Trendy v podnikání, roč. 6, č. Special Issue, s. 11-15, 2016.
Business Trends, vol. 6, no. Special Issue, p. 11-15, 2016.

INVERZNÁ OPTIMALIZÁCIA V OBEHOVÝCH ROZVRHOCH AUTOBUSOV INVERSE OPTIMIZATION FOR BUS SCHEDULING PROBLEMS

Štefan Peško[1]
[1] doc. RNDr. Štefan Peško, CSc., Žilinská univerzita v Žiline, Fakulta riadenia a informatiky, stefan.pesko@fri.uniza.sk

Abstract: In this paper we study nontraditional model which can occur for the bus scheduling problems. It is motivated by answer to the question: At what minimum shortening of the driving time in some sections of the transport network will happen that an existing bus schedule is optimum? The possibility of using linear programming approach is presented. First, a new model for calculating the distance matrix in the transport network is formulated. Following is a known model for the bus scheduling problem with the minimum fleet size which is formulated as an assignment problem. In the conclusion, original model is derived to the one that connects this two formulations using shadow prices from the dual formulation of the assignment problem. Our nontraditional approach to the bus scheduling problem could affect to the economics of companies, which provide public bus services.

Keywords: optimization, bus scheduling, inverse model, linear programming

JEL Classification: C02, C51, R42

ÚVOD

Problematike tvorby modelov obehov autobusov v mestskej i prímestskej doprave sa v minulosti venovala (Palúch, Černý 1995), (Wren, Rousseau 1995) a v súčasnosti (Prileszky&Horváth, 2011), (Palúch, 2013), (Palúch, Majer 2015, 2016) venuje veľká pozornosť nakoľko ich riešenia ponúkajú prevádzkovateľom reálne úspory počtu autobusov resp. neproduktívnych prejazdov medzi zastávkami. Nestretli sme sa však so štúdiami, ktoré by sa venovali nejakej forme analýzy existujúceho prípustného riešenia. V tomto príspevku ukážeme ako by bolo možno aplikovať inverznú optimalizáciu na obehové rozvrhy autobusov.

1. INVERZNÝ LP PROBLÉM

Kvalitný prehľad problematiky inverznej optimalizácie v sieťach, s množstvom referencií, možno nájsť v článku (Xu & Xu 2013). Modely inverznej optimalizácie popisujú problém, keď je známe prípustné riešenie x^0, ktoré však nie je optimálne vzhľadom na cieľovú funkciu. Na rozdiel od bežných optimalizačných metód sa nehľadá optimálne riešenie problému k tejto cieľovej funkcii ale sa hľadá čo najmenšia úprava koeficientov cieľovej funkcie, po ktorej sa stane prípustné riešenie x^0 optimálnym riešením.

Ďalej budeme vychádzať z lineárnych modelov a preto tento prístup vysvetlíme na inverznom LP probléme. Majme všeobecný tvar úlohy LP:

$$\min\{\boldsymbol{cx} \mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0}\},$$

kde je vektor c∈R^n a matica A ∈ R^(m×n). Nech je x^0 jeho prípustným riešením. Potrebujeme zmeniť vektor c, ale čo najmenej tak, aby sa x^0 stalo optimálnym riešením LP. Ak definujeme

$$F(\boldsymbol{x}^0)=\{\,\bar{\boldsymbol{c}} \in R^n \mid \min\{\,\bar{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0}\,\} = \bar{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}}\},$$

potom inverzný LP problém definujeme takto:

$$\min\{\|\boldsymbol{c}-\bar{\boldsymbol{c}}\| \mid \bar{\boldsymbol{c}} \in F(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{0}})\}.$$

2. MODEL PRE VÝPOČET MATICE VZDIALENOSTÍ

Dopravnú sieť budeme modelovať súvislým hranovo ohodnoteným digrafom G=(V,H,d), ktorého vrcholmi V sú uzly dopravnej siete tvorené zastávkami autobusov resp. križovatky a orientovanými hranami H jazdené úseku siete ohodnotene dĺžkou d(h) v minútach.

Hoci teória grafov (Demel, 2002, s. 105) ponúka efektívny Floydov algoritmus na výpočet vzdialeností medzi ľubovoľnou dvojicou rôznych vrcholov grafu my ďalej využijeme vhodnejší prístup, ktorý je založený na lineárnom programovaní. Označme A množinu všetkých navzájom rôznych usporiadaných dvojíc vrcholov grafu tj. $A = \{(i,j) | \, i \in V, j \in V, i \neq j\}$ medzi ktorými hľadáme dĺžky z(i,j) najkratších ij-ciest.

Maticu vzdialeností môžeme hľadať pomocou nasledujúcej LP úlohy (**VZD**):

$$\sum_{(i,j)\in A} z(i,j) \rightarrow \max \tag{1}$$

$$z(i,k) + z(k,j) \geq z(i,j) \forall (i,k) \in H, \forall (k,j) \in A, \forall (i,j) \in A, i \neq j \neq k \neq i, \tag{2}$$

$$z(i,j) \leq d(i,j) \quad \forall (i,j) \in H, \tag{3}$$

$$z(i,j) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A \tag{4}$$

Podmienka (3) zabezpečuje, že dĺžka najkratšej ij-cesty z(i, j) je zhora ohraničená dĺžkou d(i, j) pokiaľ je dvojica (i, j) hranou digrafu tj. môže existovať kratšia cesta. Dĺžky všetkých ij-ciest sú nezáporné a tak vyhovujú obligátornej podmienke (4). Obmedzujúca podmienka (2), zodpovedá trojuholníkovej nerovnosti platnej pre vzdialenosť, ohraničuje zhora dĺžku najkratšej ij-cesty z(i,j) aj pre dvojice (i, j), ktoré nie sú hranami digrafu. Čitateľa môže prekvapiť cieľová funkcia (1) - súčet všetkých dolných odhadov dĺžok rôznych ciest v digrafe, ktorá sa maximalizuje. Každá najkratšia ij-cesta totiž musí obsahovať nejakú (i, k) hranu dĺžky d(i,k) z ktorej vychádza takže platí z(i,j)=z(i,k) + z(k,j), kde z(i,k)=d(i,k) nadobúda maximálnu hodnotu.

3. LEXIKOGRAFICKY OPTIMÁLNY MODEL OBEHU AUTOBUSOV

V uvažovanej dopravnej sieti, modelovanej hranovo ohodnoteným digrafom $G = (V, H, d)$, je daný cestovný poriadok v tvare množiny spojov $S = \{ s_1, s_2, , \dots, s_n \}$. Každý spoj je určený usporiadanou štvoricou $s_i = (m_i^o, t_i^o, m_i^p, t_i^p), \; i \in N = \{1,2,..n\}$, kde

- m_i^o – miesto odchodu spoja, m_i^o∈V,
- t_i^o – čas odchodu spoja,
- m_i^p – miesto príchodu spoja, m_i^p∈V,
- t_i^p – čas príchodu spoja.

Dva spoje s_i a s_j môžu byť jazdené jedným autobusom ak spoj s_i predchádza spoj s_j, ak platí

$$t_i^p + d(m_i^p, m_j^o) \leq t_j^o, \tag{5}$$

čo budeme značiť s_i 〖<s〗_j. Obeh autobusov sa realizuje turnusmi, obehom O_j autobusu rozumieme sled spojov s_j1<s_j2<...<s_(jr_j). Obehovým rozvrhom autobusov potom rozumieme množinu turnusov R = {O_1,O_2,…,O_p}, ktoré pokrývajú množinu spojov S. Našim cieľom je nájsť takú množinu turnusov s minimálnym počtom p turnusov, ktorá má minimálne celkové doby prejazdov medzi spojmi (v turnusoch).

V našom modeli je rozhodovacia premenná x_ij definovaná pre i, j ∈N takto:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \; ak \;\; s_i < s_j \; alebo \; je \;\; s_i \; \text{posledným spojom a} \; s_j \; prvým \; spojom \; v \; turnusoch \\ 0 \; ináč \end{cases}$$

a je ohodnotená číslom

$$c_{ij} = \begin{cases} d(m_i^p, m_j^o) \; ak \; s_i < s_j, \\ M \; ináč, \end{cases}$$

kde M je dostatočne veľká penalizačná konštanta.

Teraz už môžeme formulovať a riešiť našu optimalizačnú úlohu LP ako priraďovaciu úlohu (PU):

$$\sum_{i\in N} \sum_{j\in N} c_{ij} x_{ij} \quad \rightarrow \quad \min \tag{6}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, i \in N \qquad (7)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, j \in N, \qquad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\, (i,j) \in N \times N. \qquad (9)$$

Cieľovou funkciou je cena priradenia (6). Podmienka (7) zabezpečí, že zo spoja s_i buď existuje prejazd na iný spoj alebo je to posledný spoj turnusu. Podmienka (8) zase zabezpečí, že spoj s_j je buď prvým spojom turnusu alebo naň existuje prejazd z iného spoja. Podmienka (9) je obligátorná, pričom štrukturálne podmienky (7) a (8) vedú k {0,1} hodnotám premenných v optimálnom riešení.

Duálne združenou úlohou k našej priraďovacej úlohe (**PU**) je nasledujúca LP úloha (**DU**):

$$\sum_{i \in N} u_i + v_i \quad \to \quad \max \qquad (10)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad \forall\, (i,j) \in N \times N. \qquad (11)$$

Ak sú x_ij, u_i, v_i optimálne riešenia úloh (PU) a (DU), potom platia, (Plesnik a kol., 1990, s. 88), nasledujúce implikácie (podmienky komplementarity):

$$x_{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad u_i + v_j = c_{ij} \qquad (12)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad (13)$$

ktoré využijeme v našom inverznom modeli.

4. INVERZNÝ MODEL OBEHU AUTOBUSOV

Zhodne, ako v hore uvedenom modeli obehu autobusov, budeme predpokladať, že je daná množina spojov $S = \{s_i : i \in N\}$ a dopravná sieť je modelovaná súvislým digrafom G=(V,H,d). Budeme ale predpokladať, že ohodnotenie jeho hrán nepoznáme presne ale vieme jeho horný odhad, pričom pripúšťame maximálnu možnú odchýlku δ minút tj. doba trvania jazdy po hrane (i,j)∈H je v intervale $\langle d(i,j) - \delta, d(i,j) \rangle$.

Budeme ešte predpokladať, že je daný súčasný obehový rozvrh autobusov v tvare permutácie ψ na množine indexov spojov N s takouto interpretáciou: Nech j= ψ(i), potom zo spoja s_i buď existuje prejazd na spoj $s_{\psi(i)}$ alebo je s_i posledný spoj turnusu a $s_{\psi(i)}$ prvým spojom nejakého turnusu (prípadne i toho istého turnusu). Naším cieľom je nájsť také čo najmenšie maximálne skrátenie δ niektorých úsekov dopravnej siete, po ktorom sa stane rozvrh ψ optimálnym.

Takto formulovaný problém možno formulovať ako nasledujúcu LP úlohu lineárneho (IOB):

$$\sum_{(i,j) \in A} (z(i,j) - \delta) \quad \to \quad \max \qquad (14)$$

$$z(i,k) + z(k,j) \geq z(i,j) \qquad \forall (i,k) \in H, \forall (k,j) \in A, \forall (i,j) \in A, \; i \neq j \neq k \neq i, \qquad (15)$$

$$d(i,j) - \delta \leq z(i,j) \leq d(i,j) \qquad \forall (i,j) \in H, \qquad (16)$$

$$u_i + v_{\psi(i)} = z(m_i^p, m_{\psi(i)}^o) \qquad \forall\, i \in N: i < \psi(i), \qquad (17)$$

$$u_i + v_{\psi(i)} = M \qquad \forall\, i \in N: i \geq \psi(i), \qquad (18)$$

$$u_i + v_j \leq z(m_i^p, m_{\psi(i)}^o) \qquad \forall (i,j) \in B, \qquad (19)$$

$$t_i^p + u_i + v_{\psi(i)} \leq t_{\psi(i)}^o \qquad \forall\, i \in N: i < \psi(i), \qquad (20)$$

$$z(m_i^o, m_i^p) \leq t_i^p - t_i^o \qquad \forall\, i \in N, \qquad (21)$$

$$z(i,i) = 0 \qquad \forall\, i \in V, \qquad (22)$$

$$z(i,j) \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A - H, \qquad (23)$$
$$u_i, v_i \geq 0 \qquad \forall\, i \in N \qquad (24)$$
$$\delta \geq 0 \qquad (25)$$

V tomto modeli sme použili premenné z predchádzajúcich modelov a tieto indexové množiny:

- $A = \{(i,j) | \; i \in V, j \in V, i \neq j\}$,
- $B = \{(i,j) | \; i \in N, j \in N, t_i^p + d(m_i^p, m_j^o) \leq \; t_j^o\}$.

Cieľová funkcia (14) lexikograficky maximalizuje celkové dolné odhady dĺžok rôznych ciest v modifikovanej dopravnej sieti ako prvé kritérium a minimalizuje maximálnu možnú odchýlku na jej úsekoch ako druhé kritérium. Trojuholníková nerovnosť (15) je zhodná s nerovnosťou (2) pričom horná hranica (3) je doplnená aj o dolnú hranicu (16) na dĺžky najkratších ciest medzi zastávkami autobusov. Podmienky (17), (18) a (19) zaručia, že neexistuje lacnejší rozvrh autobusov takže ocenenie zadaného obehu autobusov, formulované pomocou duálnych premenných, je optimálne. Obmedzenia (20) a (21) zabezpečuje prípustnosť zadaného rozvrhu. Podmienka (22) je vynútená možnosťou zhodných miest príchodu a odchodu spojov v turnuse autobusu. Obmedzenia (23), (24) a (25) sú obligátorné.

ZÁVER

V tomto príspevku sme sa zamerali na otázku, ktorú si môže položiť prevádzkovateľ autobusovej dopravy: Pri akej minimálnej najväčšej časovej odchýlke na úsekoch dopravnej siete autobusov je prevádzkovaný obehový rozvrh autobusov optimálny? Ak dostane odpoveď, že je táto odchýlka pár minút, môže ju považovať za prípustnú a upustiť od optimalizácie obehových rozvrhov autobusov. Naše praktické skúsenosti totiž ukazujú, že realizovať nový obehový rozvrh naráža v praxi nielen na zvykové obmedzenia ale i mnohé technologické podmienky (Palúch, Majer 2007), ktoré vedú po heuristických úpravách optimálneho riešenia, napr. získané modelom (**PU**), k približnému (suboptimálnemu) riešeniu.

V modeli (**IOB**) sa nám podarilo využiť netradičný výpočet matice vzdialeností, model (**VZD**) v súvislej dopravnej sieti, pomocou podmienok komplementarity duálnej úlohy (**DU**) a primárnej priraďovacej úlohe (**PU**). Doteraz sme realizovali len počítačové experimenty na malých ilustračných príkladoch s niekoľkými desiatkami spojov. Tieto nám slúžili na odladenie modelu. Ďalší výskum bude zameraný najskôr na testovanie prezentovaného modelu na reálnych inštanciách MHD. Očakávame, že praktické výpočty povedú k istému zjemneniu nášho modelu. Jednou z možností je nahradenie jednotnej maximálnej odchýlky na úsekoch siete maximálnymi odchýlkami na jednotlivých úsekoch. To by znamenalo tiež, že na niektorých úsekoch siete nebude prípustné skrátenie dobu jazdy.

Poďakovanie: Tento príspevok vznikol vďaka podpore projektu VEGA 1/0582/16 Ekonomická optimalizácia procesov na sieťach.

ZDROJE

Demel, J. (2002). *GRAFY a jejich aplikace.* ACADEMIA.

Palúch, S. (2013). Vehicle and crew scheduling problem in regular personal bus transport - the state of art in Slovakia, In *16th international conference on transport science - ICTS* 2013, 27. máj 2013, Portorož, Slovenija, 297-304.

Palúch, S., Černý, J. (1995). Bus Scheduling with Flexible Journeys, In *Ricerca Operativa*. 24, 71-77.

Palúch, S., Majer, T. (2007). K optimalizácii mestskej a prímestskej pravidelnej osobnej dopravy, In *Vysoká škola jako facilitátor rozvoje společnosti a region*, III. mezinárodní konference 2007, 26. Ledna, Kunovice, Česká Republika, sborník. Evropský polytechnický institut, 245-248.

Palúch, S., Majer, T. (2015). Počítačový prístup k optimalizácii turnusov autobusov v mestskej a primestskej autobusovej deprave, In *Optimalizační úlohy v dopravních a logistických systémech a SW podpora rozhodování v* *inteligentních dopravních systémech*, sborník příspěvků, Praha, Albertov 20. - 21. 11. 2015. Praha: ČVUT, 71-77.

Palúch, S., Majer, T. (2016). Vehicle scheduling with roundabout routes to depot In *Mathematical methods in economics MME 2016*, 34th international conference, Liberec, Czech Republic, September 6th-9th, 2016. conference proceedings. Liberec: Technical university of Liberec, 623-628.

Plesník, P., Dupačová, J., Vlach, M. (1990). *Lineárne programovanie*. Alfa.

Prileszky,I., Horváth, B. (2011). New Ways in Vehicle and Crew Scheduling. *Acta Technica Jaurineusis*. 4(2), 297-303.

Wren, A., Rousseau, J., M. (1995). Bus driver scheduling - an overview, In Daduna, J,Branco, I and Pinto Paixao, J (editors), *Computer-Aided Transit Scheduling*, Springer Verlag, 173-187.

Xu, Ch., Xu, X. (2013). Some inversion problems on network. *Journal of Systems Science and complexity.* 26, 350-364.