Poetická fyzika

Jan Bečvář[1]

Milí studenti! Jistě jste již dávno zjistili, že důkladné znalosti z oboru fyziky jsou pro existenci moderního člověka naprosto zásadní. Poslední fyzikální poznatky pohánějí technický rozvoj Mílovými kroky (jedná se o kroky jistého Míly Kroupy z Dolních Počernic)…

Naprostá nutnost obšírných fyzikálních znalostí se však již dávno nevztahuje pouze na podivínské vědce a pološílené vynálezce všeho možného. Fyzika se dnes promítá prakticky do všech oblastí lidského bytí. Tentokrát se vás pokusím přesvědčit, že fyzika může výrazně napomoci mnohým literárním fandům k pochopení moderní poezie. Jako ilustrační text jsem zvolil několik básní německého autora Christiana Morgensterna, které u nás vyšly v překladu Josefa Hiršala pod názvem *„Písně šibeničních bratří“*.

Hned první báseň vzbudí v pozorném čtenáři nemalé pochybnosti. Píše se zde o klokanovi, který se chystá sežrat vrabce. V Austrálii jsem sice nikdy nebyl, takže toho o klokanech mnoho nevím, ale že by požírali drobné opeřence, to se mi příliš nezdá. Ani moje sestra, která Austrálii procestovala křížem krážem, nic podobného neviděla. Není ale třeba propadat beznaději, je tady fyzika, aby celý spor rozřešila.

Dlouhé klokanovo rozhodování má, jako všechny přírodní jevy, svoji logiku. Nesmíme zapomínat, že běh zvířecích životů je řízen výhradně nemilosrdným bojem o přežití. Jeho podstatou je efektivní shánění potravy. Dříve, než klokan na vrabce zaútočí, si musí důkladně promyslet, je-li útok vůbec v jeho silách, a pakliže ano, jestli se mu vyplatí.

Vrabec a klokan

Za plotem klokan bez hnutí
na vrabce zírá v pohnutí.

Vrabec, jenž sedí na stavení,
nejeví zvláštní potěšení.

A to tím spíš, že cítí: Jsem
okukován tím klokanem.

Čepýří chmýří, dostal zlost –
teď už je toho vskutku dost!

Stěží se může udržet…
Co kdyby ho ten klokan sněd?!

Ten otáčí však za hodinu –
bůhví, co je v tom za příčinu,

a možná, že v tom důvod není –
svou hlavu směrem od stavení.

Fyzikálně řečeno:
1. Jak velký výkon by klokan musel minimálně vyvinout pří šplhání na střechu, aby vrabec neuletěl?
2. Nebude vynaložená energie (čti „mechanická práce“) příliš velká vzhledem k výživné hodnotě pokrmu? Pro jednoduchost uvažujme jen práci potřebnou pro šplhání. Výdej energie potřebné ke skoku zde zanedbáme.

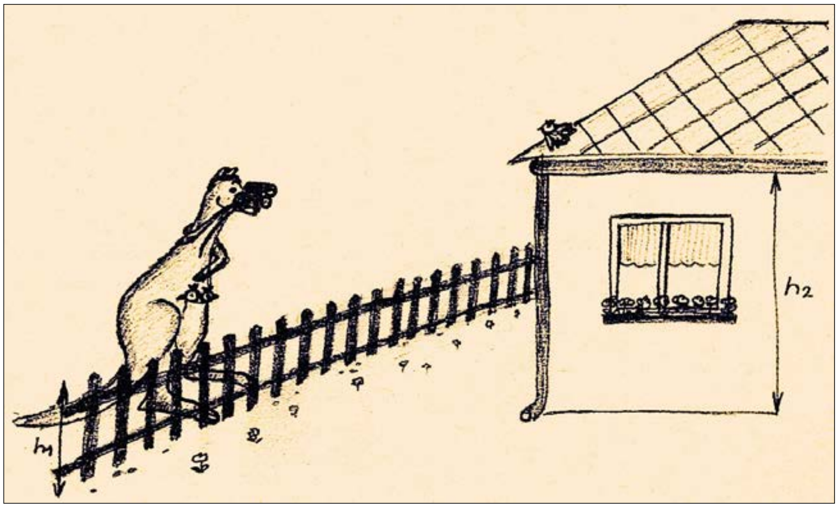
Víme, že výška domu, na kterém vrabec sedí, je 5 m. Dříve, než může klokan začít šplhat na střechu, musí přeskočit nízký plůtek (45 cm). Reakční doba konsternovaného vrabce je v případě útoku klokana obvykle asi 1 s (typický vrabec samozřejmě reaguje v nebezpečí mnohem rychleji, jenže útok klokana je pro něj tak nečekaná událost, že zůstane obvykle zprvu sedět jako opařený). Zbývá už dodat jen hmotnost klokana (80 kg) a výživnou hodnotu vrabce (3 kJ – nezapomínejme, že vrabec je pro klokana prakticky nestravitelný, a proto je jeho výživná hodnota velice nízká). Pro upřesnění dodejme, že klokan na dům šplhá rovnoměrným pohybem.

Řešení:

Než přikročíme k řešení, nakreslíme si tradiční obrázek a vypíšeme jednotlivé známé proměnné:

hmotnost klokana	$m = 80\,\mathrm{kg}$,
výška plotu	$h_1 = 45\,\mathrm{cm} = 0{,}45\,\mathrm{m}$,
výška domu	$h_2 = 5\,\mathrm{m}$,
reakční doba vrabce	$t_0 = 1\ \mathrm{s}$,
výživná hodnota vrabce	$E = 3\ \mathrm{kJ}$.

1 honza.becvar@gmail.com



Nejdříve máme určit výkon, který musí klokan vynaložit při šplhání na střechu. Ten lze zjistit například ze vzorečku

$$P = F \cdot v,$$

kde v je rychlost pohybu (zde šplhu) a F síla potřebná pro danou akci. V našem případě je F síla, kterou klokan vynakládá při šplhu na střechu, tj. síla potřebná pro překonání gravitační síly táhnoucí vačnatce zpět k zemi:

$$F = F_g = m \cdot g\,.$$

Rychlost šplhu vypočteme velice snadno:

$$v = \frac{h_2}{t_2},$$

kde t_2 je doba šplhu.

Aby klokan vrabce chytil, nesmí doba útoku (skládající se ze skoku přes plot a ze samotného šplhu) přesáhnout reakční dobu vrabce. V ideálním případě (aby se chudák klokan zbytečně nepředřel) se tedy doba útoku přesně rovná vrabcově reakční době. Označme dobu skoku přes plot t_1 a můžeme zapsat:

$$t_1 + t_2 = t_0,$$
$$t_2 = t_0 - t_1.$$

Dosazením do vzorce pro rychlost získáme

$$v = \frac{h_2}{t_0 - t_1}.$$

O době skoku přes plot t_1 zatím vůbec nic nevíme. Prozatím ji však odložíme, vrátíme se k ní za chvilku. Můžeme tedy dosadit za sílu i rychlost do původního vzorečku pro výkon:

$$P = m \cdot g \cdot \frac{h_2}{t_0 - t_1}.$$

Poněvadž víme, že gravitační konstanta $g = 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$, a ostatní hodnoty známe ze zadání, je řešení prakticky hotovo. Jen ještě zjistit, jak dlouho by klokanovi mohl trvat skok přes onen zpropadený plůtek.

Jak na to? Při šplhu je rychlost pohybu čistě v rukách (tlapách) příslušného šplhouna, stačí jen trochu přidat a šplhaná vzdálenost je rázem překonána za kratší dobu. Se skákáním je to ovšem zcela jinak. Jak se jednou odrazíte, jste plně v moci zemské gravitace a se skokem samotným (natož pak s dobou jeho trvání) nic neuděláte. Až se milé gravitaci zachce, bací s vámi zpátky o zem.

Naštěstí má ale vše svá pravidla a to, kdy se gravitaci zrovna „zachce", můžeme poměrně snadno vypočítat. Například víme, že při volném pádu po určitou dobu t těleso urazí dráhu s rovnou

$$s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

Odtud můžeme naopak zjistit, že doba trvání volného pádu z určité výšky s je rovna

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{g}}.$$

Můžeme si rovněž prozradit, že takový skok přes plot se vlastně skládá ze dvou částí (odrazu směrem vzhůru a pádu zpět na zem), z nichž každá je přesným zrcadlovým obrazem té druhé. Začněme tou druhou částí – volným pádem z pozice těsně nad plotem směrem dolů. Poněvadž známe délku dráhy tohoto volného pádu (je jí vlastně výška plotu h_1), umíme vypočítat i dobu jeho trvání t_p podle právě odvozeného vzorce

$$t_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}.$$

První část skoku (pohyb vzhůru k vrcholku plotu) je zrcadlovým obrazem druhé části (volného pádu). Zatímco v případě volného pádu se klokan začíná pohybovat nulovou rychlostí, postupně zrychluje, aby nakonec poměrně velkou rychlostí dopadl na zem (gravitační síla jeho pohyb po celou dobu urychluje), v případě skoku směrem vzhůru se klokan odráží určitou rychlostí a vlivem gravitační síly se jeho pohyb postupně zpomaluje, až těsně nad plotem (pokud se klokan neodrazil příliš) dosáhne rychlost nulové hodnoty a klokan vzápětí začíná padat. Díky tomu, že jej směrem vzhůru zpomaluje stejná síla, která jej pak při volném pádu urychluje, platí několik zajímavých pravidel. Například rychlost odrazu klokana se rovná rychlosti dopadu na zem, ale zejména doby trvání obou částí skoku (pohybu vzhůru a pádu dolů) jsou stejné. Díky tomu můžeme celkovou dobu skoku snadno vypočítat jako dvojnásobek doby volného pádu z vrcholku plotu:

$$t_1 = 2 \cdot t_{\mathrm{p}},$$

$$t_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}.$$

Dosadíme-li tento výraz do vzorce pro výkon

$$P = m \cdot g \cdot \frac{h_2}{t_0 - 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}}},$$

můžeme již za všechny proměnné dosadit zadané hodnoty a určit výsledek:

$$P = 10\,000 \text{ W}.$$

Druhá část úkolu (zjištění práce vynaložené při šplhání) bude ještě mnohem jednodušší. Známe totiž vztah mezi výkonem a prací:

$$P = \frac{W}{t_2},$$

t_2 je opět doba, po kterou práci konáme, v našem příkladu tedy opět ona doba šplhání za vrabcem na střechu, $t_2 = t_0 - t_1$. Potom

$$W = P \cdot (t_0 - t_1),$$

$$W = P \cdot \left(t_0 - 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} \right),$$

$$W = 4\,000 \text{ J } (= 4 \text{ kJ}).$$

Z výsledku vidíme, že lov se klokanovi nemůže vyplatit, protože vynaložená práce převyšuje výživnou hodnotu úlovku. Proto se klokan nakonec od vrabce odvrací a můžeme zodpovědně prohlásit, že klokan v divoké přírodě loví vrabce opravdu jen velice sporadicky. Dlužno poznamenat, že málokterý klokan dokáže šplhat na dům rychlostí $12{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Poznámka 1: Celý postup řešení bychom samozřejmě mohli obrátit, napřed vypočítat vykonanou práci ($W = m \cdot g \cdot h_2$) a z ní pak potřebný výkon podle vzorce $P = \frac{W}{t_2}$. Snaživí počtáři se samozřejmě mohou zamyslet i nad tím, kolik energie by klokan asi spotřeboval při přeskočení plůtku.

Poznámka 2: Klokan by se mohl pokusit přes plůtek skočit rovnou na zeď domu, čímž by ušetřil čas i síly. Ovšem v praxi takové akrobatické kousky vidíme jen zcela výjimečně a klokani zpravidla volí konzervativnější způsob lovu, jaký jsme právě podrobně popsali v řešení příkladu.

Poznámka 3: Na závěr musíme přiznat, že uvedený výpočet spotřebované energie není zcela správný. Klokan vydává energií potřebnou jednak ke zvýšení své polohové (potenciální) energie $\Delta E_{\mathrm{p}} = m \cdot g \cdot h_2$ (tu jedinou jsme v příkladu uvažovali), ale také k dosažení pohybové (tj. kinetické) energie $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ (o té jsme s ohledem na zaměření článku pro ZŠ taktně pomlčeli). Skutečný celkový výdej energie je tak roven součtu kinetické energie a změny potenciální energie $E_{\mathrm{c}} = E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h_2$. Pokud by klokan navíc uvedené rychlosti nedosáhl v dostatečně krátkém (tj. zanedbatelném) čase, museli bychom též zrušit náš předpoklad o rovnoměrném pohybu (klokan by postupně zrychloval) – ale tím bychom příklad již příliš zamotali…

Problém

Kámen si letěl dál a dál,
ač neměl křídla, nemával.
Nu, přejme mu to, ámen.
Přesto však, jaký div se stal,
že může létat kámen!

Letící kámen může těžko někoho překvapit, je-li to kámen malý a v dohledu stojí výtržník s prakem v ruce. Jedná-li se však o velký balvan volně letící krajinou, máme hned důvod k zamyšlení. Vidíme, že i sám autor básně je zcela v koncích a sám neumí daný jev uspokojivě vysvětlit. Opravdového fyzika však letící kámen v žádném případě nevyvede z míry a ihned mu dojde, že kámen v sobě skrývá dutinu naplněnou héliem (nebo jiným lehkým plynem). Určete, jaký podíl (v procentech) objemu kamene musí zabírat hélium, aby kámen létal.

Řešení:

Pusťme se bez dlouhých okolků rovnou do řešení. Možná vás v první chvíli poněkud zaskočí, že po vás chceme konkrétní výsledek, aniž bychom zadali jakékoli vstupní hodnoty. Nicméně neohrožený fyzik si poradí v každé šlamastyce.

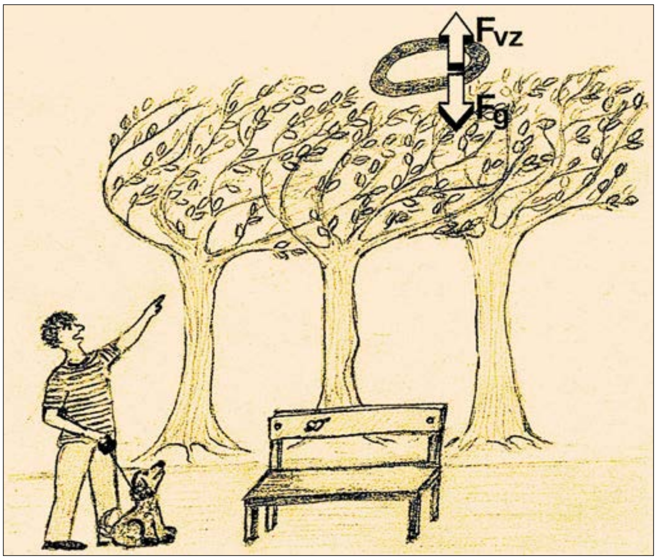
Například jej napadne, že kámen letící vzduchem bude mít jistě co do činění s Archimédovým zákonem – tedy se vztlakovou silou. A už se bude pídit po potřebných hustotách. V tabulkách nalezne

hustotu vzduchu $\rho_{\mathrm{vzd}} \doteq 1{,}3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$,

hustotu kamene (např. žuly) $\rho_{\mathrm{k}} \doteq 2800\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$,

hustotu hélia $\rho_{\mathrm{He}} \doteq 0{,}18\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Po zaklapnutí matematicko-fyzikálních tabulek jej jistě napadne, že obrázkem nic nezkazí a zbytek už se snad nějak vyvrbí.



Objem celého tělesa V se skládá ze dvou částí, objemu kamenného obalu V_{k} a objemu héliové bubliny V_{He}:

$$V = V_{\mathrm{k}} + V_{\mathrm{He}}.$$

Rovněž celkovou hmotnost m můžeme vyjádřit jako součet hmotnosti kamene a hélia:

$$m = m_{\mathrm{k}} + m_{\mathrm{He}}.$$

Aby kámen mohl samovolně (tj. bez vnější intervence) létat, musí být síly, které na něj působí (gravitační F_{g} a vztlaková F_{vz}) v rovnováze, tj. musejí mít shodné velikosti:

$$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{vz}}.$$

Pokusme se nyní obě síly vyjádřit pomocí výše zavedených proměnných. Vztlaková síla, působící na těleso, má velikost rovnou

$$F_{\mathrm{vz}} = V \cdot \rho_{\mathrm{vzd}} \cdot g,$$

a tedy

$$F_{\mathrm{vz}} = \left(V_{\mathrm{k}} + V_{\mathrm{He}}\right) \cdot \rho_{\mathrm{vzd}} \cdot g.$$

Naproti tomu velikost gravitační síly je součinem hmotnosti tělesa a gravitační konstanty:

$$F_{\mathrm{g}} = m \cdot g,$$

$$F_{\mathrm{g}} = \left(m_{\mathrm{k}} + m_{\mathrm{He}}\right) \cdot g.$$

Dosazením do vzorce pro rovnováhu sil získáváme

$$\left(V_{\mathrm{k}}+V_{\mathrm{He}}\right)\cdot\rho_{\mathrm{vzd}}\cdot g=\left(m_{\mathrm{k}}+m_{\mathrm{He}}\right)\cdot g$$

a po úpravě

$$\left(V_{\mathrm{k}}+V_{\mathrm{He}}\right)\cdot\rho_{\mathrm{vzd}}=m_{\mathrm{k}}+m_{\mathrm{He}}.$$

V zadání příkladu si objektivně obětavý autor objednal vztah mezi oběma objemy – tj. mezi objemem hélia a objemem kamenného obalu, v jehož objetí je hélium – tak po této větě bych si rád o(d)běhl na oběd. Abychom se k nějakému takovému vztahu dobrali, potřebujeme naši rovnici upravit na tvar obsahující pouze známé proměnné a uvedené dva objemy (V_{k} a V_{He}). Jinými slovy, potřebujeme se nějak „zbavit" hmotností na pravé straně rovnice. Naštěstí umíme hmotnost vyjádřit právě pomocí objemu a odpovídající hustoty:

$$m_{\mathrm{He}}=V_{\mathrm{He}}\cdot\rho_{\mathrm{He}},$$
$$m_{\mathrm{k}}=V_{\mathrm{k}}\cdot\rho_{\mathrm{k}}.$$

Tudíž

$$\left(V_{\mathrm{k}}+V_{\mathrm{He}}\right)\cdot\rho_{\mathrm{vzd}}=V_{\mathrm{k}}\cdot\rho_{\mathrm{k}}+V_{\mathrm{He}}\cdot\rho_{\mathrm{He}},$$
$$V_{\mathrm{He}}\cdot\left(\rho_{\mathrm{vzd}}-\rho_{\mathrm{He}}\right)=V_{\mathrm{k}}\cdot\left(\rho_{\mathrm{k}}-\rho_{\mathrm{vzd}}\right).$$

Najednou se nám celá situace vyjasňuje a my můžeme konečně vyjádřit podíl objemu kamene a hélia v letícím tělese:

$$\frac{V_{\mathrm{k}}}{V_{\mathrm{He}}}=\frac{\rho_{\mathrm{vzd}}-\rho_{\mathrm{He}}}{\rho_{\mathrm{k}}-\rho_{\mathrm{vzd}}},$$

$$\frac{V_{\mathrm{k}}}{V_{\mathrm{He}}}\doteq 0{,}0004.$$

Objem kamenné slupky tedy činí pouhých 0,04 % objemu dutiny s héliem. Řešení příkladu sice nebylo úplně jednoduché, ale ukázali jsme si, že i při minimálním množství známých informací můžeme dojít k zajímavým závěrům.

Poznámka 1: Pozorný čtenář si jistě všiml, že zadání od nás ve skutečnosti požadovalo poněkud odlišnou informaci, než kterou zde drze vydáváme za odpověď. Úkolem nebylo zjistit podíl objemů kamene a hélia , ale podíl objemu hélia a celkového objemu tělesa. To již ale jistě zvládnete sami (pro kontrolu jen přibližný výsledek: 99,96 %).

Poznámka 2: Kámen by mohl vzlétnout i v případě ještě většího podílu objemu hélia. V takovém případě by ovšem vztlaková síla převážila nad sílou gravitační a kámen by ulétl vzhůru jako pouťový balónek. Stejná poznámka platí i pro použití slabě zředěného hélia. V případě silně zředěného hélia by kámen nelétal, poněvadž snížený tlak silně zředěného hélia uvnitř kamene by neudržel tenkou kamennou slupku, která by byla zcela jistě rozdrcena okolním atmosférickým tlakem.

Pohledem na výsledek zjišťujeme, že hélium by muselo vyplnit takřka celý objem a na samotný kámen by tedy zbývala jen tenká slupička kolem. Například kulový kámen s poloměrem 1 m by měl kamennou slupku silnou pouze 0,13 mm, jak snadno ověříte s využitím vzorce pro výpočet objemu koule. Takový kámen by byl samozřejmě velice křehký a daleko by nedoletěl. I tentokrát jsme důkladným fyzikálním rozborem prokázali, že celá báseň je poněkud přitažená za vlasy a můžeme s úspěchem pochybovat, zda se její děj zakládá na realitě.

Článek vyšel v časopisu Školská fyzika, ročník VII/2002, číslo 4, str. 33–42. Předkládaný text je zkrácenou verzí původního článku (řešeny jsou zde pouze dvě básně z původních tří).