

## Nesingulární vztahy pro sférickou harmonickou syntézu třetích derivací geopotenciálu v lokálním severně orientovaném souřadnicovém systému

Eliška Hamáčková<sup>1</sup>, Michal Šprlák<sup>2</sup>, Martin Pitoňák<sup>3</sup>, Pavel Novák<sup>4</sup>

### 1 Úvod

Třetí derivace gravitačního potenciálu již našly své využití v některých geovědních oborech, protože nabízejí detailnější pohled na gravitační pole Země než některé jiné doposud dostupné veličiny, jako je například gravitační zrychlení (derivace prvního řádu) a gravitační gradienty (derivace druhého řádu). Měřitelnost třetích derivací gravitačního potenciálu je nyní ve fázi výzkumu.

Sférická harmonická syntéza je nástrojem často používaným v řadě geovědních oborů. Umožňuje vypočítat různé parametry gravitačního pole Země z geopotenciálních modelů. Pro poruchový potenciál má rozvoj do řady sférických harmonických funkcí tvar (Heiskanen a Moritz, 1967)

$$T(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m}(\cos \varphi). \quad (1)$$

$GM$  je geocentrická gravitační konstanta,  $a$  je poloměr střední koule reprezentující Zemi,  $\bar{P}_{n,m}$  jsou plně normované Legendreovy funkce prvního druhu stupně  $n$  a řádu  $m$  a  $\bar{C}_{n,m}$  a  $\bar{S}_{n,m}$  jsou plně normované Stokesovy koeficienty redukované o vliv normálního pole. Ve sférických souřadnicích výpočetního bodu představuje  $r$  jeho průvodič,  $\varphi$  zeměpisnou šířku a  $\lambda$  zeměpisnou délku.

Poruchový tenzor třetích derivací obsahuje celkem 27 prvků, z nichž je (kvůli symetriím a spojitosti gravitačního pole mimo Zemi) pouze 10 vzájemně různých. Značíme je  $T_{xxx}$ ,  $T_{xyy}$ ,  $T_{xxz}$ ,  $T_{yyy}$ ,  $T_{xyx}$ ,  $T_{xzz}$ ,  $T_{yyy}$ ,  $T_{yyz}$ ,  $T_{yzz}$ ,  $T_{zzz}$ . Rozvoj těchto parametrů do řad sférických harmonických funkcí lze získat aplikací příslušných diferenciálních operátorů třetího řádu na rovnici (1). Tímto postupem získáme 10 vztahů pro rozvoj třetích derivací potenciálu, z nichž pouze vztah pro  $T_{zzz}$  nevyžaduje další úpravy.

Některé ze zbylých 9 rovnic obsahují derivace Legendreových funkcí, což brání jednotnému tvaru rovnic a je nevýhodné z hlediska výpočetní náročnosti. V dalších z rovnic se vyskytují tzv. singulární členy, tj. členy, které obsahují kosinus zeměpisné šířky ve

<sup>1</sup> Studentka doktorského studijního programu Geomatika, obor Geomatika, e-mail: eliskah@students.zcu.cz (Formát–Písmo "Times New Roman", "obyčejné", "10"; (Formát–Odstavec) Zarovnání: "Do bloku", Odsazení Speciální: "První řádek" O kolik: "0,5cm")

<sup>2</sup> NTIS - Nové technologie pro informační společnost, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, e-mail: sprlak@ntis.zcu.cz

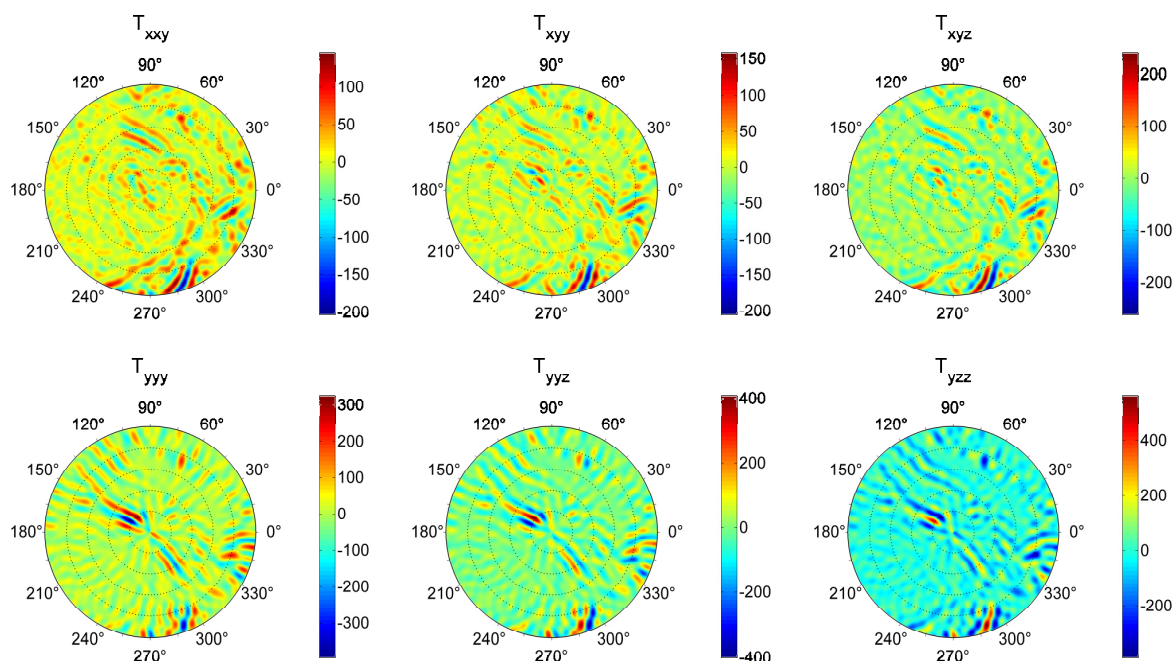
<sup>3</sup> NTIS - Nové technologie pro informační společnost, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, e-mail: pitonakm@ntis.zcu.cz

<sup>4</sup> NTIS - Nové technologie pro informační společnost, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, e-mail: panovak@ntis.zcu.cz

jmenovateli. To způsobuje, že vztahy není možné použít k výpočtu na pólech a v jejich blízkém okolí. V některých ze vztahů se vyskytují oba tyto problémy.

Řešením problémem bylo tedy odstranění těchto dvou nedostatků. K řešení bylo použito převážně vztahů a postupů uvedených v článkách Petrovskaya a Vershkov (2006) a Eshagh (2008), které se zabývaly podobnou problematikou, ovšem pro tenzor druhých derivací potenciálu. Tyto postupy byly tedy rozšířeny z druhých derivací na třetí. (Výsledné rovnice nejsou uvedeny, protože by rozsahem překonaly délku tohoto příspěvku).

Na obr. 1 jsou znázorněny numerické výsledky získané odvozenými vztahy v oblasti severního pólu (zobrazeno je 6 složek, které v původních vztazích obsahovaly singulární členy). Z obrázku je patrné, že nové vztahy nevykazují na pólech žádné komplikace.



**Obrázek 1:** Ukázka třetích derivací v oblasti severního pólu ( $80^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ) vypočítaných pomocí odvozených nesingulárních výrazů. Uvedená stupnice je v jednotkách  $10^{-15} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ .

## Poděkování

Příspěvek byl podpořen grantovým projektem GA15-08045S Grantové agentury České republiky.

## Literatura

Eshagh M., 2008. Non-singular expressions for the vector and the gradient tensor of gravitation in a geocentric spherical frame. *Comput Geosci* 34:1762–1768

Heiskanen W.A., Moritz H., 1967. *Physical geodesy*. Freeman and Co., San Francisco.

Petrovskaya M.S., Vershkov A.N., 2006. Non-singular expressions for the gravity gradients in the local north-oriented and orbital reference frames. *Journal of Geodesy*. 80: 117-127