



September 10 - 12, 2003

Pilsen, Czech Republic

DUALITY AND INFINITY IN THEORY OF ELECTRICAL ENGINEERING

ING. PETR PREUSS, CSC.¹

Abstract: The paper shows that the physical infinity as an integral part of linear space models is of the spherical shape, exhibits infinite electrical conductivity and carries complementary charge. Given is the original definition of duality and precised the concept of the topological duality. Wider utilization of duality is disallowed due to nonsymmetry of spacial and temporal dependencies.

Keywords: Infinity, duality, theory of electrical engineering.

Nekonečno a dualita patří v teoretické elektrotechnice k často zmiňovaným pojmům. Společné pro oba tyto termíny je, že ve fyzikálních souvislostech zpravidla nebývají asociovány s exaktní definicí a předpokládá se jejich intuitivní chápání. Následující úvaha si klade za cíl stát se příspěvkem k explicitnímu vymezení vlastností uvedených pojmů.

Nekonečno

Ačkoliv od dob Descartovských mezi racionálními mysliteli běžně nebyla reálná existence nekonečna zpochybňována, v posledních desetiletích je tomu často jinak. Tato otázka zřejmě nemůže být zodpovězena důkazem. Stojí však za povšimnutí, že lidská empirie, transformovaná a shrnutá mimo jiné v zákonitostech fyziky, neposkytuje žádné argumenty, podporující hypotézu o nekonečném prostoru, čase nebo o nekonečnosti některé jiné fyzikální kvantity.

Připomeňme v této souvislosti například apriorní předpoklad konečných výkonů v elektrických obvodech. Tento předpoklad se zakládá na zkušenosti, že v makroskopické fyzice k němu dosud nikdy nebyl zaznamenán spor. V souladu

¹ FEL ZČU, sady Pětatřicátníků 14, 30614 Plzeň, e-mail: preuss@kte.zcu.cz

s principy výstavby systému vědeckého poznání je každá koncepce vyhovující, pokud je použitelná a dokud nevznikne důvod k její korekci a komplikaci.

Konečnost výkonů přímo implikuje časovou spojitost stavových veličin. Lze snadno dovodit, že všechny fyzikální veličiny jsou zavedeny právě k popisu projevů některé formy energie v prostoru a čase. Návaznost na energii znamená, že každá fyzikální veličina je ve skutečnosti stavová. Pokud říkáme, že některá veličina není stavová (např. proud kapacitorem), máme na mysli pouze fakt, že určitou vlastnost v daném kontextu zanedbáváme. Jak plyne z Maxwellových rovnic, elektrický proud – tj. pohyb nábojů – je neoddělitelně spojen s přítomností magnetického pole a jeho energie. Každý vodič musí vykazovat indukčnost i kapacitu. Kdyby kapacitor jako reálný prvek elektrického obvodu neměl žádnou indukčnost, nemohl by jím protékat proud, i jeho přírody a elektrody by se v prostředí s nulovou permeabilitou chovaly jako izolant, dokonce bez možnosti posuvných proudů.

Poznamenejme pro úplnost, že časové konstanty při změnách množství energie akumulované vedlejšími vlastnostmi elektrických obvodů mohou být ve srovnání s časovými konstantami, plynoucími z významných strukturálních vlastností modelů, o mnoho řádů kratší. V uvažovaném časovém měřítku jsme tak oprávněni zanedbávat spojitost časových průběhů řady veličin a vytvářet zjednodušené modely s nespojitými funkcemi času.

V obecné rovině bychom však neměli přehlížet fakt, že všechny fyzikální veličiny jsou – byť při různě velkých, ne však nekonečných derivacích – kontinuální v čase. Představíme-li si dále, že *prostorové* závislosti a vlastnosti látky vyplývají z interakcí dozajista kontinuálních polí, je nasnadě, že i prostorová rozložení fyzikálních veličin měla být v dostatečně malém měřítku spojitá. Lze se tak domnívat, že na rozdíl od matematických modelů makroskopická fyzikální realita nezná nespojitost. Toto je velmi důležitý poznatek, umožňující vždy alespoň v dostatečně malých oblastech zavádět lineární aproximace.

Vrátíme-li se k dalším argumentům proti nekonečnu, velmi ilustrativní je rychlost, kde je již více než sto let známa dle všeho nepřekročitelná horní mez, odpovídající tzv. rychlosti světla ve vakuu.

Protipólem (v jistém smyslu duálním) k celkové rozloze vesmíru jsou rozměry nejmenšího elementu. Pokud by měly být nekonečně malé, muselo by současně platit, že elementů je nekonečně mnoho. Podobně, nekonečná frekvence elektromagnetického vlnění by musela být spojena s nulovou vlnovou délkou. Elektromagnetické záření o vlnové délce kratší než cca 10^{-15} m však nebylo pozorováno.

Fyzika sama neposkytuje mandát k postulování reálné existence nekonečna. Podstatné však je, že pro jakoukoliv *konečnou diskrétní* koncepci časoprostoru dosud neznáme bližší charakterizaci ani elementu ani celku, což právě elegantně řeší nekonečno. Za toto zdánlivé zjednodušení reality ale platíme potížemi například při odvozování chování homogenního vedení nebo

vlnové rovnice: Element má být současně jednotkových rozměrů (materiálové konstanty, hustoty) i nekonečně malý. S jistou dávkou ekvilibristiky je zde obvykle používaným východiskem rozvoj v Taylorovu řadu a zanedbání všech jejích nelineárních členů.

Výhradním důvodem pro zavedení pojmu nekonečna jsou lineární modely a představy. Člověku jsou velice blízké mj. vzhledem k možnosti analytického rozkladu jevů na lineárně nezávislé části, které lze následně skládat superpozicí. (Lze postupně zkoumat jednotlivé „binární relace“.)

Bez ohledu na svoji reálnost nekonečno je nedílnou součástí lineárních prostorů. Lineární modely vždy budou fundamentálními nebo alespoň výchozími analytickými nástroji člověka.

Fyzikální nekonečno pojímáme jako prostředí ve vzdálenosti, jejíž poloměr roste nade všechny meze, případně kde změny hodnot pole jsou již zanedbatelné a ekvipotenciály kruhové, resp. ekvipotenciální plochy kulové.

Nekonečno je konzistentním prvkem pouze sféricky souměrných modelů. Položíme-li například potenciál nekonečna rovný nule, v případě nekonečné válcové či rovinné symetrie elektrostatických polí dostaneme nevlastní hodnoty potenciálu v „konečnu“.

Z uvedeného plyne, že **nekonečno je kulového tvaru**. Žádný směr k nekonečnu není preferován, všemi směry je do nekonečna stejně daleko. Toto je v souladu s představou geometrie pole bodového náboje. Všechna ostatní uspořádání zdrojů pole, včetně cylindrického a planárního, musejí mít konečné rozměry, aby jejich pole v dostatečné vzdálenosti splývala se středově souměrným modelem.

Jak ve dvourozměrném matematickém prostoru naznačuje třeba průběh funkce tangens, nejsou dvě nekonečna – kladné a záporné, ale jenom jedno společné (mimo jakoukoli kreslicí plochu, respektive v pozadí za ní).

V rámci teoretické elektrotechniky přicházejí v úvahu interakce s nekonečnem pouze prostřednictvím elektrostatického a teoreticky proudového pole. Vírový charakter magnetického pole nevyžaduje součinnost z nekonečna. Eventuální toky nábojů v nekonečnu jsou plně vykompenzovány, takže nekonečno samo není zdrojem magnetického pole.

Elektrický náboj nekonečna je obrácený, avšak stejně velký, jako výsledný náboj v „konečnu“. Elektrické pole se nachází *mezi* příslušnými náboji, z nichž některé můžeme situovat do nekonečna. Soustava je globálně elektricky neutrální. Potenciál nekonečna je přímo z definice nulový. S ohledem na společný potenciál celého nekonečna a rovnoměrné rozložení jeho (povrchového) náboje lze mu přisuzovat dokonalou vodivost. S výjimkou proudového pole, kde nekonečno působí jako elektroda, to však není vždy nezbytně nutné, jelikož každý problém je z pohledu nekonečna středově souměrný a vyrovnávací toky tak nepřicházejí v úvahu.

Krátce ještě k mechanickým vlastnostem nekonečna: Má nekonečnou hmotnost a nachází se v klidu. Je to dokonale tuhé těleso. Jeho hybnost je

taková, aby celková hybnost soustavy (vesmíru, resp. uvažovaného modelu) byla nulová.

Dualita

Dualitu můžeme definovat jako **inverzní analogii** na dvojici objektů, jevů nebo metod. Úplná dualita zahrnuje dvojakost v obsahu i formě, neboli v objektech (veličinách) a ve způsobu jejich interakcí.

S dualitou se lze setkat již na ryze abstraktní úrovni v mnoha matematických a logických souvislostech. V rámci Boolovy algebry jde o známé De Morganovy zákony, které uvádějí do duálního vztahu logický součin a logický součet, za předpokladu, že jeden z nich operuje s negovanými veličinami (včetně výsledku).

Důkladně je zpracována problematika duálních postupů a duálních metod při optimalizaci v operačním výzkumu. Teorie duality je tu významným nástrojem pro testování optimality řešení. Platí věta, že základní řešení, které je současně přípustné pro primární i duální formulaci optimalizační úlohy, je řešením optimálním.

V elektrotechnice můžeme spatřovat vztah duality například v teorii obvodů mezi Kirchhoffovými zákony, potažmo pak mezi metodou smyčkových proudů a metodou řezů (speciálně metodou uzlových napětí).

Je zde rozlišována fyzikální dualita a topologická dualita. V prvním případě jde o dvojici prvků kapacitor – induktor, vlastnosti odpor – vodivost nebo veličiny napětí – proud. V rámci topologické duality se k sobě ne zcela správně přiřazuje dvojice smyčka – uzel. Ve skutečnosti je smyčka hranicí, která dělí rovinu na dvě části – exteriér a interiér. Ke každé této části duálně přísluší jeden uzel, takže přesněji jde o dualitu mezi smyčkou a uzlovým párem.

Dualita nepochybně patří k základním principům fyzikální reality. Z prostorového hlediska je vesměs spojena také s ortogonalitou duálních objektů. Duální zobrazení patrně má co činit s exponenciální funkcí (přiřazení 0 a 1 nebo násobení a sčítání, ale také časová a spektrální analýza). Původ fyzikální duality můžeme tušit v dualitě prostoru a času, resp. klidu a pohybu. Současně shledáme, proč dualita ve fyzikální teorii zdaleka nezaujímá místo, které by jí mezi ostatními zákonitostmi mělo náležet:

Duální objekty by s ohledem na symetrickou analogii měly mít stejnou dimenzi. Prostor a čas takto nevnímáme. Naše představivost je orientována výlučně prostorově a je trojrozměrně limitována. Ostatní složky časoprostoru (pokud je jich více), které nevidíme, spojujeme do jedné – časové – osy (tj. vše, co není vidět jako prostor). Zde může být příčina nesouměrného pojetí prostoru a času, které blokuje širší uplatnění duality třeba v případě elektrického a magnetického pole.