Studentská Vědecká Konference 2012

Permeabilita porézních materiálů a její citlivostní analýza

Martin Rezek[1], Vladimír Lukeš[2], Eduard Rohan[3]

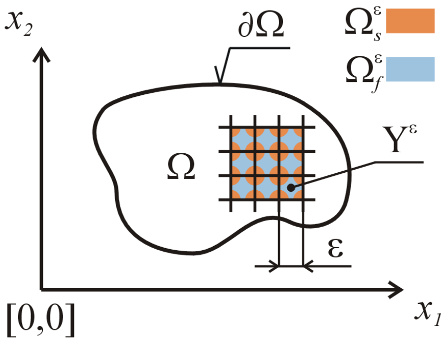
1 Úvod

Při matematickém modelování v biomechanice či např. v mechanice kompozitů jsme často postaveni před problém, jak se vypořádat se signifikantní a obvykle geometricky složitou (mikro)strukturou těchto materiálů. Jedním z přístupů k řešení takových úloh je homogenizace na oblasti Ω s periodickou vnitřní strukturou (viz obr. 1), matematický aparát, který dokáže mikrostrukturální vlastnosti materiálu promítnout do vztahů popisujících jeho makroskopické chování, např. při zatěžování. U buněčných tkání živých organismů se navíc setkáváme s fenoménem interakce materiálu tkáně s tekutým prostředím (např. krev), a proto tyto tkáně můžeme modelovat jako nestlačitelnou tekutinou perfundované porézní médium.

2 Porézní materiály, permeabilita

Porézní materiál se skládá z pevného skeletu, tzv. matrice, a pórů, sítě dutin a kanálků. Charakterizující vlastností všech porézních materiálů je porezita ϕ definovaná jako podíl objemu pórů $|\Omega_f^\varepsilon|$ vůči objemu $|\Omega|$, který v prostoru zaujímá těleso z porézního materiálu.

$$\phi = \frac{|\Omega_f^\varepsilon|}{|\Omega|}. \tag{1}$$



Obrázek 1: Porézní oblast Ω s periodickou buňkou Y^ε

Dále jsou porézní materiály charakterizovány svojí permeabilitou k' [m^2], což je schopnost porézního materiálu propustit v určitém směru jisté množství tekutiny o hustotě ρ [kg.m^{-3}] a dynamické vazkosti η [Pa.s]. Tok nestlačitelné tekutiny porézním prostorem, který je touto tekutinou částečně nebo plně saturován, lze popsat Darcyho zákonem

$$\mathbf{w}(x) = -\frac{k'}{\eta}\nabla p(x)\,, \tag{2}$$

kde $\mathbf{w}(x)$ [m.s^{-1}] představuje vektor rychlosti tekutiny a $\nabla p(x)$ [Pa.m^{-1}] gradient tlaku. Permeabilita k' je závislá pouze na geometrických vlastnostech sítě pórů, nikoli na fyzikálních vlastnostech tekutiny. Pokud je geometrie porézního média anizotropní, pak není permeabilita tohoto média vyjádřena konstantním skalárem k', ale symetrickým tenzorem druhého řádu

$$K_{ij}^H = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_f} \boldsymbol{\omega}^i \cdot \mathbf{e}^j dy = \frac{1}{|Y|}\int_{Y_f} \nabla\boldsymbol{\omega}^i : \nabla\boldsymbol{\omega}^j dy \equiv (\nabla\boldsymbol{\omega}^i, \nabla\boldsymbol{\omega}^j)\,, \tag{3}$$

[1] Bc. Martin Rezek, student navazujícího studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: marrez@students.zcu.cz

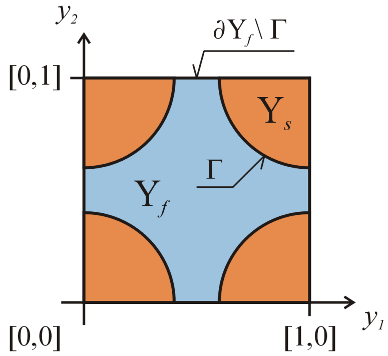
[2] Ing. Vladimír Lukeš Ph.D., Katedra mechaniky FAV ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, e-mail: vlukes@kme.zcu.cz

[3] Prof. Dr. Ing. Eduard Rohan, Katedra mechaniky FAV ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, e-mail: rohan@kme.zcu.cz (vedoucí práce)

jehož složky jsou vypočteny z tzv. korektorových funkcí $\boldsymbol{\omega}^i$, které jsou řešením mikroúlohy (4) na oblasti tekutiny Y_f referenční buňky Y (viz obr. 2).

Mikroúloha

$$\begin{cases} \nabla \pi^i - \Delta \boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{e}^i & \text{v } Y_f \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^i = 0 & \text{v } Y_f \\ \boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{0} & \text{na } \Gamma \\ y \to \boldsymbol{\omega}^i, \pi^i & \text{Y - periodické} \end{cases} \tag{4}$$



Obrázek 2: Referenční buňka Y

je produktem homogenizace vektorové rovnice Stokesova proudění v kanálcích periodicky porézní oblasti Ω. Vektor $\mathbf{e}^i$ představuje jednotkové zatížení v i-tém směru pro $i = 1,...,N$, kde N je dimenze úlohy. Výpočet mikroúlohy (4) je nutno opakovat zvlášť pro všechna zatížení $\mathbf{e}^i$, přičemž pro každé i-té jednotkové zatížení získáme nové korektorové funkce rychlosti $\boldsymbol{\omega}^i$, resp. tlaku π^i.

3 Citlivostní analýza tenzoru permeability

Citlivostní analýzou obecně rozumíme výpočet citlivosti změny účelové funkce v závislosti na změně optimalizačních parametrů, na kterých účelová funkce závisí nepřímo prostřednictvím stavové proměnné. Definujeme-li účelový funkcionál

$$\psi(\boldsymbol{\omega}^i(y), y) = K_{ij}^H = (\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} \tag{5}$$

a za optimalizační parametry vezmeme $y \in (0,1)^N$, popisující interní geometrii buňky Y, pak

$$\delta K_{ij}^H = -\delta_\tau(\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^j) + \delta_\tau(\mathbf{e}^i, \boldsymbol{\omega}^j) + \delta_\tau(\mathbf{e}^j, \boldsymbol{\omega}^i) + \delta_\tau(\pi^i, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^j) + \delta_\tau(\pi^j, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^i) \tag{6}$$

udává citlivost tenzoru permeability $\mathbf{K}^H$ na změnu tvaru buňky Y. δ_τ značí parciální derivaci bilineární formy $(a,b); a,b = \{\boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^i, \pi^i, \mathbf{e}^i\}$ podle umělého času τ.

4 Závěr

Tenzorem permeability $\mathbf{K}^H$ lze ve vztahu (2) nahradit konstantu k', načež získáme tzv. homogenizovaný matematický model proudění porézním médiem. Tento model ve tvaru Darcyho zákona může být následně dosazen do rovnice kontinuity staticky zatíženého poroelastického média, viz [3]. Výsledkem je složitější nelineární model, v němž permeabilita závisí také na vektoru posuvů a hodnotě tlaku, přičemž citlivost $\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}^H$ na tyto veličiny najde uplatnění v iteračním postupu při řešení statické rovnováhy poroelastického média.

Poděkování: Tento příspěvek byl podpořen grantovým projektem SGS-2010-046.

Literatura

[1] Allaire, G., 1997. One-Phase Newtonian Flow. In: Hornung, U., *Homogenization and Porous Media*. Springer-Verlag.

[2] Miara, B., Rohan, E., 2006. *Homogenization and shape sensitivity of microstructures for design of piezoelectric bio-materials*. Elsevier Science.

[3] Rohan, E., Naili, S., Cimrman, R., Lemaire, T., 2012. *Hierarchical homogenization of fluid saturated porous solid with multiple porosity scales*.