Studentská Vědecká Konference 2010

NUMERICKÁ SIMULACE PROTRŽENÍ HRÁZE NA BÍLÉ DESNÉ

Martin FIŠER [1]

1 ÚVOD

Tato práce se zabývá popisem a numerickým řešením parciálních diferenciálních rovnic mělké vody (z angličtiny Shallow Water Equations), dále jen SWE. SWE je vhodné použít pro modelování dynamického proudění tekutin, kdy šířka hladiny je mnohem větší než rozsah výšky této hladiny a za předpokladu, že při proudění nevznikají víry. To splňuje napřík- lad zjednodušené atmosférické proudění či proudění oceánu, příliv, odliv, popřípadě vlna tsunami. V matematickém modelu budeme uvažovat vliv dna.

2 MATEMATICKÝ MODEL

Matematický model vodní hladiny popisujeme nelineárním nekonzervativním systémem Saint-Venatových rovnic. Rovnice řešíme na oblasti Ω s počáteční podmínkou $\mathbf{U}_0$. Na okraji výpočtové oblasti $\partial\Omega$ je předepsána podmínka nulové normálové rychlosti. V kartézském souřadném systému můžeme rovnice ve 2D případě zapsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{R}, \tag{1}$$

kde $\mathbf{U}$ je vektor konzervativních proměnných, výšky hladiny h a rychlostí proudění u a v ve směrech x a y,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ hv \\ hu \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$\mathbf{R}$ je zdrojový vektor dna

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial}{\partial x}B(x,y) \\ -gh\frac{\partial}{\partial y}B(x,y) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

zde $B(x,y)$ značí funkci reliéfu dna, a $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ jsou vektory toků ve směru x a y

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

[1] Bc. Martin Fišer, student navazujícího studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: mfiser@students.zcu.cz

3 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ

Výpočet provádíme metodou konečných objemů. Výpočtovou oblast Ω rozdělíme na strukturovanou síť pravoúhlých disjunktních čtyřúhelníků $\Omega_{i,j}$. Po integraci rovnice (1) přes $\Omega_{i,j}$ můžeme integrál toků aproximovat numerickými toky přes příslušné stěny buňky Ω_i, tj. $\mathbf{F}_{i\pm1/2,j}$ a $\mathbf{G}_{i,j\pm1/2}$. Po nahrazení integrálu časové derivace integrálním průměrem $\mathbf{U}_{i,j}$ dostáváme semidiskrétní schéma ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{U}_{i,j}}{dt} = \mathbf{R}_{i,j} - \frac{1}{dx}\left(\mathbf{F}_{i+1/2,j} - \mathbf{F}_{i-1/2,j}\right) - \frac{1}{dy}\left(\mathbf{G}_{i,j+1/2} - \mathbf{G}_{i,j-1/2}\right). \tag{5}$$

Příslušné numerické toky $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ a zdrojový člen $\mathbf{R}$ vypočteme pomocí Roova schématu (viz. Delis et. al (2007)).

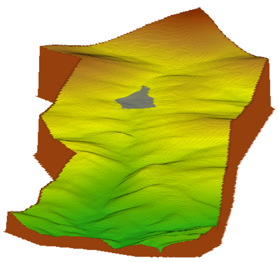
K řešení časové integrace lze použít Rungeho-Kuttova či Eulerova schématu. Při použití Eulerovy metody dostáváme diskrétní schéma pro řešení daného problému, tj.

$$\mathbf{U}^{n+1}_{i,j} = \mathbf{U}^n_{i,j} + \Delta t\mathbf{R}^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{dx}\left(\mathbf{F}^n_{i+1/2,j} - \mathbf{F}^n_{i-1/2,j}\right) - \frac{\Delta t}{dy}\left(\mathbf{G}^n_{i,j+1/2} - \mathbf{G}^n_{i,j-1/2}\right), \tag{6}$$

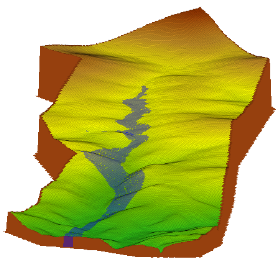
n značí časovou hladinu.

4 NUMERICKÉ VÝSLEDKY

Vytvořený řešič byl použit pro simulaci vodní katastrofy způsobené protržením přehrady na říčce Bílá Desná, která se udála 18. září 1916. Při této katastrofě bylo zcela zničeno 29 obytných domů a 11 brusíren skla. Dalších 62 domů a závodů bylo poškozeno (zdroj Wikipedie). Na obrázku (1) je znázorněn počáteční stav hladiny přehrady. Na druhém obrázku (2) je znázorněn stav vody v čase 155 vteřin po protržení.



Obrázek 1: Počáteční stav hráze



Obrázek 2: Stav v čase 155 vteřin

5 ZÁVĚR

Tato práce přinesla rozšíření matematického modelu mělké vody o zdrojový člen dna. Díky tomu již lze simulovat realné proudění řek v korytech, přílivové vlny moří atp. V budoucnu bude vhodné matematický model rozšířit o vazkost a tření o dno. Též bude nezbytné simulovat proudění v dalších vytypovaných oblastech, kde došlo k velkým rozlivům vody za účelem nalazení potřebných koeficientů tření a vazkosti.

Poděkování: Příspěvek vznikl za podpory studentského grantového projektu SGS-2010-046.

REFERENCE

A. I. Delis, M. Kazolea and N. A. Kampanis: *A robust high-resolution finite volume scheme for the simulation of long waves over complex domains*,2007.