

## Numerická simulace proudění vody s podporou GIS dat

Ing. Martin Fišer<sup>1</sup>

### 1 Úvod

Při simulaci rozsáhlých záplav, přílivových vln a jiných případů, kdy šířka vodní masy je mnohem větší než její výška, se využívá matematického modelu mělké vody. Do tohoto matematického modelu byl pro větší možnosti simulace zahrnut zdrojový člen dna, který zastupuje nerovnost dna, a zdrojový člen tření o dno, který reprezentuje odpor při proudění způsobený drsností dna a vegetací.

### 2 Matematický model

Matematický model je popsán nelineárním nehomogením systémem Saint-Venantových rovnic. V kartézském souřadném systému můžeme tyto rovnice ve 2D případě zapsat jako

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_f, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{W}$  je vektor konzervativních proměnných

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} h \\ hv \\ hu \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Konzervativní proměnné jsou výška hladiny  $h$  a rychlosti proudění  $u$ , popřípadě  $v$ , ve směru osy  $x$ , popřípadě osy  $y$ .  $\mathbf{S}_b$  je zdrojový člen dna

$$\mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{B}(x, y) \\ -gh \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{B}(x, y) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

zde  $\mathbf{B}(x, y)$  značí funkci reliéfu dna a  $g$  reprezentuje gravitační zrychlení.  $\mathbf{S}_f$  je zdrojový člen tření o dno

$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} 0 \\ C_f u \sqrt{u^2 + v^2} \\ C_f v \sqrt{u^2 + v^2} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

kde  $C_f$  je třecí součinitel.  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{G}$  jsou vektory toků ve směru osy  $x$  a  $y$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

<sup>1</sup> student doktorského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: mfisher@kme.zcu.cz

### 3 Numerické řešení

Výpočet provádíme metodou konečných objemů. Výpočtovou oblast  $\Omega$ , vzhledem ke struktuře GIS dat, rozdělíme na nestrukturovanou síť pravoúhlých disjunktních čtyřúhelníků  $\Omega_i$ . Po integraci rovnice (1) přes  $\Omega_i$  můžeme integrál toků aproximovat numerickými toky  $\mathbf{F}_i$  a  $\mathbf{G}_i$  na stěnách konečného objemu. Zdrojové členy budou aproximovány numerickými schémata ve středu konečného objemu jako  $\mathbf{S}_{b_i}$  a  $\mathbf{S}_{f_i}$ . Po nahrazení integrálu časové derivace integrálním průměrem  $\mathbf{W}_i$  dostáváme semidiskrétní schéma ve tvaru

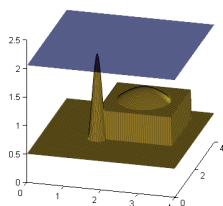
$$\frac{d\mathbf{W}_i}{dt} = \mathbf{S}_{b_i} + \mathbf{S}_{f_i} - \frac{1}{dx} \sum_{k=1}^2 \mathbf{F}_{i_k} - \frac{1}{dy} \sum_{k=1}^2 \mathbf{G}_{i_k}.$$

Príslušné numerické toky  $\mathbf{F}_i$  a  $\mathbf{G}_i$  lze vypočítat například pomocí Central-Upwind schématu (viz. Kurganov et. Petrova (2007)).

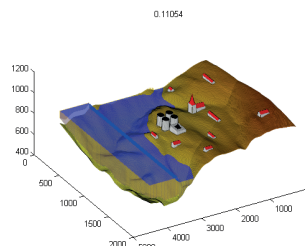
K řešení časové integrace lze použít například některého z Runge-Kuttových schémat.

### 4 Numerické Výsledky

Vyvinutý řešič byl podroben testování na zachování počátečního objemu tekutiny a schopnosti udržení počáteční podmínky klidné hladiny nad velmi ostrými gradienty dna. Oboum testům řešič vyhověl. Test klidné hladiny je vidět na obrázku 1. Na obrázku 2 je zobrazen počáteční stav při simulování nárazu vlny tsunami na mořské pobřeží.



Obrázek 1: Test klidné hladiny



Obrázek 2: Mořské pobřeží s přílivovou vlnou

### 5 Závěr

Tato práce přinesla nový přístup pro řešení volné hladiny na rozhraní suchého a mokrého dna. Díky tomu je Central-Upwind schéma schopno udržet klidnou hladinu na tomto rozhraní bez nefyzikálních oscilací. Vytvořený řešič byl implementován v programovacím jazyce C++, čímž byla doba výpočtu (oproti interpretačním jazykům) zkrácena na pět procent původního času. Lze tedy simulovat poměrně velké výpočtové oblasti v relativně krátkém čase.

### Literatura

Alexander Kurganov and Guergana Petrova: *A Second-Order Well-Balanced Positivity Preserving Central-Upwind Scheme For The Saint-Venant System*, 2007.