FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2015

Simulace procesů neceločíselného řádu založená na disktretizaci přesné skokové odezvy

Jan Reitinger[1]

1 Úvod

V posledních letech se ve vědeckých pracích čím dál více využívá takzvaného neceločíselného počtu (anglicky Fractional Calculus – FC). FC je matematické odvětví, které vzniklo z tradiční teorie o výpočtu integrálů a derivací pro celočíselné řády. Vznik tohoto počtu je datován již do roku 1695. Postupem času vznikala teorie, která vedla k systémům neceločíselného řádu (Fractional Order – FO).

Tyto systémy jsou mnohem více flexibilní při popisování reálných procesů. Přitom však stále patří mezi lineární systémy. S velkou oblibou se FO využívají například při matematickém popisu teplotních nebo chemických dějů, které svou povahou spíše odpovídají tomuto popisu než tradičnímu celočíselnému. Ačkoliv jsou teoretické podklady známé již dlouho, využívají se počítačové simulace FO až v posledních několika letech. Je to pochopitelně způsobeno výpočetními nároky. Simulace v reálném čase jsou stále ještě velkou výzvou. Často se FO systémy aproximují celočíselnými filtry vysokého řádu (viz Charef et al. (1992)). Tyto aproximace však nemohou být nikdy přesné, jelikož pro přesnou aproximaci je potřeba filtr nekonečného řádu. Příklady podobných aproximací filtry lze nalézt například v Oustaloup et al. (1996) nebo Monje C. A. (2010).

2 Simulace systémů s více póly neceločíselného řádu

Předpokládejme systém s přenosem

$$P(s) = \frac{K}{\prod\limits_{i=1}^{p} (\tau_i s + 1)^{n_i}}, \tag{1}$$

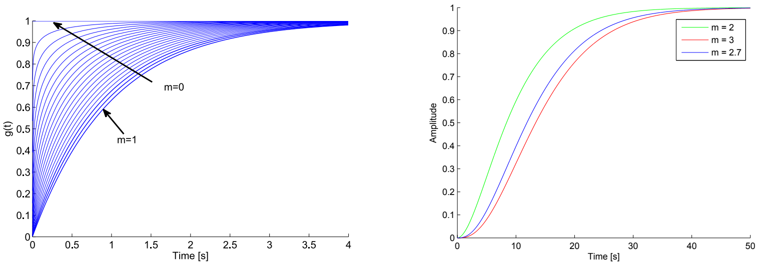
kde p je libovolné přirozené číslo a K, τ_i jsou reálná čísla pro $i = 1, 2, \ldots, p$. Na rozdíl od celočíselných systémů, kde $\forall n_i \in \mathbb{Z}$ platí pro FO systémy, že $\forall n_i \in \mathbb{R}$. Díky tomu je například možné dosáhnout v amplitudové frekvenční charakteristice jiného sklonu, než jsou obligátní násobky $20\,\mathrm{dB}/\mathrm{dec}$. Pro budoucí účely připomeňme, že výstup lineárního systému $y(t)$ je definován jako konvoluce vstupního signálu $u(t)$ a impulsní funkce $h(t)$

$$y(t) = \int\limits_0^\infty h(\tau) u(t-\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

Cílem práce tedy bude určit impulsní charakteristiku systému (1), která bude diskretizována pro danou vzorkovací periodu T. Kvůli zachování statického zesílení je vhodné diskretizovat přechodovou charakteristiku, kterou lze spočíst jako

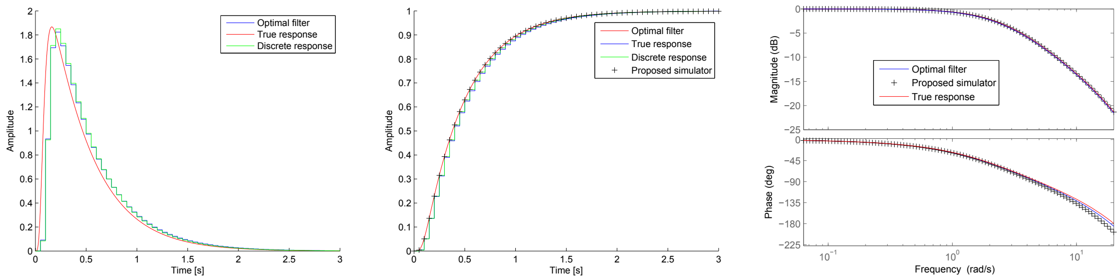
$$g_{\mathrm{MFP}}(t) = \int\limits_0^t h_{\mathrm{MFP}}(\tau) \mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t K \left((h_1(\tau) * h_2(\tau)) * \cdots * h_p(\tau) \right) \mathrm{d}\tau, \tag{3}$$

[1] student doktorského programu Aplikované vědy a informatika, obor Kybernetika, e-mail: reitinge@kky.zcu.cz



(a) Závislosti na řádu m. **(b)** Řády $m = 2$, $m = 2.7$ a $m = 3$.

Obrázek 1: Porovnání přechodových charakteristik FO systémů s celočíselnými.



(a) Impulsní charakteristika **(b)** Přechodová charakteristika **(c)** Frekvenční charakteristika

Obrázek 2: Porovnání diskrétní simulace procesu s filtrem, kterým byl proces aproximován, a reálným procesem.

kde h_{MFP} je impulsní charakteristika přenosu (1), $*$ značí konvoluci a

$$h_i(t) = \frac{t^{m-1}}{\tau^m \Gamma(m)} \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{4}$$

jsou obměnou vztahů pro impulsní charakteristiky systémů celočíselného řádu získané Laplaceovou transformací. Gamma funkce $\Gamma(m)$ je zobecněním faktoriálu pro reálná čísla.

Po získání hodnot přechodové charakteristiky pro danou vzorkovací periodu T lze spočíst výslednou diskrétní impulsní charakteristiku

$$h^d_{\mathrm{MFP}}(kT) = g_{\mathrm{MFP}}(kT)|_{k=0} = g_{\mathrm{MFP}}(kT) - g_{\mathrm{MFP}}\left((k-1)T\right)|_{k>0}. \tag{5}$$

Tento postup byl implementován v prostředí Matlab/Simulink. Výsledky simulovaných FO systémů jsou porovnány s celočíselnými systémy a aproximacemi FO filtry vysokého řádu na obrázcích 1 a 2.

3 Závěr

V této práci byl vytvořen skript, který offline vypočte impulsní charakteristiku podle zadaných parametrů systému. Dále tuto charakteristiku diskretizuje s požadovanou periodou a nakonec ji využije k online simulaci FO systému pomocí konvoluce se vstupem systému.

Poděkování

Tato práce byla podpořena grantem SGS-2013-041. Podpora je vděčně kvitována.

Literatura

Charef, A., Sun, H., Tsao, Y. and Onaral, B. (1992). Fractal system as represented by singularity function. IEEE Transactions on Automatic Control, 37(9), pp.1465-1470.

Oustaloup, A., Moreau, X. and Nouillant, M. (1996). The CRONE suspension. Control Engineering Practice, 4(8), pp.1101-1108.

Monje,Concepción A. (2010). Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications. Springer