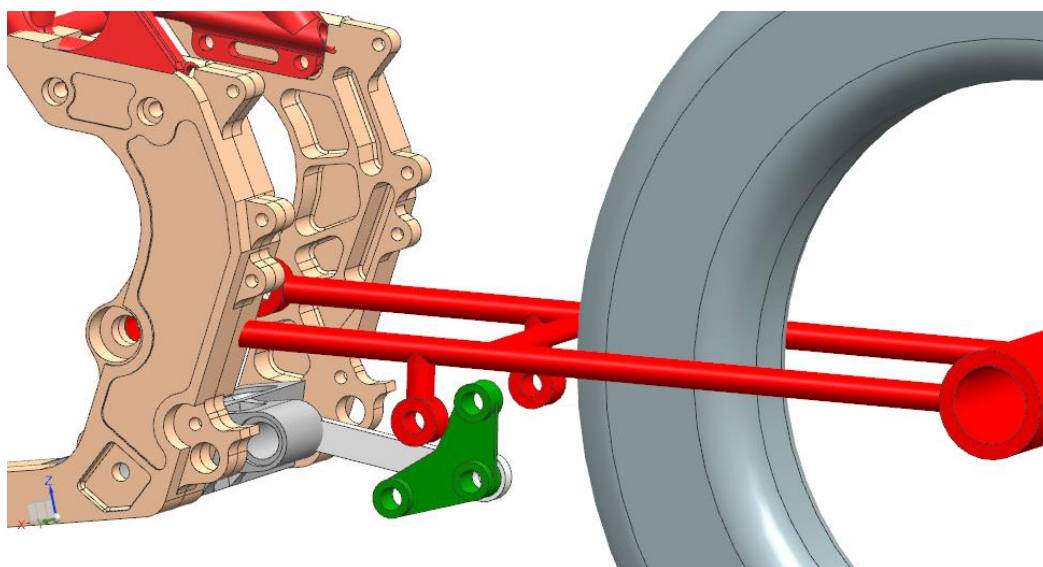
$$b_r \cong b \tau_{m,y_c}^2 \quad (32)$$

Na dalším obrázku je schéma zavěšení zadního kola motocyklu VM 450 s přepákováním.



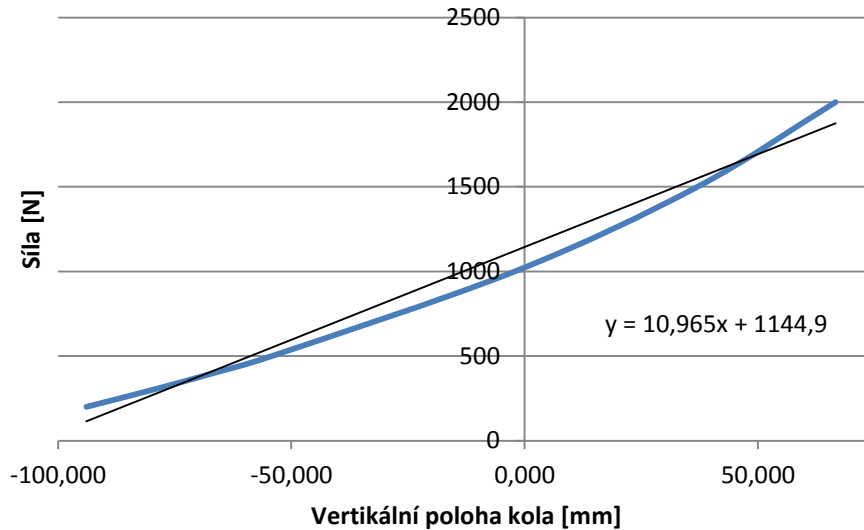
Obrázek 29 Schéma zavěšení s přepákováním

Z důvodu nižší pracnosti oproti analytickému řešení byla redukce tuhosti zadního zavěšení provedena pomocí pohybové simulace v systému NX. Sestava zavěšení je na obrázku 30.



Obrázek 30 Zavěšení zadního kola

Nejprve byla provedena redukce tuhosti. Postup spočíval v tom, že se pro různé vertikální síly působící na kolo sledovalo vertikální posunutí středu kola ve statické rovnováze. Následně byla sestrojena závislost síly na posunutí a pomocí lineární regrese byla zjištěna rovnice aproximační přímky a konečně její směrnice odpovídající redukované tuhosti. Graf závislosti síly na posunutí s regresní přímkou je na Obrázku 31.



Obrázek 31 Závislost síly na poloze kola

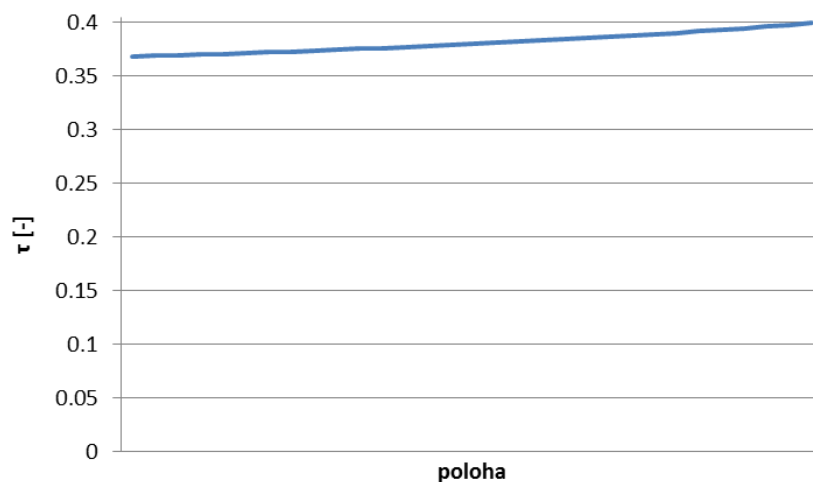
Z předchozího obrázku je patrné, že závislost nemá čistě lineární charakter. Nicméně pro potřebu dynamické simulace je aproximace přímkou postačující. V grafu je zároveň uvedena rovnice přímky, ze které můžeme odečíst redukovanou tuhost zavěšení zadního kola.

$$k_{rz} = 10,965 \text{ [N/mm]}$$

Při zjišťování redukované konstanty tlumení je postup odlišný a vychází z analytického postupu. Nejprve je nutné získat převodovou funkci mezi rychlostí stlačení tlumiče a vertikální rychlostí kola.

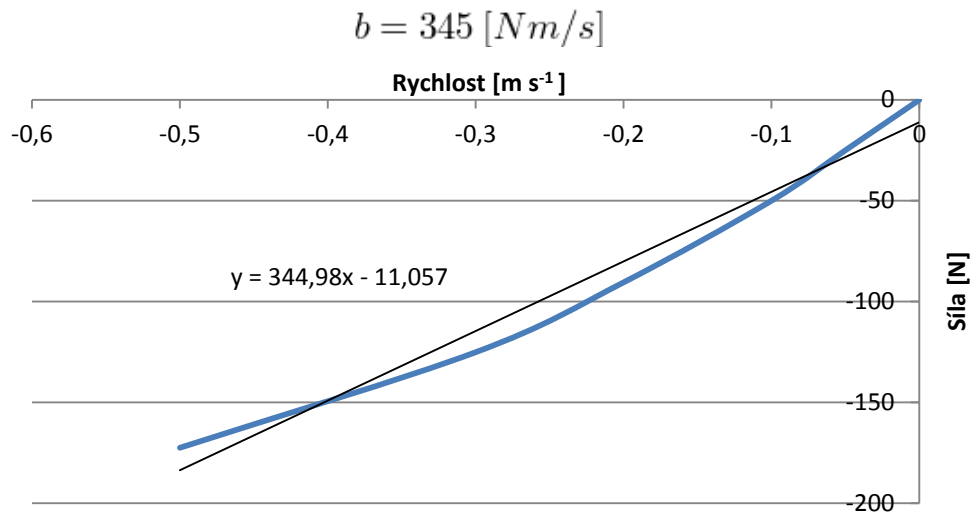
$$\tau = \frac{\dot{L}_{tlum}}{\dot{z}_{kol}} \quad (33)$$

Tato závislost byla opět zjištěna pomocí pohybové simulace v systému NX viz následující obrázek. Z něj je patrné, že hodnota převodu není konstantní, ale že narůstá se stlačením pružiny. Pro naše potřeby neuvažujeme nekonstantní převod a volíme střední hodnotu. Střední hodnota převodové funkce je rovna 0,38.



Obrázek 32 Závislost převodové funkce na poloze

K určení redukované konstanty tlumení je kromě převodové funkce potřeba konstanta tlumení tlumiče, jak je uvedeno v rovnici 32. Na následujícím obrázku 33 je vyobrazena část charakteristiky tlumiče při kompresi. Pro naši úlohu jde především o tuto oblast, jelikož řešíme dopad motocyklu po skoku. Pokud křivku aproximujeme přímkou, její směrnice udává konstantu tlumení, která má hodnotu:

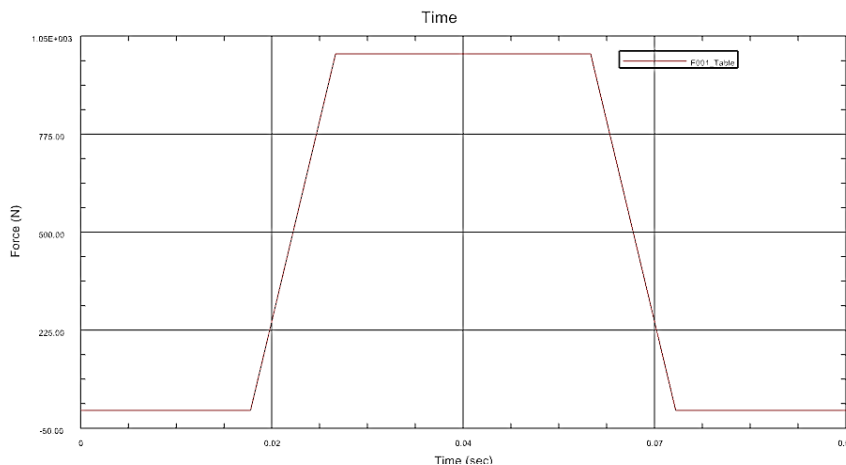


Obrázek 33 Část charakteristiky tlumiče – stlačení

Pro určení redukované tuhosti aplikujeme rovnici číslo (5) a výsledná hodnota redukované konstanty tlumení je.

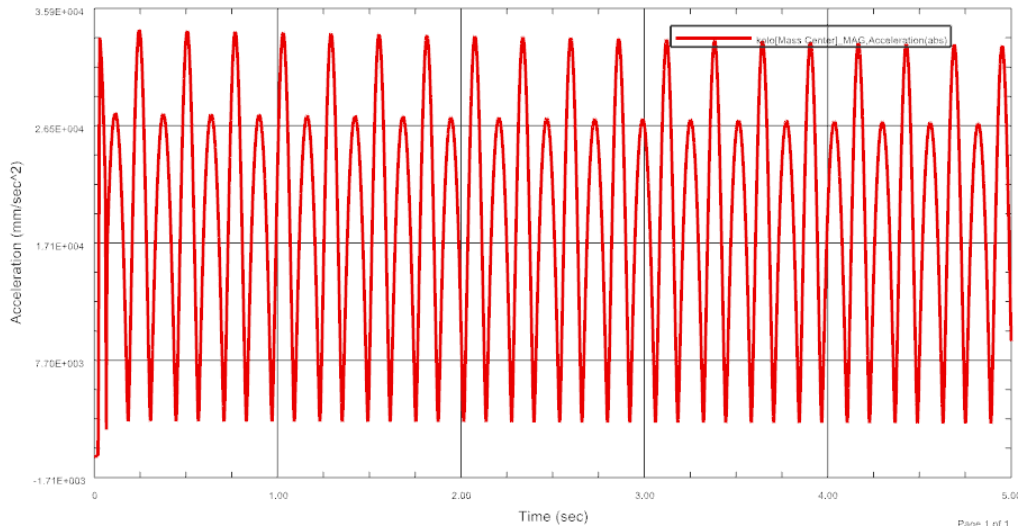
$$b_r = 49,8 \text{ [Nm/s]}$$

Zavěšení zadního kola obsahuje více komponentů než zavěšení předního kola. Jejich hmotnost není zanedbatelná a značně ovlivňuje setrvačné síly. Proto je nezbytné provést rovněž redukci hmotnosti tak, aby zjednodušený model, který při výpočtu uvažujeme, lépe vystihoval skutečné chování. Idea při redukci hmotnosti vychází z toho, že redukované a skutečné zavěšení má shodnou vlastní frekvenci. Za tímto účelem byla v systému NX provedena dynamická simulace, která sledovala odezvu zavěšení na silový impuls s průběhem na následujícím obrázku.



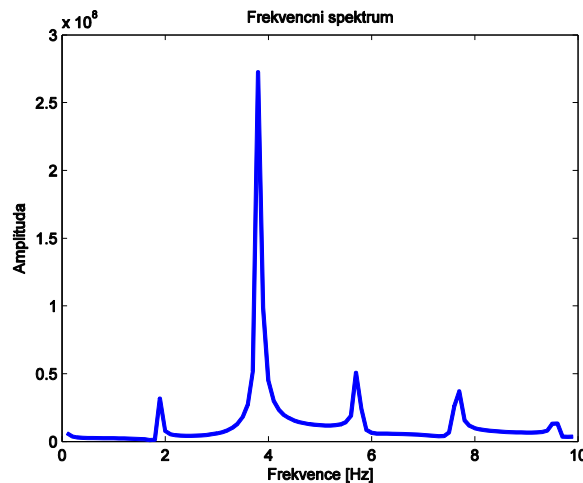
Obrázek 34 Silový impuls

Sledováno bylo zrychlení kola v absolutní hodnotě, viz obrázek 35.



Obrázek 35 Zrychlení kola v absolutní hodnotě

Dalším krokem je zpracování signálu v MATLABu a získání vlastní frekvence kmitání. Existuje více způsobů jak získat vlastní frekvenci. V tomto případě byla využita rychlá Fourierova transformace (angl. – FFT), protože její realizace v MATLABu je velmi snadná. Na následujícím obrázku je frekvenční spektrum daného signálu.



Obrázek 36 Frekvenční spektrum

Z grafu na obrázku 36 plyne, že nejvýznamnější frekvence má hodnotu 3,8 Hz, což je tedy hodnota vlastní frekvence zavěšení zadního kola. Ostatní špičky jsou zanedbatelné. Nyní lze již snadno určit redukovanou hmotnost, neboť pro vlastní frekvenci systému s jedním stupněm volnosti platí:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_r}{m_r}} \quad (34)$$

Jednoduchou úpravou vyjádříme redukovanou hmotnost.

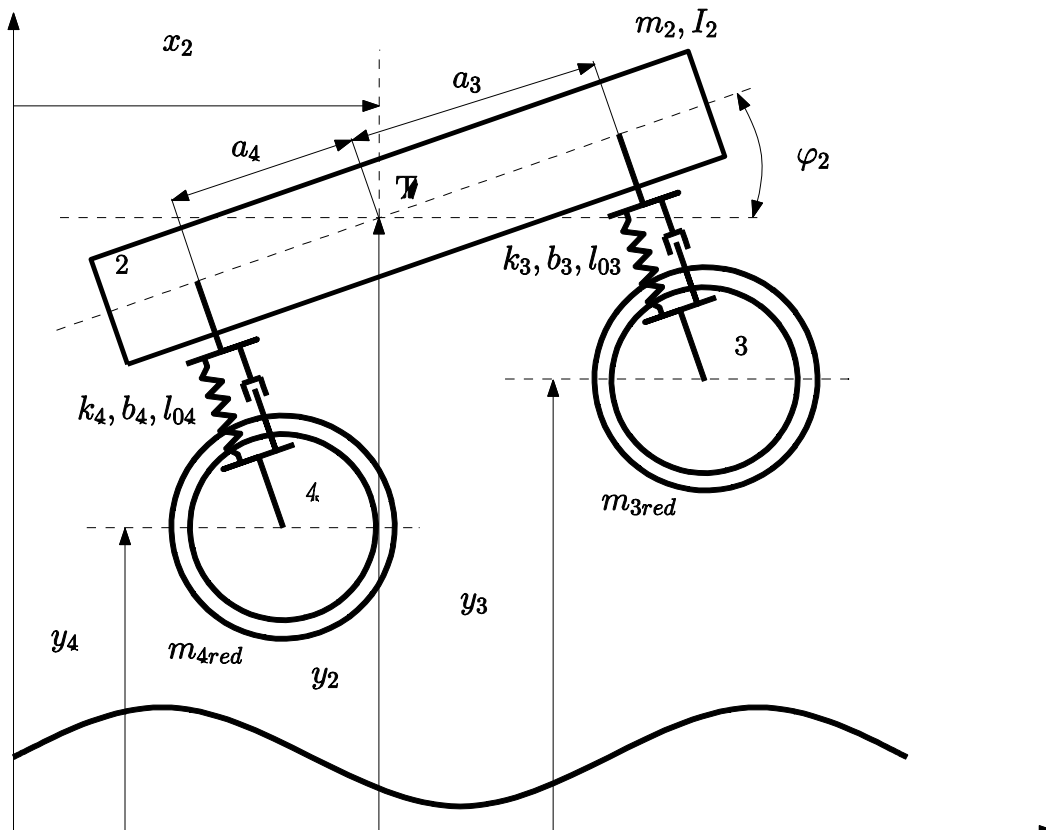
$$m_r = \frac{k_r}{(2\pi f_0)^2} \quad (35)$$

Po dosazení zjistíme, že redukovaná hmotnost má hodnotu:

$$m_r = 19,25 \text{ kg}$$

## 6 Matematický model

Návrh motocyklových komponentů pro sportovní zaměření je komplikovaný úkol vzhledem k požadavkům na spolehlivou funkci a zároveň nízkou hmotnost. Získat přesné zatěžovací stavy pro pevnostní výpočty je takřka nemožné, ale pro určitý náhled může sloužit modelování dynamických systémů. Za tímto účelem byl sestaven zjednodušený nelineární rovinný dynamický model motocyklu s 5 stupni volnosti, který pomůže získat okrajové podmínky pro pevnostní výpočet rámu. Zároveň lze díky tomuto přístupu do jisté míry předpovídat dynamické chování motocyklu. Schéma výpočtového modelu je na obrázku (37).



Obrázek 37 Schéma výpočtového modelu

Na schématu jsou rovněž vyznačeny nezávislé souřadnice vyjadřující jednotlivé stupně volnosti, tudíž vektor zobecněných souřadnic  $\mathbf{q}$  má následující podobu:

$$\mathbf{q} = [x_2, y_2, \varphi_2, y_3, y_4]^T \quad (36)$$

K odvození pohybových rovnic byly využity Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (37)$$

kde členy  $E_k$ ,  $E_p$  a  $\mathcal{R}$  představují kinetickou energii, potenciální energii a Rayleighovu disipační funkci.  $Q_i$  vyjadřuje  $i$ -tou složku vektoru vnějších sil. Pro kinetickou energii soustavy platí:



$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ m_c \dot{x}_2^2 + I_c \dot{\varphi}_2^2 + m_c \dot{y}_2^2 + m_{3red} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{y_2 + a_3 \sin \varphi_2 - y_3}{\cos \varphi_2} \right) \right]^2 + m_{4red} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{y_2 - a_4 \sin \varphi_2 - y_4}{\cos \varphi_2} \right) \right]^2 \right\} \quad (38)$$

První tři členy zde vyjadřují kinetickou energii třech stupňů volnosti motocyklu jako celku a zbylé dva členy představují kinetickou energii pohybu předního a zadního kola. Potenciální energie soustavy má tvar:

$$E_p = \frac{1}{2} \left[ k_3 \left( l_{03} - \frac{y_2 + a_3 \sin \varphi_2 - y_3}{\cos \varphi_2} \right)^2 + k_4 \left( l_{04} - \frac{y_2 - a_4 \sin \varphi_2 - y_4}{\cos \varphi_2} \right)^2 \right] \quad (39)$$

A Rayleighova disipační funkce:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \left\{ b_3 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{y_2 + a_3 \sin \varphi_2 - y_3}{\cos \varphi_2} \right) \right]^2 + b_4 \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{y_2 - a_4 \sin \varphi_2 - y_4}{\cos \varphi_2} \right) \right]^2 \right\} \quad (40)$$

Pro malé úhly lze  $\sin \varphi_2$  položit nule a  $\cos \varphi_2$  jedné, čímž by se celý systém rovnic linearizoval, ale pro pohyb motocyklu není tento zjednodušující předpoklad vhodný a je nutné řešit nelineární diferenciální rovnice. Následujícím krokem je dosazení rovnic (38),(39),(40) do rovnice (37). Po provedení příslušných derivací dle rovnice (37) a úpravami získáme matici hmotnosti  $\mathbf{M}$ , matici tuhosti  $\mathbf{K}$  a matici tlumení  $\mathbf{B}$ . Nicméně samotný postup zde z důvodu zdlouhavosti není uveden.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{3red} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{4red} \end{bmatrix} \quad (41)$$

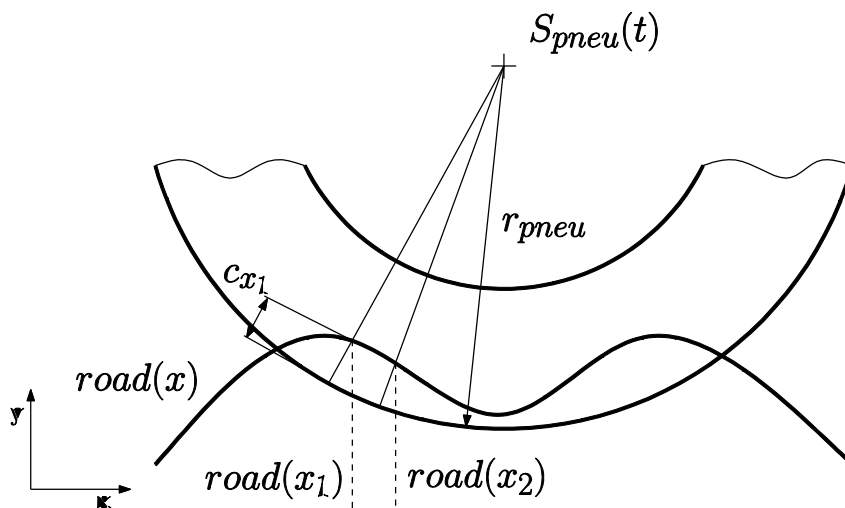
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 + k_4 & \frac{(k_3 a_3 - k_4 a_4) \sin \varphi_2}{\varphi_2} & -k_3 & -k_4 \\ 0 & (k_3 a_3 - k_4 a_4) \cos \varphi_2 & \frac{(k_3 a_3^2 - k_4 a_4^2) \sin 2\varphi_2}{2\varphi_2} & -k_3 a_3 \cos \varphi_2 & k_4 a_4 \cos \varphi_2 \\ 0 & -k_3 & \frac{-k_3 a_3 \sin \varphi_2}{\varphi_2} & k_3 & 0 \\ 0 & -k_4 & \frac{k_4 a_4 \sin \varphi_2}{\varphi_2} & 0 & k_4 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 + b_4 & (b_3 a_3 - b_4 a_4) \cos \varphi_2 & -b_3 & -b_4 \\ 0 & (b_3 a_3 - b_4 a_4) \cos \varphi_2 & (b_3 a_3^2 - b_4 a_4^2) \cos^2 \varphi_2 & -b_3 a_3 \cos \varphi_2 & b_4 a_4 \cos \varphi_2 \\ 0 & -b_3 & -b_3 a_3 \cos \varphi_2 & b_3 & 0 \\ 0 & -b_4 & b_4 a_4 \sin \varphi_2 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Na první pohled je patrná nelinearita tím, že některé z prvků matic nejsou konstantní, ale jsou funkcí souřadnice  $\varphi_2$ , což značně ovlivňuje způsob řešení. V dalším kroku je nutné určit vektor vnějších silových účinků, jenž obsahuje tíhové síly a síly plynoucí z kontaktu pneumatiky s vozovkou.

## 6.1 Model kontaktu pneumatiky s vozovkou

Kontakt pneumatiky s vozovkou je zdrojem klíčových silových účinků ovlivňujících motocykl. V této úloze není důležitá znalost adhezních poměrů, a proto je model zaměřen pouze na získání normálových sil v kontaktu s vozovkou. Protože se zabýváme rovinnou úlohou bez zatačení, neuvažujeme profil pneumatiky a v podstatě ji při výpočtu nahrazujeme poddajným válcem s jednotkovou výškou. Schéma modelu je na následujícím obrázku.



Obrázek 38 Model kontaktu pneumatiky s vozovkou

Při výpočtu kontaktních tlaků vycházíme ze znalosti polohy středu pneumatiky v daný časový okamžik. Jestliže dojde k tomu, že vzdálenost některého z bodů povrchu vozovky od středu pneumatiky je menší než poloměr pneumatiky, vzniká ve stykové plošce kontaktní tlak  $p_k$ , pro který platí:

$$p_k = k_p c \quad (44)$$

Kde  $k_p [N/m^2]$  vyjadřuje radiální tuhost pneumatiky a  $c$  přesah, který je definován tak, že nabývá pouze kladných hodnot. Důležité je uvědomit si, že přesah je funkcí polohy pneumatiky a času, čímž do systému vnáší značnou nelinearitu. Pro diferenciální normálovou sílu platí:

$$dN = k_p c ds \quad (45)$$

Diferenciál  $ds$  zde představuje element oblouku pneumatiky. Diferenciální normálová síla má směr kolmý na tečnu k vozovce a v našem případě potřebujeme znát její složky v horizontálním a vertikálním směru. Díky znalosti derivace funkce popisující vozovku získáme sklon vozovky v daném bodě a poté již není složité určit jednotlivé složky diferenciální normálové síly.

$$dN_x = k_p c \sin \left( \arctan \frac{droad}{dx} \right) dx \quad (46)$$

$$dN_y = k_p c \cos \left( \arctan \frac{droad}{dx} \right) dx \quad (47)$$

K samotné integraci dochází až nakonec.

$$N_x = \int_{x(S_{pneu})-r_{pneu}}^{x(S_{pneu})+r_{pneu}} dN_x \quad (48)$$

$$N_y = \int_{x(S_{pneu})-r_{pneu}}^{x(S_{pneu})+r_{pneu}} dN_y \quad (49)$$

$b_p$

Na první pohled složité integrační meze vyjadřují pouze to, že kontakt hledáme pouze ve spodním půlkruhu pneumatiky a nepředpokládáme, že by ke kontaktu mohlo dojít v horní části kola. Integrační meze jsou obsaženy v deklaraci for-cyklu v níže uvedeném úryvku ze zdrojového kódu.

Zdrojový kód z MATLABu:

```
N3=[0 0]';
dN1=0;
dN2=0;

for j=round((R3(1)-r3/2)/roadstep):round((R3(1)+r3/2)/roadstep)
    Cj=sqrt((R3(1)-road(j,1))^2+(R3(2)-road(j,2))^2);
    if Cj<r3
        if r3-Cj>presah3(i)
            presah3(i)=r3-Cj;
        end
        dN1=kp*(r3-Cj)*(road(j-1,2)-road(j+1,2))/(sqrt((2*roadstep)^2+(road(j-1,2)-road(j+1,2))^2))*roadstep;
        dN2=kp*(r3-Cj)*(2*roadstep)/(sqrt((2*roadstep)^2+(road(j-1,2)-road(j+1,2))^2))*roadstep;

        N3(1)=N3(1)+dN1;
        N3(2)=N3(2)+dN2;
    end
end
```

Odvozený matematický model pneumatiky je tedy založen na modelu elastického kontaktu. Pokud bychom potřebovali simulovat hysterezi pneumatiky, lze do modelu vnést tlumící síly. Ty budou závislé na rychlosti deformace pneumatiky, tedy časové derivaci přesahu. Zároveň budou souviset s velikostí kontaktní plošky, která má návaznost na normálovou sílu. Tlumící sílu je možné určit pomocí vztahu:

$$N_b = \dot{c}N \frac{b_p}{k_p} \quad (50)$$

V rovnici (50)  $\dot{c}$  vyjadřuje rychlost deformace pneumatiky a hysterezní konstantu pneumatiky. Díky modelu kontaktu pneumatiky s vozovkou jsme získali část vektoru vnějších silových účinků, a pokud ho doplníme o tíhové síly, lze přistoupit k samotnému numerickému řešení.

## 6.2 Numerické řešení soustavy nelineárních diferenciálních rovnic

Pro numerické řešení byla vybrána metoda středního zrychlení, protože je vždy numericky stabilní a relativně jednoduchá na implementaci. Cílem je tedy řešit soustavu pěti pohybových rovnic zapsanou maticově a doplněnou o počáteční podmínky.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_n(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (51)$$

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (52)$$

Metoda středního zrychlení je založena na tom, že mezi dvěma časovými hladinami uvažujeme konstantní zrychlení ve tvaru:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}) \quad (53)$$

Integrací předchozí rovnice získáme aproximační vztahy pro rychlosti a výchylky

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}) \quad (54)$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{\mathbf{q}}_t + \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}) \quad (55)$$

Dosazením vztahů (54) a (55) do rovnice (51) dostaneme:

$$\mathbf{Z}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} \quad (56)$$

kde

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \quad (57)$$

a

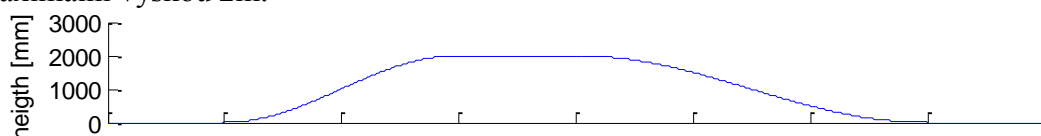
$$\tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} = \mathbf{f}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_N(\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}, t+\Delta t) - (\mathbf{B} + \Delta t \mathbf{K}) \dot{\mathbf{q}}_t - \mathbf{K} \mathbf{q}_t - \left( \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B} + \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{K} \right) \ddot{\mathbf{q}}_t \quad (58)$$

Poté následuje výpočet zrychlení pro další časovou hladinu

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \mathbf{Z}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t} \quad (59)$$

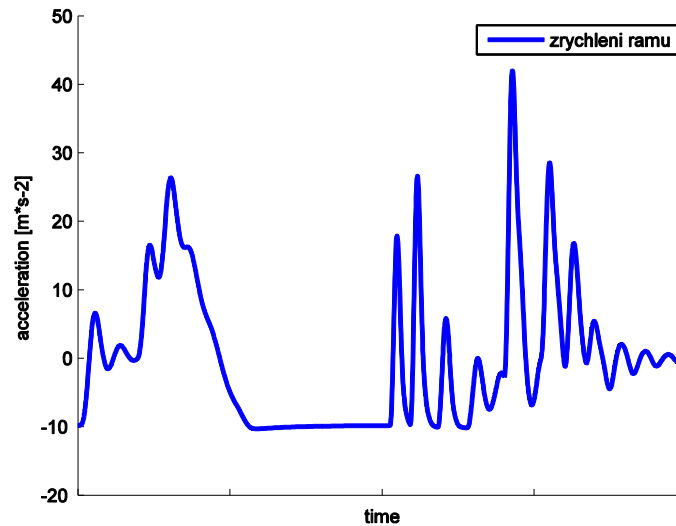
Jak je patrné ze vztahu (58), vektor pravé  $\tilde{\mathbf{f}}_{t+\Delta t}$  strany obsahuje veličiny, které jsou v čase  $t$  neznámé. Z tohoto důvodu probíhá celé řešení jako iterační proces, kdy při přechodu na další časovou hladinu vycházejí vstupní hodnoty z poslední iterace předchozí časové hladiny.

Při motokrosových závodech se nejnevhodnější zátěžové stavy vyskytují při dopadu motocyklu po skoku. Proto byl jako referenční překážka zvolen skok s celkovou délkou 30m a maximální výškou 2m.



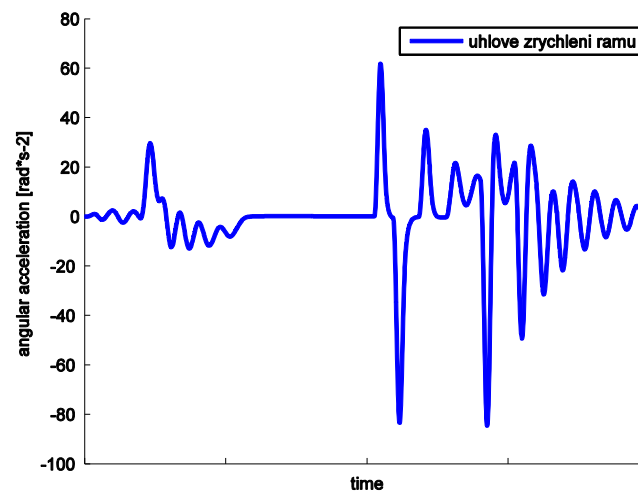
Obrázek 39 Skok

Délka celé simulace je přibližně 3,5 vteřiny s časovým krokem 0,001s. Výsledky vertikálního zrychlení rámu jsou na následujícím obrázku. Nárůst zrychlení na počátku simulace odpovídá nájezdu motocyklu na překážku. V momentě, kdy dojde k oddělení kol od země, zrychlení klesá na hodnotu gravitačního zrychlení. Jakmile kola opět navážou kontakt s vozovkou, zrychlení nabývá opět kladných hodnot, přičemž dochází k rozkmitání rámu. Maximální hodnota vertikálního přetížení je  $42 \text{ ms}^{-2}$ .



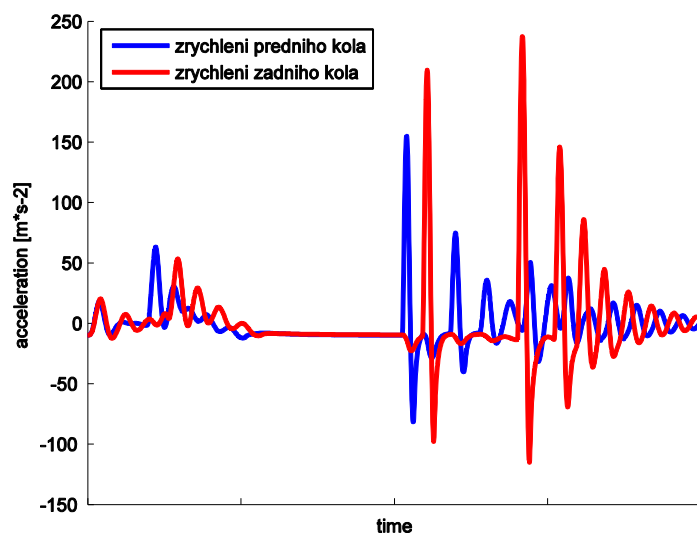
Obrázek 40 Zrychlení rámu

Úhlové zrychlení rámu je na obrázku 41. a dokazuje, že matematický model funguje i v tomto směru.



Obrázek 41 Průběh úhlového zrychlení

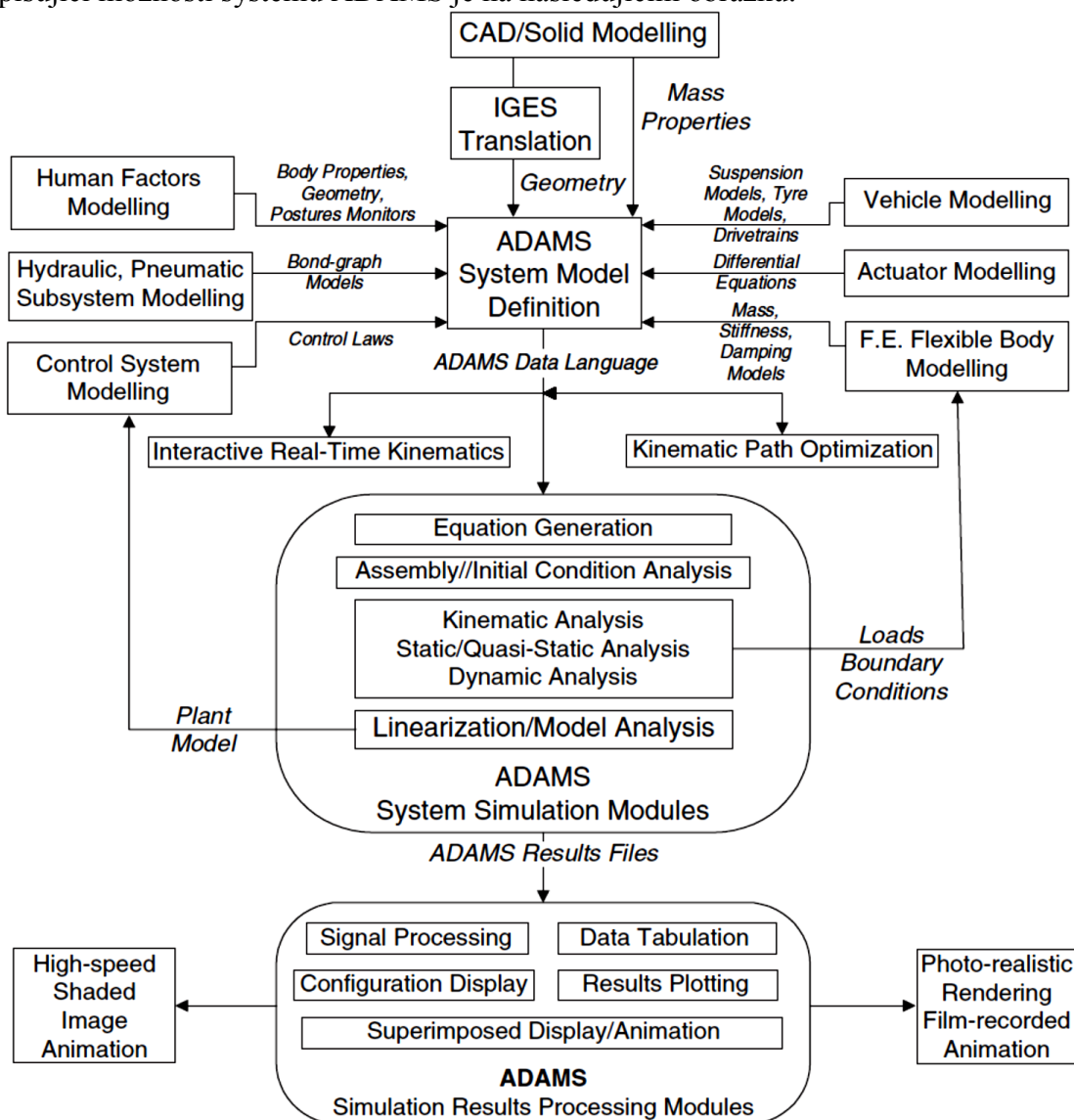
Největší hodnoty zrychlení se podle očekávání objevují u obou kol, viz následující obrázek. V maximálních hodnotách se blíží  $250 \text{ ms}^{-2}$ .



Obrázek 42 Průběh zrychlení předního a zadního kola

## 7 Multibody simulace v prostředí ADAMS/VI-Motorcycle

Existuje celá řada profesionálních komerčních softwarů pro dynamické simulace systémů s více stupni volnosti. Mezi nejvýznamnější v oblasti dynamiky vozidel patří Amesim, Modelica a právě zde použitý ADAMS od společnosti MSC. Pro účely simulace dynamiky motocyklů je navíc využito modulu VI-Motorcycle, jenž byl vyvinut společností VI-Grade. Model motocyklu se skládá z několika subsystémů – jezdec, rám, přední a zadní zavěšení, pneumatiky a pohonné ústrojí. Jednotlivé subsystémy jsou vytvořeny na bázi šablon, kde je parametricky definovaná geometrie pomocí tzv. hardpointů. Výměna informací mezi šablonami je zprostředkována díky komunikátorům. Nedílnou součástí je také definice vozovky, po které se vozidlo pohybuje. Pohybové rovnice v ADAMSu nevznikají pomocí Lagrangeových rovnic, ale jsou tvořeny na bázi metody uvolňování. Výsledkem je tedy soustava diferenciálně-algebraických rovnic (anglicky často DAE), která klade specifické požadavky na způsob řešení na rozdíl od soustavy čistě diferenciálních rovnic. Diagram popisující možnosti systému ADAMS je na následujícím obrázku.



Obrázek 43 Možnosti systému ADAMS [5]

Jak již bylo nastíněno výše, model motocyklu ve VI-Motorcycle se skládá z více subsystémů. Vizualizace modelu je na Obrázku 44.





**Obrázek 44 Model motocyklu**

Před každou simulací je důležité stanovit si, co od ní očekáváme. Jízdní stavy motokrosových motocyklů při závodech mají značně nahodilý charakter a je v podstatě nemožné přesně předpovídat chování motocyklu pomocí dynamické simulace. V tomto případě je cílem spíše verifikace matematického modelu a odhad sil, které mohou na motocykl působit, jakožto vstup pro MKP výpočet.

V kapitole věnované matematickému modelu bylo zmíněno, že za nejhorší zátěžný stav považujeme dopad motocyklu po skoku. Stejná myšlenka byla využita i zde, a tak v definici vozovky byla využita stejná funkce, která popisuje překážku ve tvaru skoku, viz následující obrázek.

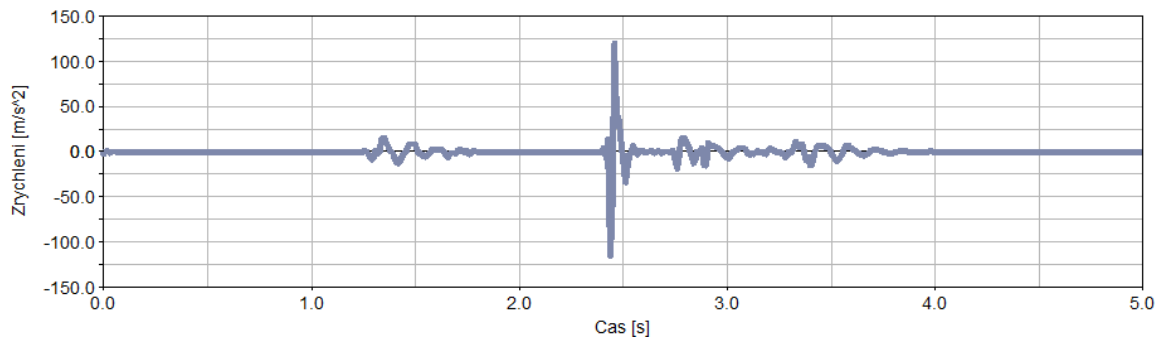


**Obrázek 45 Překážka v systému ADAMS**

Jedná se o typ simulace řízenou tzv. VDF souborem, díky které lze simulovat například i gyroskopické efekty, které byly popsány dříve. VDF soubor je textový soubor, ve kterém jsou definovány konstanty PID regulátoru, jenž se stará o řízení motocyklu, optimální

způsob řazení rychlostních stupňů. Také je zde odkaz na RDF soubor, v němž je definována ideální trajektorie a rychlostní profil sloužící jako vstup do PID regulátoru.

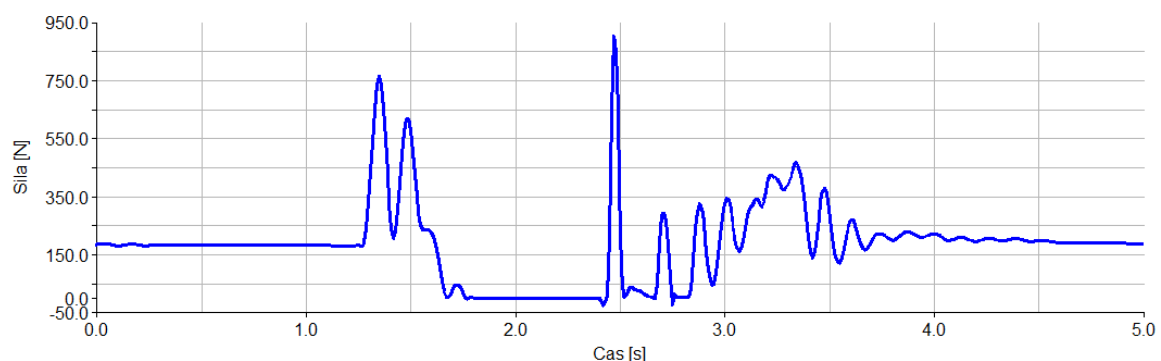
Úloha je tedy následovná. Motocykl najíždí na skok s maximální výškou 2 m rychlostí 15 m/s a sledujeme jednotlivé veličiny v průběhu simulace o celkové době 5 s. Průběh zrychlení předního kola je na Obrázku 46. Z grafu je patrný počáteční nájezd na překážku, následné vyrovnání znamená, že je motocykl ve vzduchu. Náhlá špička značí dopad předního kola, poté pokračuje mírné kmitání, dokud se kolo neuklidní. Maximální hodnota zrychlení dosahuje přibližně  $120 \text{ m/s}^2$ .



Obrázek 46 Zrychlení předního kola

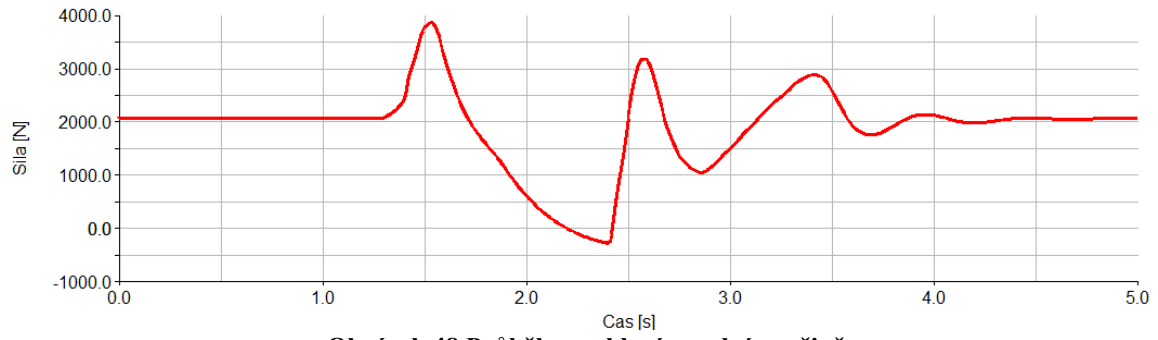
Pokud bychom chtěli porovnat výsledek s matematickým modelem odvozeným v kapitole 8, je nutné zmínit, že zde je zrychlení vyjádřeno jiným způsobem. Zatímco u matematického modelu se jedná o absolutní vertikální zrychlení, zde jde o relativní zrychlení, které vychází z časové derivace rychlosti deformace pružiny. Důkazem toho je i to, že zde zrychlení nenabývá záporné hodnoty, když je motocykl ve vzduchu. Pokud provedeme potřebná opatření, zjistíme, že odchylka se pohybuje kolem 10%, což je v tomto případě přijatelná chyba.

Průběh síly v přední pružině na Obrázku 47 lze vysvětlit podobným způsobem jako u zrychlení. Po dopadu síla dosahuje maxima 900 N a následuje několik odskoků, dokud se síla neustálí na hodnotě odpovídající statické rovnováze, která zároveň odpovídá hodnotě na začátku simulace.



Obrázek 47 Průběh síly v přední pružině

Průběh síly v zadní pružině je již bez dalšího komentáře na Obrázku 48. Maximální hodnota dosahuje 3870 N.



Obrázek 48 Průběh zrychlení v zadní pružině

## 8 MKP analýza rámu

Rám motocyklu VM 450 je příhradového typu. Skládá se z několika částí – hlavní příhradové části z trubek z běžné konstrukční oceli, dvou nosníků ze slitiny hliníku a jednoho příčnicku ze slitiny hliníku. Navíc se jedná o otevřený rám, což znamená, že blok motoru je nosnou částí a má zásadní vliv na celkovou tuhost rámu.



Obrázek 49 Model rámu

### 8.1 Stanovení okrajových podmínek.

Pro závodní motokrosově motocykly je charakteristické silné dynamické zatížení. Toto zatížení má velmi proměnlivý charakter, což znamená, že provádět přesné analýzy je velmi složité. S jistou mírou zjednodušení lze ovšem ověřit, zda mají potencionální konstrukční úpravy pozitivní, či negativní dopad. Volba okrajových podmínek musí nicméně co nejlépe vystihovat skutečné zatížení motocyklu. Pokud si představíme motocykl jako izolované těleso v prostoru, má šest stupňů volnosti, zanedbáme-li relativní pohyby subsystémů motocyklu vůči rámu. V našem případě řešíme úlohu jako rovinnou, tudíž uvažujeme pouze 3 stupně volnosti. Motocykl se tedy může volně pohybovat v rovině. Klasický přístup k řešení pomocí metody konečných prvků vyžaduje odebrání všech stupňů volnosti zkoumaného modelu, jedná-li se o lineární statickou analýzu. K odebrání stupňů volnosti motocyklu musíme přistupovat obezřetně. Jediná místa rámu, kde odebrání stupňů volnosti připadá v úvahu, jsou ta, jež jsou vázána na ostatní subsystémy motocyklu. Především tedy místa napojení přední vidlice a připojení kyvné vidlice s centrálním tlumičem. V těchto místech jsou díky ADAMSu známé silové účinky a tedy i potencionální reakce v uložení. Toto je jedna z klíčových myšlenek této MKP analýzy.

Jak už bylo zmíněno, rám motocyklu je vystaven silnému dynamickému namáhání, a tak aplikace lineárního statického řešiče nemusí být na první pohled vhodná. Jestliže připustíme určité zjednodušení, lze úlohu řešit jako kvazistatickou. Pak je možné použít

lineární statický řešič. Dynamické síly působící na motocykl byly stanoveny díky simulaci v ADAMS/VI-Motorcycle, krom nich je motocykl také zatížen silami setrvačnými. Jelikož je úloha řešena jako kvazistatická, rám motocyklu musí splňovat podmínky dynamické rovnováhy. Vnější silové účinky musí být v rovnováze se setrvačnými silovými účinky. Následující rovnice vyjadřují podmínky rovnováhy.

$$\sum_i F_i + F_D = 0 \quad (60)$$

$$\sum_i M_i + M_D = 0 \quad (61)$$

Vnější silové účinky  $F_i$  byly získány pomocí již zmíněného ADAMS/VI-Motorcycle. Momenty  $M_i$  vznikají rovněž v důsledku těchto sil. V potaz byly brány pouze nejvyšší hodnoty sil v pružinách průběhu simulace a to z toho důvodu, že v momentě, kdy síla v pružině dosáhne maxima, rychlost její deformace je nulová. Z čehož plyne, že tlumící síla v tlumiči je také nulová. Reakce vyvolané silou v pružině v místech, kde je kyvná vidlice připojena k rámu, byly stanoveny statickou analýzou mechanismu ve stejném modulu, který byl použit pro redukci parametrů zavěšení.

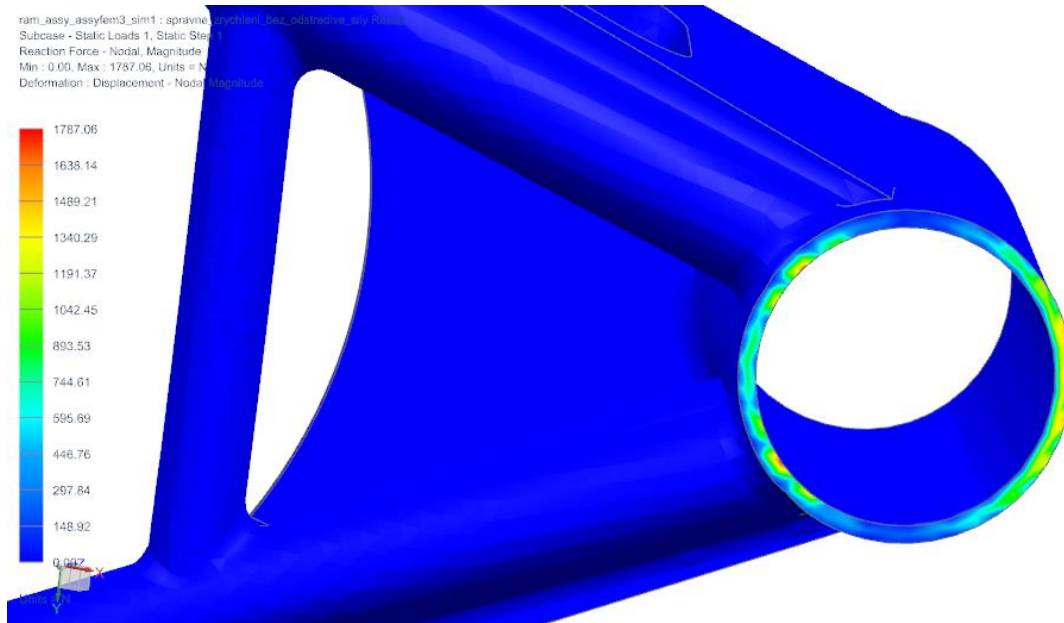
Pro setrvačné silové účinky tedy musí platit:

$$F_D = - \sum_i F_i = ma \quad (62)$$

$$M_D = - \sum_i M_i = I\alpha \quad (63)$$

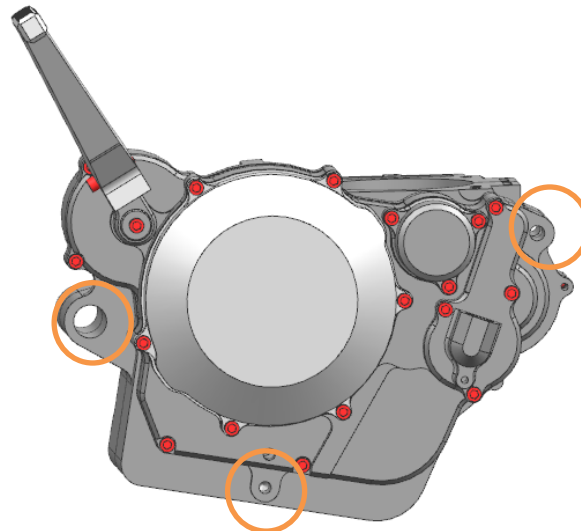
Díky CAD systému NX můžeme snadno získat hmotnost rámu i jeho moment setrvačnosti, a tak z rovnic (62) a (63) jednoduše vyjádříme zrychlení  $a$  a úhlové zrychlení  $\alpha$ . Tyto hodnoty použijeme při zadávání silových účinků do MKP analýzy, neboť systém NX podporuje zatížení zrychlením i pro statické analýzy. Tímto krokem se úloha stává kvazistatickou.

Stupně volnosti byly odebrány v místě, kde je připojena přední vidlice. Jsou zakázány posuvy podél roviny této plochy a kolmo ni. Pokud je úvaha správná, reakce v tomto místě bude stejná jako síla získaná v ADAMSu. Výsledky na Obrázku 50 dokazují, že reakční síla odpovídá předpokládanému stavu.



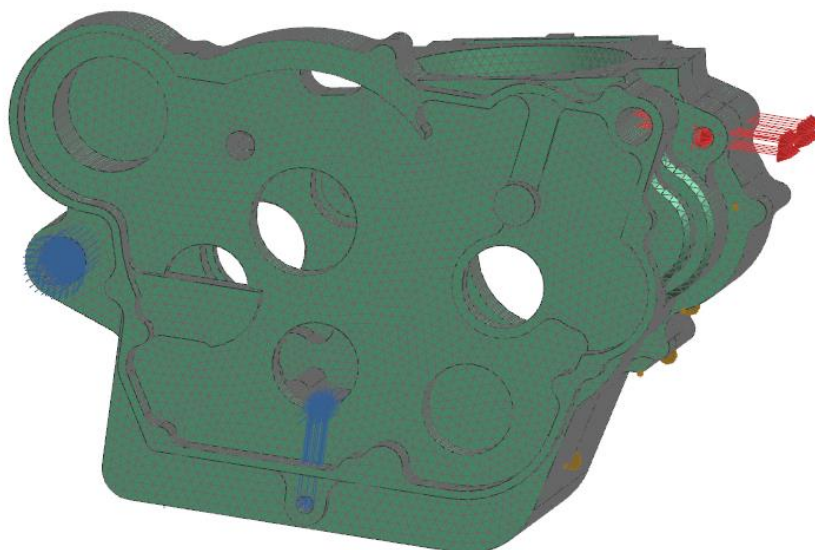
Obrázek 50 Reakce v místě uchycení přední vidlice

Jak již bylo zmíněno, u otevřených rámu hraje blok motoru klíčovou roli v celkové tuhosti. Výhodou je úspora materiálu a tím i hmotnosti, nicméně vysoká tuhost motoru může odhalit slabá místa konstrukce, která by jinak nebyla problematická. Na Obrázku 51 je zobrazen model motoru se zvýrazněnými místy, kde je uchycen k rámu.



Obrázek 51 Model bloku motoru

Jednou z možností, jak vnést vliv tuhosti motoru do konečnoprvkového modelu rámu, je připojit k MKP modelu rámu celou síť motoru. Úlohu je možné takto řešit, nicméně vzhledem ke značné složitosti geometrie motoru je tento přístup nevýhodný. Samotná síť motoru obsahuje příliš mnoho elementů, které by zbytečně prodlužovaly výpočetní čas. Navíc pro nás nejsou napěťové výsledky motoru důležité, protože se zaměřujeme pouze na samotný rám. Proto byla tuhost motoru stanovena samostatnou MKP simulací, viz obrázek níže, a její vliv na rám je simulován 1D pružinovými elementy.

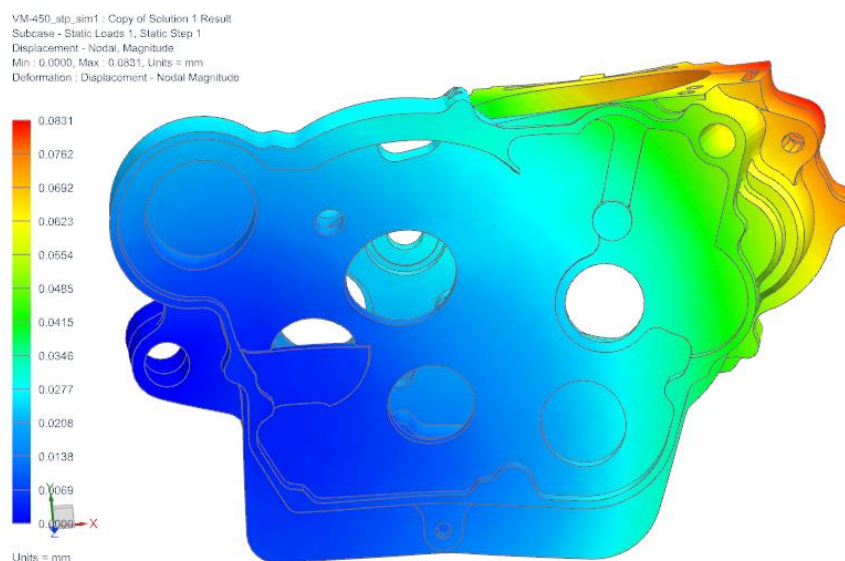


Obrázek 52 MKP model motoru

Motor je natahován v místě uchycení silou 10000 N a na základě výsledků deformace je stanovena tuhost podle vztahu

$$k = \frac{F}{u} \quad (64)$$

Kde  $u$  představuje hodnotu posunutí. Výsledky deformace jsou uvedeny na následujícím obrázku.



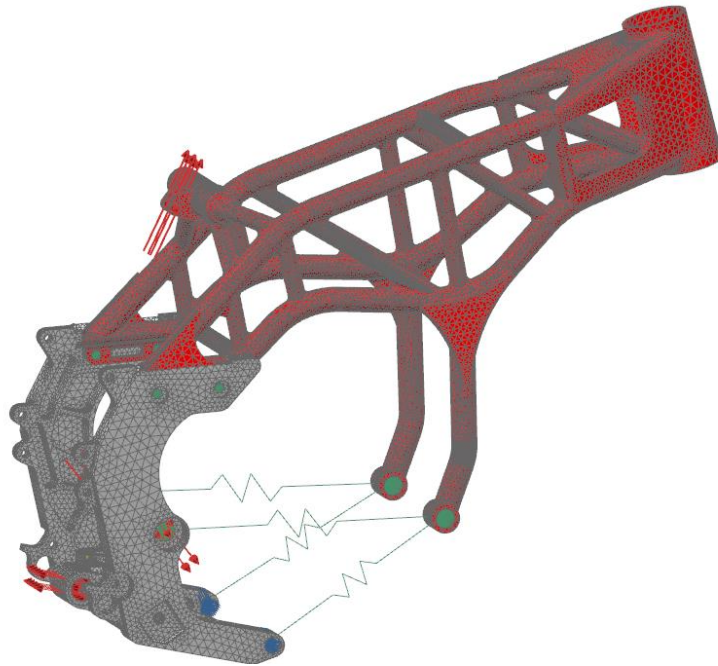
Obrázek 53 Deformace bloku motoru

Díky samostatné MKP simulaci bylo zjištěno, že tuhost motoru v tahu je přibližně 120 000 N/mm. Díky tomuto postupu již není nutné zahrnovat síť motoru do MKP modelu rámu, čímž se značně sníží celkový počet elementů. Vliv tuhosti motoru je do MKP modelu rámu zahrnut s využitím pružinových 1D elementů CBUSH1D. Jelikož jsou pružinové prvky vůči sobě orientované paralelně, celková tuhost se mezi ně jednoduše rozdělí.

$$k_i = \frac{k}{i} \quad (65)$$

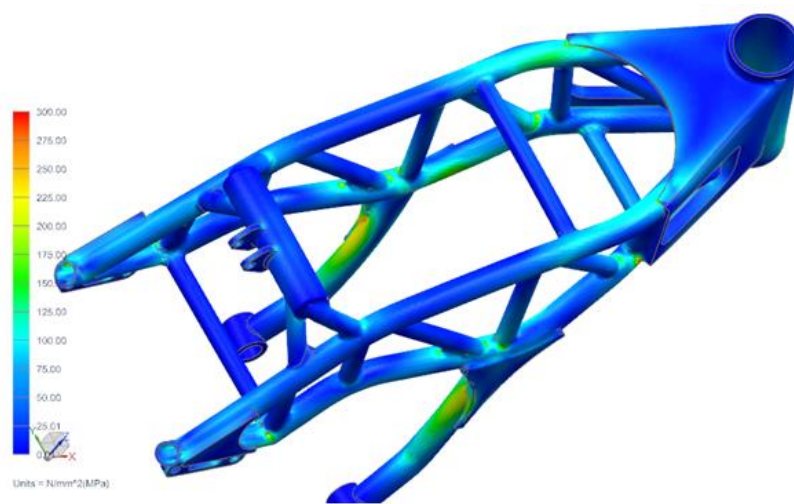


Zde  $k$  vyjadřuje celkovou tuhost motoru,  $i$  počet 1D elementů a  $k_i$  tuhost jedné pružiny. V našem případě byly použity 4 prvky CBUSH1D. Na následujícím obrázku je patrná síť včetně 1D prvků a zátěžných sil.

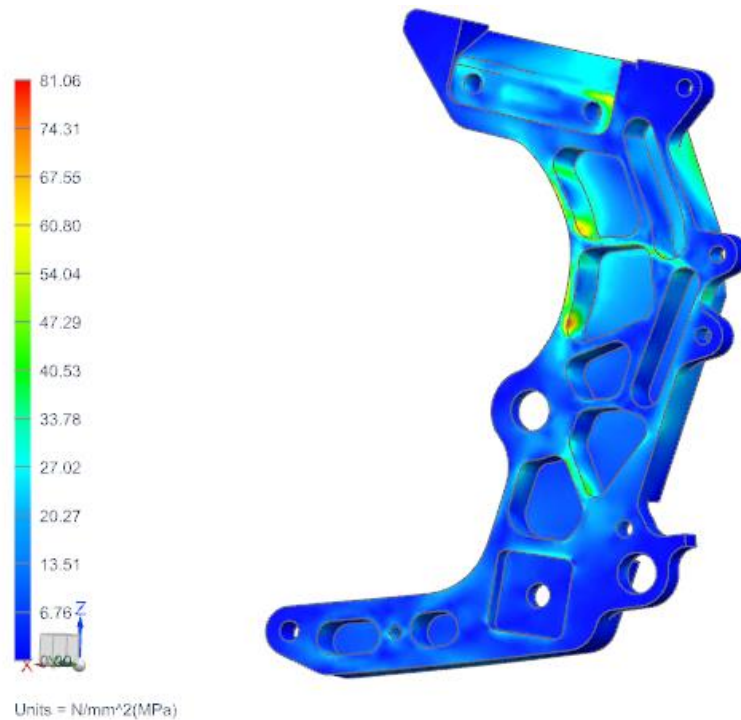


Obrázek 54 Síť rámu včetně CBUSH1D elementů a zatížení

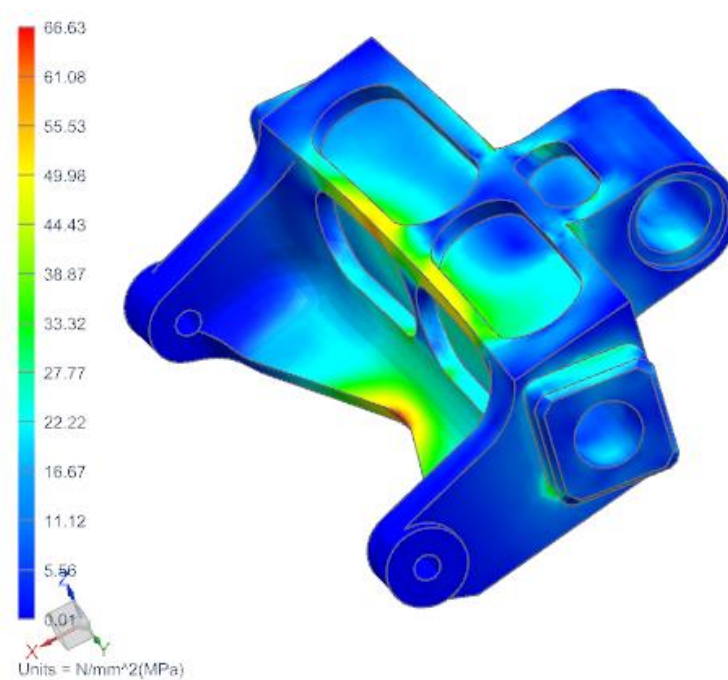
Na Obrázku 55 je průběh napětí von Mises v rámu. Ukázalo se, že v místě, kde rám ve skutečnosti prasknul, se neobjevuje nejvyšší napětí. Jedná se ovšem o oblast, kde se stýká několik svarů, jejichž únosnost je citlivá na provedení. Přesná simulace vystihující napěťové poměry ve svarech je nad rámec této práce. Na Obrázcích 56 a 57 jsou výsledky napětí v nosníku, resp. v příčce.



Obrázek 55 Napětí v rámu

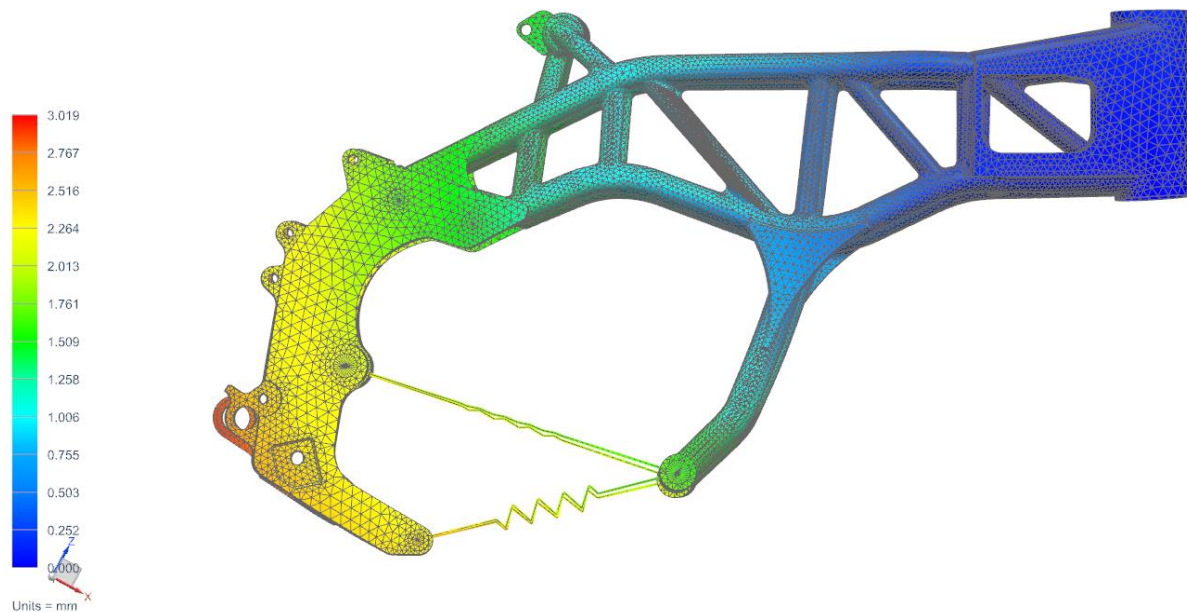


**Obrázek 56 Průběh napětí v nosníku**



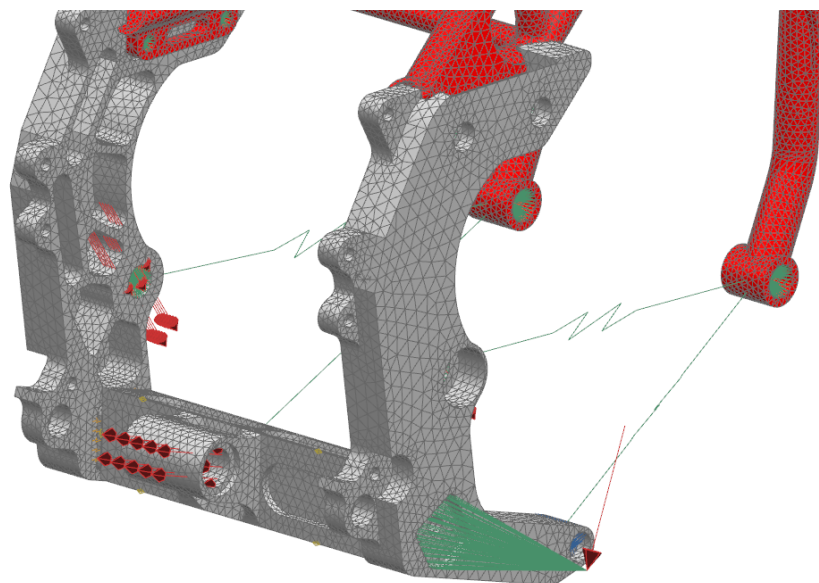
**Obrázek 57 Průběh napětí v příčce**

Ukázalo se, že nejvyšší hodnoty napětí se vyskytují ve stojinách, ke kterým je přichycena přední část motoru. Tento jev je způsoben příliš velkou tuhostí motoru v tahu v porovnání s ohybovou tuhostí stojin. Značná tuhost motoru tedy do jisté míry škodí celému rámu. Co se týče tuhostní analýzy, maximální hodnota deformace je přibližně 3 mm, viz Obrázek 58.



Obrázek 58 Deformace rámu

V rámci analýz byl uvažován i jiný zátěžný stav, který by respektoval nerovnoměrné rozložení hmotnosti jezdce po dopadu. Okrajové podmínky byly definovány tak, jakoby dopadl celou vahou pouze na jednu stupačku. Nicméně výsledky nebyly nijak zásadně odlišné od předchozího případu.



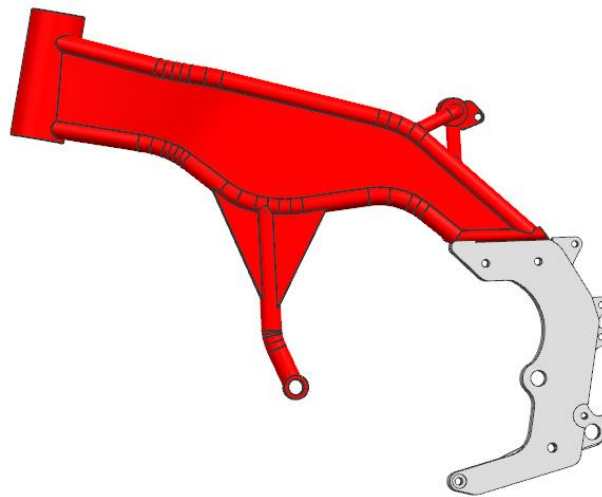
Obrázek 59 Dopad jezdce na jednu stupačku

Kvazistatická simulace nepotvrdila přesnou příčinu selhání rámu, nicméně odhalila některé příležitosti ke zlepšení. V dalším kroku je pozornost zaměřena především na modifikaci stojin. K tomu bude využito topologické optimalizace.

## 8.2 Topologická optimalizace rámu

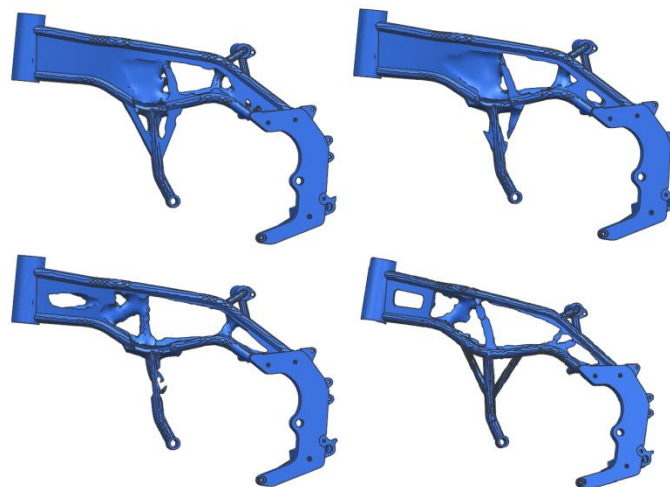
Topologická optimalizace je matematická metoda, jež upravuje rozložení materiálu v tělese, tak aby pro dané okrajové podmínky byly co nejlépe splněné cílové funkce. Použitím topologické optimalizace lze najít optimální tvar tělesa splňující požadavky konstruktéra. Matematické pozadí je v tomto případě velmi komplikované. Některé algoritmy se zabývají orientací materiálu uvnitř elementu, jiné jsou inspirovány bionikou. Topologickou optimalizaci nachází uplatnění především v lineárních statických a modálních analýzách a nabízí celou řadu optimalizačních kritérií.

V tomto případě byla klíčovým kritériem tuhost a objem materiálu. Pomocí topologické optimalizace hledáme takový tvar rámu, který poskytne maximální tuhost při limitovaném objemu materiálu, jenž je k dispozici. Rám motocyklu má rovinu symetrie a zatížení je rovněž symetrické podle této roviny. Z toho plyne, že je možné řešit jen poloviční model, což znamená značnou časovou úsporu. Výchozí model pro topologickou optimalizaci je na následujícím obrázku.



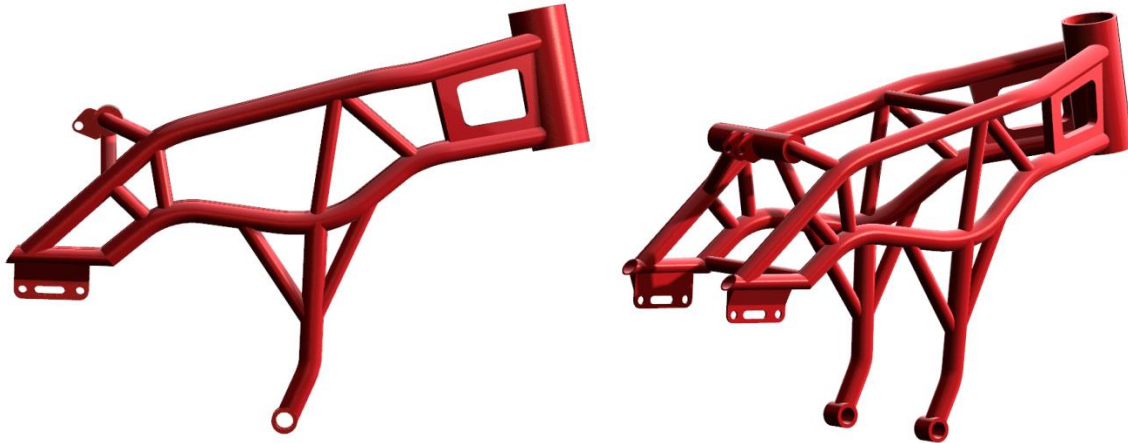
Obrázek 60 Vstupní model pro topologickou optimalizaci

Topologická optimalizace vyžaduje velký počet iterací. Na dalším obrázku je vybráno několik příkladů. Nový návrh rámu vychází z modelu v pravém dolním rohu.



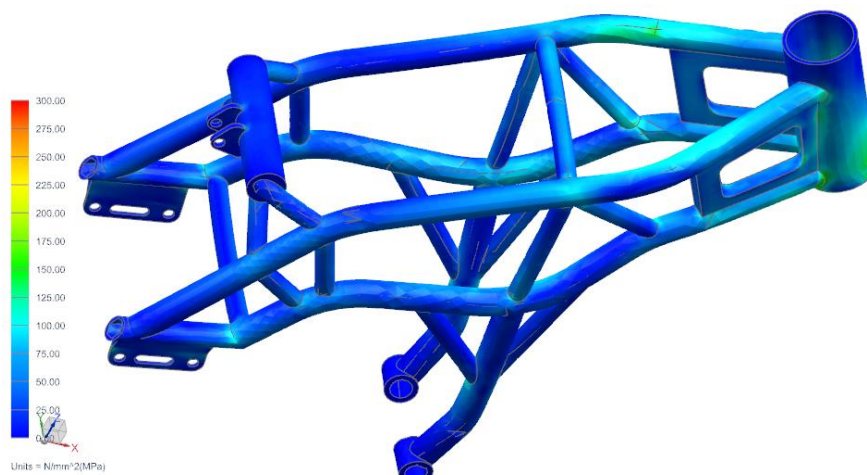
Obrázek 61 Iterace topologické optimalizace



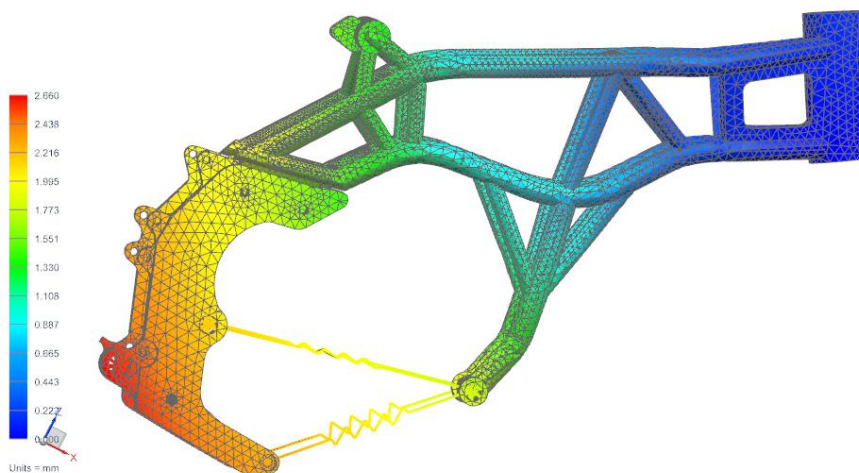


Obrázek 62 Upravený návrh rámu

Nový návrh se vyznačuje nižší hmotností o 200 g oproti původní variantě. MKP analýza upravené varianty návrhu ukazuje nižší celkové hodnoty napětí a jeho rovnoměrnější rozložení, viz Obrázek 63. Rovněž došlo k zlepšení ve výsledcích deformace. Maximální hodnota posunutí upravené varianty je 2,66 mm ve srovnání s 3,019 mm původního rámu.

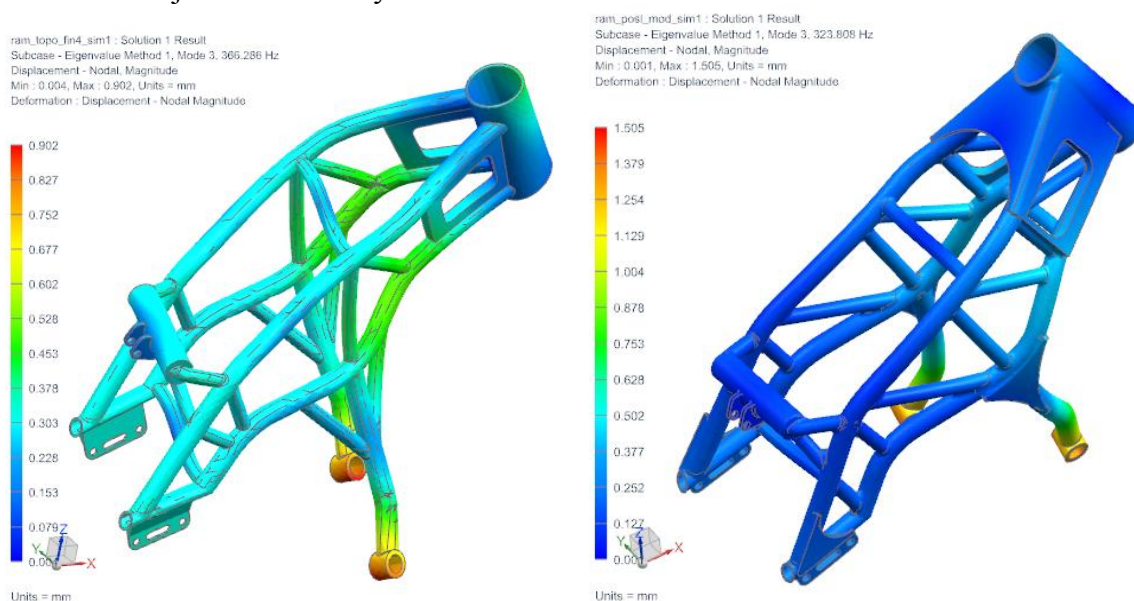


Obrázek 63 Průběh napětí Von Mises v upraveném návrhu



Obrázek 64 Deformace upraveného návrhu

Dalším parametrem, který lze u motocyklových rámců sledovat, je torzní tuhost. Její vliv na jízdní vlastnosti je patrný zejména u silničních motocyklů. V kapitole věnované redukci parametrů zavěšení byl uveden vztah (34), jenž dával do souvislosti tuhost, hmotnost a vlastní frekvenci systému s jedním stupněm volnosti. Plyne z něj, že s rostoucí tuhostí roste vlastní frekvence systému za předpokladu, že je hmotnost konstantní. Pro spojitá tělesa to platí obdobně a lze vyhodnocovat vliv konstrukčních změn na tuhost pomocí vlastních frekvencí. Jestliže příslušná vlastní frekvence (ať už ohybová, či torzní) naroste, zvýší se tuhost konstrukce v tomto směru. Tato myšlenka byla aplikována na rám a na základě výsledků modální analýzy bylo ověřeno, zda změny pomáhají torzní tuhosti, či nikoliv. Třetí vlastní frekvence odpovídající torznímu kmitání u nového návrhu vzrostla na 366 Hz v porovnání s původními 324 Hz, což značí jistý nárůst tuhosti, protože rozdíl ve hmotnosti obou variant je relativně malý.



Obrázek 65 Porovnání 3. vlastní frekvence

## Závěr

První kapitola této práce se týká kinematiky motocyklů. Jsou zde uvedeny vztahy popisující pohyb motocyklu, které se využívají ve výpočetních softwarech. Závěrem kapitoly je vyjádření rovnice křivosti trajektorie, po které se motocykl v zatáčce pohybuje.

Druhá kapitola je věnována pneumatikách a především matematickému modelu prof. Pacejky, jenž je nejvyžívanějším modelem pneumatiky v komerčních softwarech.

Další kapitola se zabývá stabilitou motocyklů. Způsob pohybu jednostopých vozidel se značně liší od vozidel dvoustopých. Zásadní roli zde hrají gyroskopické efekty.

Čtvrtá kapitola je zaměřuje na polohu těžiště a momenty setrvačnosti motocyklu. Je zde popsán způsob, jakým byly určeny požadované veličiny pomocí experimentu.

V páté kapitole je uvedeno, jak lze určit modifikované parametry zavěšení kol motocyklu pro potřeby matematického modelu. U redukce parametrů zavěšení zadního kola se využívá rychlé Fourierovy transformace.

Šestá kapitola je klíčová část této práce a obsahuje odvození matematického modelu motocyklu s pěti stupni volnosti. Dále je zde vytvořen model kontaktu pneumatiky s vozovkou pro určení normálových sil. Závěr kapitoly se věnuje numerické integraci soustavy nelineárních diferenciálních rovnic popisujících motocykl při skoku.

V sedmé kapitole je vyvinutý matematický model verifikován pomocí komerčního programu MSC. ADAMS s využitím pluginu VI-Motorcycle.

Osmá závěrečná kapitola obsahuje analýzu rámu motocyklu VM 450 pomocí metody konečných prvků. Okrajové podmínky byly získány díky dynamickým simulacím z předchozích kapitol. Dále se zde objevuje topologická optimalizace rámu, ze které plyne nový návrh rámu, jenž je následně analyzován pomocí MKP, a výsledky jsou porovnány s původní variantou.

Je nutné zde zmínit, že pro komplexní analýzu rámu by bylo vhodné získávat zátěžné silové účinky statisticky a provádět MKP analýzy s ohledem na únavu materiálu. To je však nad rámec této diplomové práce, a proto zde uvedené pevnostní simulace slouží spíše k porovnání obou variant s ohledem na dynamické poměry po dopadu motocyklu.

Obor mechaniky motocyklů stojí na pozadí ve srovnání s mechanikou dvoustopých vozidel, co se týče počtu publikací i pracovníků věnujících se této problematice. Nicméně se jedná o oblast velice zajímavou s velkým potenciálem pro rozvoj. Další rozvoj této práce může směřovat hned do několika oblastí, mezi něž patří rozšíření rovinného modelu na prostorový, studium adhezních poměrů motokrosové pneumatiky anebo uvažování vlivu poddajnosti vozovky, po které se motocykl pohybuje.



## Literatura

- [1] COSSALTER, V. *Motorcycle Dynamics*. London: Lulu Press, 2006
- [2] DIXON, J. C. *The Shock Absorber Handbook, Second Edition*. Chichester: John Wiley & Sons, 2007
- [3] FOALE, T. *Motorcycle Handling and Chasis Design. The art and science*. Spain: Tony Foale, 2002
- [4] PACEJKA, H. B. *Tyre and Vehicle Dynamics, Second Edition*. Burlington: Butterworth-Heinemann , 2006
- [5] BLUNDELL, M., HARTY, D. *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*. Burlington: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004
- [6] VLK, F. *Teorie a konstrukce motocyklů 1*. Brno: František Vlk, 2004
- [7] VLK, F. *Teorie a konstrukce motocyklů 2*. Brno: František Vlk, 2004
- [8] DUPAL, J. *Výpočtové metody mechaniky*. Západočeská univerzita v Plzni, 2004
- [9] DUPAL, J. *Mechanika 3*. Západočeská univerzita v Plzni, 2012
- [10] <http://www.vmmoto.cz/o-nas/>

## **PŘÍLOHA č. 1**

**Zdrojový kód skriptu v MATLABu**

```

%%
clear;
clc;

tstep = 0.001;
tfin = 5;
% incon_q = [x2 y2 phi2 y3 y4]
incon_q = [25 0.3 0 0.3 0.3]';
incon_qdot = [22 0 0 0 0]';

M=diag([m m2 I2 m3 m4]);
K=[0 0 0 0 0;...
  0 k3+k4 k3*a3-k4*a4 -k3 -k4;...
  0 k3*a3-k4*a4 k3*a3^2+k4*a4^2 -k3*a3 k4*a4;...
  0 -k3 -k3*a3 k3 0;...
  0 -k4 k4*a4 0 k4];

B=[0 0 0 0 0;...
  0 b3+b4 b3*a3-b4*a4 -b3 -b4;...
  0 b3*a3-b4*a4 b3*a3^2+b4*a4^2 -b3*a3 b4*a4;...
  0 -b3 -b3*a3 b3 0;...
  0 -b4 b4*a4 0 b4];

roadstep= 0.001;
xroad = 0:roadstep:100;
yroad = zeros(1,length(xroad));
lnajezd = 10;
lsjezd = 15;
v_skok = 2;
lploch = 5;

for ii=30/roadstep:(30+lnajezd)/roadstep
yroad(ii) = 0.5*v_skok*(sin(-pi/2+pi*(ii-30/roadstep)/(lnajezd/roadstep))+1);
end
for ii=1+(30+lnajezd)/roadstep:1+(30+lnajezd+lploch)/roadstep
yroad(ii)= v_skok;
end
for ii=1+1+(30+lnajezd+lploch)/roadstep:1+1+(30+lnajezd+lploch+lsjezd)/roadstep
yroad(ii) = 0.5*v_skok*(cos(pi*(ii-(1+1+(30+lnajezd+lploch)/roadstep))/(lsjezd/roadstep))+1);
end

road = transpose([xroad; yroad]);
% road = transpose([xroad; 0*sin(0.5*xroad)+0.5]);
%%
%pozice kol v t0
R3=[incon_q(1)+a3*cos(incon_q(3)), incon_q(2)+a3*sin(incon_q(3))-(103+incon_q(4))];
R4=[incon_q(1)-a4*cos(incon_q(3)), incon_q(2)-a4*sin(incon_q(3))-(104+incon_q(5))];

%hledani kontaktu v t0 kolo 3
N3=[0 0]';
xN=0;
yN=0;
dxN3=0;
dyN3=0;
for i=round((R3(1)-r3/2)/roadstep):round((R3(1)+r3/2)/roadstep)

Ci=sqrt((R3(1)-road(i,1))^2+(R3(2)-road(i,2))^2);

if Ci<r3
dN1=kp*(r3-Ci)*(road(i-1,2)-road(i+1,2))/(sqrt(((2*roadstep)^2)+(road(i-1,2)-
road(i+1,2))^2))*roadstep;
dN2=kp*(r3-Ci)*(2*roadstep)/(sqrt(((2*roadstep)^2)+(road(i-1,2)-road(i+1,2))^2))*roadstep;
yN=yN+(R3(2)-road(i,2))*dN1;
xN=xN+(road(i,1)-R3(1))*dN2;
N3(1)=N3(1)+dN1;
N3(2)=N3(2)+dN2;
end
end

% if N3(2)~=0
% dxN3=xN/N3(2); %posunuti pusobiste normalove sily vzhledem k rozlozeni tlaku
% end
% if N3(1)~=0
% dyN3=yN/N3(1);
% end

%hledani kontaktu v t0 kolo 4
N4=[0 0]';
xN=0;
yN=0;
dxN4=0;
dyN4=0;
for i=round((R4(1)-r4/2)/roadstep):round((R4(1)+r4/2)/roadstep)

Ci=sqrt((R4(1)-road(i,1))^2+(R4(2)-road(i,2))^2);

```

```

if Ci<r3
    dN1=kp*(r4-Ci)*(road(i-1,2)-road(i+1,2))/(sqrt(((2*roadstep)^2)+(road(i-1,2)-
road(i+1,2))^2))*roadstep;
    dN2=kp*(r4-Ci)*(2*roadstep)/(sqrt(((2*roadstep)^2)+(road(i-1,2)-road(i+1,2))^2))*roadstep;
    yN=yN+(R3(2)-road(i,2))*dN1;
    xN=xN+(road(i,1)-R3(1))*dN2;
    N4(1)=N4(1)+dN1;
    N4(2)=N4(2)+dN2;
end
end

% if N4(2)~=0
%     dxN4=xN/N4(2);      %posunuti pusobiste normalove sily vzhledem k rozlozeni tlaku
% end
% if N4(1)~=0
%     dyN4=yN/N4(1);
% end

%% pocatecni silove ucinky
Fg=g*[0 -m2 0 -m3 -m4]';
Fh0=[0 0 0 0 0]';
Fn30=[N3(1) 0 0 N3(2) 0]';
Fn40=[N4(1) 0 0 0 N4(2)]';

% pocatecni zrychleni
q0_dotdot= M\ (Fg+Fh0+Fn30+Fn40-B*incon_qdot-K*incon_q);

%alokace matic silovzch ucinku
Fh=cat(2,Fh0,zeros(length(Fh0),tfin/tstep-1));
Fn3=cat(2,Fn30,zeros(length(Fn30),tfin/tstep-1));
Fn4=cat(2,Fn40,zeros(length(Fn40),tfin/tstep-1));
Fk=zeros(length(Fn40),tfin/tstep);
Fb=zeros(length(Fn40),tfin/tstep);

% Z=inv(M+(tstep/2)*B+(tstep^2/4)*K);
%alokace matic polohy, rychlosti, zrychleni
Q=cat(1,incon_q',zeros(tfin/tstep-1,length(incon_q)));
Qdot = cat(1,incon_qdot',zeros(tfin/tstep-1,length(incon_q)));
Qdotdot = cat(1,q0_dotdot',zeros(tfin/tstep-1,length(incon_q)));
presah3=zeros(tfin/tstep,1);
presah4=zeros(tfin/tstep,1);
%%

for i=2:round(tfin/tstep)
    i
    it=0;
    F1=1;
    F2=2;

    Fn3(:,i)=Fn3(:,i-1);
    Fn4(:,i)=Fn3(:,i-1);
    Fb(:,i)=-B*Qdot(i-1,:)' ;
    Fk(:,i)=-K*Q(i-1,:)' ;

    Fn3it=Fn3(:,i);
    Fn4it= Fn4(:,i);
    Fbit=Fb(:,i);
    Fkit=Fk(:,i);

while (abs(F2-F1))/abs(F1) >0.001
    it=it+1
    %predikce
    Fn3(:,i)=Fn3it;
    Fn4(:,i)=Fn4it;
    Fb(:,i)=Fbit;
    Fk(:,i)=Fkit;

    F1=norm(Fn3(:,i)+Fn4(:,i)+Fb(:,i)+Fk(:,i),2);

    Qdotdot(i,:)=(M+(tstep/2)*B+(tstep^2/4)*K)\ (Fg+Fh(:,i)+Fn3(:,i)+Fn4(:,i)+Fb(:,i)+Fk(:,i));
    Qdot(i,:)=Qdot(i-1,:)+0.5*tstep*(Qdotdot(i-1,:)+Qdotdot(i,:));
    Q(i,:)=Q(i-1,:)+Qdot(i-1,:)*tstep+(tstep^2)/4*(Qdotdot(i-1,:)+Qdotdot(i,:));

    %korekce

    % poloha kol
    R3=[Q(i,1)+a3*cos(Q(i,3)), Q(i,2)+a3*sin(Q(i,3))-103+Q(i,4)];
    R4=[Q(i,1)-a4*cos(Q(i,3)), Q(i,2)-a4*sin(Q(i,3))-104+Q(i,5)];

    %hledani kontaktu v korekci kolo 3
    N3=[0 0]';
    xN=0;
    yN=0;

```

```

dxN3=0;
dyN3=0;
for j=round((R3(1)-r3/2)/roadstep):round((R3(1)+r3/2)/roadstep)
    Cj=sqrt((R3(1)-road(j,1))^2+(R3(2)-road(j,2))^2);
    if Cj<r3
        if r3-Cj>presah3(i)
            presah3(i)=r3-Cj;
        end
        dN1=kp*(r3-Cj)*(road(j-1,2)-road(j+1,2))/(sqrt((2*roadstep)^2+(road(j-1,2)-
road(j+1,2))^2))*roadstep;
        dN2=kp*(r3-Cj)*(2*roadstep)/(sqrt((2*roadstep)^2+(road(j-1,2)-road(j+1,2))^2))*roadstep;
        yN=yN+(R3(2)-road(j,2))*dN1;
        xN=xN+(road(j,1)-R3(1))*dN2;
        N3(1)=N3(1)+dN1;
        N3(2)=N3(2)+dN2;
    end
end

%hledani kontaktu v korekci kolo 4
N4=[0 0]';
xN=0;
yN=0;
dxN4=0;
dyN4=0;
for j=round((R4(1)-r4/2)/roadstep):round((R4(1)+r4/2)/roadstep)
    Cj=sqrt((R4(1)-road(j,1))^2+(R4(2)-road(j,2))^2);
    if Cj<r4
        if r4-Cj>presah4(i)
            presah4(i)=r4-Cj;
        end
        Cj4(j)=Cj;
        dN1=kp*(r4-Cj)*(road(j-1,2)-road(j+1,2))/(sqrt((2*roadstep)^2+(road(j-1,2)-
road(j+1,2))^2))*roadstep;
        dN2=kp*(r4-Cj)*(2*roadstep)/(sqrt((2*roadstep)^2+(road(j-1,2)-road(j+1,2))^2))*roadstep;
        yN=yN+(R4(2)-road(j,2))*dN1;
        xN=xN+(road(j,1)-R4(1))*dN2;
        N4(1)=N4(1)+dN1;
        N4(2)=N4(2)+dN2;
    end
end

%%
% %tlumeni pneu
N3b=[0 0]';
N4b=[0 0]';

% if i>2
% R31=[Q(i-2,1)+a3*cos(Q(i-2,3))+(103+Q(i-2,4))*sin(Q(i-2,3)), Q(i-2,2)+a3*sin(Q(i-2,3))-(103+Q(i-
2,4))*cos(Q(i-2,3))];
% R41=[Q(i-2,1)-a4*cos(Q(i-2,3))+(104+Q(i-2,5))*sin(Q(i-2,3)), Q(i-2,2)-a4*sin(Q(i-2,3))-(104+Q(i-
2,5))*cos(Q(i-2,3))];
%
% Cj3=sqrt((R3(1)-road(j,1))^2+(R3(2)-road(j,2))^2);
% Cj4=sqrt((R4(1)-road(j,1))^2+(R4(2)-road(j,2))^2);
%
% Cj31=sqrt((R31(1)-road(j,1))^2+(R31(2)-road(j,2))^2);
% Cj41=sqrt((R41(1)-road(j,1))^2+(R41(2)-road(j,2))^2);
%
% Cj3dot=(r3-Cj3)-(r3-Cj31)/tstep;
% Cj4dot=(r4-Cj4)-(r4-Cj41)/tstep;
%
% N3b=Cj3dot*N3*bp/kp;
% N4b=Cj4dot*N4*bp/kp;
% end
%%
Fn3(:,i)=[N3(1) 0 0 N3(2) 0]';
Fn4(:,i)=[N4(1) 0 0 0 N4(2)]';

Fb(:,i)=-B*Qdot(i,:);
Fk(:,i)=-K*Q(i,:);

Fn3it=Fn3(:,i);
Fn4it=Fn4(:,i);
Fbit=Fb(:,i);
Fkit=Fk(:,i);

F2=norm(Fn3(:,i)+Fn4(:,i)+Fb(:,i)+Fk(:,i),2);
Qdotdot(i,:)=(M+(tstep/2)*B+(tstep^2/4)*K)\(Fg+Fh(:,i)+Fn3(:,i)+Fn4(:,i)+Fb(:,i)+Fk(:,i));
Qdot(i,:)=Qdot(i-1,:)+0.5*tstep*(Qdotdot(i-1,:)+Qdotdot(i,:));
Q(i,:)=Q(i-1,:)+Qdot(i-1,:)*tstep+(tstep^2)/4*(Qdotdot(i-1,:)+Qdotdot(i,:));

if it>100
    i=i+1;
end
end
end
end

```