Nový limitovací proces nespojité Galerkinovy metody s aplikací na Saint-Venantovy rovnice

Martin Fišer[1]

1 Úvod

Saint-Venantovy rovnice jsou vhodné k modelování proudění s volným povrchem, kdy horizontální rozměry vodní masy jsou mnohem větší než její hloubka. Matematický model byl popsán Berre Saint Venantem v roce 1872 a jedna z jeho formulací pro 1D případ je

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial B}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \tag{1}$$

kde **W**=$[W_1, W_2]^T = [h, hu]^T$ je vektor konzervativních proměných s výškou vodního sloupce $h(x,t)$ a rychlostí proudění $u(x,t)$, **F** je vektor toku, g je gravitační zrychlení a B je funkce popisující nerovnosti dna.

2 Numerické schéma

V této práci je matematický model (1) řešen za pomoci nespojité Galerkinovi metody (DGFEM). V případě DGFEM, je výpočetní oblast Ω rozdělena nepřekrývajícími se konečnými elementy Ω_i a konzervativní proměnné $W_{i,k}$ v i-tém konečném elementu jsou vyjádřeny jako lineární kombinace

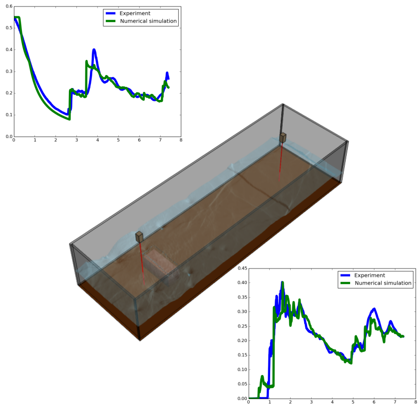
$$W_{i,k}(x,t) = \Sigma_{j=1}^{n_b} w_{i,k}^j(t)\varphi_i^j(x), \quad k = 1,2, \tag{2}$$

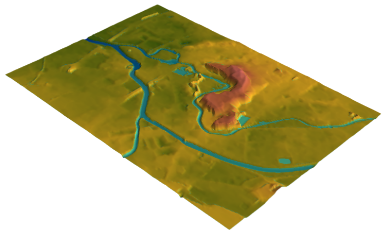
kde $\varphi^j(x)$ jsou bázové funkce, n_b je počet bázových funkcí a $w_{i,k}^j$ jsou časově závislé koefficienty lineární kombinace. Pro jednoduchost v následujícím vynecháme funkční parametry x a t. Aplikací DGFEM na (1) získáme

$$\mathbf{M}_i \frac{d}{dt}\mathbf{w}_{i,k} + \left[\Phi_k \cdot \varphi_i^j\right]_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} - \int_{\Omega_i} F_k \frac{\partial \varphi_i^j}{\partial x}\, d\Omega = \int_{\Omega_i} B_k \varphi_i^j d\Omega, \quad j = 1,2,\dots nb, \quad k = 1,2. \tag{3}$$

Zde $\mathbf{M}_i = [M_{i_{j,l}}] = \left[\int_{\Omega_i} \varphi_i^j \varphi_i^l d\Omega\right]$ je matice hmotnosti, Φ_k, F_k a B_k je k-tá složka numerického a nevazkého toku a zdrojového členu dna a $\mathbf{w}_{i,k} = [w_{i,k}^1, w_{i,k}^2, \dots, w_{i,k}^{nb}]$ je vektor časově závislých koeficientů. Schémata vyšších řádů přesnosti musí být limitovány v případě, že se během simulace objeví rázová vlna, či nespojité řešení. Nadbytečné limitování však vede k nežádoucímu snížení řádu přesnosti.

[1] student navazujícího doktorského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: mfiser@kme.zcu.cz





Obrázek 1: Validace softwaru. **Obrázek 2:** Praktická aplikace.

3 Nové limitovací kritérium

Konečný element Ω_i je definován jako problematický, pokud hodnota konzervativní proměnné uprostřed konečného elementu není ohraničena hodnotami na jeho krajích, tedy

$$max\left(W_{i,k}(x_{i-\frac{1}{2}},t), W_{i,k}(x_{i+\frac{1}{2}},t)\right) < W_{i,k}(x_i,t) \quad \text{or} \quad min\left(W_{i,k}(x_{i-\frac{1}{2}},t), W_{i,k}(x_{i+\frac{1}{2}},t)\right) > W_{i,k}(x_i,t) \tag{4}$$

kde $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ jsou pozice na kraji konečného elementu a x_i je pozice jeho středu. Pokud je daný konečný element označen jako problematický, pak je limitován následovně.

Bázové funkce lineární kombinace vyššího než druhého řádu v lineární kombinaci (2) jsou vynulovány, koeficienty prvního řádu $w^1_{i,k}$ jsou ponechány beze změn a koeficienty druhého řádu $w^2_{i,k}$ jsou přepočteny za pomoci libovolného limiteru (například $minmod$) následovně

$$w^2_{i,k} = minmod(\ (w^1_{i+1,k} - w^1_{i,k})/\Delta x, \quad (w^1_{i,k} - w^1_{i-1,k})/\Delta x\ ) \tag{5}$$

zde $minmod(a,b) = 1/2[sgn(a) + sgn(b)] \cdot min(|a|,|b|)$ a Δx je velikost kroku prostorové diskretizace. V případě limitování vodní hladiny je důležité zaručit její nezáporné hodnoty. Proto byl implementován postup aplikovaný v metodě konečných objemů, Kurganov (2007)

$$w^2_{i,1} = \begin{cases} 2w^1_{i,1}/\Delta x & \text{if} \quad h(x_{i-\frac{1}{2}},t^n) < 0 \\ -2w^1_{i,1}/\Delta x & \text{if} \quad h(x_{i+\frac{1}{2}},t^n) < 0 \end{cases} . \tag{6}$$

4 Závěr

Postup uvedený v této práci byl rozšířen do 2D prostoru a zvalidován na analytických řašeních a experimentáních datech viz obrázek 1. Po validaci byl daný software použit pro simulaci záplav na řece Moravě, viz obrázek 2. Dané kritérium je jednoduché, výpočetně nenáročné a lze jej použít ne jen v úlohách hydrodynamiky ale též v oblasti aerodynamiky.

Poděkování

Příspěvek vznikl za podpory interního grantového projektu na ZČU: SGS-2016-038.

Literatura

Kurganov A., Petrova G., 2007. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system.*Communications in Mathematical Sciences* 5 (1) (2007) 133–160.