

Stanovení tlumení tělesa pomocí experimentální modální analýzy

Luboš Smolík¹

1 Úvod

Tlumení b kmitajícího mechanického systému s jedním stupněm volnosti se obvykle zjišťuje z časového záznamu odezvy $q(t)$ tohoto systému na nenulové počáteční podmínky. V odezvě $q(t)$ je pak sledován pokles velikosti amplitud vyjádřený tzv. *logaritmických dekrementem* δ , který je přímo úměrný tlumení b .

Pro popis kmitání reálných těles obvykle nestačí model o jednom stupni volnosti a tak je zaveden komplexnější model obecně o n stupních volnosti, jehož pohybovou rovnici je možné vyjádřit pomocí maticového zápisu

$$M \ddot{\mathbf{q}}(t) + B \dot{\mathbf{q}}(t) + K \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

ve kterém M , B , K jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti a $\mathbf{q}(t)$, $\mathbf{f}(t)$ jsou vektory zobecněných souřadnic a silových účinků. Matice tlumení B bývá sestavena pomocí různých postupů, často při je jejím sestavení využít *Rayleighův model tlumení*, podle kterého je matice tlumení proporcionální vůči maticím hmotnosti i tuhosti a tedy platí

$$B = \alpha M + \beta K, \quad (2)$$

kde α , β jsou *koeficienty proporcionálního tlumení* nebo též *Rayleighovy koeficienty*. Velikost proporcionálního tlumení je závislá na frekvenci budících sil a proto není výhodné tlumení reálného tělesa, u něhož je předpokládáno širokospektrální buzení, stanovit pomocí logaritmického dekrementu.

2 Vztah Rayleighových koeficientů a poměrného modálního útlumu

Rayleighův model tlumení je výhodný při přechodu z konfiguračního prostoru zobecněných souřadnic do prostoru modálních souřadnic. Matice tlumení (2) v prostoru modálních souřadnic se totiž stane diagonální se členy $2 \zeta_i \omega_i$ na diagonále. ζ_i v těchto členech je poměrný modální útlum odpovídající i -té vlastní frekvenci ω_i systému (1) v rad/s.

V prostoru modálních souřadnic je matice hmotnosti jednotková a matice tuhosti diagonální se členy ω_i^2 na diagonále, což je odvozeno např. v Zeman et al. (2004). Protože i v prostoru modálních souřadnic zůstává vztah (2) v platnosti, je možné s využitím zmíněných vlastností matic M a K sestavit následující rovnost

$$2 \zeta_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \pi \zeta_i f_i = \alpha + 4 \pi^2 \beta f_i^2, \quad (3)$$

kde f_i je vlastní frekvence v Hz. Označíme-li $\zeta_{f,i} := \zeta_i f_i$, můžeme tuto veličinu po nahrazení konečné posloupnosti $(f_i)_{i=1}^n$ v rovnosti (3) spojitou veličinou f vyjádřit kvadratickou funkcí

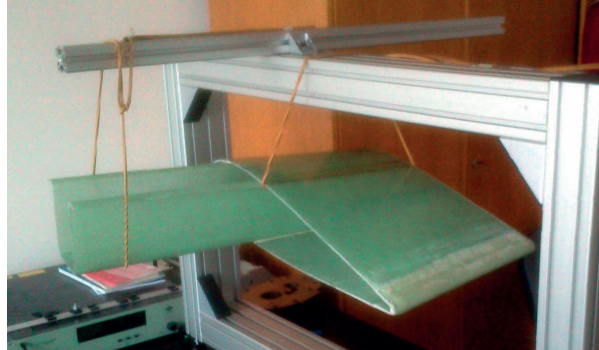
$$\zeta_f(f) = b f^2 + a, \quad (4)$$

¹ student doktorského studijního programu Aplikované vědy a informatika, studijní obor Aplikovaná mechanika, e-mail: carlist@ntis.zcu.cz

kteřá definuje *frekvenční útlum mechanického systému* (1) v závislosti na frekvenci budících sil a kde pro koeficienty a a b platí rovnosti $\alpha = 4\pi a$, $\beta = \frac{b}{\pi}$.

3 Aproximace funkce $\zeta_f(f)$ z výsledků experimentální modální analýzy

Výsledkem experimentální modální analýzy popsané např. ve Schwarz et al. (1999) je soubor vlastních frekvencí $\{f_i\}$ a jim příslušejících modálních vlastností, mezi něž patří mj. vlastní tvary kmitu a poměrné modální útlumy. Vynásobením poměrných útlumů příslušnými vlastními frekvencemi je získána množina frekvenčních útlumů $\{\zeta_{f,i}\}$.



Obě uvedené množiny je možné uspořádat do vektorů a sestavit přeúřčenou soustavu rovnic

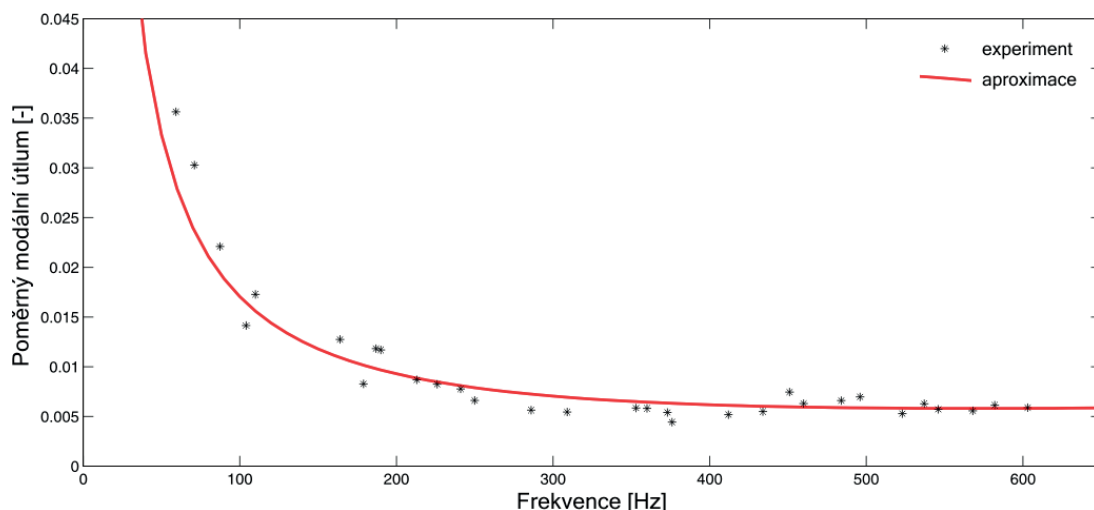
Obrázek 1: Zkušební segment leteckého profilu.

$$\{\zeta_{f,i}\} = b \{f_i^2\} + a, \quad (5)$$

kteřou lze vyřešit např. metodou nejmenších čtverců.

4 Závěr

Praxe ukazuje, že pomocí Rayleighova modelu tlumení může být popsán strukturální útlum i takových těles, kteřá nejsou homogenní ani izotropní. Příkladem může být zkušební segment leteckého profilu vyrobený ze skelné tkaniny, epoxidové pryskyřice a kepru ukázaný na Obr. 1, jehož poměrný modální útlum a odpovídající funkce $\zeta_f(f)$ je zobrazena na Obr. 2.



Obrázek 2: Porovnání vypočítaného a změřeného průběhu funkce $\zeta_f(f)$ tělesa z Obr. 1.

Literatura

Schwarz, B.J. a Richardson, M.H., 1999. Experimental Modal Analysis. *CSI Reliability Week, Orlando, FL*. URL: <http://files.vibetech.com/papers/paper28.pdf>

Zeman, V. a Hlaváč, Z., 2004. *Kmitání mechanických soustav*. 2. vyd., Západočeská univerzita, Plzeň.