

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra mechaniky

# NUMERICKÁ SIMULACE CHOVÁNÍ KOMPOZITNÍCH KONSTRUKCÍ PŘI NÍZKORYCHLOSTNÍM RÁZU

Ing. Tomáš Mandys

**Disertační práce**  
k získání akademického titulu doktor  
v oboru Aplikovaná mechanika

*Školitel:* prof. Ing. Vladislav Laš, CSc.  
*Školitel specialista:* Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D.

Plzeň 2016

University of West Bohemia in Pilsen  
Faculty of Applied Sciences  
Department of Mechanics

**NUMERICAL SIMULATION OF  
BEHAVIOR OF COMPOSITE  
STRUCTURES IN CASE OF  
LOW-VELOCITY IMPACT**

**Ing. Tomáš Mandys**

**A dissertation**

submitted for the degree of Doctor of Philosophy  
in Applied Mechanics

*Supervisor:* prof. Ing. Vladislav Laš, CSc.

*Supervisor specialist:* Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D.

Pilsen 2016

# Prohlášení

Předkládám k posouzení a k obhajobě tuto disertační práci zpracovanou na závěr doktorského studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Čestně prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této práce. Zároveň čestně prohlašuji, že jsem při vypracování této práce zachoval postupy ve vědecké práci obvyklé.

V Plzni, 31.8. 2016

Tomáš Mandys

# Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval mému školiteli prof. Ing. Vladislavu Lašovi, CSc. za příkladné vedení a podporu v průběhu doktorského studia. Zvláštní poděkování patří mému školiteli specialistovi Ing. Tomáši Kroupovi Ph.D. za množství rad, trpělivost a všechny čas věnovaný při nespočtu konzultací během celé doby doktorského studia. Poděkování patří také všem kolegům, kteří svými radami a náměty přispěli ke zkvalitnění této práce.

V neposlední řadě děkuji celé své rodině za bezvýhradnou podporu v průběhu celého mého dosavadního studia.

Tomáš Mandys



# Abstrakt

Práce je zaměřena na problematiku simulace chování kompozitních materiálů při nízkorychlostním rázu. V práci je popsáno sestavení dvou vlastních materiálových modelů tkaninového kompozitu. Nelineární elastický materiálový model tkaninového kompozitu s poškozením uvažuje nelineární chování v materiálových směrech 1 a 2 a v napěťové rovině 12 v případě smyku. Hyperplastický materiálový model tkaninového kompozitu s poškozením je navržen v souladu s termodynamickými principy vycházejícími z prvního a druhého termodynamického zákona. Daný model uvažuje plastické tečení materiálu v případě smyku v napěťové rovině 12 a využívá aditivního rozkladu logaritmické deformace. Poškození materiálu je realizováno pomocí navržených degradačních funkcí závislých na velikostech příslušných elastických deformací.

Oba autorem navržené modely byly implementovány do komerčního MKP softwaru Abaqus 6.14 za využití subroutin UMAT a VUMAT. Pro identifikace materiálových parametrů jednotlivých materiálových modelů bylo využito matematické optimalizace řízené programem OptiSLang. Elastického materiálového modelu tkaninového kompozitu bylo využito jako modelu potahu při sestavení nelineárního modelu sendvičové struktury. Pěnové jádro sendvičové struktury bylo modelováno za využití nelineárního izotropního modelu polymerních pěn o nízké hustotě z knihoven MKP softwaru. Sestavený model sendvičové struktury byl následně verifikován experimentem v podobě tříbodové ohybové zkoušky a příčného nízkorychlostního rázu na sendvičový nosník a sendvičovou desku. Hyperplastický materiálový model byl verifikován za pomoci nízkorychlostního rázu na tkaninovou kompozitní desku. Nízkorychlostní rázy byly realizovány za využití padostroje. Bylo provedeno porovnání výsledků numerických simulací a experimentů v podobě průhybů ve zvolených bodech na testovaném tělese a průběhů kontaktních sil mezi impaktorem a testovaným tělesem. Výsledky vzniklého poškození byly kvalitativně porovnány.

# Abstract

The work is focused on simulation of behavior of composite materials during in case of low-velocity impact loading. The work describes a development of two author's material models of woven composites. The non-linear elastic material model of woven composite with failure reflects the non-linear behavior along material directions 1, 2 and in plane 12 in case of shear. Hyperplastic material model of woven composite with failure was proposed according to thermodynamic principles following the first and the second law of thermodynamics. This model considers the plastic flow of the material in plane 12 in case of shear and uses the additive decomposition of the logarithmic strain. The failure is modelled in model using proposed degradation functions dependent on the relevant elastic strains.

Both models proposed by author were implemented into commercial FEM software Abaqus 6.14 using UMAT and VUMAT subroutines. The mathematical optimization controlled by OptiSLang software package was used for identification of material parameters of individual models. The non-linear elastic material model of woven composite was used to model skin of the non-linear sandwich structure. The foam core of sandwich structure was modeled using the non-linear model of isotropic low-density polymeric foams from Abaqus software library. The model of sandwich structure was experimentally verified using three-point bending tests of sandwich beam and low-velocity impact tests on sandwich beam and sandwich square plate. Hyperplastic material model was verified using a low-velocity impact on the woven composite square plate. The low-velocity impacts were performed using a newly designed drop test machine. A comparison of results of experiments and numerical simulations is provided. Special attention is paid to time history of deflections at selected points on the tested body and to the contact force between impactor and tested body. The results of deflections are interpolated in case of numerical simulations. A qualitative analysis of the failure prediction is presented.

# Obsah

<b>Seznam obrázků</b>	<b>x</b>
<b>Seznam tabulek</b>	<b>xvii</b>
<b>Přehled použitého značení</b>	<b>xviii</b>
<b>Úvod</b>	<b>1</b>
Cíle disertační práce . . . . .	3
Členění předkládané práce . . . . .	3
<b>1 Současný stav problematiky</b>	<b>5</b>
1.1 Materiálové efekty a jejich projevy . . . . .	5
1.2 Elasto-plastické materiálové modely s poškozením . . . . .	9
1.3 Sendvičové materiály . . . . .	13
1.3.1 Polymerní pěny sendvičových struktur . . . . .	14
1.3.2 Kompozitní potahy sendvičových struktur . . . . .	16
1.3.3 Poškození kompozitních sendvičových struktur s polymerním jádrem	18
1.3.4 Mechanické testování sendvičových materiálů . . . . .	21
1.4 Shrnutí poznatků a jejich využití v práci . . . . .	25
<b>2 Teoretické a matematické základy modelování materiálů</b>	<b>28</b>
2.1 Reprezentace plasticity a poškození z hlediska mechaniky . . . . .	28
2.2 Rozklad deformace . . . . .	30
2.3 Aditivní rozklad deformace elasto-plastického materiálu s poškozením . . .	36
2.4 Elastický a hyperelastický materiál . . . . .	39
2.5 Modelování plasticity v materiálu . . . . .	41

2.6	Metody modelování poškození v materiálu . . . . .	43
2.6.1	Metoda poškození využívající redukce efektivní plochy průřezu . . .	44
2.6.2	Metoda poškození využívající variace elastických materiálových modulů . . . . .	45
2.6.3	Metoda poškození založená na změně poréznosti materiálu (Void Volume Fraction) . . . . .	46
2.7	Konstitutivní vztah pro poškozený materiál . . . . .	47
2.7.1	Hypotéza rovnosti hustoty elastické deformační energie . . . . .	47
2.7.2	Hypotéza rovnosti elastické deformace . . . . .	49
2.8	Modelování poškození . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Nelineární elastický model tkaninového kompozitu</b>	<b>52</b>
<b>4</b>	<b>Elasto-plastický materiálový model tkaninového kompozitu s poškozením</b>	<b>58</b>
4.1	Helmholtzova volná energie . . . . .	59
4.2	Napětí . . . . .	61
4.3	Disipační potenciál . . . . .	62
4.3.1	Disipační funkce plastického potenciálu . . . . .	62
4.3.2	Disipační funkce potenciálu poškození . . . . .	63
4.4	Clausiusova-Duhemova nerovnost . . . . .	67
4.5	Numerický výpočet vzniku a šíření plasticity a poškození . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Experimentální zařízení pro nízkorychlostní rázy</b>	<b>80</b>
<b>6</b>	<b>Sendvičová struktura</b>	<b>84</b>
6.1	Materiálové vlastnosti potahu . . . . .	85
6.1.1	Tahové a tlakové zkoušky . . . . .	85
6.1.2	Identifikace materiálových parametrů potahu . . . . .	86
6.2	Identifikace materiálových parametrů pěny . . . . .	89
6.2.1	Tahové a tlakové zkoušky . . . . .	90
6.2.2	Tříbodový ohyb pěny . . . . .	92
6.3	Statický tříbodový ohyb sendvičového nosníku . . . . .	93
6.4	Nízkorychlostní ráz na sendvičový nosník . . . . .	95

6.4.1	Realizace experimentu . . . . .	95
6.4.2	Numerické simulace a interpolace posuvů ze simulace . . . . .	98
6.4.3	Porovnání výsledků experimentu s numerickou simulací . . . . .	100
6.5	Nízkorychlostní ráz na sendvičovou desku . . . . .	105
6.5.1	Experiment . . . . .	105
6.5.2	Numerické simulace a výsledky . . . . .	106
6.6	Shrnutí kapitoly . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Tkaninový kompozit</b>	<b>111</b>
7.1	Identifikace materiálových parametrů . . . . .	111
7.1.1	Tahové a tlakové zkoušky . . . . .	111
7.1.2	Proces identifikace materiálových parametrů . . . . .	113
7.2	Nízkorychlostní ráz na kompozitní desku . . . . .	124
7.2.1	Realizace experimentu . . . . .	124
7.2.2	Numerické simulace a porovnání výsledků . . . . .	126
7.3	Shrnutí kapitoly . . . . .	132
<b>Závěr</b>		<b>133</b>
	Zhodnocení cílů disertační práce . . . . .	136
	Přínos práce . . . . .	139
<b>Literatura</b>		<b>141</b>
<b>Soupis prací autora souvisejících s tématem práce</b>		<b>151</b>
<b>Přílohy</b>		
<b>A</b>	<b>Tahové vzorky tkaninového kompozitu</b>	<b>a</b>
<b>B</b>	<b>Porovnání průběhu poškození sendvičového nosníku při nízkorychlostním rázu</b>	<b>c</b>
<b>C</b>	<b>Porovnání chování kompozitní desky při nízkorychlostním rázu</b>	<b>f</b>

# Seznam obrázků

1.1	Modely materiálových efektů: lineární a nelineární elasticita (a), ideální plasticita a ideální elasto-plasticita (modrá) (b), elasto-plasticita s lineárním a nelineárním zpevněním (c), poškození (d), viskoelasticita (e), viskoelasto-plasticita (f). . . . .	7
1.2	Modely časově závislých materiálových efektů: změna křivky závislosti napětí a deformace v případě zvyšující se rychlosti deformace $\dot{\epsilon}$ (a), tečení materiálu (b), relaxace napětí v materiálu (c). . . . .	8
1.3	Jednoosá tahová zkouška: počáteční stav tkaninové vazby před zatížením (a), natočení snopků vláken při zatížení tkaniny (b), uzamknutí snopků vláken do sebe při zvýšeném zatížení (c). . . . .	9
1.4	Rozdělení materiálových modelů plasticity a poškození. . . . .	13
1.5	Snímek z řádkovacího elektronového mikroskopu: otevřená buněčná stěna polyurethanové pěny (a), uzavřená buněčná stěna polyethylenové pěny (b). . . . .	15
1.6	Schéma poškození sendvičových struktur vznikající příčným zatížením: delaminace potahu a jádra (a), porušení vnějšího potahu a drcení jádra (b), porušení pěny ve smyku (c). . . . .	19
1.7	Poškození sendvičových nosníků při tříbodovém ohybu: drcení pěny při velkém průměru indentoru bez vzniku poškození potahu (a), delaminace mezi potahem a pěnou v kombinaci se smykovým poškozením pěny (b), zhroucení sendvičové struktury vzniklé při malém průměru indentoru - porušení potahu spolu s drcením a hutněním pěny (c). . . . .	20

1.8	Možnosti úpravy sendvičových nosníků pro snížení náchylnosti poškození: vložení segmentů pro snížení náchylnosti poškození – tzv. <i>shear keys</i> (a), aplikace pyramidového příhradové výztuže pro zvýšení únosnosti sendvičové struktury (b), sendvičový nosník vyrobený slepením z více sendvičových panelů (c). . . . .	21
2.1	Úrovně pohledu na stavbu a modelování tkaninového kompozitu. . . . .	30
2.2	Multiplikativní dekompozice deformace. . . . .	31
2.3	Obecný rozklad deformace elasto-plastického materiálu s poškozením na jednoosé tahové zkoušce. . . . .	38
2.4	Schéma tahového diagramu lineárního a nelineárního elastického materiálu. . . . .	41
2.5	Schéma idealizované cyklické jednoosé tahové zkoušky elasto-plastického materiálu, šedá barva značí experiment. . . . .	42
2.6	Modelování poškození pomocí redukce efektivní plochy průřezu: Nepoškozená počáteční konfigurace (a), poškozená konfigurace (b), fiktivní nepoškozená konfigurace (c). . . . .	45
2.7	Princip hypotézy rovnosti hustoty deformační energie (a) a princip hypotézy rovnosti elastické deformace (b). Skutečná poškozená (červená) a fiktivní nepoškozená konfigurace (modrá barva). . . . .	49
2.8	Cyklický tahový diagram lineárně elastického materiálu s poškozením. . . . .	51
3.1	Princip lineárního a nelineárního chování materiálu spolu s materiálovou degradací v hlavním směru 1 (vlevo) a princip materiálové degradace nelineární funkce s konstantní asymptotou v případě smyku v napěťové rovině 12 (vpravo). . . . .	57
4.1	Základní buňka tkaninového kompozitního materiálu s plátňovou vazbou v souřadnicovém systému $O(1, 2, 3)$ . . . . .	59
4.2	Uvažovaný funkční předpis Heavisideovy funkce $H(\varepsilon^E)$ . . . . .	65
4.3	Schéma procesu výpočtu pro daný časový krok (iteraci) v materiálovém modelu v rámci subroutiny UMAT. . . . .	72
4.4	Vliv velikosti parametru $\varepsilon^R$ (vlevo) a $K^B$ (vpravo) na tvar funkce poškození. . . . .	76
4.5	Vliv velikosti parametru $a$ (vlevo) a $b$ (vpravo) na tvar funkce poškození. . . . .	77
4.6	Vliv velikosti parametru $D^U$ (vlevo) a $\varepsilon^F$ (vpravo) na tvar funkce poškození. . . . .	77

4.7	Obalová křivka přírůstku vektoru poškození $\Delta D_{12}$ . . . . .	78
4.8	Elasto-plastický materiálový model s poškozením v případě jednoosého cyklického zatížení. . . . .	79
5.1	Dřívější realizace rázových zkoušek autora práce. . . . .	81
5.2	Geometrie hlavy impaktoru použitá při rázových zkouškách. . . . .	82
5.3	Pohled na celkovou sestavu padostroje při realizaci rázových zkoušek. . . .	83
6.1	Geometrie tahových (vlevo) a tlakových (vpravo) vzorků kompozitního sendvičového potahu. . . . .	85
6.2	Vzorky typu A, B a C po realizaci tahových zkoušek. . . . .	86
6.3	Princip výpočtu objektivní funkce. . . . .	87
6.4	Porovnání tahového vzorku typu C mezi experimentem a numerickou simulací: nezatížený vzorek (vlevo), vzorek při zatížení maximální silou (uprostřed) a vzorek při dosažení maximálního posuvu před jeho porušením (vpravo), vizualizace kritéria porušení v napěťové rovině 12 porušení $\mathcal{F}_{12}$ . . .	88
6.5	Výsledné tahové diagramy kompozitního potahu: Vzorky typu A (vlevo nahoře), vzorky typu B (vpravo nahoře) a vzorky typu C (dole uprostřed). . . . .	89
6.6	Geometrie pěnových vzorků a způsob jejich zatěžování v případě tahové (vlevo) a tlakové (vpravo) zkoušky. . . . .	90
6.7	Závislost napětí a deformace pro uvažovaný materiálový model polymerní pěny jádra sendvičové struktury v případě jednoosé napjatosti. . . . .	91
6.8	Diagramy závislosti velikosti síly na prodloužení pro případ tahové (vlevo) a tlakové (vpravo) zkoušky polyurethanové pěny. . . . .	92
6.9	Geometrie třibodové ohybové zkoušky polymerních pěnových vzorků. . . . .	93
6.10	Tahová zkouška pěnového vzorku (vlevo), třibodový ohyb (vpravo). . . . .	93
6.11	Závislost síly na průhybu pěny při zatížení třibodovým ohybem. . . . .	93
6.12	Rozměry sendvičového nosníku spolu s rozměry a rozmístěním jednotlivých podpor v případě statického zatížení sendvičového nosníku třibodovým ohybem. . . . .	94
6.13	Porovnání výpočtového modelu s experimentem. . . . .	95
6.14	Závislost síly na velikosti průhybu při třibodovém ohybu sendvičového nosníku. . . . .	95
6.15	Uložení sendvičového nosníku a jeho geometrie. . . . .	96



6.16	Sendvičový nosník a impaktor o hmotnosti $m = 0,246$ kg. . . . .	97
6.17	Sendvičový nosník a impaktor o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	97
6.18	Rozvoj poškození sendvičových nosníků v závislosti na dopadové rychlosti impaktoru o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	98
6.19	Princip interpolace posuvů - ukázka na 2D případě. . . . .	99
6.20	Numerická simulace rázové události razníku o hmotnosti $m = 2,211$ kg s dopadovou rychlostí $v = 4$ m/s v čase $t = 30$ ms od začátku rázu. Znárodněn je index porušení v tlaku ve směru 1 $\mathcal{F}_{1C}$ . . . . .	101
6.21	Poškození sendvičového nosníku razníkem o hmotnosti $m = 2,211$ kg s dopadovou rychlostí $v = 4$ m/s při realizaci experimentu v čase $t = 30$ ms od začátku rázové události. . . . .	101
6.22	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 2,5$ m/s razníku o hmotnosti $m = 0,246$ kg. . . . .	102
6.23	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 3,5$ m/s razníku o hmotnosti $m = 0,246$ kg. . . . .	102
6.24	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 4,5$ m/s razníku o hmotnosti $m = 0,246$ kg. . . . .	102
6.25	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 1$ m/s razníku o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	103
6.26	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 2$ m/s razníku o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	103
6.27	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 2,25$ m/s razníku o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	103
6.28	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 2,5$ m/s razníku o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	104

6.29	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 3$ m/s razníku o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	104
6.30	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 4$ m/s razníku o hmotnosti $m = 2,211$ kg. . . . .	104
6.31	Uložení sendvičové desky a její geometrie. . . . .	106
6.32	Porovnání vzniklého poškození sendvičové desky z experimentu a numerické simulace pro dopadovou rychlost impaktoru $v = 5$ m/s a impaktor o hmotnosti $m = 2,336$ kg. . . . .	107
6.33	Porovnání vzniklého poškození sendvičové struktury mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost impaktoru $v = 5$ m/s. Numerické simulace znázorňuje index porušení v tlaku v materiálovém směru 1 $\mathcal{F}_{1C}$ (vlevo dole) a v řezu index porušení ve smyku v rovině 12 $\mathcal{F}_{12}$ (vpravo dole). . . . .	108
6.34	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 2$ m/s. . . . .	108
6.35	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 3$ m/s. . . . .	109
6.36	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 4$ m/s. . . . .	109
6.37	Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost $v = 5$ m/s. . . . .	109
7.1	Geometrie tahových vzorků tkaninového kompozitního materiálu. . . . .	112
7.2	Geometrie tlakových vzorků tkaninového kompozitního materiálu. . . . .	113
7.3	Princip proložení přímkou hysterezní smyčkou cyklického zatížení a stanovení směrnice cyklu $k$ . . . . .	115
7.4	Znázornění proměnných v tahovém diagramu využitých pro stanovení residuí. . . . .	117
7.5	Výsledné tahové diagramy skelného tkaninového kompozitu: Vzorky T0 (vlevo) a T90 (vpravo). . . . .	120
7.6	Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrníc tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorky T0 a T90. . . . .	120

7.7	Výsledný tahový diagram skelného tkaninového kompozitu pro vzorek T45.	121
7.8	Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrníc tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorek T45. . . . .	121
7.9	Výsledné tahové diagramy skelného tkaninového kompozitu: Vzorky T15 (vlevo) a T75 (vpravo). . . . .	122
7.10	Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrníc tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorky T15 a T75.	122
7.11	Výsledné tahové diagramy skelného tkaninového kompozitu: Vzorky T30 (vlevo) a T60 (vpravo). . . . .	123
7.12	Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrníc tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorky T30 a T60.	123
7.13	Geometrie kompozitní desky a její uložení při zatížení nízkorychlostním rázem. . . . .	125
7.14	Realizace příčného nízkorychlostního rázu na kompozitní desku s impakto-rem o hmotnosti $m = 0,242$ kg. . . . .	125
7.15	Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti $m = 0,242$ kg a dopadovou rychlost $v = 1$ m/s. . . . .	127
7.16	Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti $m = 0,242$ kg a dopadovou rychlost $v = 2$ m/s. . . . .	127
7.17	Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti $m = 0,242$ kg a dopadovou rychlost $v = 3$ m/s. . . . .	127
7.18	Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti $m = 0,242$ kg a dopadovou rychlost $v = 4$ m/s. . . . .	128
7.19	Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti $m = 2,338$ kg a dopadovou rychlost $v = 2$ m/s. . . . .	128
7.20	Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti $m = 2,338$ kg a dopadovou rychlost $v = 3$ m/s. . . . .	128

7.21	Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti $m = 2,338$ kg a dopadovou rychlost $v = 4$ m/s. . . . .	129
7.22	Ukázka deformace kompozitní desky v čase $t = 15$ ms z numerické simulace a z vysokorychlostní kamery při experimentu při zatížení impaktorem o hmotnosti $m = 2,336$ kg s dopadovou rychlostí $v = 4$ m/s. . . . .	130
7.23	Porovnání poškození kompozitní desky z numerické simulace a experimentu po realizaci rázu impaktoru o hmotnosti $m = 2,336$ kg s dopadovou rychlostí $v = 4,0$ m/s. . . . .	131
7.24	Vizualizace poškození kompozitní desky v tahu ve směru 2 po zatížení impaktorem o hmotnosti $m = 2,336$ kg s dopadovou rychlostí $v = 4,0$ m/s. . . . .	131

# Seznam tabulek

6.1	Materiálové parametry potahu. . . . .	88
6.2	Materiálové parametry polyurethanové pěny. . . . .	91
7.1	Elastické materiálové parametry. . . . .	118
7.2	Materiálové parametry křivky zpevnění. . . . .	119
7.3	Parametry popisující poškození materiálu. . . . .	119

# Přehled použitého značení

$a_i$ .....	funkce materiálové nelinearity ve směru $i$
$A_i$ .....	materiálový parametr nelinearity ve směru $i$
$\mathbf{B}$ .....	tenzor funkce rozvoje poškození v materiálu
$\mathbf{B}_0$ .....	vektor materiálových konstant udávajících velikost hustoty deformační energie iniciující poškození materiálu
$B_i$ .....	materiálový parametr nelinearity ve směru $i$
$B_{ij}$ .....	prvky vektoru funkce rozvoje poškození v materiálu
$\mathbf{C}$ .....	tenzor elastických konstant (elastický tangent)
${}^\tau\mathbf{C}^e, \bar{\mathbf{C}}^e$ .....	modifikovaný pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor náležící do mezilehlé konfigurace
${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}_{\text{trial}}^e$ .....	pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor z předešlé iterace
$dA$ .....	aktuální plocha průřezu materiálu
$d\bar{A}$ .....	efektivní plocha průřezu materiálu
$dA_0$ .....	počáteční plocha průřezu materiálu
$dF$ .....	velikost tahového zatížení
$dV$ .....	objem poškozeného materiálu
$dV_0$ .....	počáteční objem materiálu
$dV_D$ .....	objem dutin v materiálu
$D$ .....	parametr poškození, jednorozměrný případ
$\mathbf{D}$ .....	tenzor poškození
$\mathbf{D}_{\text{trial}}$ .....	tenzor poškození z předchozího kroku výpočtu
$D_{ij}$ .....	prvky tenzoru poškození
$D_{ijT}^U, D_{ijC}^U$ .....	mezní poškození v tahu a tlaku
$D_{ijT}^{\max}, D_{ijC}^{\max}$ .....	maximální poškození v tahu a tlaku
${}^t_0\mathbf{D}$ .....	tenzor rychlosti deformace, symetrická část gradientu rychlosti $\mathbf{L}$

$\bar{\mathbf{D}}^{\text{P}}$ .....	modifikovaný tenzor rychlosti plastické deformace
$\bar{E}$ .....	efektivní Youngův modul pružnosti
$E(D)$ .....	Youngův modul pružnosti v poškozené konfiguraci
$E^0$ .....	Youngův modul pružnosti v počáteční nepoškozené konfiguraci
$E_1, E_2, E_3$ .....	moduly pružnosti v tahu v hlavních směrech anizotropie
$\mathbf{E}^{(m)}$ .....	zobecněná míra deformace odvozená z Cauchy-Greenova deformačního tenzoru
$f$ .....	poměrná změna objemu
$\mathbf{F}$ .....	funkce disipace materiálu
${}^t_0\mathbf{F}$ .....	deformační gradient definující deformaci aktuální konfigurace $t$ vzhledem k počáteční konfiguraci 0
$F^{\text{D}}$ .....	disipační funkce potenciálu poškození, jednorozměrný případ
$\mathbf{F}^{\text{D}}$ .....	vektor složek disipační funkce potenciálu poškození
$F_{ij}^{\text{D}}$ .....	prvky vektoru disipační funkce potenciálu poškození
${}^t_{\tau}\mathbf{F}^{\text{e}}$ .....	elastická část deformačního gradientu ${}^t_0\mathbf{F}$
${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^{\text{e}}_{\text{trial}}, \mathbf{F}^{\text{e}}_{\text{trial}}$ ...	počáteční (trialový) gradient elastické deformace
$F_{\text{exp}}$ .....	velikost síly z experimentu
$F_{\text{exp}}^{\text{max}}$ .....	velikost maximální síly z experimentu
$F_{\text{sim}}$ .....	velikost síly z numerické simulace
$F_{\text{sim}}^{\text{max}}$ .....	velikost maximální síly z numerické simulace
${}^{\tau}_0\mathbf{F}^{\text{P}}$ .....	plastická část deformačního gradientu ${}^t_0\mathbf{F}$
$F^{\text{P}}$ .....	disipační funkce plastického potenciálu
$\mathcal{F}_{12}$ .....	index porušení ve smyku v napěťové rovině 12 kritéria maximálních napětí
$\mathcal{F}_{1\text{T}}, \mathcal{F}_{1\text{C}}$ .....	index porušení ve směru 1 v tahu a tlaku kritéria maximálních napětí
$\mathcal{F}_{2\text{T}}, \mathcal{F}_{2\text{C}}$ .....	index porušení ve směru 2 v tahu a tlaku kritéria maximálních napětí
$G_{12}, G_{13}, G_{23}$ ....	moduly pružnosti ve smyku v rovinách rovnoběžných s příslušnou rovinou symetrie elastických vlastností
$G_{12}^0$ .....	počáteční modul pružnosti ve smyku v rovině 12
$H$ .....	Heavisideova funkce
$\mathbf{J}$ .....	vektor zobecněných toků

$k_{12}$ .....	celočíselný parametr rozvoje postupného poškození v materiálu
$k_{\text{exp}}$ .....	hodnota směrnice cyklu z experimentu z cyklického zatěžování
$k_{\text{exp}}^{\text{max}}$ .....	největší hodnota směrnice cyklu z experimentu
$k_{\text{sim}}$ .....	hodnota směrnice cyklu z numerické simulace
$K_R$ .....	materiálový parametr plasticity
$K_{ijT}^B, K_{ijC}^B$ .....	materiálové parametry popisující poškození materiálu v tahu a tlaku
$l_{12}$ .....	tvárový parametr nelineární tří-parametrické funkce s konstantní asymptotou popisující chování ve smyku v napěťové rovině 12
${}^t\mathbf{L}, \mathbf{L}$ .....	gradient rychlosti, míra rychlosti deformace materiálu
${}^\tau\mathbf{L}$ .....	modifikovaný gradient rychlosti
${}^\tau_0\mathbf{L}^P$ .....	gradient rychlosti plastické deformace $\tau$
$m_{ij}$ .....	mocninný parametr funkce popisující postupné poškození materiálu
$n_{ij}$ .....	mocninný parametr funkce popisující postupné poškození materiálu
$n_R$ .....	váhový parametr mocninné funkce $R$
$n_\theta$ .....	celkový počet jednotlivých typů vzorků
$r$ .....	residuum
$r_{D_{\text{max}}}$ .....	residuum poškození materiálu
$r_{Fl}$ .....	residuum rozdílu obalových křivek
$r_{F_{\text{max}}}$ .....	residuum velikosti maximální síly
$r_{F_{u_{\text{max}}}}$ .....	residuum velikosti síly při maximálním posuvu
$r_k$ .....	residuum rozdílu směrnic cyklů
$r_{u^P}$ .....	residuum plastického tečení
$r_{u_{F_{\text{max}}}}$ .....	residuum velikosti posuvu při maximální síle
$R$ .....	aktuální mez kluzu
${}^t_0\mathbf{R}$ .....	tenzor rotace kontinua
$R_0$ .....	počáteční mez kluzu
${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}_{\text{trial}}^e$ .....	trialový tenzor elastické rotace
${}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega$ .....	ortogonálního tenzor vyjadřující přírůstek plastické rotace
$\mathbf{S}$ .....	Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí
$S_L$ .....	pevnost materiálu ve smyku v napěťové rovině 12
$\mathbf{u}$ .....	vektor posunutí (obecné označení)
${}^t\mathbf{u}^e$ .....	elastický posuv z mezilehlé (nezatížené) do konečné konfigurace



${}^t\mathbf{u}^P$ .....	plastický posuv z referenční do mezilehlé (nezatížené) konfigurace
${}^t_0\mathbf{U}$ .....	pravý tenzor protažení deformačního gradientu ${}^t_0\mathbf{F}$
${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{U}^e_{\text{trial}}$ .....	pravý tenzor elastického protažení z předchozí iterace
${}^t_0\mathbf{V}$ .....	levý tenzor protažení deformačního gradientu ${}^t_0\mathbf{F}$
${}^t\mathbf{v}^e({}^t\mathbf{x}), {}^t\dot{\mathbf{u}}^e({}^t\mathbf{x})$ .	rychlost elastické deformace
${}^\tau\bar{\mathbf{v}}^P({}^\tau\mathbf{x}^P), {}^\tau\dot{\mathbf{u}}^P({}^\tau\mathbf{x}^P)$	rychlost bez elastické deformace a pohybu tuhého tělesa v mezilehlé konfiguraci $\tau$
$W$ .....	deformační energie
${}^t_0\mathbf{W}$ .....	spin tenzor, nesymetrická část gradientu rychlosti $\mathbf{L}$
$\bar{\mathbf{W}}^P$ .....	modifikovaný plastický spin tenzor
${}^0\mathbf{x}$ .....	souřadnice bodu v nedeformované referenční konfiguraci 0
${}^t\mathbf{x}$ .....	souřadnice bodu v aktuální zdeformované konfiguraci $t$
${}^\tau\mathbf{x}^P$ .....	souřadnice bodu v mezilehlé (nezatížené) konfiguraci $\tau$
$\mathbf{X}$ .....	vektor zobecněných sil
$X_T, X_C$ .....	pevnost materiálu ve směru anizotropie 1 v tahu a tlaku
$\mathbf{Y}$ .....	tenzor termodynamické síly přidružené poškození
$Y_{ij}$ .....	prvky tenzoru termodynamické síly přidružené poškození
$\mathbf{Y}_{\text{red}}$ .....	redukováná termodynamická síla přidružená poškození
$Y_T, Y_C$ .....	pevnost materiálu ve směru anizotropie 2 v tahu a tlaku
$\beta$ .....	tenzor reprezentující efekt rozvoje poškození v materiálu
$\Delta\mathbf{D}$ .....	přírůstek tenzoru poškození
$\boldsymbol{\varepsilon}$ .....	tenzor celkové logaritmické deformace
$\boldsymbol{\varepsilon}^d$ .....	deformace způsobená rozvojem poškození, jednorozměrný případ
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$ .....	elastická deformace, jednorozměrný případ
$\boldsymbol{\varepsilon}^{ed}$ .....	elastická deformace způsobená rozvojem poškození, jednorozměrný případ
$\boldsymbol{\varepsilon}^E$ .....	celková elastická deformace, jednorozměrný případ
$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ .....	efektivní elastická deformace ve fiktivní neporušené konfiguraci, jednorozměrný případ
$\boldsymbol{\varepsilon}^{id}$ .....	nevratná složka deformace způsobená rozvojem poškození, jednorozměrný případ
$\boldsymbol{\varepsilon}^E$ .....	tenzor celkové elastické deformace
$\boldsymbol{\varepsilon}^P$ .....	plastická deformace, jednorozměrný případ

$\varepsilon^P$ .....	celková plastická deformace, jednorozměrný případ
$\boldsymbol{\varepsilon}^P$ .....	tenzor celkové plastické deformace
$\bar{\varepsilon}^P$ .....	ekvivalentní plastická deformace
$\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0$ .....	deformace uvádějící přechod mezi lineárním a nelineárním vztahem mezi napětím a deformací
$\varepsilon_{ijT}^0, \varepsilon_{ijC}^0$ .....	elastická deformace v tlaku a tahu iniciující vznik poškození
$\varepsilon_{ijT}^F, \varepsilon_{ijC}^F$ .....	elastická deformace v tahu a tlaku, při kterých dochází k celkovému poškození struktury materiálu
$\varepsilon_{ijT}^R, \varepsilon_{ijC}^R$ .....	materiálový parametr charakterizující funkci poškození materiálu v tahu a tlaku
${}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\varepsilon}$ .....	celkový tenzor logaritmické deformace
${}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\varepsilon}^e$ .....	vratná (elastická) část tenzoru deformace
${}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\varepsilon}^p$ .....	nevratná (plastická) část tenzoru deformace
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .....	tenzor rychlosti deformace
$\theta$ .....	úhel mezi natočením vláken a směrem zatěžování vzorku
$\lambda$ .....	celkové protažení materiálu ( <i>stretch</i> ), jednorozměrný případ
$\lambda^d$ .....	protážení od poškození materiálu
$\lambda^e$ .....	elastické protažení materiálu
$\lambda^{ed}$ .....	elastická část protažení od poškození materiálu
$\lambda^{id}$ .....	plastická část protažení od poškození materiálu
$\lambda^p$ .....	plastické protažení materiálu
$\dot{\Lambda}^D$ .....	vektor multiplikátorů poškození
$\dot{\Lambda}^P$ .....	multiplikátor plasticity
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ .....	Poissonova čísla
$\phi$ .....	disipace vztažená na jednotku objemu
$\rho$ .....	hustota materiálu
$\rho$ .....	hustota poškozeného materiálu, kapitola 2
$\rho_0$ .....	počáteční hustota (nepoškozeného) materiálu
$\boldsymbol{\sigma}$ .....	logaritmický tenzor napětí, zobecněný Kirchhoffův tenzor napětí
$\bar{\sigma}$ .....	efektivní napětí
$\bar{\sigma}_{red}$ .....	redukované efektivní napětí
$\tau_{12}^0$ .....	asymptotická hodnota napětí
$\bar{\tau}_{12}$ .....	efektivní smykové napětí v napěťové rovině 12

$\psi$ .....	Helmholtzova volná energie
$\psi^D$ .....	Helmholtzova energie vznikající poškozením materiálu
$\psi^E$ .....	Helmholtzova volné elastické energie
$\psi^P$ .....	Helmholtzovy volná energie plastického přetvoření

# Úvod

Pod pojmem kompozitní materiál se rozumí materiál složený ze dvou a nebo více mechanicky a chemicky odlišných složek zastoupených v množství větším než 5% [39]. Kompozitní materiály se skládají z matrice a zpevňující fáze. Vlastnosti kompozitních materiálů jsou dány vlastnostmi jednotlivých materiálových složek, objemovými podíly a geometrií výztuže [47].

Z historického hlediska sahá vznik a výroba prvních kompozitních materiálů až do starověku, kdy jihoamerické civilizace a africké kmeny využívaly slámy a mokré jílovité hlíny na výrobu nepálených cihel, tzv. vepřovic, ze kterých po následném vysušení stavěly svá obydlí. Vepřovice se používaly i u nás až do počátku 20. století, a to hlavně na stavbu venkovských stavení. Pokud přejdeme fakt, že samotný železobeton také splňuje definici kompozitního materiálu a zaměříme se pouze na kompozitní materiály využívané v technické konstrukční praxi, tak jejich současná podoba se začínala vyvíjet od 20. let minulého století. Tehdy se začaly vyrábět první dlouhovláknové kompozity z fenolické pryskyřice s výztuží z azbestových vláken. Kompozitních materiálů s polymerní matricí se začalo hojně využívat za 2. světové války pro armádní účely. Jednalo se hlavně o lamináty s výztuží ze skleněných vláken, tzv. sklolamináty, které našly své využití v letectví při výrobě trupů letadel, nebo jejich kabin, a také v námořnictví při výrobě lodí a člunů. Ve stejném období se objevují i první sendvičové kompozitní materiály, které představují zvláštní druh laminátových kompozitu, tzv. hybridy, které jsou tvořeny vnějšími kompozitními potahy a jádrem z lehkého materiálu. Úspěch kompozitních materiálů ve vojenských aplikacích vedl po válce k jejich širokému komerčnímu využití a jejich dalšímu vývoji. Koncem 40. let byla vynalezena metoda vinutých vláken na výrobu kompozitů, které našly okamžité využití v raketové technice. Při výrobě trysek do raketových motorů byla v roce 1960 poprvé v kompozitech použita vlákna z vysokopevnostního uhlíku. O necelých deset let později přišly první kompozity s kovovou matricí. Jednalo se hlavně o hliníkové slitiny vyztužené

borovými vlákny, které byly využívány hlavně v kosmonautice a v letectví. Tyto kompozity nebyly a dodnes nejsou tak široce využívány jako kompozity s polymerovou maticí. Ty od 70. let minulého století postupně nacházejí své uplatnění v dopravním průmyslu a i v dalších průmyslových odvětvích, jakými jsou například sportovní potřeby nebo výrobní stroje. V dopravním průmyslu, zejména pak v letectví, je aplikace a uplatnění kompozitních materiálů úzce spojena s trendem snižování hmotnosti dopravních prostředků, který hraje hlavní roli v problematice hospodárnosti a ekologičnosti jejich provozu.

Hlavní předností kompozitních materiálů je jejich odolnost proti korozi a především variabilita při návrhu výrobků, která umožňuje dosáhnout dobrého poměru mezi tuhostí a hmotností výsledného výrobku. Velká nevýhoda kompozitních materiálů spočívá v jejich náchylnosti na možnost vzniku poškození, které nemusí být v počátku vzniku pouhým okem viditelné. Větší náchylnost na poškození je způsobena absencí významné plastické deformace v době vzniku prvotních trhlin a v porovnání s konvenčními materiály i nízkými smykovými pevnostmi kompozitního materiálu. V praxi je k detekci porušení kompozitních materiálů nutné užití nedestruktivních technik na principu akustických metod, rentgenů, anebo CT přístrojů. Zejména poslední dva jmenované postupy jsou obecně finančně nákladné a časově náročné, navíc jsou spojené s odstavením konstrukce z provozu. Vzniklé poškození kompozitní struktury je samozřejmě nevratné a způsobuje snížení tuhosti a pevnosti materiálu vedoucí až k jeho samotnému porušení. Tento fakt je vždy velmi nutné brát v úvahu při návrzích aplikací kompozitních materiálů a snažit se zajistit bezpečnost při všech očekávaných zatěžovacích stavech celé kompozitní konstrukce. Vedle očekávaného zatížení předpokládaného s provozem stroje je nutné brát v úvahu i náhodná rázová zatížení, kterým může být konstrukce během svého každodenního provozu vystavena. V dané problematice hrají významnou roli rázy nízkorychlostní, kde je celková energie padajícího tělesa absorbována materiálem. Tato kategorie rázů se jeví jako jedna z nejnebezpečnějších z hlediska dlouhodobého užívání kompozitních konstrukcí, právě kvůli již zmíněnému problému s odhalením vnitřních poškození.

Se stále se zvyšujícími nároky na konstrukce, hlavně v oblasti jejího testování potřebného pro schválení konstrukce a získání certifikace, se jak samotné návrhy, tak i aplikace kompozitních materiálů neobejdou bez numerických simulací. Experimentální testování každého návrhu, případně pouze dílčí změny v návrhu kompozitní konstrukce, je v současné době nereálné, a to jak z hlediska časového, tak finančního. Numerické simulace tak hrají v případě aplikace kompozitních materiálů nezastupitelnou roli. Znalost chování

kompozitních materiálů je pro tyto účely velmi důležitá. Možnost dalších aplikací kompozitních materiálů, a to především v oblasti primárních konstrukčních prvků, je podmíněna stálým rozšiřováním teoretických znalostí o kompozitních materiálech a v neposlední řadě také vývojem přesnějších materiálových modelů popisujících chování kompozitních materiálů.

## Cíle disertační práce

Při státní doktorské zkoušce byly stanoveny následující cíle pro vypracování disertační práce:

1. navrhnout numericko-experimentální metodiku využívající optimalizačních metod pro identifikaci materiálových vlastností a analyzovat vlivy parametrů jako např. rychlosti dopadu impaktoru, energie zavedené do kompozitní struktury rázovou buďící silou a.j.;
2. analyzovat vliv a nutnost modelování kompozitní struktury s využitím nelineárního konstitutivního vztahu zejména ve smyku;
3. vybrat, eventuálně modifikovat, vhodná kritéria porušení predikující porušení jak ve vrstvě kompozitního materiálu, tak v mezivrstvě mezi dvěma vrstvami sousedních lamin;
4. validovat výpočtové modely experimentem.

## Členění disertační práce

Předkládaná disertační práce je rozdělena do sedmi kapitol. Po úvodu je v první kapitole provedeno shrnutí současného stavu problematiky testování a modelování kompozitních materiálů se zaměřením na problematiku sendvičových struktur s kompozitními potahy vyrobenými z tkaniny a pěnovým jádrem. Část první kapitoly je věnována rozboru principů elasto-plastických materiálových modelů a jednotlivých materiálových jevů vyskytujících se na zkoumaných materiálech. Ve druhé kapitole se čtenář seznámí s matematickými základy modelování plasticity a poškození v materiálu spolu s rozkladem deformace v případě uvažování elasto-plastického materiálového modelu s poškozením.

Třetí a čtvrtá kapitola popisují materiálové modely navržené v rámci předkládané práce, v podobě nelineárního elastického materiálového modelu tkaninového kompozitu v kapitole třetí a elasto-plastického materiálového modelu s poškozením vycházejícího z teorie pro hyperplastické materiály v kapitole čtvrté. Další kapitola je věnována popisu experimentálního zařízení - padostroje, které bylo v práci využito při realizaci nízkorychlostních rázů uvedených v šesté a sedmé kapitole. Identifikaci materiálových vlastností a testování sendvičové struktury s využitím vlastního materiálové modelu pro potah se zaměřením na nízkorychlostní rázy je věnována šestá kapitola. Sedmá kapitola je zaměřena na popis identifikace materiálových vlastností elasto-plastického materiálového modelu s poškozením uvedeného ve čtvrté kapitole. Navržený model byl následně verifikován na úloze nízkorychlostního rázu. V závěru práce je provedeno shrnutí dosažených výsledků disertační práce.

# Kapitola 1

## Současný stav problematiky

Jak již bylo zmíněno v úvodu této práce, kompozitní materiály stále častěji nacházejí své uplatnění na nových konstrukcích. Pro zjištění vhodnosti jednotlivých aplikací kompozitních materiálu je v současné době prvotně využíváno numerických simulací za pomoci metody konečných prvků. Tím vzniká otázka, jak vhodně modelovat nejen samotné chování kompozitů, ale například i jejich spojení a v neposlední řadě i vznikající poškození.

Tato kapitola je věnována současnému stavu modelování chování kompozitních materiálů a jejich experimentálnímu testování. První podkapitola seznamuje čtenáře s popisem základních materiálových jevů vyskytujících se obecně v materiálech, na kterou následně navazuje rozbor elasto-plastických materiálových modelů s poškozením. Tyto první dvě podkapitoly jsou věnovány spíše obecnému rozboru modelování materiálů. Třetí podkapitola je zaměřena na sendvičové struktury, popisuje konkrétně jejich skutečné chování, způsoby modelování a také v neposlední řadě také jejich experimentální testování. Důraz je kladen zejména na sendvičové struktury tvořené polymerními pěnovými jádry s kompozitním vnějším potahem. Poslední čtvrtá podkapitola uvádí shrnutí poznatků důležitých pro vypracování disertační práce.

### 1.1 Materiálové efekty a jejich projevy

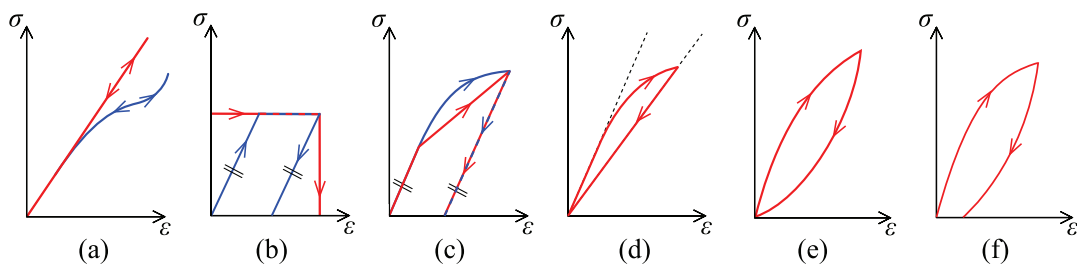
Mechanické chování materiálů vykazuje v závislosti na způsobu a druhu zatěžování řadu materiálových efektů, které se mohou navíc mezi sebou prolínat. Možnost, případně nutnost zahrnout tyto efekty do materiálových modelů využívaných v numerických si-



mulacích se odvíjí od předpokládaných užití těchto modelů a typů řešených úloh. Vedle lineární elasticity, kterou popisuje Hookeův zákon, se některé materiály chovají nelineárně elasticky. Tyto materiály často vykazují při zatěžování velké deformace, např. gumy (elastomery) a některé druhy plastů. Plasticita materiálu, neboli přetvoření materiálu za vzniku nevratných deformací, se rozlišuje na plasticitu ideální a na plasticitu se zpevněním, případně se změkčením. Plastické zpevnění, popř. změkčení, materiálu může být uvažováno v lineární, nebo nelineární podobě. Kombinace elastického chování materiálu se vznikem plastického tečení je označována za elasto-plastické chování materiálu [86]. Modely ideální plasticity, ideální elasto-plasticity a elasto-plasticity s lineárním a nelineárním zpevněním jsou znázorněny na obrázku 1.1 (b) a (c).

Materiálový efekt, při kterém dochází vlivem zatížení k trvalé změně materiálových vlastností v podobě modulů pružnosti materiálu, je označován pojmem poškození (damage). Rozdíl mezi poškozením a nelineární elasticitou materiálu je patrný až při odlehčení zatěžovaného materiálu, kdy se u poškozeného materiálu oproti nelineární elasticitě materiálu projeví trvalá změna materiálových vlastností v podobě změny hodnoty modulu pružnosti (tangenty) – viz obrázek 1.1 (a) a (d). Materiály splňující principy termomechaniky jsou označovány za hyperplastické, popř. hyperelastické materiály. Konstitutivní chování těchto materiálu je definováno dvěma potenciálními funkcemi - Helmholtzovou volnou energií (popř. Gibbsovu volnou energií) a disipační funkcí [80]. Do kategorie hyperplastických materiálů spadají i materiály vykazující elasto-plastické chování. Pokud se v materiálu při jeho deformaci projevují viskózní vlastnosti, hovoříme ve spojení s elasticitou nebo plasticitou o viskoelastickém, popř. viskoplastickém, též viskoelasto-plastickém chování materiálu [86]. Viskózní vlastnost materiálu je důsledkem závislosti elastických materiálových parametrů na čase, která se projevuje hysterezí na křivce závislosti napětí a deformace v případě cyklického zatěžování. Modely jednorozměrných případů výše popsaných materiálových jevů jsou znázorněny na obrázku 1.1.

Při dynamickém zatěžování se u materiálů objevuje změna materiálových vlastností v závislosti na rychlosti deformace materiálu. Tento jev je označován jako tzv. strain-rate efekt a je přisuzován kombinaci působících setrvačných sil v materiálu a časově omezeným možnostem rozvoje jiných jevů v materiálu na atomární a molekulární úrovni – např. plasticitě. Charakteristické pro tento jev jsou rostoucí moduly pružnosti materiálu spolu se zvyšující se dynamickou pevností, příp. mezí kluzu materiálu. S rostoucí rychlostí deformace dochází navíc obvykle v zatěžovaném materiálu i ke změně charakteru jeho po-



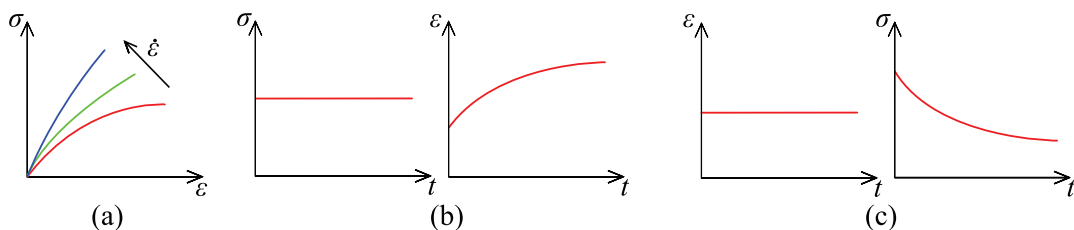
**Obrázek 1.1:** Modely materiálových efektů: lineární a nelineární elasticita (a), ideální plasticita a ideální elasto-plasticita (modrá) (b), elasto-plasticita s lineárním a nelineárním zpevněním (c), poškození (d), viskoelasticita (e), viskoelasto-plasticita (f).

rušení. Dle velikosti rychlosti deformace lze rozlišovat nízké, střední a vysoké strain-rate efekty v materiálu [103]. Střední strain-rate efekt (*moderate strain-rate*) spadá do problematiky testování motorových vozidel a jejich nárazových zkoušek (tzv. crash zkoušky), kde se hodnoty rychlosti deformace obvykle pohybují v rozmezí jednotek až desítek  $s^{-1}$ . Vysoký strain-rate (*high strain-rate*) je nutné uvažovat v leteckém průmyslu, kosmonautice a balistice, kde ve všech těchto odvětvích mohou být aplikované materiály zatíženy hodnotami rychlostí deformace v řádech stovek  $s^{-1}$ . V daném případě je nutné u materiálů znát tzv. dynamické materiálové parametry v podobě pevností a modulů pružností materiálu, jejichž velikosti jsou závislé na rychlostech deformace daného materiálu.

Práce [83] klasifikuje vysoký strain-rate efekt od hodnoty rychlosti deformace  $10^2 s^{-1}$ , který pak dále rozděluje na vysoký ( $10^2 s^{-1}$  až  $10^4 s^{-1}$ ), velmi vysoký ( $10^4 s^{-1}$  až  $10^6 s^{-1}$ ) a ultra vysoký strain-rate (od  $10^6 s^{-1}$ ). U kvazistatických úloh se rychlost deformace pohybuje v řádu  $10^{-3} s^{-1}$ . Rychlost deformace nižší jak  $10^{-6} s^{-1}$  je již považována za tečení materiálu při konstantním zatížení [83]. Experimentálním zjišťováním strain-rate efektu na různých materiálech se zabývá celá řada prací, např. [103, 99]. Yu a kol. uvádí závislosti dynamických pevností testovaných materiálů na velikosti rychlosti deformace jednotlivých materiálů v rozsahu nízkého až velmi vysokého strain-rate [99]. Z uvedených citlivostních analýz vyplývá rostoucí vliv strain-rate efektu na vlastnostech materiálu až od působení středních, případně až vysokých hodnot rychlosti deformace při zatěžování. Hsiao a kol. řeší stejnou problematiku pro případ uhlíkových kompozitů, kdy vedle analýzy závislostí dynamických pevností pro tahové zatěžování přidává i analýzu daných závislostí pro případ tlakového zatěžování [28]. U kompozitních materiálů hraje důležitou roli v daném případě vliv použitých vláken. Uhlíková vlákna vykazují obecně nižší citlivost

změny materiálových vlastností s rostoucí rychlostí deformace než vlákna skelná [103]. Porovnáním numerických simulací rázových zkoušek na kompozitní desku s uvažováním strain-rate efektu a bez něj uvádí [88]. Z výsledků je patrné, že v případě nízkorychlostních rázů není rozdíl na porovnávaných výsledcích v podobě průhybu kompozitní desky nikterak významný. Řada prací zabývajících se dynamickým rázovým zatížením kompozitních struktur využívá staticky, případně kvazistaticky stanovené materiálové vlastnosti – např. práce [6, 29, 63].

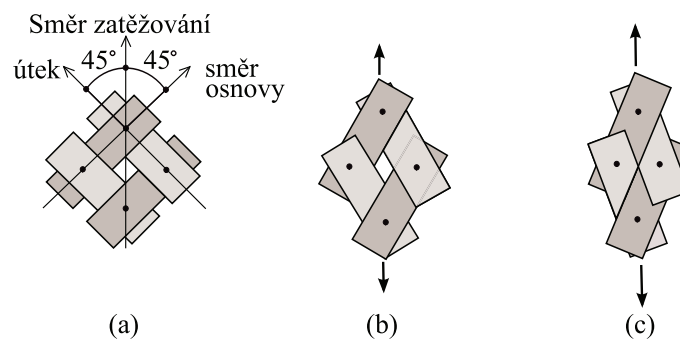
V důsledku dlouhodobého vystavení materiálu zvýšenému zatížení nepřesahujícího mez kluzu materiálu se u materiálů projevuje efekt tzv. tečení materiálu (creep). Vzniká tak pomalá spojitá tzv. creepová deformace, která je funkcí napětí, času a teploty [86]. Daný materiálový efekt se projevuje obvykle v případě namáhání materiálu za vysokých teplot (u ocelí od cca. 350 °C), při nízkých teplotách je obvykle vliv tohoto efektu zanedbatelný. Výjimku v daném případě tvoří polymery, u nichž zpravidla dochází k jejich tečení již za pokojových teplot. Opačným efektem tečení je relaxace napětí v materiálu, kdy při dlouhodobém zatížení materiálu konstantní hodnotou deformace dochází ke snížení velikostí vnitřních účinků v materiálu v podobě velikosti působícího napětí. Velikost relaxace napětí, které je funkcí času, teploty a velikosti napětí se odvíjí od konkrétního materiálu. Obvykle je možnost relaxace napětí v materiálu omezena určitou mezní hodnotou napětí. Efekty výše uvedených časově závislých materiálových modelů jsou pro případ jednoosé napjatosti schématicky znázorněny na obrázku 1.2.



**Obrázek 1.2:** Modely časově závislých materiálových efektů: změna křivky závislosti napětí a deformace v případě zvyšující se rychlosti deformace  $\dot{\epsilon}$  (a), tečení materiálu (b), relaxace napětí v materiálu (c) [86].

Uvedené materiálové efekty v podobě elasticity, plasticity, strain-rate a tečení, resp. relaxace napětí jsou výsledkem atomárních a molekulárních přeměn v materiálu. U tkaničkových kompozitů se na makromechanické úrovni při jejich rovinném zatěžování ve smyku vyskytuje materiálový efekt nazývaný zamykání (*weave locking*, popř. *shear locking*) [43].

Důsledkem nízkého tření mezi osnovou a útkem dochází k deformaci geometrie vazby tkaniny a ke změně orientace jednotlivých snopků vazby [90]. Původně klesající smyková tuhost materiálu se tak začíná postupně zvyšovat s rostoucí velikostí smykové deformace důsledkem vznikajících třecích sil od vzniklého bočního zhutnění materiálu a stlačení jednotlivých snopků tkaniny [48]. Svůj vliv na zvyšující se smykové tuhosti má v daném případě i vliv napřímených snopků, díky kterým dochází k transformaci tahového zatížení. Výše popsané změny tkaninového kompozitu vznikající důsledkem jeho smykového zatížení jsou znázorněny na obrázku 1.3. Tento materiálový efekt může také v menší míře vzniknout v případě kladení suchých tkanin do výrobních forem kompozitních součástí o složitějších geometrických tvarech.



**Obrázek 1.3:** Jednoosá tahová zkouška: počáteční stav tkaninové vazby před zatížením (a), natočení snopků vláken při zatížení tkaniny (b), uzamknutí snopků vláken do sebe při zvýšeném zatížení (c), převzato z [90].

## 1.2 Elasto-plastické materiálové modely s poškozením

Elasto-plastické materiálové modely s poškozením tvoří již několik desetiletí téma pro výzkum v celé řadě vědeckých odvětví zabývajících se samotnými kovy, kompozitními materiály a zejména pak stavebními materiály v podobě betonů, železobetonů a různých zemin. Základ těchto materiálových modelů vychází z modelování samotné plasticity, jejíž modelování se opírá o termodynamické principy. Jednoznačnou závislost mezi podmínkou plasticity, plastickým potenciálem a výrazy pro zobecněné napětí a deformaci pro případ izotropního materiálu uvádí [78]. Základem teorie plasticity je možnost dekompozice tenzoru deformace na elastickou a plastickou složku. Danou dekompozici celkového tenzoru deformace lze realizovat jak v případě uvažování velkých [11], tak malých deformací [2].

V případě uvažování malých deformací, které jsou zastoupeny Cauchyho deformačním tenzorem (tenzor malých deformací), se provede aditivní dekompozice samotného tenzoru celkové deformace, která je rovna součtu elastické a plastické části tenzoru deformace [2].

Možnost dekompozice deformace se v případě uvažování velkých deformací odvíjí od použité míry deformace odvozené z pravého Cauchy-Greenova deformačního tenzoru. Seth uvádí přehled zobecněných měr deformace v [87]. Při popisu deformace pomocí Green-Lagrangeova deformačního tenzoru (Green-Saint-Venantova tenzoru) [55] lze realizovat multiplikativní dekompozici celkového deformačních gradientů na elastickou a plastickou složku deformačního gradientu [97, 94]. Tyto dvě složky deformačního gradientu však nejsou obecně jednoznačně definovány z důvodu nejednoznačného výskytu takové mezilehlé konfigurace materiálu, která by vykazovala trvalou deformaci materiálu při jeho odlehčení na hodnotu nulového napětí [54]. Možnosti rozdělení takového tenzoru deformace závisí na předpokladech konkrétní úlohy. Možnostmi dekompozice deformačního gradientu u úloh s uvažováním velkých deformací a elasto-plastického, resp. elasto-plastického chování materiálu s poškozením se zabývá [97, 9, 94]. Možnost aditivní dekompozice celkového deformačního tenzoru při uvažování velkých deformací lze realizovat při použití logaritmické míry deformace vyjádřené pomocí Henckyho deformačního tenzoru (logaritmický tenzor deformace). V daném případě je tvar aditivní dekompozice shodný s případem Cauchyho deformačního tenzoru a malých deformací [26]. Základní předpoklady pro odvození aditivní dekompozice celkového logaritmického tenzoru deformace popisuje pro případ elasto-plastického materiálu [68, 10].

Formulaci elasto-plastické teorie vycházející z definice termodynamického potenciálu popisuje [27]. Tato práce prezentuje obecný rámec pro možnost sestavení celé řady konstitutivních vztahů, které splňují podmínky vyplývající z prvního a druhého termodynamického zákona. Jak již bylo uvedeno v předešlé podkapitole (1.1), takový materiálový model je označován jako hyperplastický [27]. Jeho základ vychází mj. z práce [14], která uvádí odvození plastického konstitutivního modelu z energetického potenciálu a disipační funkce materiálu. Tento obecný model byl následně rozšířen o kinematické zpevnění materiálu [80]. Aplikace samotných hyperplastických modelů našla své uplatnění zejména v případě modelování zemin [14] a houževnatých materiálů [18]. Zobecněný model izotropního lineárně-elastického materiálu s uvažováním plasticity a Trescovy podmínky plasticity uvádí [56]. Přístupy k odvození izotropních elasto-plastických modelů s uvažováním velkých deformací analyzuje [92].

Nicméně experimentální materiálové zkoušky poukazují na fakt, že samotný elasto-plastický model není u řady materiálů schopen komplexně postihnout všechny materiálové jevy vznikající při zatěžování materiálu. Přistupuje se tak k modelování materiálů za využití elasto-plastických materiálových modelů s poškozením, které jsou schopny komplexnějším způsobem popisovat chování materiálu [2, 5].

Formulace hyperplastické úlohy byla využita k formulaci samotného modelu poškození. Ten je obecně označován jako hyperelastický model s poškozením (*damage hyperelastic model*) [18]. Rozdíl mezi tímto modelem a modelem plasticity spočívá ve změně fyzikální interpretace vnitřních proměnných vystupujících v energetickém potenciálu a disipační funkci. Pro modelování poškození řady materiálů se jeví jako dostačující uvažování lineární elasticity (Hookeův zákon). Vznikající materiálové nelinearity lze pak přisuzovat degradaci materiálových vlastností vznikající poškozením materiálu [70]. Podmínky vzniku a následného šíření samotného poškození závisí samozřejmě na konkrétním materiálu.

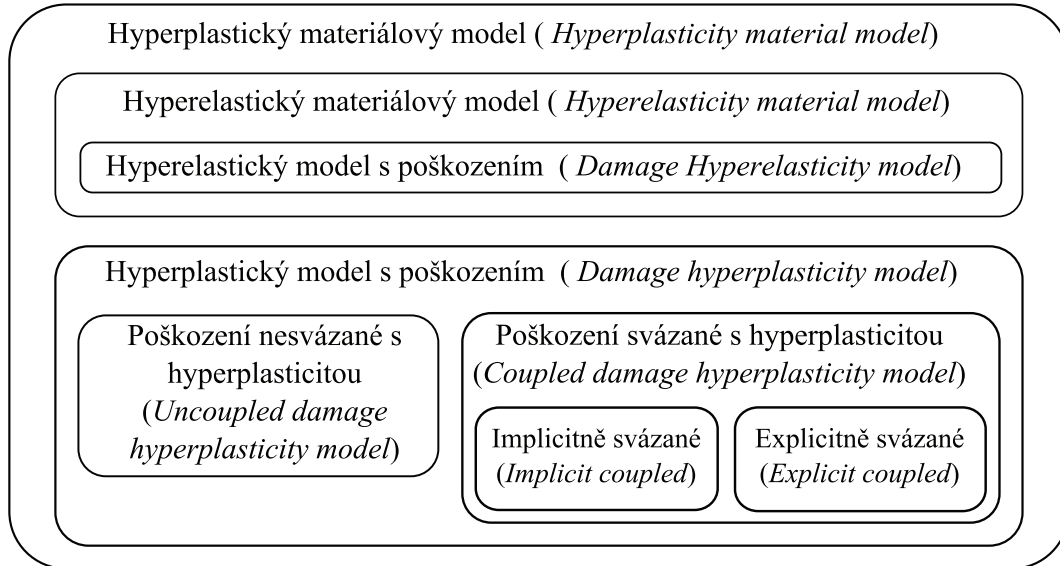
Základní myšlenku modelu izotropního poškození prezentoval v roce 1958 Kachanov při předpovědi tečení kovových materiálů zatížených konstantním napětím [33]. Kachanov založil svou teorii na předpokladu, že nevratné poškození materiálu vznikající jeho tečením je způsobeno vznikem a následným rozvojem mikroskopických dutin v materiálu během procesu jeho zatěžování. Zároveň Kachanov stanovil první tvary evolučních rovnic popisujících rozvoj poškození v materiálu. Principy prezentované Kachanovem v roce 1958 vytvořily základy pro celou řadu prací věnujících se popisu chování materiálů. Nejjednodušší model izotropního poškození, kde je nelineární chování materiálu definováno pouze jednou vnitřní proměnnou označovanou jako parametr poškození (*damage variable*) využívá např. [38]. Modelovat izotropní poškození v materiálu odlišně pro případ zatížení materiálu v tahu a tlaku lze pomocí dekompozice tenzoru poškození [35]. Daný princip práce ukazuje nejprve na případě jednoosé napjatosti a celý model následně zobecňuje pro případ prostorové napjatosti. Matzenmiller, Lubliner a Tailor rozšířili původní izotropní model poškození na úloze rovinné napjatosti na model anizotropního poškození lineárně-elastického materiálu [62]. Tento model je často v literaturách označován podle jeho autorů jako tzv. MLT Model. Výsledná konstitutivní rovnice MLT modelu nachází dodnes široké uplatnění při modelování poškození křehkých elastických kompozitních materiálů v podobě jednosměrových kompozitů [46] a stejně tak laminátů [64]. Degradace materiálových vlastností při vzniku poškození je u tohoto modelu poškození provázána přes hlavní materiálové směry. Donadon a kol. model anizotropního poškození prezentovaný v [62] dále

rozšiřují pro případ prostorové napjatosti [17].

Z výše uvedených materiálových modelů byl postupně sestaven materiálový model kombinující elasto-plastické chování s poškozením [79]. Tento model je označován za hyperplastický model s poškozením (*damage hyperplasticity model*) [27]. Tyto modely jsou obecně dále rozlišovány na modely, kde může plasticita a poškození materiálu vznikat nezávisle na sobě (*uncoupled damage hyperplasticity models*), anebo na modely, kdy jsou tyto dva materiálové procesy mezi sebou provázány a jsou řešeny pospolu (*coupled damage hyperplastic models*) [18]. Provázání plasticity a poškození materiálu lze realizovat pomocí podmínky plasticity a podmínky poškození, kde v podmínce plasticity lze provést náhradu nominálního napětí za napětí ekvivalentní [57, 75]. Tento způsob provázání umožňuje oddělené modelování za využití podmínky plasticity a podmínky poškození vycházejících z disipační funkce. V daném případě je uvažováno, že vnitřní proměnné v podobě poškození (*damage variable*) a plastické deformace nejsou mezi sebou explicitně provázány a dané spojení je označováno za implicitní (*implicit coupled*) [18]. Tento způsob provázání se jeví jako nejjednodušší z důvodu možnosti provázání i složitějších matematických modelů samotné plasticity a poškození. V případě kompozitních materiálů lze dané řešení nalézt např. v [81, 93]. Odvození základních konstitutivních rovnic pro případ izotropního materiálu s uvažováním křehkého poškození pro případ elasto-plasticity se zobecněním pro případ elasto-visko-plasticity uvádí [49]. Další možnost jak svázat plasticitu a poškození v materiálovém modelu spočívá ve využití pouze funkce poškození, kterou je řešen proces disipace materiálu a až z jejích výsledků bude následovně řešen rozvoj plastické deformace s využitím zákona tečení (*evolution law*) [19]. V daném případě již nemůže vznikat plasticita a poškození odděleně, tento způsob svázání je nazýván jako explicitní (*explicit coupled*) [18]. Obdobně lze daným způsobem nejdříve řešit pomocí disipace samotný vznik a rozvoj plasticity a až pak se následně zabývat poškozením materiálu. Přehled jak implicitně, tak explicitně svázaných hyperplastických izotropních a anizotropních materiálových modelů s poškozením je pro případ modelování betonů a železobetonů uveden v [74], dané modely lze samozřejmě zobecnit. Obrázek 1.4 znázorňuje rozdělení výše uvedených materiálových modelů řešících problematiku poškození a plastického tečení materiálu. Nesvázané modely kombinující plasticitu a poškození obecně představují jednodušší přístup k modelování daných materiálových jevů. Jak již bylo řečeno, tak vznik a rozvoj těchto efektů je v daném případě na sobě nezávislý, což umožňuje oproti svázaným modelům snadnější kalibraci s experimentálními daty. Svázané modely jsou hůře implementovatelné



do MKP softwarů než modely nesvázané. Z fyzikální podstaty se svázané modely více přibližují popisu poškození materiálu, kde poskytují vhodnější reprezentaci postupného rozvoje poškození v materiálu vedoucího až k jeho porušení [8].



Obrázek 1.4: Rozdělení materiálových modelů plasticity a poškození.

### 1.3 Sendvičové materiály

Sendvičové materiály jsou založeny na principu spojení lehkého poddajného jádra umístěného mezi dvěma tužšími a pevnými vnějšími potahy. Hlavním účelem jádra je zachování vzdáleností mezi potahy a přenos smykového napětí, zatímco vnější potahy přenáší tlakové a tahové zatížení v rovině potahu. Tloušťka samotného jádra je ve většině případů větší než tloušťky jednotlivých vnějších potahů, což zaručuje vysokou ohybovou tuhost výsledné sendvičové struktury při zachování relativně nízké hmotnosti. Nejčastějšími materiály, kterými jsou tvořena jádra sendvičové struktury, jsou polymerní pěny, nebo voštiny vyrobené nejčastěji z aramidového papíru, popř. z hliníkové folie [3]. Vnější potahy sendvičových struktur bývají tvořeny širokou škálou materiálů, jako např. překližkou, hliníkem, plasty, ale hlavně pak kompozitními materiály, které se skládají obvykle z několika vrstev uhlíkových, aramidových, nebo skelných tkanin, popř. jednosměrných prepregů, spojených epoxidovou matricí. Díky trendu snižování hmotnosti v oblasti dopravních prostředků si sendvičové materiály s kompozitním potahem a pěnovým jádrem

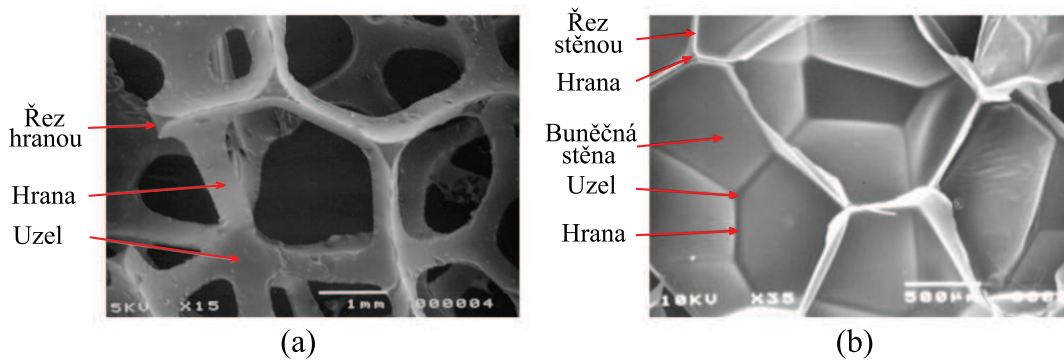


postupně nacházejí cestu napříč průmyslem výroby dopravních prostředků a vedle letectví, kde jsou již spolu s voštinovými jádry hojně využívány poslední dvě dekády, získávají své uplatnění i v konstrukcích kolejových vozidel, zejména pak v podobě čelních, bočních a podlahových dílů [6]. V automobilovém průmyslu je lze s ohledem na vysokou možnost absorbování energie využít jako absorbéry energie v konstrukcích automobilových nárazníků [59]. Možnostem širší aplikace kompozitních materiálů v průmyslu brání v současné době problematika jejich velkosériové výroby.

### 1.3.1 Polymerní pěny sendvičových struktur

Polymerní pěny jsou materiály obsahující plynné dutiny (buňky) obklopené hustější matricí. Do kategorie polymerních pěn se řadí materiály jako polyuretan (PU), polystyren (PS), polyvinylchlorid (PVC), polyetylen (PE) a řada dalších. Základní rozdělení je na pěny mající otevřenou (*open-cell foams*), anebo uzavřenou buněčnou stěnu (*closed-cell foams*). Ta do značné míry ovlivňuje jejich výsledné materiálové vlastnosti. V případě uzavřené buněčné stěny jsou jednotlivé buňky mezi sebou izolovány, což v porovnání s pěny majícími otevřenou buněčnou stěnu se vzájemně propojenými buňkami zlepšuje jejich tepelně-izolační vlastnosti a zejména zvyšuje celkovou tuhost a pevnost daných polymerních pěn. Pěny s otevřenou buněčnou stěnou vykazují naopak vyšší stlačitelnost. Dle velikosti buněk lze následně polymerní pěny dělit na makrobuněčné (charakteristický rozměr buňky  $a$  větší jak  $> 100 \mu\text{m}$ ), mikrobuněčné ( $100$  až  $1 \mu\text{m}$ ), ultramikrobuněčné ( $1$  až  $0.1 \mu\text{m}$ ) a nanobuněčné ( $100$  až  $0.1 \text{nm}$ ). Důležitou vlastností polymerních pěn je jejich hustota, kdy se pěny celkově dělí do tří tříd a to na pěny o vysoké hustotě ( $\rho = 500$  až  $1000 \text{kg/m}^3$ ), pěny o střední hustotě ( $\rho = 100$  až  $500 \text{kg/m}^3$ ) a pěny o nízké hustotě ( $\rho < 100 \text{kg/m}^3$ ) [72]. Polymerní pěny obecně vykazují širokou škálu hodnoty Poissonova čísla  $\nu$ , které může dosahovat i negativních hodnot. Při začátku tlakového zatěžování se počáteční hodnota Poissonova čísla obvykle pohybuje kolem hodnoty  $\nu = 0.3$  – viz [21], nicméně experimentálním testováním byla zjištěna silně klesající tendence Poissonova čísla k nule s rostoucí velikostí tlakové deformace polymerních pěn [95]. Na velikosti Poissonova čísla má značný podíl geometrie buněk polymerních pěn a také jejich hustota [21]. U polymerních pěn majících nízkou hustotu je obvykle Poissonovo číslo uvažováno rovnou nulové ( $\nu = 0$ ) – viz [66]. Důvodem je nulová boční deformace při jednoosých tlakových zkouškách, kterou tyto pěny od počátku zatěžování obvykle vykazují. Nielsen a kol. ve svém materiálovém modelu popisujícím chování izotropních polymerních pěn

o nízké hustotě uvažuje přímo nulové Poissonovo číslo  $\nu$  v předpokladech pro odvození modelu [73].



**Obrázek 1.5:** Snímek z řádkovacího elektronového mikroskopu: otevřená buněčná stěna polyurethanové pěny (a), uzavřená buněčná stěna polyethylenové pěny (b), [65].

Experimentálně zjištěné mechanické chování pěn je při porovnání s tradičními (konvenčními) materiály odlišné z důvodu jejich značné stlačitelnosti při tlakovém zatížení. Chování lze v daném případě rozdělit na tři fáze [85]. V první fázi se materiál chová lineárně elasticky až do dosažení meze kluzu. Poté následuje fáze, pro jejíž rozsah je charakteristická téměř konstantní velikost napětí během dalšího stlačování pěny. Tato takřka ideální plastická stlačitelnost v této druhé fázi je způsobena deformací buněčných stěn pěnové struktury, které jsou v daném případě zatěžovány na vzpěr. Tato fáze je označována jako tzv. drcení pěny (*foam crushing*). V poslední fázi dochází následně k razantnímu nárůstu tuhosti v materiálu, což je způsobeno hutněním již plně zdeformované (rozdrčené) pěnové struktury (*densification of foam*). Obdobné chování v tlaku, jaké mají polymerní pěny, vykazují i voštinová jádra [63].

Experimentálně bylo prokázáno nelineární chování polymerních pěn jak při tlakovém, tak tahovém zatěžování [69]. Tento fakt je ovšem při numerických simulacích využívajících metody konečných prvků často opomíjen. Rizov a kol. uvažuje pouze lineární elastické chování pěn v tahu se zanedbáním jejího tahové poškození s odůvodněním, že dominantně u sendvičových struktur dochází k poškození pěn tlakem [84]. Langdon a kol. uvažuje při numerickém modelování pěny tahové chování shodné s tlakovým, tj. uvažuje izotropní nelineární elastický model podchycující drcení pěny a zpevnění materiálu [44]. Elasto-plastického izotropního materiálového modelu s využitím von Misesovy podmínky plasticity využívá Aktay pro modelování chování pěny při nízkorychlostních rázech v práci

[3]. Ortotropní nelineární elasto-plastický materiálový model pro modelování pěny uvažuje [63]. Vlastní materiálový model popisující elasto-plastické chování pěny v tlaku prezentuje [22]. Gigliotti a Pinho zde uvádějí srovnání vlastních numerických výsledků s experimentálně zjištěnými daty z cyklického tlakového zatížení pěny. Řada prací, stejně jako poslední tři uvedené [3, 63, 22], se nezmiňuje o způsobu modelování pěny v případě zatížení tahem a popisují pouze chování pěny v tlaku .

### 1.3.2 Kompozitní potahy sendvičových struktur

Modelování kompozitních potahů sendvičových struktur se neliší od modelování samotných kompozitních materiálů, které jsou při numerických simulacích modelovány za využití ortotropního, případě příčně izotropního materiálového modelu [47]. U jednosměrového dlouhovláknového kompozitu je obecně známa jeho materiálová nelinearita v podobě nelineárního chování ve smykové oblasti. Tento fakt je často v numerických simulacích opomíjen z důvodu absence konstitutivního vztahu uvažujícího nelineární chování ve smyku přímo v základech výpočtových softwarů. Daný model je tedy nutné do příslušného MKP softwaru dodatečně implementovat pomocí uživatelských subroutin – viz práce [17] využívající pro popis nelineární elasto-plastické závislosti mezi napětím a deformací kompozitu ve smykové oblasti kubických rovnic. Feng a kol. využívají kubické rovnice pro popis nelineárního elastického chování kompozitu ve smykové oblasti [20]. Srovnání výsledků pro lineární a vlastní nelineární model elastického chování kompozitního materiálu ve smykové oblasti při jeho dynamickém zatěžování uvádí [40]. Nelineární funkci s konstantní asymptotou využívá pro popis nelineárního elastického chování uhlíkového kompozitu ve smykové oblasti v případě rovinné napjatosti práce [41]. Tvar funkce byl inspirován Ramberg-Osgoodovou tříparametrickou funkcí popisující závislost křivky napětí a deformace materiálu [82]. Neortogonální konstitutivní model tkaninových kompozitů zahrnující efekt zamykání prezentuje [48]. V daném případě se jedná o nelineární elastický model.

Kompozitní potahy a kompozitní materiály jsou nejčastěji modelovány za využití lineárního elastického modelu s křehkým poškozením pro ortotropní materiály, tzv. MLT modelu – např. [17, 20, 104]. Poslední dvě uvedené práce využívají pro případ smyku okamžitě degradace materiálových vlastností při zjištění poškození kompozitu ve smyku z důvodu uvažovaných materiálových nelinearit. Postupná degradace materiálových vlastností byla matematicky odvozena z Weibullova rozdělení – viz práce [62]. Yen odstraňuje

předchozí nevýhodu degradace materiálových vlastností během celého průběhu zatěžování a rovnicí popsanou Weibullovo rozdělením pro stanovení parametrů poškození zobecňuje pro možnost použití libovolného kritéria porušení [98]. Kim a kol. prezentuje elastický model poškození kompozitního materiálu s nelineárním elastickým chováním ve smykové oblasti vycházejícím ze základů mechaniky kontinua s uvažováním degradace materiálových vlastností a redukcí elastické deformace vznikající v materiálu [37]. Redukce elastické deformace představuje v daném případě velikost nevratné deformace, která tak nahrazuje plasticitu materiálu.

Kritéria pro predikci porušení kompozitních materiálů se vyvíjejí po celou dobu používání kompozitních materiálů a v dnešní době jich existuje velké množství. Z hlediska toho, jak je na kompozitní materiály nahlíženo, lze kritéria prvotně dělit na kritéria mikromechanická a makromechanická [47]. Mezi nejvíce využívaná patří kritéria makromechanická, která oproti kritériím mikromechanickým nerozlišují mechanické vlastnosti samotného vlákna a matrice, ale nahlížejí na kompozit jako na homogenní materiál. V roce 1998 bylo provedeno srovnání kritérií pro predikci porušení jednosměrových dlouhovláknových kompozitních materiálů v rámci tzv. World-Wide Failure Exercise (WWFE). Na základě 14 experimentů bylo provedeno ověření úspěšnosti predikce porušení jednotlivých kritérií, bližší popis experimentů viz [24]. Do testování bylo zahrnuto celkem 19 kritérií porušení, jejich přehled uvádí [34]. Z těch známějších to byla např. teorie maximálních napětí a maximální deformace, Puckovo kritérium, interaktivní Tsai-Wu kritérium, anebo kritérium Hashin. Konkrétní závěr k jednotlivým kritériím WWFE nestanovilo. Ani jedno kritérium nebylo schopno úspěšně predikovat poškození ve všech případech.

Kritéria byla navržena pro predikci porušení jednosměrových dlouhovláknových kompozitů, jejich možnost predikce složitějších kompozitních struktur, jakými jsou lamináty a nebo tkaninové kompozity, je tedy částečně omezena. Daná kritéria celá řada prací využívá v případě numerického modelování kompozitních laminátů a laminátových potahů sendvičových struktur obvykle za využití mesomodelingu, tj. za situace, kdy je výpočtová síť modelována po svých jednotlivých homogenních vrstvách přes tloušťku kompozitního materiálu. Tato metoda modelování sice umožňuje zahrnout do simulace i intralaminární kritéria porušení za využití kohezivních prvků, anebo kohezivního kontaktu, nicméně s ohledem na značnou výpočtovou náročnost těchto numerických modelů danou velkým počtem elementů výpočtové sítě se jejich využití pohybuje v rozsahu testovacích úloh a submodelingu – viz [20, 29, 37, 98].

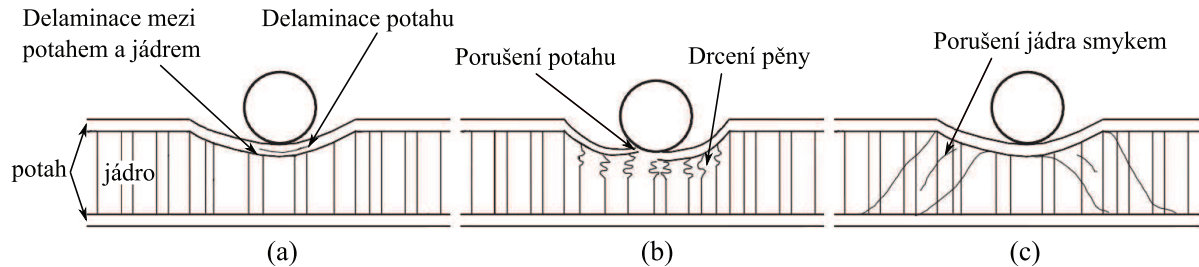
Donadon a kol. prezentuje ortotropní elastický materiálový model s porušením pro kompozitní lamináty s postupnou degradací materiálových vlastností vycházející z kritéria maximálních deformací [17]. Stejného kritéria využívá i Menna a kol. ve Weibullově rozdělení pro výpočet parametrů poškození hyperelastického modelu s porušením pro modelování kompozitních tkanin [63]. Pro predikci poškození kompozitních laminátů využívá Ivañez a kol. kritéria Hou původně navrženého pro predikci poškození jednosměrových kompozitů. Kritérium je v práci upraveno tak, aby bylo schopno predikovat porušení laminátu vyrobeného z kompozitních tkanin [29].

### 1.3.3 Poškození kompozitních sendvičových struktur s polymerním jádrem

Sendvičové struktury jsou nejčastěji podrobovány zatížení v příčném směru na rovinu potahu, resp. celé struktury, za účelem zjištění jejich únosnosti. Při poškození horního kompozitního potahu sendvičové struktury v důsledku vzniklých velkých průhybů a zakřivení potahu při ohybovém zatížení dochází následně k okamžitému poškození pěnového jádra, které není schopno samo přenést tak vysoké tlakové zatížení. Dochází tak obvykle k celkovému poškození v podobě drcení jádra přes jeho tloušťku až ke spodnímu potahu. Tento jev je označován za zhroucení sendvičové struktury [30] a jeho princip je nákresem znázorněn na obrázku 1.6 (b). Reálné zhroucení sendvičové struktury při zatížení tříbodovým ohybem je znázorněno na obrázku 1.7 (c). K poškození spodního potahu při zatížení sendvičové struktury v příčném směru již obvykle při statickém zatížení nebo při nízkorychlostních rázech v důsledku ztráty ohybové tuhosti celé sendvičové struktury nedochází.

Potahy sendvičových struktur jsou také náchylné na lokální poškození v místě působení bodových sil, což je způsobeno měkkým jádrem sendvičové struktury, které není schopno přenést tak vysoké příčné zatížení [89]. V daném místě pak v závislosti na druhu potahu dochází buďto k delaminaci mezi vrstvami samotného potahu, anebo na rozhraní potahu a jádra – viz obrázek 1.6 (a), případně dochází k poškození potahu tlakem ve směru zatěžování v kombinaci s poškozením v tahu vznikajícím v rovině horního potahu sendvičové struktury. Možnost vzniku delaminace se obvykle odvíjí od vlastností použitého jádra v sendvičové struktuře. Obecně platí, že pokud jsou použity pěny o nízké hustotě, dochází při ohybovém zatížení struktury ke smykovému porušení jádra – viz obrázek 1.6 (c).

Pokud je ve struktuře využito pěny mající vyšší hustotu a tedy i vyšší tuhost, dochází při ohybu k delaminaci pěny od horního potahu [6], případně dochází ke kombinaci obou poškození.



**Obrázek 1.6:** Schéma poškození sendvičových struktur při příčném zatížení: delaminace potahu a jádra (a), porušení vnějšího potahu a drcení jádra (b), porušení pěny ve smyku (c), [89].

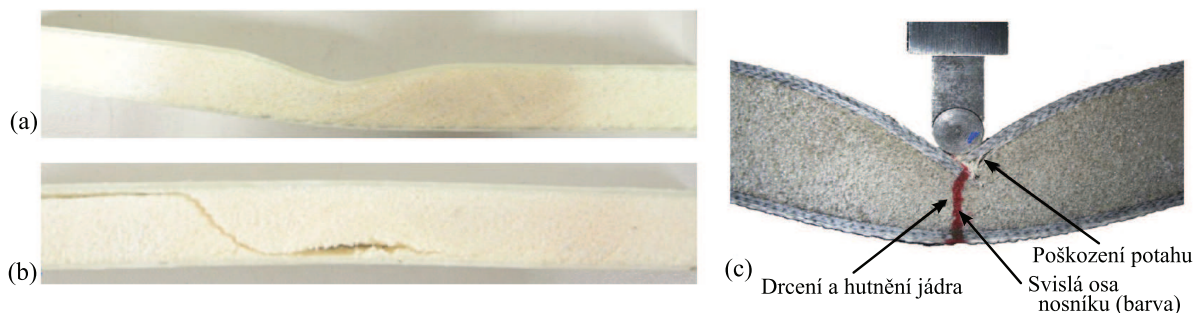
U sendvičových struktur s pěnovými jádry často nedochází ke vzniku přímé delaminace jádra a potahu, ale obvykle dochází k porušení samotného pěnového jádra. Důvodem je obvykle nižší pevnost pěny než samotného rozhraní a také fakt, že při výrobě sendvičové struktury dochází obvykle k částečnému prosycení pěnového jádra samotným rozhraním. K porušení a odtržení pěny tedy dochází obvykle až v místech, kde již pěna není prosycena rozhraním v podobě epoxidové pryskyřice a nebo jiného lepidla. Typický příklad delaminace sendvičového nosníku s pěnovým jádrem a skelným potahem je znázorněn na obrázku 1.7 (b).

Nutno podotknout, že na možnostech vzniku samotného poškození sendvičových struktur má také vliv tvar, velikost a hmotnost tělesa, kterým je daná struktura zatěžována. Obecně platí, že výraznější poškození, příp. porušení, vzniká indentory, popř. impaktory majícími menší poloměr kulové nebo válcové plochy, se kterou dostávají do kontaktu se zatěžovaným tělesem. Porovnání vzniklého poškození sendvičového nosníku v závislosti na poloměru indentoru je pro případ tříbodového ohybu patrné z obrázku 1.7 (a) a 1.7 (c). Vlivem velkého poloměru válcového indentoru došlo na sendvičovém nosníku na obrázku 1.7 (a) pouze k poškození pěny v podobě jejího drcení, kdežto při malém poloměru indentoru na obrázku 1.7(c) dochází v místě kontaktu indentoru a horního potahu k poškození potahu a následnému drcení pěny, kdy oproti případu uvedeném na obrázku 1.7 (a) dochází k celkovému zhroucení sendvičové struktury.

Shengqing a Boay se zabývají teoretickým odvozením limitních sil pro vznik jednotlivých výše popsaných poškození v závislosti na poloměru impaktoru, geometrických vlast-



nostech struktury v podobě tloušťky potahu a jádra a materiálových vlastnostech potahu a pěny pro případ nízkorychlostních rázů [89]. Z analýzy vyplývá vznik lokálního poškození matrice kompozitního potahu v případě silného potahu a měkkého jádra sendvičové struktury. Na vzniku samotného poškození sendvičové struktury a velikosti její celkové mezní únosnosti má zásadní vliv tloušťka potahu. Hustota pěnového jádra má naopak zásadní vliv na způsobu porušení sendvičové struktury [89].

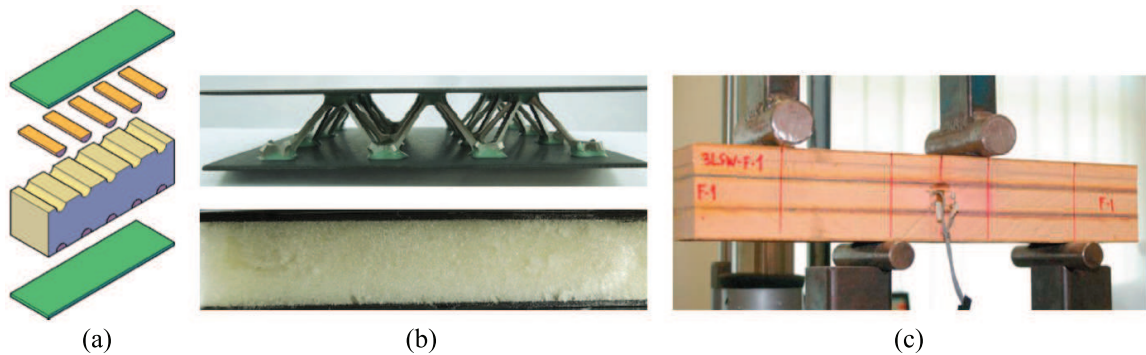


**Obrázek 1.7:** Poškození sendvičových nosníků při třibodovém ohybu: drcení pěny při velkém průměru indentoru bez vzniku poškození potahu (a), delaminace mezi potahem a pěnou v kombinaci se smykovým poškozením pěny (b), zhroucení sendvičové struktury vzniklé při malém průměru indentoru - porušení potahu spolu s drcením a hutněním pěny (c), [44, 58].

Řada prací se věnuje snížení náchylnosti poškození sendvičových struktur s pěnovým jádrem. Omezení možnosti usmyknutí nebo odlepení pěnového jádra od kompozitního potahu sendvičové struktury prezentuje práce [69], která přichází s možností vlepit plastové segmenty (tzv. *shear keys*) mezi jádro a potah do vyfrézovaných polokruhových drážek v pěnovém jádru – viz obrázek 1.8(a). Zhang a kol. uvádí možnost zvýšit mezní zatížení a ohybovou tuhost sendvičové struktury aplikací pyramidové příhradové výztuže jádra, která by spojovala a podpírala horní a dolní potah [101]. Zde uvažovaná výsledná hliníková mřížka, znázorněná na obrázku 1.8 (b), zamezuje deformaci samotné pěny, která vyplňuje zbylý prostor jádra. Prezentované výsledky prokazují v daném případě zvýšení mezního zatížení a velikosti absorbované energie při plošném příčném tlakovém zatížení dané sendvičové struktury v porovnání se strukturou mající samotné pěnové jádro a samotnou příhradovou výztuž. Zvýšenou odolnost vůči příčnému bodovému zatížení a vzniku lokálního poškození daná úprava nevykazuje. Vliv nárůstu hmotnosti při aplikaci příhradové výztuže do sendvičové struktury práce neřeší.

Celkové vlastnosti jádra sendvičové struktury lze zlepšit náhradou jednoho kusu pě-

nového jádra větším množstvím tenčích vrstev slepených k sobě [104]. Daná práce řeší problematiku pro 3 vrstvy pěny. Jednotlivé vrstvy pěnového jádra lze navíc libovolně variovat. Pro zvýšení ohybové tuhosti sendvičové struktury je výhodnější uvažovat vrstvu pěny u horního potahu o vyšší hustotě, vrstva pěny uprostřed takto vzniklého jádra může mít naopak hustotu nižší. Výsledná sendvičová struktura bude mít při provedení dané úpravy jádra vyšší ohybovou tuhost se zachováním obdobné hmotnosti odpovídající sendvičové struktúře s jednou pěnovou vrstvou jádra. Experimentálním testováním nosníků vyrobených slepením z více sendvičových panelů tak, jak je znázorněno na obrázku 1.8 (c), bylo zjištěno, že počet slepených sendvičových nosníků nemá žádný významný vliv na pevnost ve smyku výsledné struktury při jejím příčném tříbodovém zatěžování [60]. Smyková pevnost výsledného nosníku se v daném případě řídí smykovou pevností pěnového jádra jednotlivých sendvičových nosníků, bez ohledu na to, kolik laminací (slepení) se ve výsledném nosníku vyskytuje.



**Obrázek 1.8:** Možnosti úpravy sendvičových nosníků pro snížení náchylnosti poškození: vložení segmentů pro snížení náchylnosti poškození – tzv. *shear keys* (a), aplikace pyramidového příhradové výztuže pro zvýšení únosnosti sendvičové struktury (b), sendvičový nosník vyrobený slepením z více sendvičových panelů (c), [69, 101, 60].

### 1.3.4 Mechanické testování sendvičových materiálů

Sendvičové struktury jsou náchylné na poškození a porušení vyvolané příčným zatížením. Řada prací je zaměřena pouze na experimentální testování daných struktur a zjišťování jejich vlastností. Pro zjištění ohybové tuhosti sendvičových struktur se nejběžněji používá tříbodové statické ohybové zkoušky. Porovnáním ohybových vlastností sendvičové struktury s pěnovým jádrem při cyklickém zatížení tříbodovým ohybem spolu se řešením



problematiky únavy na dané úloze se zabývá Chemani a kol. v práci [13]. Langdon a kol. provádí analýzu vzniku porušení a jeho dalšího rozvoje v závislosti na dalším zatěžování sendvičových nosníků s rozdílnými hustotami pěnových jader [45]. Práce mj. uvádí, že ohybová tuhost sendvičové struktury s pěnovým jádrem o vyšší hustotě je v porovnání s jádrem o nižší hustotě vyšší i v případě vzniku poškození horního potahu. Čtyřbodový test sendvičových nosníků s pěnovým jádrem s asymetricky uloženými bodovými podpory pro vyvolání vysokého smykového napětí v sendvičové struktuře při téměř nulovém ohybovém momentu ve střední části testovaného sendvičového nosníku prezentuje Manalo a kol. v práci [60]. Tato zkouška je v dané práci využita pro zjišťování vlastností lepených vrstvených sendvičových struktur. Birsan a kol. prezentuje analytické odvození výpočtu ohybové tuhosti sendvičových nosníků s pěnovým jádrem při uvažování malých deformací [7]. Práce uvádí odvození tuhosti sendvičového nosníku v jednotlivých materiálových směrech pro případ jeho elastického chování a popisuje závislosti tloušťky horního a dolního potahu sendvičového nosníku pro zvýšení celkové ohybové tuhosti pro případ zatížení sendvičového nosníku třibodovým ohybem a jednostranně vetknutý nosník. Výsledky provedených numerických simulací jsou porovnány s experimentálními daty. Mines a Jones uvádějí analyticky odvozený elasto-plastický model sendvičového nosníku s možností modelování poškození horního potahu na základě velikosti pohlcené energie při třibodovém ohybu [67]. Uvedený výpočtový model v sobě zahrnuje možnost drcení jádra sendvičové struktury, jehož elasto-plastické chování je zde popsáno pomocí matematické rovnice. V provedené analýze výpočtu porušení sendvičového nosníku práce označuje za dominantní parametry mající vliv na porušení nosníku velikost deformace, při které dochází k poškození dolního potahu sendvičové struktury v tahu, a mez kluzu jádra, po jejíž překročení dochází k jeho drcení. Vlastnosti pěnového jádra jsou v některých případech testovány pomocí tzv. indentačních zkoušek, kdy je samotné jádro vystaveno tlakovému kvazistatickému zatížení indentoru majícímu kulový tvar, s cílem určit obvykle vznikající nelineární závislost velikosti působící síly na velikosti vzniklého otlačení. Tato zkouška se okrajově používá k validaci MKP simulací a ověření tlakových vlastností pěny [84], případně celé kompozitní struktury [85]. Pro stanovení výsledné únosnosti sendvičových struktur se často využívá celkového plošného tlakového zatížení sendvičové struktury [101].

Zvláštní postavení v testování sendvičových struktur a kompozitních materiálů obecně má zjišťování odezvy na rázové zatížení. Rázové děje materiálu jsou rozdělovány na rázy nízkorychlostní, rázy o střední rychlosti, vysokorychlostní a balistické rázy a hyperrych-

lostní rázy [1]. Rozdělení se odvíjí od velikosti kinetické energie, kterou impaktor při rázu předá cílovému tělesu. Rychlostní meze mezi jednotlivými kategoriemi nejsou přesně stanoveny. Při rázu dochází ke vzniku napěťových vln šířících se materiálem od místa dopadu impaktoru. Každá kategorie rázu vykazuje odlišnosti v šíření těchto vln [77].

Nízkorychlostní rázy představují rázy těles o vysoké hmotnosti s dopadovou rychlostí do cca. 10 m/s [1]. Nízkorychlostní rázy, při kterých je absorbována celková energie impaktoru materiálem, se jeví jako nejvíce nebezpečné pro další provoz konstrukce. Vzniklá poškození sendvičové struktury při nízkorychlostních rázech nemusejí být lidským okem při běžné kontrole vůbec viditelná, nicméně mohou významně snížit zbytkovou pevnost a negativně ovlivnit životnost a bezpečnost celé struktury a konstrukce. Tyto rázy mohou náhodně nastat při každodenním provozu stroje na jehož konstrukci se sendvičové materiály podílejí. Může se například jednat o pád klíče při opravě, případně o pád různých těles obsluhy stroje – např. mobilního telefonu. Odezva materiálu na nízkorychlostní ráz se liší v závislosti na geometrii úlohy, kdy značný význam zde hrají okrajové podmínky dané uložením cílového tělesa. Vznikající napěťové vlny dosahují hranic tělesa dříve, než-li dojde ke konci celé události nízkorychlostního rázu [77].

Kategorii nízkorychlostních je věnována řada prací se zaměřením na zjišťování odezvy testované sendvičové struktury. Anderson a kol. se zabývají experimentálním stanovením a porovnáním odezvy různých konfigurací sendvičových struktur s pěnovým a voštinovým jádrem při zatížení nízkorychlostním rázem [4]. Porovnání odezvy je realizováno numericky pomocí zjištěné časové závislosti průběhu kontaktní síly impaktoru a dopočtené velikosti absorbované energie. Obdobnou problematikou pro různou konfiguraci sendvičových struktur v podobě variace potahů se zaměřením na zjištění ohybové únosnosti jednotlivých sendvičových struktur do vzniku jejich porušení při zvyšujících se dopadových rychlostech impaktoru se zabývá [91].

Do oblasti impaktů o střední rychlosti spadávají rázy představující odletující méně hmotné cizí předměty ze silnic, popř. přistávacích drah, a také různé drobné částice a úlomky, kterým může být stroj vystaven v případě tornád a hurikánů. Dopadové rychlosti se v daném případě pohybují v rozmezí od cca. 10 m/s do cca. 50 m/s. K průchodu impaktoru materiálem nedochází, nastává absorpce veškeré energie impaktoru za vzniku markantního porušení sendvičové struktury. Tato kategorie impaktů tvoří jakýsi přechod v chování a odezvě materiálu mezi nízkou a vysokorychlostním rázem. Charakteristické pro danou kategorii rázů jsou delší doby rázu se vznikem značných napěťových vln v testova-

ném tělese v porovnání s vysokorychlostními rázy. Některé literatury uvedenou kategorii slučují s kategorií nízkorychlostních rázů, protože u obou kategorií nedochází většinou k průchodu impaktoru testovaným tělesem. Kategorie rázů o střední rychlosti je ve vědeckých pracích řešena spíše okrajově jako součást prací zabývajících se komplexním rázovým zatěžováním sendvičových struktur [58].

Pro vysokorychlostní a balistické rázy je charakteristická malá hmotnost impaktoru. Odezva tělesa v případě vysokorychlostního rázu se projevuje šířením napěťových vln přes tloušťku materiálu, ve kterém nemá materiál čas na dostatečnou zpětnou odezvu. Cílové těleso není schopno absorbovat veškerou kinetickou energii impaktoru, což vede ke vzniku takového lokálního porušení v místě rázu, že impaktor prochází skrz testované těleso. Rozsah dopadových rychlostí pro vysokorychlostní a balistické rázy se uvažuje v rozmezí od cca. 50 m/s do cca. 1000 m/s [1]. Vliv okrajových podmínek testovaných těles je v případě vysokorychlostních rázů zanedbatelný. Celá rázová událost v daném případě proběhne rychleji, než-li šířící se napěťové vlny dosáhnou v testovaném tělese jeho hranic a budou mít tak možnost se projevit na odezvě tělesa [77]. U hyperrychlostních rázů, které jsou studovány v souvislosti s pohyby objektů ve vesmíru, se uvažuje rychlost impaktoru nad 1 km/s. Chování testovaného tělesa při takto rychlém rázu je podobné chování kapaliny [1]. Možnosti pro vyvození vysokorychlostních rázů uvádí práce [1], obvykle se jedná projektily vystřelené z děla na stlačený vzduch [44, 71], nebo palné zbraně. Při experimentálním testování při vysokorychlostních rázech je za hlavní informaci považována velikost absorbované energie impaktoru, která se stanovuje na základě znalosti dopadové rychlosti a zbytkové rychlosti impaktoru po průletu testovaným tělesem. Experimentálním stanovením velikosti absorbované energie v závislosti na hustotě použitého pěnového jádra sendvičové struktury se zabývá [71]. Z uvedeného experimentálního testování vyplynulo, že nejlepší absorpci energie impaktoru vykazují sendvičové struktury s pěnovým jádrem o nízké hustotě. Naopak pěny o vysokých hustotách způsobují při průchodu impaktoru strukturou jeho vybočení z původní trajektorie. V daném případě místo drcení pěny dochází k jejímu praskání a delaminaci v místě spodního potahu, což je způsobeno právě vyšším odporem potahu a méně poddajnou pěnou.

Kilchert a kol. ukazuje možnosti způsobu měření časové závislosti penetrace impaktoru a průběhu zatěžovací síly během rázu na případu sendvičové struktury s voštinovým jádrem [36]. Práce na základě verifikovaného MKP modelu provádí rozbor absorbované energie impaktoru, z něhož vyplývá, že vedle poškození a plasticity potahu a jádra má

značný podíl na velikosti absorbované energie také uvažované tření mezi impaktorem a sendvičovou strukturou. Tření je v daném případě schopno během penetrace a porušování sendvičové struktury odebrat cca. 20% celkové energie impaktoru.

## 1.4 Shrnutí poznatků a jejich využití v práci

S ohledem na zaměření práce do oblasti nízkorychlostních rázů lze modely časově závislých materiálových efektů zanedbat. Materiálové jevy v podobě relaxace napětí a vznik creepové deformace se projevují na odezvě materiálu až v případě dlouhého časového horizontu, kam problematika rázových zkoušek nepatří. V oblasti rázových zkoušek se projevuje problematika časové závislosti materiálových vlastností na rychlosti deformace, tedy tzv. strain-rate efekt. Z provedené rešerše dané problematiky je patrné, že k markantním změnám materiálových vlastností dochází až v případě středních, resp. vyšších hodnot rychlosti deformace, tj. zhruba od oblasti rázových zkoušek automobilů (tzv. crash testů). Problematika nízkorychlostních rázů se pohybuje v oblasti nízkých hodnot rychlosti deformace, kde se závislost materiálových vlastností na rychlosti deformace projevuje zcela minimálně a v dané oblasti lze využívat statické, resp. kvazistatické materiálové vlastnosti, tak jak toho využívají práce jiných autorů.

Kompozitní materiály se chovají při svém zatěžování nelineárně, zejména pak ve smykové oblasti. Nelineární chování je řešeno jinými autory převážně za využití nelineárních elastických modelů a nebo lineárních elastických modelů s postupným poškozením. Stejněho přístupu k modelování je obvykle využito i v případě modelování tkaninových kompozitů. Při zahrnutí i modelování porušení materiálu se zdá být vhodnější kombinace nelineárního elastického modelu s poškozením. Hlavní výhoda těchto modelů oproti lineárním modelům s postupným poškozením spočívá v možnosti odděleného modelování chování materiálu před dosažením pevnosti materiálu za pomoci samotného nelineárního chování a až následně lze aplikovat degradaci materiálových vlastností v závislosti na charakteru porušení materiálu. V případě lineárního elastického modelu s poškozením je funkce poškození, která obvykle vychází z Weibullova rozdělení, aplikována po celou dobu zatěžování, což v některých případech neumožňuje vhodným způsobem modelovat chování materiálu před dosažením maximální pevnosti a nebo po jejím překročení. Pro predikci porušení kompozitních materiálu existuje celá řada makromechanických kritérií. Kritéria byla ovšem navržena pro predikci porušení jednosměrových dlouhovláknových kompozit-

ních materiálů, pro predikci porušení složitějších kompozitních struktur je lze využít pouze omezeně. Pro predikci porušení složitějších kompozitních struktur v podobě tkaninových kompozitů lze obvykle z kritérií porušení ve svém původním tvaru využít pouze kritéria maximálních napětí, anebo kritéria maximální deformace. Pro nelineární model sendvičové struktury bude v případě potahu uvažován nelineární elastický materiálový model s poškozením, který bude využívat výše uvedených kritérií porušení.

Jak nelineární elastické modely, tak lineární elastické modely s poškozením by měly být schopny úspěšně popisovat chování kompozitního materiálu v případě jeho zatěžování. Při odlehčení zatěžovaného materiálu by měly tyto modely vykazovat značné odlišnosti vůči experimentálním výsledkům v důsledku absence plastické deformace, která vzniká u kompozitních materiálů, zejména pak ve smykové oblasti. Pro komplexnější popis chování tkaninových kompozitů je nutné využít elasto-plastických materiálových modelů s poškozením. Tyto modely jsou stálým tématem pro výzkum v celé řadě odvětví, kdy řada prací je věnována více teoretickým základům a odvozením jednotlivých modelů, než jejich samotné aplikaci v MKP softwarech, kde nejsou stejně jako nelineární elastické modely jejich základní součástí. Zásadní problém aplikace v MKP softwarech spočívá ve složitých dopočtech elastické a plastické části deformace za pomoci iteračních cyklů. Možnost řešení je ve značné míře závislá na způsobu svázání plasticity a poškození. Jako výhodnější se v případě svázaných modelů plasticity a poškození jeví implicitní varianta, která i přes svázání umožňuje v případě vhodně navrženého modelu vznik a rozvoj plasticity a poškození nezávisle na sobě. Svázané modely plasticity a poškození také vhodnějším způsobem vystihují fyzikální podstatu jednotlivých jevů. Elasto-plastický materiálový model tkaninového kompozitu bude navržen jako implicitně svázaný hyperplastický materiálový model s poškozením. Tento model by měl být schopen komplexnějším způsobem popisovat chování tkaninového kompozitu jak v případě zatěžování materiálu, tak i v případě jeho následného odlehčení.

Testování kompozitních materiálů se odvíjí od jejich předpokládaného užití. V kapitole je provedena rešerše testování sendvičových struktur se zaměřením na sendvičové struktury s kompozitním potahem a polymerním pěnovým jádrem. Za základní zkoušku sendvičových struktur je považována považována tříbodová, případně čtyřbodová, ohybová zkouška sendvičových nosníků, které jsou obvykle testovány až do ztráty stability struktury. Rázové zkoušky se odvíjejí od použití sendvičových struktur. V daném případě se za základní údaj považuje velikost absorbované energie impaktoru v případě vzniku po-

rušení testované struktury vycházející z dopadové rychlosti impaktoru a jeho hmotnosti.

Polymerní pěny o nízké hustotě, které se obvykle využívají jako jádra sendvičových struktur, lze považovat za izotropní materiál s nulovým Poissonovým číslem po celou dobu zatěžování. Tento druh pěn vykazuje nelineární chování v případě tahového zatížení, které je v případě numerických simulací často opomíjeno a je uvažováno jako lineárně elastické, anebo je uvažováno shodně s případem zatěžování daného materiálu v tlaku. S ohledem na značnou stlačitelnost je chování daných polymerních pěn v tlaku vhodné uvažovat ve třech fázích – fáze lineárně elastického chování, fáze drcení pěny a fáze hutnění již rozdrčené pěny. V práci bude chování pěnového jádra modelu sendvičové struktury modelováno nelineárně jak v případě tahu, tak tlaku.

# Kapitola 2

## Teoretické a matematické základy modelování materiálů

V kapitole jsou popsány základní předpoklady a uveden popis spolu s postupem pro modelování samotné plasticity a poškození v materiálech. Po seznámení se s principy vzniku plasticity a poškození v materiálech z hlediska vnitřní stavby materiálu, je druhá část kapitoly věnována odvození možnosti realizace aditivního rozkladu celkové deformace elasto-plastického materiálu za předpokladu uvažování velkých deformací. Daný rozklad deformace je následně aplikován na jednorozměrné úloze elasto-plastického materiálu s poškozením. Na stejném typu úlohy je ukázána i možnost modelování plasticity a modelování poškození s rozborem jednotlivých metod modelování poškození a odvozením konstitutivního vztahu popisujícího chování poškozeného materiálu.

### 2.1 Reprezentace plasticity a poškození z hlediska mechaniky

Plasticitu lze definovat jako schopnost materiálu zachovat si trvalé přetvoření po odstranění zatěžovacích účinků [16]. Popisem materiálů a podmínkami vzniku a šíření plasticity se zabývá matematická teorie plasticity. Plastické, přesněji elasto-plastické chování lze pozorovat u většiny materiálů, zejména u kovů (ocel, hliník), zemin, betonu, pěn, kostí a i kůže, popř. lidské pokožky. Tato materiálová vlastnost je příčinou vnitřní stavby materiálu v podobě výskytu dislokací v krystalové mřížce v případě krystalických látek,

popř. koordinačních vad u látek amorfních a polymerů. U amorfních látek je periodické uspořádání částic omezeno pouze na krátké řetězce. Na větší vzdálenosti je vnitřní uspořádání nepravidelné a vnitřní stavba amorfních látek se rozlišuje na regiony s větší a nižší atomární hustotou. U krystalických pevných látek je plasticita důsledkem deformace krystalové mřížky způsobené posouváním atomů v místě dislokací v důsledku vnějšího zatížení materiálu. V případě amorfních látek dochází k trvalé deformaci v důsledku otevírání regionů s nižší atomární hustotou.

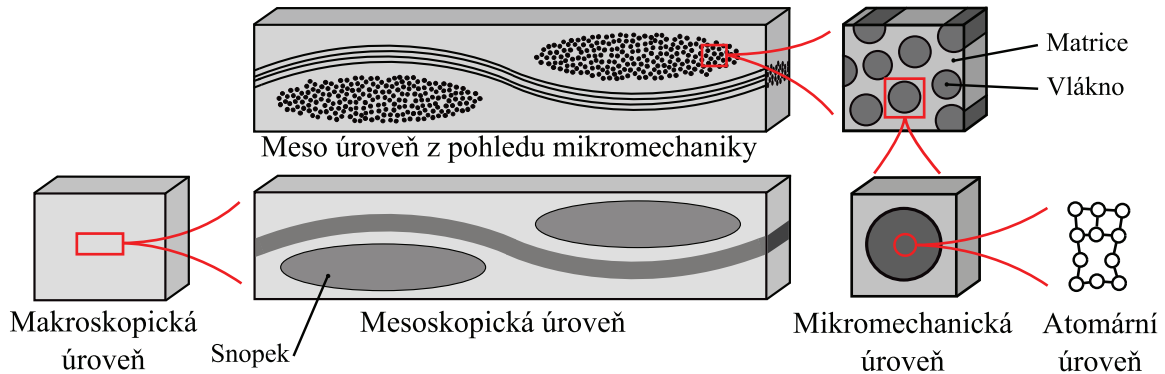
Poškození materiálu je materiálový proces rozvoje mikrotrhlin případně mikroskopických dutin, které vedou ke změně mechanických vlastností zatěžovaného materiálu. Příčina nukleace těchto trhlin je obvykle důsledek výskytu vad, anebo rozbití atomových a molekulárních vazeb krystalické, nebo amorfni pevné látky [50]. Na poškození materiálu lze nahlížet z různých hledisek, a to od samotné atomární, přes mikroskopickou a mesoskopickou, až po úroveň makroskopickou [70]. Každá úroveň vykazuje odlišný postoj a náhled na stavbu materiálu a vznik poškození. V případě atomárního měřítka je nutné na materiál nahlížet jako na část tělesa, které lze definovat jako skupinu periodicky rozložených základních stavebních částic v podobě atomů tvořících prostorovou a případně dále pak i krystalovou mřížku. Poškození materiálu se odvíjí od poruch vznikajících v dané periodické struktuře [52].

Na mikroskopické úrovni je chování a poškození materiálu sledováno v rozsahu tzv. jednotkové (elementární) buňky, představující reprezentativní objem materiálu. Rozměr elementárních materiálových buněk činí řádově jednotky mikrometrů. Na mikroskopické úrovni se v materiálu rozlišují jeho jednotlivé fáze, které obsahuje a ze kterých je složen. Za typické mikromechanické poškození lze považovat mikrotrhliny a mikroskopické dutiny, případně také samotné porušení jednotlivých fází spojené s jejich oddělením, popř. odštěpením. V případě kompozitních materiálů často navíc dochází na mikroskopické úrovni k porušení samotného rozhraní mezi vláknem a matricí. Úroveň, kdy je na materiál nahlíženo z hlediska jeho základních stavebních prvků a příměsí, je označována za tzv. mesoskopickou.

Při náhledu na materiál z hlediska makromechaniky se každý bod materiálu bere jako bod kontinua, jeho struktura a případná materiálová stavba se oproti atomové a nebo mikromechanické úrovni již nerozlišuje. Na těleso se nahlíží jako na jednolitou pevnou látku. Jednotlivé úrovně pohledu na stavbu a modelování materiálu jsou pro případ tkaninového kompozitu znázorněny na obrázku 2.1. Z makroskopického hlediska lze poškození ozna-



čít za fyzikální proces degradace výsledných materiálových vlastností, který může vést až k celkovému porušení materiálu. K makromechanickému poškození dochází hromaděním, nebo případným splynutím vzniklých mikrotrhlin v materiálu, které vedou buďto k prvotní inicializaci, anebo k případnému dalšímu šíření viditelné trhliny v zatěžovaném materiálu.



**Obrázek 2.1:** Úrovně pohledu na stavbu a modelování tkaninového kompozitu.

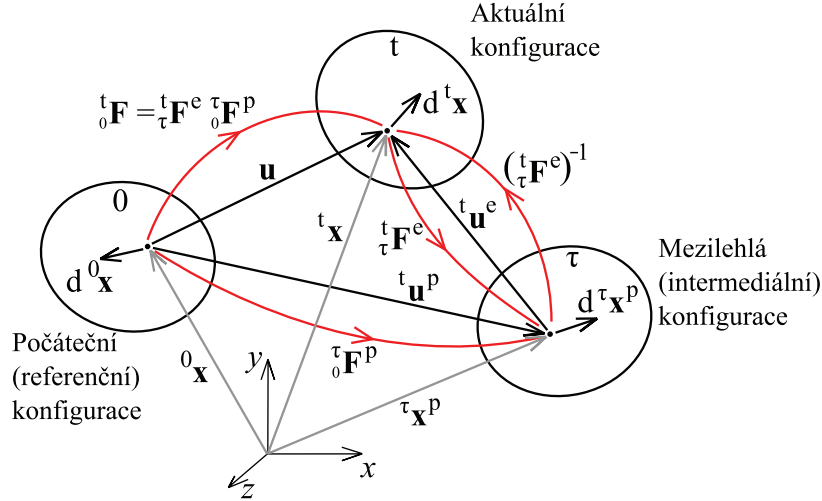
## 2.2 Rozklad deformace

Uvažujme aktuální elasto-plastickou zdeformovanou konfiguraci materiálového vzorku nesoucí označení  $t$ , která vznikla z počáteční nezdeformované konfigurace označené  $0$ . Umístění hmotné částice v počáteční a aktuální konfiguraci se vztahuje ke Kartézskému souřadnicovému systému  $O(x, y, z)$ , kdy  ${}^t\mathbf{x}$  značí souřadnice daného bodu v aktuální a  ${}^0\mathbf{x}$  v nedeformované původní konfiguraci. V elasto-plastickém případě dále předpokládejme mezilehlou konfiguraci tělesa označenou  $\tau$ , která vznikne z výsledné (aktuální) konfigurace tělesa odlehčením materiálu na hodnotu nulového napětí. Konfigurace  $\tau$  se liší od počáteční konfigurace  $0$  složkou trvalé (plastické) deformace a vůči výsledné konfiguraci  $t$  naopak absencí vratné (elastické) složky deformace. Uvažované konfigurace kontinua jsou znázorněny na obrázku 2.2. Pro souřadnice bodu  ${}^t\mathbf{x}$  v aktuální zdeformované konfiguraci, resp.  ${}^\tau\mathbf{x}^p$  v mezilehlé konfiguraci bude platit [68]

$${}^t\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + {}^t\mathbf{u}^p + {}^t\mathbf{u}^e, \quad (2.1)$$

$${}^\tau\mathbf{x}^p = {}^0\mathbf{x} + {}^t\mathbf{u}^p, \quad (2.2)$$

kde  ${}^t\mathbf{u}^p$  je plastický posuv z referenční do mezilehlé konfigurace. Tento nevratný a disipativní posuv je důsledkem plastické deformace, která vzniká v uvažovaném elasto-plastickém kontinuu tělesa. Posuvy  ${}^t\mathbf{u}^e$  z mezilehlé  $\tau$  do konečné konfigurace  $t$  odpovídají elastickým (vratným) deformacím a posuvům tuhého tělesa v kontinuu.



**Obrázek 2.2:** Multiplikativní dekompozice deformace.

Základní mírou deformace v mechanice kontinua je deformační gradient  ${}^t_0\mathbf{F}$  určující vztah mezi aktuální (výslednou)  $t$  a počáteční konfigurací  $0$  tělesa, přičemž platí

$$d^t\mathbf{x} = {}^t_0\mathbf{F} \cdot d^0\mathbf{x}. \quad (2.3)$$

Deformační gradient  ${}^t_0\mathbf{F}$  je v daném případě definován vztahem

$${}^t_0\mathbf{F} = \frac{\partial^t\mathbf{x}}{\partial^0\mathbf{x}} = \text{grad } {}^t\mathbf{x}({}^0\mathbf{x}) = \frac{\partial({}^0\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial^0\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial^0\mathbf{x}} + \mathbf{I} = \text{grad } \mathbf{u}({}^0\mathbf{x}) + \mathbf{I}. \quad (2.4)$$

Multiplikativní dekompozicí celkového (elasto-plastického) deformačního gradientu  ${}^t_0\mathbf{F}$  lze provést rozklad na jeho elastickou  ${}^t_{}\mathbf{F}^e$  a plastickou  ${}^{}_0\mathbf{F}^p$  část ve tvaru [10]

$${}^t_0\mathbf{F} = {}^t_{}\mathbf{F}^e {}^{}_0\mathbf{F}^p, \quad (2.5)$$

kde

$${}^t_{}\mathbf{F}^e = \frac{\partial^t\mathbf{x}}{\partial^{}\mathbf{x}^p}, \quad {}^{}_0\mathbf{F}^p = \frac{\partial^{}\mathbf{x}^p}{\partial^0\mathbf{x}}. \quad (2.6)$$

Celkový deformační gradient  ${}^t_0\mathbf{F}$  lze vždy rozdělit na rotaci danou tenzorem rotace tuhého tělesa  ${}^t_0\mathbf{R}$  a na deformaci danou buďto pravým  ${}^t_0\mathbf{U}$  a nebo levým  ${}^t_0\mathbf{V}$  tenzorem protažení

(*stretch tensor*). V daném případě pouze záleží na tom, zda je v infinitesimální části tělesa myšlena nejdříve rotace tuhého tělesa a až následně jeho deformace, anebo naopak. Tzv. polární rozklad deformačního gradientu  ${}^t\mathbf{F}$  má tvar [54]

$${}^t\mathbf{F} = {}^t\mathbf{R} {}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{V} {}^t\mathbf{R}, \quad (2.7)$$

kde tenzor rotace  ${}^t\mathbf{R}$  je ortogonální tenzor, tj.  $({}^t\mathbf{R})^T {}^t\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R} ({}^t\mathbf{R})^T = \mathbf{I}$  s  $\det {}^t\mathbf{R} = 1$ . Míru rychlosti deformace materiálu popisuje gradient rychlosti, který má tvar

$${}^t\mathbf{L} = \mathbf{L} = {}^t\dot{\mathbf{F}} ({}^t\mathbf{F})^{-1} = \frac{\partial {}^t\mathbf{v}}{\partial {}^t\mathbf{x}} = \text{grad } {}^t\mathbf{v} ({}^t\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

kde

$${}^t\mathbf{v} = \frac{\partial {}^t\mathbf{u}}{\partial t} = {}^t\dot{\mathbf{u}}. \quad (2.9)$$

U tenzoru  ${}^t\mathbf{L}$  lze provést jeho dekompozici na symetrickou a nesymetrickou část [54]

$${}^t\mathbf{L} = {}^t\mathbf{D} + {}^t\mathbf{W}, \quad (2.10)$$

kde symetrická část gradientu rychlosti  $\mathbf{L}$  je označována jako tenzor rychlosti deformace  ${}^t\mathbf{D}$  a jeho nesymetrická část  ${}^t\mathbf{W}$  jako spin tenzor. Pro  ${}^t\mathbf{D}$  a  ${}^t\mathbf{W}$  platí

$${}^t\mathbf{D} = \mathbf{D} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{L} + ({}^t\mathbf{L})^T) = \frac{1}{2} \left( {}^t\dot{\mathbf{F}} ({}^t\mathbf{F})^{-1} + ({}^t\mathbf{F})^{-T} ({}^t\dot{\mathbf{F}})^T \right), \quad (2.11)$$

$${}^t\mathbf{W} = \mathbf{W} = \frac{1}{2} ({}^t\mathbf{L} - ({}^t\mathbf{L})^T) = \frac{1}{2} \left( {}^t\dot{\mathbf{F}} ({}^t\mathbf{F})^{-1} - ({}^t\mathbf{F})^{-T} ({}^t\dot{\mathbf{F}})^T \right). \quad (2.12)$$

S ohledem na (2.5) může být gradient rychlosti  ${}^t\mathbf{L}$  (2.8) dále dekomponován na [68]

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{L} &= {}^t\mathbf{L}^e + {}^t\mathbf{L}^p = {}^t_\tau \dot{\mathbf{F}}^e ({}^t_\tau \mathbf{F}^e)^{-1} + {}^t_\tau \mathbf{F}^e \left[ {}^t_\tau \dot{\mathbf{F}}^p ({}^t_\tau \mathbf{F}^p)^{-1} \right] ({}^t_\tau \mathbf{F}^e)^{-1} \\ &= {}^t_\tau \dot{\mathbf{F}}^e ({}^t_\tau \mathbf{F}^e)^{-1} + {}^t_\tau \mathbf{F}^e [{}^t_\tau \mathbf{L}^p] ({}^t_\tau \mathbf{F}^e)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

který lze za využití (2.4) a (2.8) dále rozepsat do tvaru

$$\frac{\partial {}^t\mathbf{v}}{\partial {}^t\mathbf{x}} = {}^t\mathbf{L} = \frac{\partial {}^t\mathbf{v}^e}{\partial {}^t\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial {}^t\mathbf{x}}{\partial \tau \mathbf{x}^p} \right) \left[ \frac{\partial \tau \bar{\mathbf{v}}^p}{\partial \tau \mathbf{x}^p} \right] \left( \frac{\partial \tau \mathbf{x}^p}{\partial {}^t\mathbf{x}} \right), \quad (2.14)$$

kde

$${}^t\mathbf{v} = {}^t\mathbf{v}^e + \left( \frac{\partial {}^t\mathbf{x}}{\partial \tau \mathbf{x}^p} \right) \tau \bar{\mathbf{v}}^p. \quad (2.15)$$

V uvedených rovnicích (2.14) a (2.15) představuje  ${}^t\mathbf{v}^e({}^t\mathbf{x}) = {}^t\dot{\mathbf{u}}^e({}^t\mathbf{x})$  rychlost bez plastické deformace a  ${}^\tau\bar{\mathbf{v}}^p({}^\tau\mathbf{x}^p) = {}^\tau\dot{\mathbf{u}}^p({}^\tau\mathbf{x}^p)$  je rychlost bez elastické deformace a pohybu tuhého tělesa v mezilehlé konfiguraci. Tensor  ${}^\tau\mathbf{L}^p$  uvedený v rovnici (2.13)

$${}^\tau\mathbf{L}^p = \bar{\mathbf{L}}^p = {}^\tau\dot{\mathbf{F}}^p ({}^\tau\mathbf{F}^p)^{-1} \quad (2.16)$$

je modifikovaný gradient rychlosti plasticity, tj. gradient rychlosti v mezilehlé konfiguraci. Tento gradient  $\bar{\mathbf{L}}^p$  lze v daném případě rozložit analogicky s (2.10) na modifikovaný tenzor vyjadřující míru plastické deformace (*modified plastic deformation rate tensor*)  $\bar{\mathbf{D}}^p$  a modifikovaný plastický spin  $\bar{\mathbf{W}}^p$ . Analogicky s (2.10) platí i v daném případě  $\bar{\mathbf{L}}^p = \bar{\mathbf{D}}^p + \bar{\mathbf{W}}^p$ . Pro tenzory  $\bar{\mathbf{D}}^p$  a  $\bar{\mathbf{W}}^p$  platí obdobně k (2.11) a (2.12)

$$\bar{\mathbf{D}}^p = {}^\tau\mathbf{D}^p = \frac{1}{2} \left[ \bar{\mathbf{L}}^p + (\bar{\mathbf{L}}^p)^T \right] = \frac{1}{2} \left[ {}^\tau\dot{\mathbf{F}}^p ({}^\tau\mathbf{F}^p)^{-1} + ({}^\tau\mathbf{F}^p)^{-T} ({}^\tau\dot{\mathbf{F}}^p)^T \right], \quad (2.17)$$

$$\bar{\mathbf{W}}^p = {}^\tau\mathbf{W}^p = \frac{1}{2} \left[ \bar{\mathbf{L}}^p - (\bar{\mathbf{L}}^p)^T \right] = \frac{1}{2} \left[ {}^\tau\dot{\mathbf{F}}^p ({}^\tau\mathbf{F}^p)^{-1} - ({}^\tau\mathbf{F}^p)^{-T} ({}^\tau\dot{\mathbf{F}}^p)^T \right]. \quad (2.18)$$

Za pomoci zpětného mapování (tzv. *pull back* proces mapování) gradientu rychlosti  ${}^t\mathbf{L}$  z aktuální konfigurace  $t$  do mezilehlé konfigurace  $\tau$  lze získat modifikovaný gradient rychlosti  ${}^\tau\mathbf{L}$  ve tvaru [68]

$${}^\tau\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}} = ({}^\tau\mathbf{F}^e)^T {}^\tau\dot{\mathbf{F}}^e + ({}^\tau\mathbf{F}^e)^T {}^\tau\mathbf{F}^e {}^\tau\mathbf{L}^p = {}^\tau\mathbf{L}^e + {}^\tau\mathbf{C}^e {}^\tau\mathbf{L}^p = \bar{\mathbf{L}}^e + \bar{\mathbf{C}}^e \bar{\mathbf{L}}^p, \quad (2.19)$$

kde

$${}^\tau\mathbf{C}^e = \bar{\mathbf{C}}^e = ({}^\tau\mathbf{F}^e)^T {}^\tau\mathbf{F}^e \quad (2.20)$$

představuje modifikovaný pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor náležící do mezilehlé konfigurace. Analogicky k (2.8) lze vyjádřit rozvoj gradientu plastické deformace ve tvaru

$${}^\tau\dot{\mathbf{F}}^p = {}^\tau\bar{\mathbf{L}}^p {}^\tau\mathbf{F}^p. \quad (2.21)$$

Řešení výše uvedené diferenciální rovnice lze za užití zpětné Eulerovy metody (*backward Euler Method*) uvažovat pro krok  $t + \Delta t$  ve tvaru [68]

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^p = \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p) {}^t\mathbf{F}^p, \quad (2.22)$$

kde exponenciální funkce matice  $\exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p)$  je definována jako

$$\exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p)^n}{n!}. \quad (2.23)$$

Pro malý časový přírůstek  $\Delta t$  a za předpokladu, že  $\|\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p\| \ll 1$  lze danou exponenciální funkci aproximovat na tvar

$$\exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p) = \mathbf{I} + \Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p. \quad (2.24)$$

Při zavedení dekompozice gradientu rychlosti plastické deformace

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{L}}^p = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p + {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{W}}^p \quad (2.25)$$

a dosazením do (2.22) následně dostáváme

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^p = \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p) \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{W}}^p) {}^t_0\mathbf{F}^p. \quad (2.26)$$

Zohledněním možnosti dekompozice elasto-plastického deformačního gradientu dle (2.5) a následným provedením úpravy daného vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e &= {}^{t+\Delta t}_t\mathbf{F} {}^t_0\mathbf{F}^e \exp(-\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{W}}^p) \exp(-\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p) = \\ &{}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{\text{trial}} \exp(-\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{W}}^p) \exp(-\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p), \end{aligned} \quad (2.27)$$

kde tenzor  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{\text{trial}} = \mathbf{F}^e_{\text{trial}}$  představuje počáteční (trialový) gradient elastické deformace.

Pro tento tenzor platí analogicky s (2.7) možnost jeho polárního rozkladu. Platí tedy

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{\text{trial}} = {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}^e_{\text{trial}} {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{U}^e_{\text{trial}}, \quad (2.28)$$

kde  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{U}^e_{\text{trial}}$  je pravý tenzor elastického protažení z předešlé iterace a  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{R}^e_{\text{trial}}$  je tenzor elastické rotace z předešlé iterace. Pro pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor z předešlé iterace  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^e_{\text{trial}}$  následně platí

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^e_{\text{trial}} = \mathbf{C}^e_{\text{trial}} = ({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{\text{trial}})^T {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{\text{trial}}. \quad (2.29)$$

Zavedením ortogonálního tenzoru  ${}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega$ , který vyjadřuje přírůstek plastické rotace ve tvaru [68]

$${}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega = \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{W}}^p) \quad (2.30)$$

a jeho využitím spolu s (2.27) dostáváme pro trialový pravý Cauchy-Greenův deformační tenzor  ${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{C}^e_{\text{trial}} = ({}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{\text{trial}})^T {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{F}^e_{\text{trial}}$  vztah

$${}^{t+\Delta t}_0\mathbf{C}^e_{\text{trial}} = ({}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega)^T \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p) {}^{t+\Delta t}_0\mathbf{C}^e \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p) {}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} &= \left[ ({}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega)^T \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p) {}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega \right] \left[ ({}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega)^T {}^{\Delta t}_0\mathbf{C}^e {}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega \right] \\ &\times \left[ ({}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega)^T \exp(\Delta t {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{D}}^p) {}^{t+\Delta t}_t\mathbf{R}^\omega \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Zavedením tenzorů

$${}^{t+\Delta t}_0 \tilde{\mathbf{C}}^e = ({}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}^\omega)^T {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{C}^e {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}^\omega, \quad (2.33)$$

$$\exp\left(\Delta t {}^{t+\Delta t}_t \tilde{\mathbf{D}}^p\right) = ({}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}^\omega)^T \exp\left(\Delta t {}^{t+\Delta t}_t \bar{\mathbf{D}}^p\right) {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{R}^\omega, \quad (2.34)$$

a jejich dosazením do (2.32) získáváme pro  ${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{C}_{\text{trial}}^e$  vyjádření ve tvaru

$${}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{C}_{\text{trial}}^e = \exp\left(\Delta t {}^{t+\Delta t}_t \tilde{\mathbf{D}}^p\right) {}^{t+\Delta t}_0 \tilde{\mathbf{C}}^e \times \exp\left(\Delta t {}^{t+\Delta t}_t \bar{\mathbf{D}}^p\right). \quad (2.35)$$

Dále uvažujme logaritmické (Henckyho) deformační tenzory  ${}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\epsilon}_{\text{trial}}^e$  a  ${}^{t+\Delta t}_0 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{trial}}^e$  ve tvaru

$${}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\epsilon}_{\text{trial}}^e = \frac{1}{2} \ln\left({}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{C}_{\text{trial}}^e\right), \quad \text{resp.} \quad {}^{t+\Delta t}_0 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{trial}}^e = \frac{1}{2} \ln\left({}^{t+\Delta t}_0 \tilde{\mathbf{C}}_{\text{trial}}^e\right), \quad (2.36)$$

a předpokládejme, že  $\|{}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\epsilon}_{\text{trial}}^e\| \ll 1$ , tj. že elastická deformace v každém kroku přírůstku je přiměřeně velká [10]. Danou podmínku splňují běžné elasto-plastické materiály, jako např. oceli a předpokládejme dále, že i kompozitní materiály [54]. Danou podmínku nesplňují obecně elastomerní materiály (např. pryže, silikony a korek). Dosazením (2.35) do (2.36) a využitím (2.24) získáváme

$${}^{t+\Delta t}_0 \boldsymbol{\epsilon}_{\text{trial}}^e = \frac{1}{2} \Delta t \tilde{\mathbf{D}}^p {}^{t+\Delta t}_0 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e \frac{1}{2} \Delta t \tilde{\mathbf{D}}^p = {}^{t+\Delta t}_0 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \Delta t \tilde{\mathbf{D}}^p. \quad (2.37)$$

Předpokládejme dále, že změna struktury materiálu během jeho plastického tečení je trvalá a že nedochází v materiálu ke změně hlavních směru anizotropie. Změna směrů anizotropie je obvykle důsledkem velkých plastických deformací v materiálu, kdy změnou vnitřní stavby materiálu dochází k rotaci hlavních směrů anizotropie [53]. Důsledkem plastického tečení v daném případě dochází i k trvalé změně elastických materiálových parametrů. Nicméně v rozsahu malých až středně velkých deformací, které jsou charakteristické pro běžné materiály, je předpokládáno, že plastické tečení materiálu má minimální vliv na změnu elastických materiálových parametrů. V daném případě lze tedy považovat příspěvek plastického spinu  $\bar{\mathbf{W}}^p$  na velikosti modifikovaného gradientu rychlosti plasticity  $\bar{\mathbf{L}}^p$  za zanedbatelný [54]. Bude tedy platit

$$\bar{\mathbf{W}}^p = \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

díky čemuž (2.25) přejde na tvar

$$\bar{\mathbf{L}}^p = \bar{\mathbf{D}}^p. \quad (2.39)$$

Z rovnic (2.30), (2.33) a (2.34) následně při uvažování (2.38) vyplývá

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}^\omega = \mathbf{I}, \quad (2.40)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_0\tilde{\mathbf{C}}^e = {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{C}^e, \quad (2.41)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_0\tilde{\mathbf{D}}^p = {}^{t+\Delta t}{}_0\bar{\mathbf{D}}^p. \quad (2.42)$$

Při zohlednění rovnic (2.40) až (2.42) v (2.37) dostáváme [68]

$${}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trial}}^e = {}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta t \, {}^{t+\Delta t}{}_0\bar{\mathbf{D}}^p, \quad (2.43)$$

resp.

$${}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trial}}^e = {}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}^e + {}^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (2.44)$$

Z uvedené rovnice je patrné, že celková deformace materiálu v daném časovém kroku  ${}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trial}}^e$  je rovna součtu elastické deformace  ${}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}^e$  a linearizovaného přírůstku plastické deformace  ${}^{t+\Delta t}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ . Rovnice (2.43), resp. (2.44) dokazují možnost realizace aditivního rozkladu celkové logaritmické deformace elasto-plastického chování materiálu v případě uvažování velkých deformací. S ohledem na to, že původní (referenční) konfigurace 0 byla nedeformovaná, tedy bez počáteční plastické deformace, lze rovnici (2.44) zobecnit na tvar

$${}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon} = {}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}^e + {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (2.45)$$

kde  ${}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}$  představuje celkový logaritmický tenzor deformace a  ${}^{t+\Delta t}{}_0\boldsymbol{\varepsilon}^e$ , resp.  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^p$  pak vratnou (elastickou) a nevratnou (plastickou) část tenzoru deformace.

## 2.3 Aditivní rozklad deformace elasto-plastického materiálu s poškozením

Pro rozklad logaritmické deformace elasto-plastického materiálu s poškozením uvažujme jednoosou tahovou zkoušku tyčky konstantního průřezu, znázorněnou na obrázku 2.3, s historií zatížení  $0 \rightarrow B \rightarrow C$ . Během zatěžování dojde postupně ke změně délky tyčky  $l_0 \rightarrow l^p \rightarrow l^{\text{pid}} \rightarrow l^{\text{pd}} \rightarrow l$ . Fáze zatěžování  $0 \rightarrow B$  odpovídá monotonnímu zatěžování za hranici elastického chování materiálu, fáze  $B \rightarrow C$  pak elastickému odlehčení. Stav materiálu označený bodem C odpovídá odlehčené konfiguraci bez vzniku napětí v materiálu. Na vzniku trvalé deformace materiálu ve stavu C má svůj podíl jak plasticita materiálu,

tak i nevratná složka deformace vznikající při poškození materiálu. Následně lze zapsat rovnost [2]

$$\frac{l}{l_0} = \frac{l}{l^{pd}} \cdot \frac{l^p}{l_0} \cdot \frac{l^{pd}}{l^p} = \frac{l}{l^{pd}} \cdot \frac{l^p}{l_0} \cdot \frac{l^{pd}}{l^{pid}} \cdot \frac{l^{pid}}{l^p}. \quad (2.46)$$

Rovnici (2.46) lze zapsat do tvaru

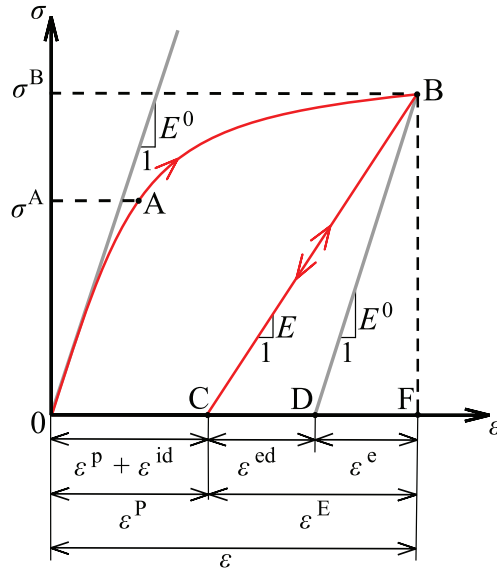
$$\lambda = \lambda^e \cdot \lambda^p \cdot \lambda^d = \lambda^e \cdot \lambda^p \cdot \lambda^{ed} \cdot \lambda^{id} \quad (2.47)$$

kde  $\lambda = l/l_0$  značí osově protažení (míru deformace) na konci fáze zatěžování  $0 \rightarrow B$ ,  $\lambda^e = l/l_0$  představuje velikost elastického protažení na konci elastického přetvoření  $B \rightarrow F$ ,  $\lambda^p = l^d/l_0$  odpovídá plastickému protažení mezi stavem 0 a částí trvalé deformace materiálu vzniklé plasticitou materiálu mezi stavy 0 a C. Obdobně  $\lambda^d = l^{pd}/l^p$  odpovídá protažení od poškození mezi stavem D a částí trvalé deformace materiálu vzniklé poškozením mezi stavy C a 0. Dané protažení od poškození  $\lambda^d$  je ve druhé části rovnice (2.47), resp. rovnice (2.46) dále rozděleno na  $\lambda^{ed} = l^{pd}/l^{pid}$  odpovídající vratné části (elastické části) protažení od poškození mezi stavy D  $\rightarrow$  C a  $\lambda^{id} = l^{pid}/l^{pd}$  zastupující nevratné protažení od poškození mezi stavem C a částí trvalé deformace vzniklé od poškození nacházející se mezi stavy 0 a C.

Osově protažení  $\lambda$ , použité v této podkapitole, tvoří obecně jeden ze tří diagonálních prvků tenzoru protažení  $\mathbf{U}$ , popř.  $\mathbf{V}$  definovaných v (2.7) [54, 61]. Uvažovaná jednoosá úloha v této podkapitole v daném případě přináší celkové zjednodušení jednotlivých zápisů uvedených v podkapitole 2.2 a osově protažení  $\lambda$  lze v daném případě přímo označit za celkový deformační gradient  ${}^t_0\mathbf{F}$  – viz (2.4). Rovnice (2.47) pak analogicky k (2.5) popisuje multiplikativní rozklad celkového deformačního gradientu.

Při uvažování logaritmické deformace lze analogicky k (2.45) uvažovat aditivní rozklad celkové deformace na deformaci elastickou  $\varepsilon^e$ , deformaci plastickou  $\varepsilon^p$  a na deformaci způsobenou poškozením  $\varepsilon^d$  [2, 97]. I přesto, že poškození představuje z hlediska termodynamiky nevratný proces, složka deformace způsobená poškozením  $\varepsilon^d$  se může po odlehčení materiálu buďto plně, anebo pouze částečně zregenerovat. Složku deformace způsobenou poškozením  $\varepsilon^d$  lze dále rozdělit na vratnou elastickou část  $\varepsilon^{ed}$ , kterou lze v případě odlehčení připisovat uzavření vzniklých trhlin v materiálu, a na nevratnou část  $\varepsilon^{id}$  vznikající částečným nedovřením mikroskopických trhlin a dutin v materiálu způsobené trvalou deformací. Částečný podíl na vzniku nevratné části deformace od poškození  $\varepsilon^{id}$  má i hustota





**Obrázek 2.3:** Obecný rozklad deformace elasto-plastického materiálu s poškozením na jednoosé tahové zkoušce.

poruch vyvolaných kumulací poškození na atomární úrovni materiálu. Multiplikativní rozklad celkového osového protažení  $\lambda$ , který popisuje (2.47), lze tedy v případě uvažování logaritmické deformace  $\epsilon$  uvažovat obecně ve tvaru

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^P + \epsilon^d = \epsilon^e + \epsilon^P + \epsilon^{ed} + \epsilon^{id}. \quad (2.48)$$

Jak elastická, tak neelastická část deformace způsobená poškozením  $\epsilon^{ed}$  a  $\epsilon^{id}$  mají svůj podíl na změně tuhosti materiálu, stejně tak obě tyto části jsou funkcí tenzoru vnitřní proměnné  $\mathbf{D}$ , která vyjadřuje poškození zatěžovaného materiálu. Platí tedy  $\epsilon^{ed} = \epsilon^{ed}(\mathbf{D})$  a  $\epsilon^{id} = \epsilon^{id}(\mathbf{D})$ . S ohledem na výskyt více elastických a neelastických složek v rozkladu deformace, zavedme tedy dále celkovou elastickou a celkovou plastickou deformaci  $\epsilon^E$  a  $\epsilon^P$ , pro které bude platit [2]

$$\epsilon^E = \epsilon^e + \epsilon^{ed} \quad (2.49)$$

$$\epsilon^P = \epsilon^{id} + \epsilon^P. \quad (2.50)$$

Rovnice (2.48) lze s ohledem na rovnice (2.49) a (2.50) zapsat ve tvaru

$$\epsilon = \epsilon^E + \epsilon^P. \quad (2.51)$$

Dekompozice jednotlivých složek deformace je pro případ jednoosé tahové zkoušky elasto-plastického materiálu s poškozením uvedena na obrázku 2.3. V kartézském souřadnicovém systému 123 lze tenzor celkové logaritmické deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  vyjádřit ve tvaru [10, 26]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \mathbf{I} + (\text{grad } \mathbf{u})^T + \text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T \cdot \text{grad } \mathbf{u} \right) \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (2.53)$$

kde  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) jsou složky vektoru posunutí  $\mathbf{u}$ . Tenzor deformace je symetrický, platí  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , a lze jej zapsat ve tvaru vektoru [47]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}]^T. \quad (2.54)$$

Ve shodném tvaru lze zapsat i celkovou elastickou  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$  a plastickou  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$  deformaci

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^E &= [\varepsilon_{11}^E, \varepsilon_{22}^E, \varepsilon_{33}^E, \gamma_{23}^E, \gamma_{13}^E, \gamma_{12}^E]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^P &= [\varepsilon_{11}^P, \varepsilon_{22}^P, \varepsilon_{33}^P, \gamma_{23}^P, \gamma_{13}^P, \gamma_{12}^P]^T. \end{aligned} \quad (2.55)$$

## 2.4 Elastický a hyperelastický materiál

V elastickém materiálu je veškerá energie vznikající zatížením materiálu uložena v podobě elastické deformační energie. Tato energie je také následně při odlehčení zatížení zpětně materiálem spotřebována bez vzniku disipační energie. Velikost aktuálního napětí v materiálu vznikajícího při jeho zatížení lze stanovit přímo z velikosti aktuální deformace. Materiál v odlehčeném stavu nevykazuje nevratné deformace. Při zatěžování neexistuje žádná závislost na zatěžovací cestě ani na čase. Deformační energie je skalární funkce, pomocí které lze definovat velikost napětí v materiálu. Funkce popisující velikosti deformační energie je obecně vedle velikosti deformace závislá také na řadě konstant, které musí být v daném případě experimentálně stanoveny. Celkový tvar uvažované funkce deformační energie se odvíjí od toho, zda má popisovat lineární, či nelineární elastické chování materiálu. Schéma jednoosého tahového diagramu lineárně a nelineárně elastického materiálu je znázorněno na obrázku 2.4. V případě hyperelastického materiálu lze tenzor napětí odvodit přímo z deformační energie. Pro zobecněný tenzor napětí  $\mathbf{S}^{(m)}$  platí [26]

$$\mathbf{S}^{(m)} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}^{(m)}}, \quad (2.56)$$

kde  $\mathbf{E}^{(m)}$  představuje zobecněnou míru deformace odvozenou z Cauchy-Greenova deformačního tenzoru – viz (2.20). Při uvažování Green-Lagrangeovana deformačního tenzoru

se z (2.56) získá druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí  $\mathbf{S}$ . Při užití logaritmického tenzoru deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  definovaného (2.52) rovnice (2.56) přechází na tvar

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.57)$$

kde  $\boldsymbol{\sigma}$  je logaritmický tenzor napětí, který je též označován jako zobecněný Kirchhoffův tenzor napětí (*generalized Kirchhoff stress tensor*) [10, 16]. Pro lineárně elastický materiál, tj. materiál v oblasti platnosti Hookeova zákona, lze velikost deformační energie  $W$  uvažovat ve tvaru kvadratické funkce [10]

$$W = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{kl}. \quad (2.58)$$

Po dosazení (2.58) do (2.57) a provedení příslušných parciálních derivací dostáváme konstitutivní vztah udávající závislost mezi tenzorem napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a tenzorem uvažované logaritmické deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2.59)$$

kde  $\mathbf{C}$  obecně představuje tenzor elastických konstant (elastický tangent). V případě lineárního elastického materiálu jednotlivé prvky tenzoru tvoří konstanty. Obecně lze tenzor elastických konstant definovat ve tvaru

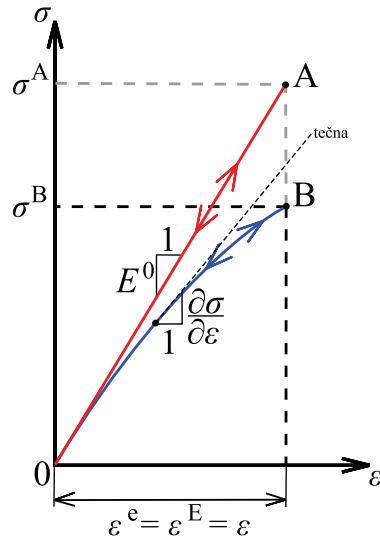
$$\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}. \quad (2.60)$$

Stav napjatosti v materiálu obecně vyjadřuje tenzor napětí, který má při uvažování prostorové napjatosti tvar [47]

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Při platnosti zákona sdružených smykových napětí ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ) je daný tenzor popsán rovnicí (2.61) symetrický a lze jej zapsat analogicky k rovnici (2.54) ve tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}]^T. \quad (2.62)$$



Obrázek 2.4: Schéma tahového diagramu lineárního a nelineárního elastického materiálu.

## 2.5 Modelování plasticity v materiálu

Přístup a princip teorie plasticity k modelování plasticity lze nejjednodušeji popsat na jednoosé úloze cyklické tahové zkoušky houževnatého materiálu – viz obrázek 2.5. Na obrázku je uvedena závislost deformace a napětí z experimentu (šedá barva) a tomu odpovídající model elasto-plastického chování materiálu. Historie zatížení prvního cyklu odpovídá na obrázku 2.5 fázím zatížení  $0 \rightarrow A \rightarrow B$ . Než napjatost v materiálu dosáhne počáteční meze kluzu  $R_0$  (fáze zatěžování  $0 \rightarrow A$ ) materiál se chová lineárně elasticky a pro velikost napětí v daném případě platí

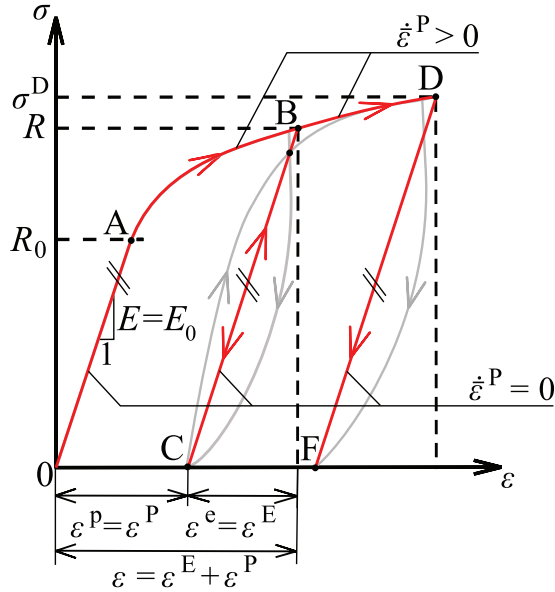
$$\sigma = E \cdot \varepsilon^E. \quad (2.63)$$

Po překročení počáteční meze kluzu  $R_0$  se materiál začíná chovat elasto-plasticky (fáze zatěžování  $A \rightarrow B$ ), čímž dochází k jeho plastickému tečení a ke vzniku plastické deformace  $\varepsilon^P$ . V dané fázi dochází vlivem plastického tečení k postupné změně meze kluzu z počáteční hodnoty  $R_0$  na aktuální hodnotu  $R$  odpovídající bodu zatížení B. Pro velikost napětí v elasto-plastickém stavu materiálu platí

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon - \varepsilon^P) = E \cdot \varepsilon^E. \quad (2.64)$$

Změna sklonu zatěžovací křivky po překročení počáteční meze kluzu  $R_0$  není v případě elasto-plastického chování způsobena degradací materiálových vlastností materiálu, nýbrž

postupnou kumulací trvalé plastické deformace, která se již nepodílí na napětovém stavu v materiálu – viz rovnice (2.64). Fáze  $B \rightarrow C$  odpovídá elastickému odlehčení materiálu s plastickou deformací  $\varepsilon^P$ .



**Obrázek 2.5:** Schéma idealizované cyklické jednoosé tahové zkoušky elasto-plastického materiálu, šedá barva značí experiment.

Materiál musí pro veškerá přípustná namáhání vždy splňovat podmínku vyjádřenou pomocí disipační funkce plastického potenciálu  $F^P$  ve tvaru [16]

$$F^P(\sigma, R) \leq 0. \quad (2.65)$$

Z rovnice (2.65) vyplývá, že v žádné fázi zatěžování nedosahuje velikost redukovaného napětí větší hodnoty, než je hodnota aktuální meze kluzu  $R$ . Ve druhém zatěžovacím cyklu se materiál v zatěžovací fázi  $C \rightarrow B$  na obrázku 2.5 chová opět lineárně elasticky. Po překročení aktuální meze kluzu  $R$  dosažené v předchozím zatěžovacím cyklu dochází v zatěžovací fázi  $B \rightarrow D$  k dalšímu plastickému tečení materiálu. Fáze odlehčení materiálu  $D \rightarrow F$  odpovídá opět elastickému chování materiálu s odpovídající hodnotou plastické deformace. Vývoj aktuální velikosti meze kluzu materiálu charakterizuje funkce zpevnění (*hardening law*), případně změkčení (*softening law*). Tyto funkce představují tzv. následné podmínky plasticity v případě dalšího zatěžování materiálu. Obecně pro funkci zpevnění, popř. změkčení, určující aktuální velikost meze kluzu platí [16]

$$R = R(\bar{\varepsilon}^P), \quad (2.66)$$

kde  $\bar{\varepsilon}^P$  je velikost ekvivalentní plastické deformace.

Konkrétní tvar rovnice (2.66) se odvíjí od uvažovaného druhu plastického tečení materiálu. V případě zpevnění lze uvažovat ideálně plastický, izotropní, kinematický, anebo izotropně-kinematický model zpevnění, popř. změkčení materiálu [16]. Pro napětový stav v oblasti elasticity se materiál chová lineárně elasticky – viz fáze zatěžování  $0 \leftrightarrow A$ ,  $C \leftrightarrow B$  a  $F \leftrightarrow D$ . Při dosažení hranice napětového stavu, tedy na aktuální mezi kluzu  $R$ , může při zatěžování docházet v materiálu buďto k jeho dalšímu plastickému tečení – viz fáze zatěžování  $A \rightarrow B$  a  $B \rightarrow D$ , anebo k jeho plastickému odlehčení – viz zatěžovací body (zatěžovací body  $B$  a  $D$  na konci plastického tečení materiálu na obrázku 2.5). Výše uvedené definuje tzv. kritérium tečení (*yield criterion*), které lze obecně zapsat ve tvaru [16]

$$F^P(\sigma, R^Y) < 0 \Rightarrow \dot{\bar{\varepsilon}}^P = 0$$

$$F^P(\sigma, R^Y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}}^P = 0 & \text{plastické odlehčení} \\ \dot{\bar{\varepsilon}}^P \neq 0 & \text{plastické tečení} \end{cases} \quad (2.67)$$

kde  $\dot{\bar{\varepsilon}}^P$  představuje tok ekvivalentní plastické deformace, který je popsán zákonem plastického tečení (*plastic flow rule*) a který popisuje velikost rozvoje plastické deformace v materiálu při jeho aktuálním zatížení. Ekvivalentní plastická deformace  $\bar{\varepsilon}^P$  je vnitřní proměnnou, která je závislá na velikosti volné Helmholtzovy energie  $\psi$ .

## 2.6 Metody modelování poškození v materiálu

Existuje celá řada přístupů, jakými lze poškození v materiálu interpretovat, od kterých se následně odvíjí i metody jeho modelování. V případě makroskopického pohledu [70] na modelovaný materiál existují tři základní metody modelování v podobě metody modelování poškození pomocí redukce efektivní plochy průřezu (*Effective Area Reduction Method*), metody modelování poškození za pomoci variace elastických materiálových modulů a metody modelování poškození vycházející ze změny porozity materiálu způsobené poškozením (*Void Volume Fraction Method*). Fenomenologické přístupy těchto tří metod položily základy pro odvození dalších metod a přístupů k modelování poškození, jakými jsou například metoda variace elastických materiálových modulů v závislosti na rychlosti šíření ultrazvukových vln, metoda variace elektrického potenciálu materiálu, nebo metoda variace plastické deformace při nízkocyklové únavě materiálu, případně metoda variace

viskoplastické deformace při materiálovém tečení. Bližší popis těchto odvozených metod uvádí práce [51] a [52].

### 2.6.1 Metoda poškození využívající redukce efektivní plochy průřezu

Jedná se o první přístup k modelování poškození kontinua, který v roce 1958 prezentoval Kachanov na úloze jednoosé tahové zkoušky [33]. Uvažujme válcovou tyčku s počáteční plochou průřezu  $dA_0$ , která vlivem působení tahového zatížení  $dF$  změní svůj kruhový průřez z  $dA_0$  na  $dA$  a v materiálu při daném zatížení  $dF$  dochází ke vzniku poškození – viz obrázek 2.6 (a) a (b). Toto poškození se projevuje kumulací trhlin a mikroductin v materiálu. Daná tyčka se při zatížení osovou silou  $dF$  nachází ve stavu poškození, které je popsáno parametrem  $D$ . Vzniklá poškození mají za následek změnu nosné plochy průřezu zatížené tyčky  $dA$  v podobě jejího zmenšení o velikost  $dA_D$ . Plocha  $dA_D$  představuje část plochy průřezu tyčky, kterou vyplňují vzniklé mikroskopické dutiny a trhliny. Jedná se tedy o plochu, která se již nepodílí na přenosu zatížení. Za efektivní plochu průřezu tyčky  $d\bar{A}$  lze pak označit velikost plochy

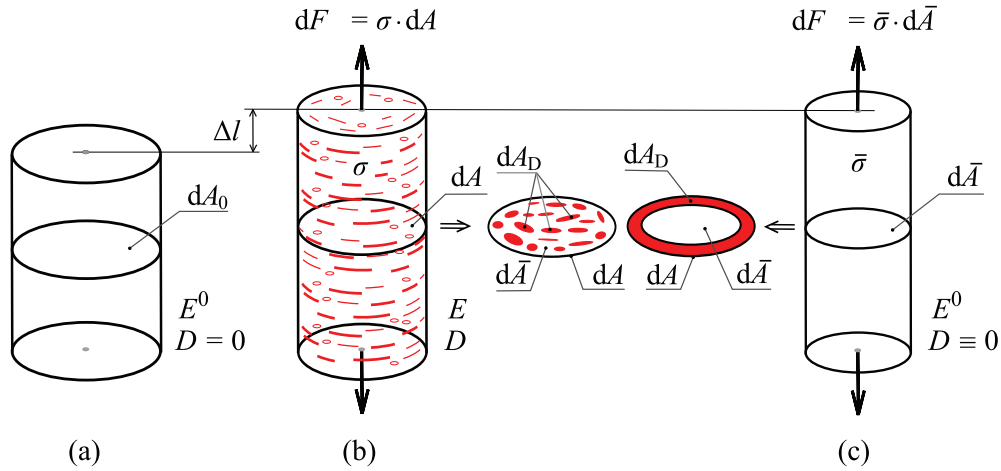
$$d\bar{A} = dA - dA_D. \quad (2.68)$$

Kachanov v roce 1958 z výše uvedených předpokladů definoval stav poškození  $D$  v materiálu jako [70]

$$D = \frac{dA - d\bar{A}}{dA} = \frac{dA_D}{dA}, \quad (2.69)$$

kde velikost poškození  $D$  náleží do intervalu  $(0, 1)$ . Pro nepoškozený stav materiálu platí  $D = 0$  a hodnota  $D = 1$  představuje celkové poškození materiálu, které vzniká v daném případě při přetržení tyčky. Parametr poškození  $D$  tedy vyjadřuje efektivní povrchovou hustotu mikroskopických trhlin a dutin.

Pro možnost využití modelování poškození v mechanice kontinua uvažujme tyčku v tzv. fiktivní nepoškozené konfiguraci – viz obrázek 2.6 (c). Jedná se o efektivní konfiguraci bez uvažování poškození vzniklého mechanickým zatížením osovou tahovou silou  $dF$ , kterou je zatížena původní poškozená konfigurace. Tyčka má při zatížení  $dF$  ve fiktivní nepoškozené konfiguraci efektivní plochu průřezu  $d\bar{A}$  a toto zatížení vyvolává v materiálu v daném případě efektivní napětí  $\bar{\sigma}$ . Pro efektivní plochu průřezu tyčky ve fiktivní nepoškozené



**Obrázek 2.6:** Modelování poškození pomocí redukce efektivní plochy průřezu: Nepoškozená počáteční konfigurace (a), poškozená konfigurace (b), fiktivní nepoškozená konfigurace (c).

konfiguraci  $d\bar{A}$  s ohledem na rovnici (2.69) bude platit

$$d\bar{A} = (1 - D) \cdot dA. \quad (2.70)$$

Pokles nosné plochy průřezu v materiálu má za následek růst napětí  $\sigma$  vyvolaného vnější zatěžovací silou  $dF$  ve skutečně poškozené konfiguraci tyčky. Pro velikost efektivního napětí působícího ve fiktivní nepoškozené konfiguraci uvažované tyčky platí při zohlednění rovnice (2.70) [50]

$$\bar{\sigma} = \frac{dF}{d\bar{A}} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (2.71)$$

Efektivní napětí  $\bar{\sigma}$  ve své definici zohledňuje vliv změny velikost napětí v materiálu, které vzniká redukcí nosné plochy průřezu tyčky v důsledku výskytu poškození materiálu. Z rovnice (2.71) je patrné, že porušení materiálu ( $D = 1$ ) je z důvodu výskytu parametru poškození  $D$  ve jmenovateli nedosažitelné [33].

## 2.6.2 Metoda poškození využívající variace elastických materiálových modulů

Tento způsob modelování poškození v mechanice kontinua vychází z předpokladu, že vznik a rozvoj mikroskopických dutin a trhlin v materiálu způsobuje redukcí jeho tuhosti [50]. Materiálové vlastnosti zatěžovaného materiálu lze tedy obecně považovat za funkce



závislé na stavu poškození materiálu  $D$ . V případě konceptu tyčky uvedené v předchozí podkapitole (2.6.1), by pro Youngův modul pružnosti  $E$  zatěžovaného materiálu platilo  $E = E(D)$ . Pro tyčku v poškozené a fiktivní nepoškozené materiálové konfiguraci (viz (b) a (c) na obrázku 2.6) bude pro velikosti jednotlivých napětí daných konfigurací  $\sigma$  a  $\bar{\sigma}$  v daném případě platit [70]

$$\begin{aligned}\sigma &= E(D) \cdot \varepsilon^E, \\ \bar{\sigma} &= E^0 \cdot \varepsilon^E,\end{aligned}\tag{2.72}$$

kde  $E^0$  a  $E(D)$  značí Youngův modul pružnosti v počáteční nepoškozené, resp. poškozené konfiguraci. Tvar a způsob závislosti materiálových parametrů, v daném případě tedy tvar funkce  $E(D)$ , se odvíjí od uvažovaných hypotéz uvedených v následující podkapitole 2.7, které dávají do souvislosti poškozenou a fiktivní nepoškozenou materiálovou konfiguraci. Rovnice (2.72) definují efektivní napětí  $\bar{\sigma}$

$$\bar{\sigma} = \frac{E^0}{E(D)} \cdot \sigma,\tag{2.73}$$

které je v daném případě vyjádřeno pomocí změny modulů pružnosti materiálu, čímž vytváří alternativu k zápisu efektivního napětí  $\bar{\sigma}$  daného rovnicí (2.71).

### 2.6.3 Metoda poškození založená na změně poréznosti materiálu (Void Volume Fraction)

Tento způsob modelování poškození byl odvozen pro případ modelování houževnatých materiálů a vychází z předpokladu, že s poškozením materiálu dochází k růstu jeho poréznosti. Poréznost materiálu je jednou z jeho vlastností a může se samozřejmě vyskytovat v materiálu ještě před zatížením už z jeho výroby. Zvětšení poréznosti materiálu v souvislosti s jeho zatěžováním je výsledkem vzniku, růstu a shlukování se mikroskopických dutin v materiálu. To umožňuje plastická deformace, která je charakteristická pro houževnaté materiály. Vznik těchto dutin je důsledkem různých vnitřních mechanismů poškození v podobě dislokací a plošných poruch na atomární úrovni, které dále vedou k porušení jednotlivých fází, anebo rozhraní mezi fázemi materiálu na mikromechanické úrovni [31]. V roce 1977 Gurson prezentoval materiálový model pro analýzu houževnatého poškození kovových materiálů, kde docházelo k plastickému poškození. Stav poškození popisuje pomocí poměrné změny objemu  $f$  (tzv. prázdného objemového podílu) (*void volume fraction*), která vyjadřuje podíl objemu dutin a mezer v materiálu vůči jeho celkovému

objemu [102]

$$f = \frac{dV - dV_0}{dV} = \frac{dV_D}{dV}, \quad (2.74)$$

kde  $dV_D$  představuje objem dutin v materiálu. Hodnota  $f$  nabývá velikosti od 0 do 1. S ohledem na velmi obtížné experimentální zjištění  $dV_D$  se spíše používá změna hustoty materiálu (za využití  $m = \rho \cdot V$ ) ve tvaru

$$f = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = 1 - \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (2.75)$$

kde  $\rho_0$  a  $\rho$  značí hustotu nepoškozeného a poškozeného materiálu.

## 2.7 Konstitutivní vztah pro poškozený materiál

Pro odvození konstitutivního vztahu popisujícího mechanické chování poškozeného materiálu je nutné odvodit transformační vztahy mezi poškozeným a nepoškozeným materiálem, respektive mezi uvažovanou poškozenou a fiktivní nepoškozenou (efektivní) materiálovou konfigurací, která byla popsána v předchozí podkapitole. Vedle efektivního napětí popsaného rovnicí (2.71) je nutné za tímto účelem využít jedné ze stanovených hypotéz mechanické rovnosti mezi poškozenou a fiktivní nepoškozenou materiálovou konfigurací. Obvykle je pro tyto účely využíváno hypotézy rovnosti hustoty elastické deformační energie [2], anebo hypotézy rovnosti samotné elastické deformace [96]. Přehled dalších hypotéz, jakými je například hypotéza rovnosti celkové deformační energie mezi jednotlivými konfiguracemi, lze nalézt v práci [70].

### 2.7.1 Hypotéza rovnosti hustoty elastické deformační energie

Na počátku zatěžování předpokládejme, že v původní konfiguraci nevzniká poškození, nevznikají tedy mikrotrhliny a mikroskopické dutiny, pak pro velikost napětí bude platit [2]

$$\sigma = E^0 \cdot \varepsilon^e, \quad (2.76)$$

kde  $E^0$  je počáteční modul pružnosti materiálu, který lze experimentálně zjistit pomocí tahové zkoušky. V případě vzniku poškození vlivem působení vnějšího zatížení lze pak alternativně vztah popsaný rovnicí (2.76) zapsat ve tvaru

$$\sigma = E \cdot (\varepsilon^e + \varepsilon^{\text{ed}}) = E \cdot \varepsilon^{\text{E}}, \quad (2.77)$$

kde  $E$  představuje degradovaný Youngův elastický modul pružnosti v poškozené konfiguraci a  $\varepsilon^E$  celkovou elastickou deformaci. Ve fiktivní nepoškozené materiálové konfiguraci pro je velikost efektivního napětí  $\bar{\sigma}$  (viz rovnice (2.71)) dána vztahem

$$\bar{\sigma} = \bar{E} \cdot \bar{\varepsilon}^e. \quad (2.78)$$

V dané rovnici  $\bar{\varepsilon}^e$  představuje efektivní elastickou deformaci fiktivní neporušené konfigurace. Dle hypotézy rovnosti hustoty elastické deformační energie mezi poškozenou a fiktivní nepoškozenou materiálovou konfigurací musí mezi hustotou elastické deformační energie v porušené konfiguraci a efektivní hustotou elastické deformační energie ve fiktivní neporušené konfiguraci platit rovnost těchto energií, tedy

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon^E = \frac{1}{2} \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon}^e. \quad (2.79)$$

Princip hypotézy rovnosti hustoty deformační energie je znázorněn na obrázku 2.7 (a), kde obsahy vybarvených ploch (červená a modrá plocha) se sobě rovnají. Dosazením rovnice (2.71) do (2.79) dostáváme vztah mezi efektivní elastickou deformací  $\bar{\varepsilon}^e$  a celkovou elastickou deformací  $\varepsilon^E$  ve tvaru

$$\bar{\varepsilon}^e = (1 - D) \cdot \varepsilon^E. \quad (2.80)$$

Vztah mezi elastickou deformací  $\varepsilon^e$  a efektivní elastickou deformací  $\bar{\varepsilon}^e$  lze získat substitucí rovnic (2.71) a (2.76) do rovnice (2.78)

$$\varepsilon^e = (1 - D) \cdot \bar{\varepsilon}^e. \quad (2.81)$$

Dostazením rovnice (2.80) do rovnice (2.81) dostáváme

$$\varepsilon^e = (1 - D)^2 \cdot \varepsilon^E. \quad (2.82)$$

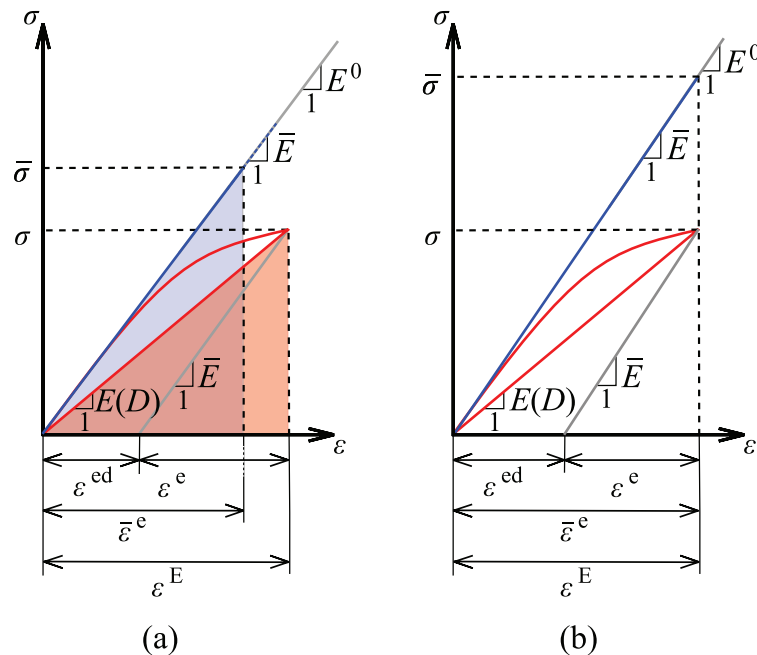
S ohledem na předpoklad rozkladu celkové elastické deformace  $\varepsilon^E$  (2.49) a jeho dosazením do rovnice (2.82) získáváme vztah pro elastickou složku deformace od poškození  $\varepsilon^{ed}$  ve tvaru

$$\varepsilon^{ed} = \left( \frac{1-(1-D)^2}{(1-D)^2} \right) \cdot \varepsilon^e = \left( \frac{1-(1-D)^2}{1-D} \right) \cdot \bar{\varepsilon}^e = (1 - (1 - D)^2) \cdot \varepsilon^E = D \cdot (2 - D) \cdot \varepsilon^E. \quad (2.83)$$

Z rovnice (2.83) je patrné, že elastická složka deformace od poškození  $\varepsilon^{ed}$  roste s velikostí kumulace poškození  $D$  v zatěžovaném materiálu. Dosazením (2.71) a (2.82) do (2.78) a s

ohledem na fakt, že v případě elastického chování materiálu v původní konfiguraci, kdy v počátku zatěžování nenastává poškození ( $D = 0$ ) – viz rovnice (2.76), jsou obě konfigurace identické, z čehož vyplývá  $E^0 = \bar{E}$ , dostáváme konstitutivní vztah mezi napětím a deformací ve tvaru

$$\sigma = E^0 \cdot (1 - D)^2 \cdot \varepsilon^E = E(D) \cdot \varepsilon^E. \quad (2.84)$$



**Obrázek 2.7:** Princip hypotézy rovnosti hustoty deformační energie (a) a princip hypotézy rovnosti elastické deformace (b). Skutečná poškozená (červená) a fiktivní nepoškozená konfigurace (modrá barva).

## 2.7.2 Hypotéza rovnosti elastické deformace

Dle hypotézy rovnosti elastické deformace mezi poškozenou a fiktivní nepoškozenou konfigurací je uvažována rovnost celkové elastické deformace  $\varepsilon^E$  a efektivní elastické deformace  $\bar{\varepsilon}^e$ . Vztah mezi oběma konfiguracemi má tvar

$$\varepsilon^E = \bar{\varepsilon}^e. \quad (2.85)$$

Princip hypotézy rovnosti elastické deformace je znázorněn na obrázku 2.7 b). Pro napětí v poškozené a fiktivní nepoškozené konfiguraci bude následovně platit

$$\sigma = E \cdot \varepsilon^E, \quad (2.86)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{E} \cdot \bar{\varepsilon}^e = \bar{E} \cdot \varepsilon^e. \quad (2.87)$$

Dosazením rovnic (2.85) a (2.87) do rovnice (2.71) dostáváme pro elastickou deformaci  $\varepsilon^e$  vztah

$$\varepsilon^e = (1 - D) \cdot \varepsilon^E = (1 - D) \cdot \bar{\varepsilon}^e. \quad (2.88)$$

Při zohlednění rozkladu celkové elastické deformace  $\varepsilon^E$ , který popisuje rovnice (2.49), a dosazením do rovnice (2.88) a následnou úpravou rovnice dostáváme pro elastickou část deformace od poškození  $\varepsilon^{\text{ed}}$  vyjádření ve tvaru

$$\varepsilon^{\text{ed}} = \left( \frac{1-(1-D)}{1-D} \right) \cdot \varepsilon^e = (1 - (1 - D)) \cdot \varepsilon^E = D \cdot \varepsilon^E. \quad (2.89)$$

Dosazením rovnice (2.71) do (2.87) dostáváme výsledný konstitutivní vztah pro poškozenou konfiguraci

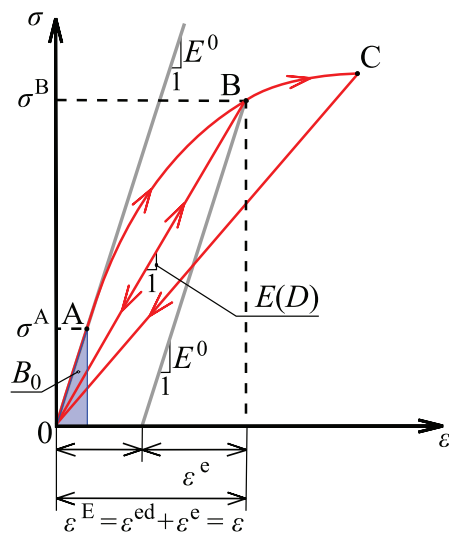
$$\sigma = E^0 \cdot (1 - D) \cdot \varepsilon^E = E(D) \cdot \varepsilon^E. \quad (2.90)$$

## 2.8 Modelování poškození

Princip modelování poškození materiálu dle přístupu mechaniky kontinua je zde ukázán na případě jednorozměrné cyklické tahové zkoušky – viz obrázek 2.8. Historie zatěžování v prvním cyklu se skládá z fáze zatížení  $0 \rightarrow A \rightarrow B$  a odlehčení  $B \rightarrow 0$ . Ve fázi ztížení  $0 \rightarrow A$  se materiál chová lineárně elasticky bez vzniku poškození. Velikost napětí v A  $\sigma^A$  se stanoví v dané fázi zatěžování podle rovnice (2.63). Po překročení počáteční deformační energie poškození  $B_0$  dochází ve fázi zatěžování  $A \rightarrow B$  k růstu poškození v materiálu, který se projevuje degradací materiálových vlastností. Míra poškození je vyjádřena parametrem poškození  $D$ . Pro jeho velikost platí  $D \in \langle 0; 1 \rangle$ , kde  $D = 0$  charakterizuje nepoškozený materiál (fáze zatěžování  $0 \rightarrow A$ ),  $D = 1$  odpovídá celkovému porušení materiálu. Hodnota parametru  $D$  nikdy neklesá, tj.  $\dot{D} \geq 0$ . Velikost napětí se v daném případě stanoví dle rovnice (2.90). Ve fázi odlehčení  $B \rightarrow 0$  se materiál chová lineárně elasticky bez další kumulace poškození s modulem pružnosti  $E(D)$  a hodnotou parametru poškození  $D$ , který byl dosažen v bodě zatížení B.

Materiál musí v každém zatěžovacím kroku splňovat podmínku vyjádřenou pomocí disipační funkce potenciálu poškození  $F^D$  ve tvaru [70]

$$F^D(Y, B, D) \leq 0, \quad (2.91)$$



**Obrázek 2.8:** Schéma cyklického tahového diagramu lineárně elastického materiálu s poškozením.

kde  $B$  a  $Y$  představují termodynamické síly. Funkce  $B = B(B_0, \beta)$  popisuje rozvoj poškození v materiálu. Vnitřní proměnná  $\beta$  reprezentuje efekt rozvoje poškození v materiálu a  $B_0$  uvádí hodnotu počáteční deformační energie poškození – viz obrázek 2.8. Proměnná funkce  $Y$  představuje rychlost uvolňování elastické deformační energie při rozvoji poškození  $D$  v materiálu [12, 70].

## Kapitola 3

# Nelineární elastický model tkaninového kompozitu

Níže uvedený elastický model tkaninového kompozitního materiálu zahrnuje nelineární chování materiálu, které je pro tyto materiály charakteristické. Nelineární chování je uvažováno v napěťové rovině 12 v případě smykového napětí a v materiálových směrech 1 a 2 v případě napětí normálových. Nelineární chování v normálových směrech 1 a 2 popisuje jednak narovnávání snopků vláken tkaninového kompozitu, ale také ztrátu jeho tuhosti. K predikci porušení je využito kritéria maximálních napětí. Nelineární chování ve smyku v napěťové rovině 12 je realizováno za využití tří-parametrické funkce s konstantní asymptotou. Navržený materiálový model je v jedné z následujících kapitol využit pro modelování kompozitního potahu sendvičové struktury. Materiálový model je navržen pro případ časově invariantního systému.

Pro nelineární elastický model byl navržen konstitutivní vztah mezi napětím a deformací ve tvaru  $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ d\tau_{23} \\ d\tau_{13} \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \cdot (1 - a_1) \cdot (1 - D_{11}) & C_{12} \cdot (1 - D_{12}) & C_{13} \cdot (1 - D_{13}) \\ C_{12} \cdot (1 - D_{12}) & C_{22} \cdot (1 - a_2) \cdot (1 - D_{22}) & C_{23} \cdot (1 - D_{23}) \\ C_{13} \cdot (1 - D_{13}) & C_{23} \cdot (1 - D_{23}) & C_{33} \cdot (1 - D_{33}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots (3.1)$$

$$\begin{array}{ccc} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & C_{44} \cdot (1 - D_{44}) & 0 & 0 \\ & 0 & C_{55} \cdot (1 - D_{55}) & 0 \\ & 0 & 0 & C_{66} \cdot (1 - D_{66}) \end{array} \cdot \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ d\gamma_{23} \\ d\gamma_{13} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix},$$

kde  $a_1$  a  $a_2$  jsou funkce popisující nelinearitu materiálu v materiálových směrech 1 a 2 a  $D_{11}$  až  $D_{66}$  jsou degradační parametry poškození materiálu. K přechodu mezi počátečním lineárním ( $a_i = 0$ ) a následně nelineárním ( $a_i \neq 0$ ) chováním (vztahem mezi napětím a deformací) v materiálových směrech 1 a 2 dochází při dosažení deformace  $\varepsilon_{11}^0$ , resp.  $\varepsilon_{22}^0$  v příslušném směru ( $\varepsilon_{ii} > \varepsilon_{ii}^0$ ). Funkce  $a_1$  a  $a_2$  jsou uvažovány v jednotlivých směrech 1 a 2 ve tvaru

$$\begin{aligned} a_i &= 0 \Leftrightarrow \varepsilon_{ii} < \varepsilon_{ii}^0, \\ a_i &= A_i \cdot \varepsilon_{ii} + B_i \Leftrightarrow \varepsilon_{ii} \geq \varepsilon_{ii}^0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Hodnoty  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{44}$  a  $C_{55}$  odpovídají prvkům matice tuhosti ortotropního materiálu [47]. Nelineární vztah mezi napětím a deformací v případě smyku v napěťové rovině 12 charakterizovaný  $C_{66}$  je modelován pomocí nelineární funkce s konstantní asymptotou [41]. Prvky  $C_{ij}$  uvedené v rovnici (3.1) mají v jednotlivých materiálových směrech v případě uvažované prostorové napjatosti tvar

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{31} \cdot \nu_{13}}{E_3 \cdot E_1 \cdot \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta}, & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta}, & C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{31} \cdot \nu_{12}}{E_3 \cdot E_1 \cdot \Delta}, & (3.2) \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}(\gamma_{12}) = \frac{G_{12}^0}{\left[1 + \left(\frac{G_{12}^0 \cdot |\gamma_{12}|}{\tau_{12}^0}\right)^{l_{12}}\right]^{(1 + \frac{1}{l_{12}})}}, \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{12} \cdot \nu_{23} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3}, \end{aligned}$$

kde  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  jsou moduly pružnosti v tahu v jednotlivých materiálových směrech,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$  jsou moduly pružnosti ve smyku v rovinách rovnoběžných s příslušnou rovinou symetrie elastických vlastností a  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  jsou příslušná Poissonova čísla. U prvku matice



tuhosti  $C_{66}$  představuje  $G_{12}^0$  počáteční modul pružnosti ve smyku,  $\tau_{12}^0$  asymptotickou hodnotu napětí a  $l_{12}$  je tvarový parametr. Význam jednotlivých parametrů vyskytujících se v  $C_{66}$  je patrný z obrázku 3.1.

Celkové napětí v případě nelineární závislosti elastického materiálového modelu mezi napětím a deformací se stanoví z rovnice (3.1) integrací po křivce. Výsledné křivkové integrály pro stanovení velikostí jednotlivých napětí  $\sigma_{ij}$  mají v daném případě tvar

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \int_0^{\sigma_{11}} d\tilde{\sigma}_{11} = \int_0^{\varepsilon_{11}^0} C_{11} \cdot (1 - D_{11}) d\tilde{\varepsilon}_{11} + \int_{\varepsilon_{11}^0}^{\varepsilon_{11}} C_{11} \cdot (1 - A_1 \cdot \tilde{\varepsilon}_{11} - B_1) \cdot \\ (1 - D_{11}) d\tilde{\varepsilon}_{11} + \int_0^{\varepsilon_{22}} C_{12} \cdot (1 - D_{12}) d\tilde{\varepsilon}_{22} + \int_0^{\varepsilon_{33}} C_{13} \cdot (1 - D_{13}) d\tilde{\varepsilon}_{33}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \int_0^{\sigma_{22}} d\tilde{\sigma}_{22} = \int_0^{\varepsilon_{11}} C_{12} \cdot (1 - D_{12}) d\tilde{\varepsilon}_{11} + \int_0^{\varepsilon_{22}^0} C_{22} \cdot (1 - D_{22}) d\tilde{\varepsilon}_{22} + \\ \int_{\varepsilon_{22}^0}^{\varepsilon_{22}} C_{22} \cdot (1 - D_{22}) \cdot (1 - A_2 \cdot \tilde{\varepsilon}_{22} - B_2) d\tilde{\varepsilon}_{22} + \int_0^{\varepsilon_{33}} C_{23} \cdot (1 - D_{23}) d\tilde{\varepsilon}_{33}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = \int_0^{\sigma_{33}} d\tilde{\sigma}_{33} = \int_0^{\varepsilon_{11}} C_{13} \cdot (1 - D_{13}) d\tilde{\varepsilon}_{11} + \int_0^{\varepsilon_{22}} C_{23} \cdot (1 - D_{23}) d\tilde{\varepsilon}_{22} + \\ \int_0^{\varepsilon_{33}} C_{33} \cdot (1 - D_{33}) d\tilde{\varepsilon}_{33}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\tau_{23} = \int_0^{\tau_{23}} d\tilde{\tau}_{23} = \int_0^{\gamma_{23}} C_{44} \cdot (1 - D_{44}) d\tilde{\gamma}_{23}, \quad (3.6)$$

$$\tau_{13} = \int_0^{\tau_{13}} d\tilde{\tau}_{13} = \int_0^{\gamma_{13}} C_{55} \cdot (1 - D_{55}) d\tilde{\gamma}_{13}, \quad (3.7)$$

$$\tau_{12} = \int_0^{\tau_{12}} d\tilde{\tau}_{12} = \int_0^{\gamma_{12}} \frac{G_{12}^0}{\left[1 + \left(\frac{G_{12}^0 \cdot |\tilde{\gamma}_{12}|}{\tau_{12}^0}\right)^{l_{12}}\right]^{\left(1 + \frac{1}{l_{12}}\right)}} \cdot (1 - D_{66}) d\tilde{\gamma}_{12}. \quad (3.8)$$

S ohledem na přechod mezi lineární a nelineární částí vztahu mezi napětím a deformací dostáváme dva tvary popisující velikost napětí  $\sigma_{11}$  a  $\sigma_{22}$  v závislosti na velikosti deformace  $\varepsilon_{11}$ , resp.  $\varepsilon_{22}$ . Při uvažování spojitosti funkce napětí popisující vztah mezi napětím a deformací musí platit rovnost prvků matice tuhosti  $C_{11}$  a  $C_{11} \cdot (1 - a_1)$ , resp.  $C_{22}$  a  $C_{22} \cdot (1 - a_2)$  pro  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0$ , resp.  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0$ , čímž pro velikost parametrů  $B_1$  a  $B_2$  bude následně platit

$$C_{ii} = C_{ii} \cdot (1 - A_i \cdot \varepsilon_{ii}^0 - B_i) \Rightarrow B_i = -A_i \cdot \varepsilon_{ii}^0, \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

Provedením integrace jednotlivých prvků napětí uvedených v rovnicích (3.3) až (3.8) a provedením následné úpravy s přihlédnutím k rovnici (3.9) dostáváme pro velikosti

jednotlivých napětí v závislosti na velikosti deformace vztahy

$$\begin{aligned}\sigma_{11} (\varepsilon_{11} < \varepsilon_{11}^0) &= C_{11} \cdot \varepsilon_{11} \cdot (1 - D_{11}) + C_{12} \cdot \varepsilon_{22} \cdot (1 - D_{12}) + C_{13} \cdot \varepsilon_{33} \cdot (1 - D_{13}), \\ \sigma_{11} (\varepsilon_{11} \geq \varepsilon_{11}^0) &= C_{11} \cdot \left[ \varepsilon_{11} + \frac{A_1}{2} \cdot \left( (\varepsilon_{11}^0)^2 - (\varepsilon_{11})^2 \right) - A_1 \cdot \varepsilon_{11}^0 \cdot (\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{11}) \right] \cdot \\ &\quad (1 - D_{11}) + C_{12} \cdot \varepsilon_{22} \cdot (1 - D_{12}) + C_{13} \cdot \varepsilon_{33} \cdot (1 - D_{13}),\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22} (\varepsilon_{22} < \varepsilon_{22}^0) &= C_{12} \cdot \varepsilon_{11} \cdot (1 - D_{12}) + C_{22} \cdot \varepsilon_{22} \cdot (1 - D_{22}) + C_{23} \cdot \varepsilon_{33} \cdot (1 - D_{23}), \\ \sigma_{22} (\varepsilon_{22} \geq \varepsilon_{22}^0) &= C_{12} \cdot \varepsilon_{11} \cdot (1 - D_{12}) + C_{22} \cdot \left[ \varepsilon_{22} + \frac{A_2}{2} \cdot \left( (\varepsilon_{22}^0)^2 - (\varepsilon_{22})^2 \right) - \right. \\ &\quad \left. A_{22} \cdot \varepsilon_{22}^0 \cdot (\varepsilon_{22}^0 - \varepsilon_{22}) \right] \cdot (1 - D_{22}) + C_{23} \cdot \varepsilon_{33} \cdot (1 - D_{23}),\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\sigma_{33} = C_{13} \cdot \varepsilon_{11} \cdot (1 - D_{13}) + C_{23} \cdot \varepsilon_{22} \cdot (1 - D_{23}) + C_{33} \cdot \varepsilon_{33} \cdot (1 - D_{33}), \quad (3.12)$$

$$\tau_{23} = C_{44} \cdot \gamma_{23} \cdot (1 - D_{44}), \quad (3.13)$$

$$\tau_{13} = C_{55} \cdot \gamma_{13} \cdot (1 - D_{55}), \quad (3.14)$$

$$\tau_{12} = \frac{G_{12}^0 \cdot \gamma_{12}}{\left[ 1 + \left( \frac{G_{12}^0 \cdot |\gamma_{12}|}{\tau_{12}^0} \right)^{l_{12}} \right]^{\left( \frac{1}{l_{12}} \right)}} \cdot (1 - D_{66}). \quad (3.15)$$

Materiálové parametry  $A_1$  a  $A_2$  v rovnicích (3.10) a (3.11) popisují vliv napřimování vláken tkaninového kompozitu a ztrátu tuhosti materiálu v odpovídajících materiálových směrech 1 a 2.

Pro predikci porušení navrženého materiálového modelu kompozitního materiálu je uvažováno kritérium maximálních napětí ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_{11} < 0 &\Rightarrow \mathcal{F}_{1T} = \frac{\sigma_{11}}{X_T}, & \sigma_{11} < 0 &\Rightarrow \mathcal{F}_{1C} = \frac{|\sigma_{11}|}{X_C}, & \mathcal{F}_{12} &= \frac{|\bar{\tau}_{12}|}{S_L}, \\ \sigma_{22} > 0 &\Rightarrow \mathcal{F}_{2T} = \frac{\sigma_{22}}{Y_T}, & \sigma_{22} < 0 &\Rightarrow \mathcal{F}_{2C} = \frac{|\sigma_{22}|}{Y_C},\end{aligned}\quad (3.16)$$

kde  $X$  a  $Y$  značí pevnosti materiálu v hlavních materiálových směrech 1 a 2, dolní indexy T a C následně rozlišují pevnosti v tahu a tlaku. Pevnost ve smyku v napěťové rovině 12

nese označení  $S_L$  a  $\bar{\tau}_{12}$  značí efektivní napětí v napěťové rovině 12, pro jehož velikost platí

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{G_{12}^0 \cdot \gamma_{12}}{\left[ 1 + \left( \frac{G_{12}^0 \cdot |\gamma_{12}|}{\tau_{12}^0} \right)^{l_{12}} \right]^{\left( \frac{1}{l_{12}} \right)}}. \quad (3.17)$$

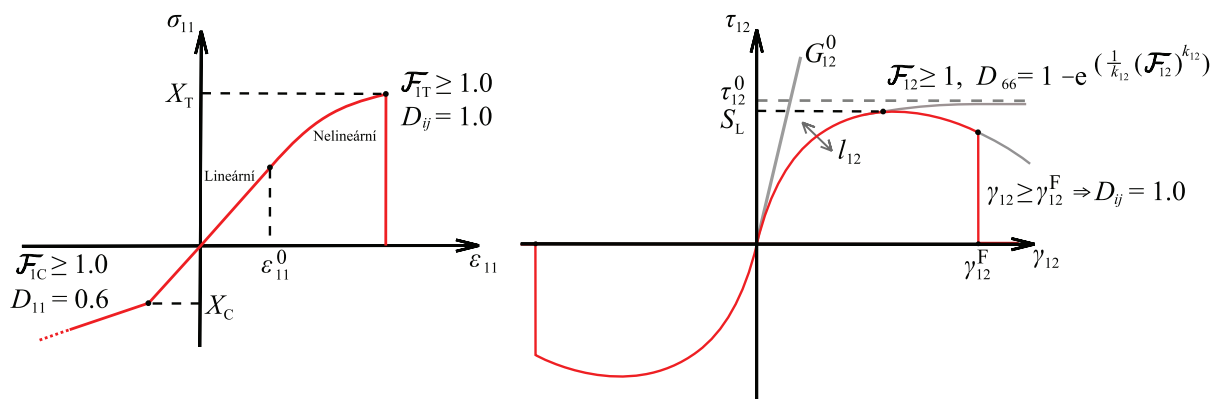
Hodnota degradačních parametrů  $D_{11}$  až  $D_{66}$  je závislá na typu porušení indikovaného za pomoci výše uvedeného kritéria porušení – viz rovnice (3.16). Při indikaci porušení materiálu v tahu v materiálových směrech 1 a 2 je s ohledem na předpokládané chování tkaninových kompozitů uvažován vznik křehkého porušení spojený s okamžitou degradací materiálových vlastností ve všech směrech modelovaného tkaninového kompozitu. Při vzniku porušení v tlaku v materiálových směrech 1 a 2 je uvažována zbytková tuhost materiálu v materiálových směrech 1 a 2 vůči jeho původní hodnotě. Degradace je v daném případě realizována jen v příslušném směru vzniku porušení. Hodnoty degradačních parametrů jsou v případě zjištění jednotlivých druhů porušení v materiálových směrech 1 a 2 uvažovány takto:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{1T} \geq 1 &\Rightarrow D_{ij} = 1, 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \mathcal{F}_{1C} \geq 1 &\Rightarrow D_{11} = 0, 6, \\ \mathcal{F}_{2T} \geq 1 &\Rightarrow D_{ij} = 1, 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ \mathcal{F}_{2C} \geq 1 &\Rightarrow D_{22} = 0, 6. \end{aligned} \quad (3.18)$$

V případě smyku v napěťové rovině 12 je při dosažení pevnosti materiálu ve smyku  $S_L$  a indikaci porušení materiálu příslušným kritériem porušení  $\mathcal{F}_{12}$  popsaném rovnicí (3.16) uvažována postupná degradace materiálových vlastností v napěťové rovině 12 za využití parametru poškození  $D_{66}$  vycházejícího z Weibullova rozdělení [98]. Při překročení mezní deformace ve smyku  $\gamma_{12}^F$ , tj. v případě, kdy je aktuální deformace ve smyku  $\gamma_{12} > \gamma_{12}^F$ , je následně aplikována okamžitá degradace materiálových vlastností ve všech směrech, která představuje porušení celistvosti materiálu. Platí tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{12} \geq 1 \quad \text{a} \quad \gamma_{12} \leq \gamma_{12}^F &\Rightarrow D_{66} = 1 - e^{\left( \frac{1}{k_{12}} \cdot (\mathcal{F}_{12})^{k_{12}} \right)}, \\ \mathcal{F}_{12} \geq 1 \quad \text{a} \quad \gamma_{12} > \gamma_{12}^F &\Rightarrow D_{ij} = 1, 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (3.19)$$

kde  $k_{12}$  je celočíselný parametr popisující rozvoj poškození (parametr Weibullova rozdělení). Princip uvažovaného chování materiálu v případě smyku v napěťové rovině 12 je spolu s lineárním a nelineárním chováním materiálu v hlavním směru 1, včetně uvažované materiálové degradace, znázorněn na obrázku 3.1.



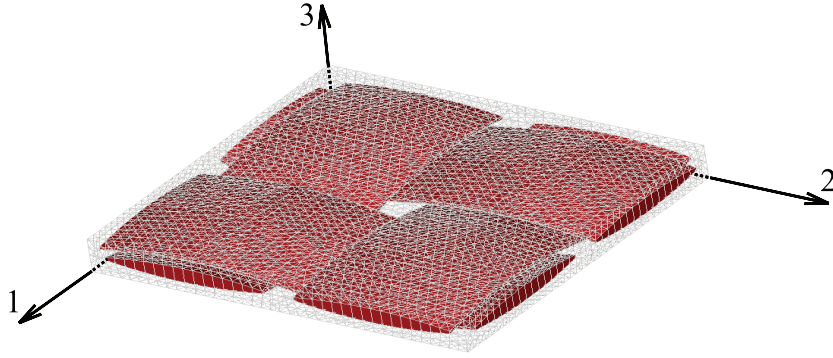
**Obrázek 3.1:** Princip lineárního a nelineárního chování materiálu spolu s materiálovou degradací v hlavním směru 1 (vlevo) a princip materiálové degradace nelineární funkce s konstantní asymptotou v případě smyku v napěťové rovině 12 (vpravo).

# Kapitola 4

## Elasto-plastický materiálový model tkaninového kompozitu s poškozením

V této kapitole je popsáno odvození hyperplastického materiálového modelu tkaninového kompozitu s poškozením navrženého v souladu s termomechanickými principy. Materiálový model uvažuje implicitní provázání plasticity a poškození materiálu. Výsledný konstitutivní vztah pro poškozený materiál vychází z hypotézy rovnosti elastické deformace. Model byl odvozen za předpokladu izotermického děje a při zanedbání možného projevu strain-rate efektu během zatěžování materiálu, jehož vliv byl rozebrán v podkapitole 1.1.

Uvažujme tkaninový kompozit v souřadnicovém systému  $O(1, 2, 3)$ , kde, stejně jako je znázorněno na obrázku 4.1, materiálový směr 1 odpovídá směru zapletení vláken tkaniny, tzv. osnovu tkaniny (*warp*) a značí podélný směr snopků vláken. Směr 2 následně udává příčný směr snopků vláken tkaniny označovaný též jako útek (*weft*). Materiálový směr 3 značí směr kolmý na směry snopků vláken v rovině 12. Plastické tečení tkaninového kompozitního materiálu je dominantní ve smyku v rovině 12, kde je také uvažováno. Poškození materiálu je uvažováno ve všech materiálových směrech, tedy ve směrech 1, 2 a 3 a stejně tak ve smyku v napěťových rovinách, které tyto směry vytvářejí.



**Obrázek 4.1:** Základní buňka tkaninového kompozitního materiálu s plátňovou vazbou v souřadnicovém systému  $O(1, 2, 3)$ , [42].

## 4.1 Helmholtzova volná energie

Helmholtzova energie je stavová veličina umožňující určit termodynamickou rovnováhu při izotermicko-izochorickém ději, tedy při ději probíhajícím za konstantní teploty a konstantního objemu. Tato energie představuje termodynamický potenciál. Pokles Helmholtzovy volné energie vyjadřuje v případě daného děje velikost vykonané práce systému v průběhu uvažovaného procesu. Obecně může být Helmholtzova energie závislá na celé řadě proměnných. V tomto konkrétním případě je u materiálu vykazujícím elasto-plastické chování se vznikem poškození v průběhu zatěžování uvažována ve tvaru

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^E, \boldsymbol{\varepsilon}^P, R, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, \mathbf{D}, \boldsymbol{\beta}), \quad (4.1)$$

kde  $\mathbf{D}$  představuje tenzor poškození,  $\boldsymbol{\beta}$  tenzor reprezentující efekt rozvoje poškození,  $R$  mez kluzu v daném materiálu,  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$  jsou tenzory elastické, resp. plastické deformace a  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$  představuje ekvivalentní plastickou deformaci. Při uvažování izotermického procesu a malém vlivu kinematického zpevnění materiálu lze volnou Helmholtzovu energii na jednotku hmotnosti zapsat ve tvaru součtu [70]

$$\psi = \psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}^E, \mathbf{D}) + \psi^P(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^P, R) + \psi^D(\boldsymbol{\beta}), \quad (4.2)$$

kde  $\psi^E$  představuje část Helmholtzovy energie vyjadřující velikost volné elastické energie,  $\psi^P$  je část energie od plastického přetvoření a  $\psi^D$  je část energie odpovídající vznikajícímu

poškození v materiálu. Tenzory  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ ,  $\mathbf{D}$  a  $\boldsymbol{\beta}$  lze zapsat ve tvaru vektorů

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= [D_{11}, D_{22}, D_{33}, D_{12}, D_{13}, D_{23}, D_{44}, D_{55}, D_{66}]^T, \\ \boldsymbol{\beta} &= [\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{44}, \beta_{55}, \beta_{66}]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^E &= [\varepsilon_{11}^E, \varepsilon_{22}^E, \varepsilon_{33}^E, \gamma_{23}^E, \gamma_{13}^E, \gamma_{12}^E]^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^P &= [0, 0, 0, 0, 0, \gamma_{12}^P]^T.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Pro daný případ lze volnou Helmholtzovu energii zapsat konkrétně ve tvaru

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\rho} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \left[ C_{11} \cdot (1 - D_{11}) \cdot (\varepsilon_{11}^E)^2 + C_{22} \cdot (1 - D_{22}) \cdot (\varepsilon_{22}^E)^2 + \right. \right. \\ &C_{33} \cdot (1 - D_{33}) \cdot (\varepsilon_3^E)^2 + 2 \cdot [C_{12} \cdot (1 - D_{12}) \cdot \varepsilon_{11}^E \cdot \varepsilon_{22}^E + C_{13} \cdot (1 - D_{13}) \cdot \\ &\varepsilon_{11}^E \cdot \varepsilon_{33}^E + C_{23} \cdot (1 - D_{23}) \cdot \varepsilon_{22}^E \cdot \varepsilon_{33}^E] + C_{44} \cdot (1 - D_{44}) \cdot (\gamma_{23}^E)^2 + \\ &\left. \left. C_{55} \cdot (1 - D_{55}) \cdot (\gamma_{13}^E)^2 + C_{66} \cdot (1 - D_{66}) \cdot (\gamma_{12}^E)^2 \right] + \int_0^{\boldsymbol{\varepsilon}^P} R(\boldsymbol{\varepsilon}) d\boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{ij} \int_0^{\beta_{ij}} \mathbf{B}(b) db \right],\end{aligned}\tag{4.4}$$

kde  $\rho$  značí hustotu materiálu a  $C_{ij}$  jsou prvky matice materiálových konstant  $\mathbf{C}$ . Prvky  $C_{ij}$  mají v jednotlivých materiálových směrech v případě uvažované prostorové napjatosti a ortotropního materiálu tvar [47]

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta}, & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{31} \cdot \nu_{13}}{E_3 \cdot E_1 \cdot \Delta}, & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta}, \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta}, & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta}, & C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{31} \cdot \nu_{12}}{E_3 \cdot E_1 \cdot \Delta},\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}, \quad C_{66} = G_{12},$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{12} \cdot \nu_{23} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3},$$

kde  $E_1, E_2, E_3$  jsou moduly pružnosti v tahu v materiálových směrech anizotropie,  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  jsou moduly pružnosti ve smyku v rovinách rovnoběžných s příslušnou rovinou symetrie elastických vlastností a  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  jsou Poissonova čísla, u kterých první index vyjadřuje směr působení normálového napětí a druhý pak směr, ve kterém vzniká příslušná deformace v příčném směru.

## 4.2 Napětí

Stav napjatosti v materiálu popisuje tenzor napětí, v daném případě se bude jednat o logaritmický tenzor napětí, jehož obecný tvar vyjadřuje rovnice (2.61). Při platnosti zákona sdružených smykových napětí lze tenzor napětí zapsat ve tvaru vektoru – viz rovnice (2.62). Mezi tenzorem napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a volnou Helmholtzovou energií  $\psi$  platí vztah [70]

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^E}. \quad (4.6)$$

Provedením příslušných parciálních derivací volné Helmholtzovy energie  $\psi$  popsané rovnicí (4.4) podle jednotlivých prvků tenzoru celkové elastické deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$  získáváme pro jednotlivé prvky tenzoru napětí  $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{11} = C_{11} \cdot (1 - D_{11}) \cdot \varepsilon_{11}^E + C_{12} \cdot (1 - D_{12}) \cdot \varepsilon_{22}^E + C_{13} \cdot (1 - D_{13}) \cdot \varepsilon_{33}^E, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{22} = C_{12} \cdot (1 - D_{12}) \cdot \varepsilon_{11}^E + C_{22} \cdot (1 - D_{22}) \cdot \varepsilon_{22}^E + C_{23} \cdot (1 - D_{23}) \cdot \varepsilon_{33}^E, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{33} = C_{13} \cdot (1 - D_{13}) \cdot \varepsilon_{11}^E + C_{23} \cdot (1 - D_{23}) \cdot \varepsilon_{22}^E + C_{33} \cdot (1 - D_{33}) \cdot \varepsilon_{33}^E, \quad (4.9)$$

$$\tau_{23} = C_{44} \cdot (1 - D_{44}) \cdot \gamma_{23}^E, \quad (4.10)$$

$$\tau_{13} = C_{55} \cdot (1 - D_{55}) \cdot \gamma_{13}^E, \quad (4.11)$$

$$\tau_{12} = C_{66} \cdot (1 - D_{66}) \cdot \gamma_{12}^E. \quad (4.12)$$

Pro tenzor materiálových konstant  $\mathbf{C}$  bude obdobně jako v případě (2.60) platit

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^E} = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^E \partial \boldsymbol{\varepsilon}^E}, \quad C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}^E} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^E \partial \varepsilon_{kl}^E}. \quad (4.13)$$

Tenzor materiálových konstant  $\mathbf{C}$  lze po provedení příslušných derivací dle (4.13) zapsat ve tvaru matice

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} \cdot (1 - D_{11}) & C_{12} \cdot (1 - D_{12}) & C_{13} \cdot (1 - D_{13}) & & & \\ C_{12} \cdot (1 - D_{12}) & C_{22} \cdot (1 - D_{22}) & C_{23} \cdot (1 - D_{23}) & & & \\ C_{13} \cdot (1 - D_{13}) & C_{23} \cdot (1 - D_{23}) & C_{33} \cdot (1 - D_{33}) & & & \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix} \quad (4.14)$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & C_{44} \cdot (1 - D_{44}) & 0 \\ 0 & C_{55} \cdot (1 - D_{55}) & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \cdot (1 - D_{66}) \end{bmatrix}.$$

Tvary jednotlivých prvků  $C_{ij}$  popisuje rovnice (4.5). Mezi tenzorem napětí  $\boldsymbol{\sigma}$  a tenzorem elastické deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ , jejichž tvary popisují rovnice (2.62) a (4.3), a tenzorem materiálových konstant  $\mathbf{C}$  (4.14) v daném případě platí

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^E.$$

### 4.3 Disipační potenciál

Disipační funkce (*dissipation potential function*) je obecně označovaná funkce popisující ztrátu energie materiálu důsledkem nevratných procesů probíhajících v nehomogenních termodynamických systémech. Při disipativním procesu dochází k transformaci energie (vnitřní, popř. potenciální) do její konečné podoby. Disipační funkci lze v případě elasto-plastického materiálu s poškozením uvažovat ve tvaru [70]

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{Y}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} F^P(\boldsymbol{\sigma}, R) \\ \mathbf{F}^D(\mathbf{Y}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}, \quad (4.16)$$

kde  $F^P$  představuje disipační funkci plastického potenciálu (*plastic dissipation potential function*),  $\mathbf{F}^D$  vektor disipačních funkcí potenciálu poškození (*damage potential dissipation function*) a  $R$  funkci zpevnění.

#### 4.3.1 Disipační funkce plastického potenciálu

Pro matematický popis elasto-plastického chování navrženého materiálového modelu je uvažován model izotropního zpevnění, u kterého vlivem zatěžování dochází k rovnoměrnému rozšiřování a expanzi plochy plasticity popisovaného materiálu [16]. Funkci zpevnění

lze obecně dle [70] definovat vztahem

$$R(\bar{\varepsilon}^P) = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}^P}, \quad (4.17)$$

kde  $\bar{\varepsilon}^P$  je ekvivalentní plastická deformace. Funkce zpevnění  $R$  je konkrétně uvažována ve tvaru

$$R = R(\bar{\varepsilon}^P) = R_0 + K_R \cdot (\bar{\varepsilon}^P)^{n_R}, \quad (4.18)$$

kde  $R_0$  je materiálový parametr značící počáteční mez kluzu materiálu a  $K_R$  a  $n_R$  jsou váhový a tvarový parametr použité mocninné funkce (*power law*), kterou je pomocí funkce zpevnění vyjádřena aktuální mez kluzu  $R$ . Disipační funkce plastického potenciálu má tvar

$$F^P = \bar{\sigma}_{\text{red}} - R. \quad (4.19)$$

Redukované efektivní napětí  $\bar{\sigma}_{\text{red}}$  se při předpokladu elasto-plastického chování materiálu ve smyku v napěťové rovině 12 stanoví

$$\bar{\sigma}_{\text{red}} = |\bar{\tau}_{12}| = |C_{66} \cdot \gamma_{12}^E|. \quad (4.20)$$

Redukované napětí  $\bar{\sigma}_{\text{red}}$  je vyjádřeno velikostí efektivního smykového napětí  $\bar{\tau}_{12}$  v napěťové rovině 12. Efektivní napětí odpovídá napjatosti neporušené konfigurace materiálu při stejném zatížení – viz podkapitola 2.6.

### 4.3.2 Disipační funkce potenciálu poškození

Mezi tenzorem termodynamické síly přidružené poškození  $\mathbf{Y}$  a volnou Helmholtzovou energií  $\psi$  platí vztah [70]

$$\mathbf{Y} = -\rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}}. \quad (4.21)$$

Provedením příslušných parciálních derivací volné Helmholtzovy energie, jejíž uvažovaný tvar popisuje rovnice (4.4), podle jednotlivých prvků tenzoru poškození  $\mathbf{D}$  popsaných rovnicí (4.3), získáváme prvky tenzoru termodynamické síly přidružené poškození  $Y_{ij}$  ve tvaru

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{22} \\ Y_{33} \\ Y_{12} \\ Y_{23} \\ Y_{13} \\ Y_{44} \\ Y_{55} \\ Y_{66} \end{bmatrix} = -\rho \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial D_{11}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{22}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{33}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{12}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{23}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{13}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{44}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{55}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial D_{66}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11}^E)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22}^E)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33}^E)^2 \\ C_{12} \cdot \varepsilon_{11}^E \cdot \varepsilon_{22}^E \\ C_{23} \cdot \varepsilon_{22}^E \cdot \varepsilon_{33}^E \\ C_{13} \cdot \varepsilon_{11}^E \cdot \varepsilon_{33}^E \\ \frac{1}{2} \cdot C_{44} \cdot (\gamma_{23}^E)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot C_{55} \cdot (\gamma_{13}^E)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot C_{66} \cdot (\gamma_{12}^E)^2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(\varepsilon^E). \quad (4.22)$$

Funkce popisující rozvoj poškození v materiálu je obecně definována ve tvaru [70]

$$\mathbf{B} = \rho \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \quad (4.23)$$

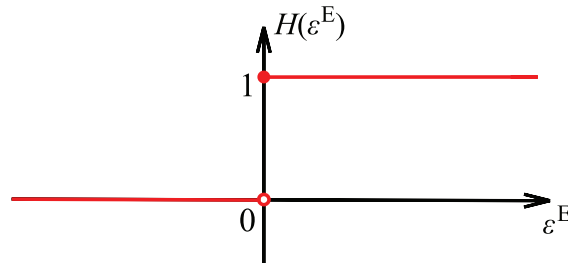
kde  $\psi$  vyjadřuje celkovou volnou Helmholtzovu energii v materiálu (4.4) a tenzor  $\boldsymbol{\beta}$  je vnitřní termodynamická proměnná vyjadřující efekt rozvoje poškození v daném materiálu. Uvažovaný tvar tenzoru  $\boldsymbol{\beta}$  uvádí rovnice (4.3). Tenzor funkce rozvoje poškození v materiálu je uvažován ve tvaru vektoru

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{12} \\ B_{23} \\ B_{13} \\ B_{44} \\ B_{55} \\ B_{66} \end{bmatrix} = \rho \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{11}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{22}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{33}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{12}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{23}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{13}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{44}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{55}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \beta_{66}} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(\boldsymbol{\beta}), \quad (4.24)$$

kde v uvedeném maticovém tvaru  $\mathbf{B}_0$  představuje vektor materiálových konstant udávajících velikost počáteční deformační energie poškození a  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\beta})$  následně funkci popisující samotný rozvoj poškození. S ohledem na odlišný rozvoj poškození v případě tlakového a tahového zatížení materiálu v jednotlivých materiálových směrech při jeho zatěžování jsou výsledné funkce rozvoje poškození uvažovány ve tvaru

$$\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{22} \\ B_{33} \\ B_{12} \\ \\ B_{23} \\ \\ B_{13} \\ \\ B_{44} \\ B_{55} \\ B_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{11C}^0 + B_{11C}(\beta_{11})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) + [B_{11T}^0 + B_{11T}(\beta_{11})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \\ [B_{22C}^0 + B_{22C}(\beta_{22})] \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) + [B_{22T}^0 + B_{22T}(\beta_{22})] \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \\ B_{33}^0 + B_{33}(\beta_{33}) \\ [B_{1T2T}^0 + B_{1T2T}(\beta_{12})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) + \dots \\ [B_{1T2C}^0 + B_{1T2C}(\beta_{12})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) + \dots \\ [B_{1C2T}^0 + B_{1C2T}(\beta_{12})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) + \dots \\ [B_{1C2C}^0 + B_{1C2C}(\beta_{12})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \\ [B_{2T3T}^0 + B_{2T3T}(\beta_{23})] \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) + \dots \\ [B_{2T3C}^0 + B_{2T3C}(\beta_{23})] \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) + \dots \\ [B_{2C3T}^0 + B_{2C3T}(\beta_{23})] \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) + \dots \\ [B_{2C3C}^0 + B_{2C3C}(\beta_{23})] \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) \\ [B_{1T3T}^0 + B_{1T3T}(\beta_{13})] \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) + \dots \\ [B_{1T3C}^0 + B_{1T3C}(\beta_{13})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) + \dots \\ [B_{1C3T}^0 + B_{1C3T}(\beta_{13})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) + \dots \\ [B_{1C3C}^0 + B_{1C3C}(\beta_{13})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) \\ B_{44}^0 + B_{66}(\beta_{44}) \\ B_{55}^0 + B_{66}(\beta_{55}) \\ B_{66}^0 + B_{66}(\beta_{66}) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Ve výše uvedené rovnici představuje  $H(\varepsilon^E)$  Heavisideovu funkci, která v závislosti na aktuálním zatížení uvádí podle velikosti příslušné deformace  $\varepsilon_{ij}^E$  v platnost příslušný rozvoj poškození. V rovnici (4.25) jsou části funkce  $B_{ij}$  popisující vznik a rozvoj poškození v tlaku jsou značeny dolním indexem C a části odpovídající tahu indexem T. Funkční předpis uvažované Heavisideovy funkce  $H(\varepsilon_{ij}^E)$  znázorňuje obrázek 4.2.



**Obrázek 4.2:** Uvažovaný funkční předpis Heavisideovy funkce  $H(\varepsilon^E)$ .

Disipační funkce potenciálu poškození  $\mathbf{F}^D$  je uvažována ve vektorovém zápisu ve tvaru

$$\mathbf{F}^D = \mathbf{Y}_{\text{red}} - (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}(\boldsymbol{\beta})) \leq \mathbf{0}, \quad (4.26)$$

kde  $\mathbf{Y}_{\text{red}}$  představuje redukovanou termodynamickou sílu přidruženou poškození, která se stanoví s využitím předpisu termodynamické síly  $\mathbf{Y}(\boldsymbol{\varepsilon}^E)$  uvedené rovnicí (4.22), a to ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{Y}_{\text{red}} = |\mathbf{Y}(\boldsymbol{\varepsilon}^E)|. \quad (4.27)$$

Jednotlivé prvky  $F_{ij}^D$  disipační funkce potenciálu poškození  $\mathbf{F}^D$  mají po dosazení vztahu popsanými rovnicí (4.24), resp. (4.25) do (4.26) tvar

$$\mathbf{F}^D = \begin{bmatrix} F_{11}^D \\ F_{22}^D \\ F_{33}^D \\ F_{12}^D \\ F_{23}^D \\ F_{13}^D \\ F_{44}^D \\ F_{55}^D \\ F_{66}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} - [B_{11C}^0 + B_{11C}(\beta_{11})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) - \\ \quad [B_{11T}^0 + B_{11T}(\beta_{11})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \\ Y_{22} - [B_{22C}^0 + B_{22C}(\beta_{22})] \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) - \\ \quad [B_{22T}^0 + B_{22T}(\beta_{22})] \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \\ Y_{33} - [B_{33C}^0 + B_{33C}(\beta_{33})] \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) - \\ \quad [B_{33T}^0 + B_{33T}(\beta_{33})] \cdot H(\varepsilon_{33}^E) \\ |Y_{12}| - [B_{1T2T}^0 + B_{1T2T}(\beta_{12})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) - \\ \quad [B_{1T2C}^0 + B_{1T2C}(\beta_{12})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) - \\ \quad [B_{1C2T}^0 + B_{1C2T}(\beta_{12})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) - \\ \quad [B_{1C2C}^0 + B_{1C2C}(\beta_{12})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \\ |Y_{23}| - [B_{2T3T}^0 + B_{2T3T}(\beta_{23})] \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - \\ \quad [B_{2T3C}^0 + B_{2T3C}(\beta_{23})] \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) - \\ \quad [B_{2C3T}^0 + B_{2C3T}(\beta_{23})] \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - \\ \quad [B_{2C3C}^0 + B_{2C3C}(\beta_{23})] \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) \\ |Y_{13}| - [B_{1T3T}^0 + B_{1T3T}(\beta_{13})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - \\ \quad [B_{1T3C}^0 + B_{1T3C}(\beta_{13})] \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) - \\ \quad [B_{1C3T}^0 + B_{1C3T}(\beta_{13})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - \\ \quad [B_{1C3C}^0 + B_{1C3C}(\beta_{13})] \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) \\ Y_{44} - [B_{44}^0 + B_{44}(\beta_{44})] \\ Y_{55} - [B_{55}^0 + B_{55}(\beta_{55})] \\ Y_{66} - [B_{66}^0 + B_{66}(\beta_{66})] \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

## 4.4 Clausiusova-Duhemova nerovnost

Clausiusova-Duhemova nerovnost je vyjádření druhého termodynamického zákona v mechanice kontinua. Tato nerovnost nachází své uplatnění při určování termodynamické přípustnosti konstitutivního vztahu materiálu a nevratnosti jednotlivých materiálových procesů. Clausiusovu-Duhemovu nerovnost lze v případě izotermického děje obecně vyjádřit pomocí disipace vztážené na jednotku objemu  $\phi$  ve tvaru [70]

$$\phi = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P - R \cdot \dot{\epsilon}^P - \mathbf{Y}^T \cdot \dot{\mathbf{D}} - \mathbf{B}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \geq 0. \quad (4.29)$$

Výše uvedený vztah lze také vyjádřit ve tvaru

$$\phi = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{J} \geq 0, \quad (4.30)$$

kde  $\mathbf{X}$  představuje vektor zobecněných sil (*generalized forces*) a  $\mathbf{J}$  vektor zobecněných toků (*generalized fluxes*), pro které platí

$$\mathbf{X} = [\boldsymbol{\sigma}, -R, \mathbf{Y}, -\mathbf{B}]^T, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{J} = [\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P, \dot{\epsilon}^P, \dot{\mathbf{D}}, \dot{\boldsymbol{\beta}}]^T. \quad (4.32)$$

Zobecněné toky jsou definovány ve tvaru [70]

$$\dot{\mathbf{D}} = \dot{\Lambda}^D \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{Y}}, \quad (4.33)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = -\dot{\Lambda}^D \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}, \quad (4.34)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P = \dot{\Lambda}^P \cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.35)$$

$$\dot{\epsilon}^P = -\dot{\Lambda}^P \cdot \frac{\partial F}{\partial R}. \quad (4.36)$$

Ve výše uvedených evolučních rovnicích představuje  $\dot{\Lambda}^D$  vektor multiplikátorů poškození a  $\dot{\Lambda}^P$  multiplikátor plasticity. S ohledem na uvažovaný zápis celkové disipační funkce  $F$  ve tvaru (4.16) a tím pádem možným využitím samotné disipační funkce potenciálu poškození  $F^D$ , která je popsána rovnicí (4.28), dostáváme pro rychlost změny tenzoru poškození  $\dot{\mathbf{D}}$  a změny tenzoru  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ , který reprezentuje efekt rozvoje poškození v materiálu,

následující vztahy

$$\dot{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \dot{D}_{11} \\ \dot{D}_{22} \\ \vdots \\ \dot{D}_{12} \\ \vdots \\ \dot{D}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Lambda}_{11}^D \cdot \frac{\partial F_{11}^D}{\partial Y_{11}} \\ \dot{\Lambda}_{22}^D \cdot \frac{\partial F_{22}^D}{\partial Y_{22}} \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{12}^D \cdot \frac{\partial F_{12}^D}{\partial Y_{12}} \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{66}^D \cdot \frac{\partial F_{66}^D}{\partial Y_{66}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Lambda}_{11}^D \\ \dot{\Lambda}_{22}^D \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{12}^D \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{66}^D \end{bmatrix} = \dot{\Lambda}^D, \quad (4.37)$$

$$\dot{\beta} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_{11} \\ \dot{\beta}_{22} \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{12} \\ \vdots \\ \dot{\beta}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\Lambda}_{11}^D \cdot \frac{\partial F_{11}^D}{\partial B_{11}} \\ -\dot{\Lambda}_{22}^D \cdot \frac{\partial F_{22}^D}{\partial B_{22}} \\ \vdots \\ -\dot{\Lambda}_{12}^D \cdot \frac{\partial F_{12}^D}{\partial B_{12}} \\ \vdots \\ -\dot{\Lambda}_{66}^D \cdot \frac{\partial F_{66}^D}{\partial B_{66}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Lambda}_{11}^D \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) + \dot{\Lambda}_{11}^D \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \\ \dot{\Lambda}_{22}^D \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) + \dot{\Lambda}_{22}^D \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{12}^D \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) + \\ \dot{\Lambda}_{12}^D \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) + \\ \dot{\Lambda}_{12}^D \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) + \\ \dot{\Lambda}_{12}^D \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{66}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Lambda}_{11}^D \\ \dot{\Lambda}_{22}^D \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{12}^D \\ \vdots \\ \dot{\Lambda}_{66}^D \end{bmatrix} = \dot{\Lambda}^D. \quad (4.38)$$

Z uvedených rovnic (4.33) a (4.34) vyplývá platnost

$$\dot{\mathbf{D}} \equiv \dot{\beta} \quad (4.39)$$

Při předpokladu, že na počátku zatěžování se materiál nachází v konfiguraci bez výskytu poškození ( $\mathbf{D}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ), a tedy nedochází ani k jeho rozvoji ( $\beta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ), platí po provedení integrace rovnice (4.39)

$$\mathbf{D} \equiv \beta. \quad (4.40)$$

Pro vyjádření rychlosti tenzoru plastické deformace  $\dot{\varepsilon}^P$  a rychlosti ekvivalentní plastické deformace  $\dot{\varepsilon}^P$  popsané rovnicemi (4.35) a (4.36) dostáváme při využití zápisu celkové disipační funkce  $\mathbf{F}$  dle rovnice (4.16) a z toho vyplývající možnosti využití pouze zápisu

pro disipační funkci plastického potenciálu  $F^P$  popsanou rovnicí (4.19) tvar

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}_{12}^P \end{bmatrix} = \dot{\Lambda}^P \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F^P}{\partial \sigma_{11}} \\ \frac{\partial F^P}{\partial \sigma_{22}} \\ \frac{\partial F^P}{\partial \sigma_{33}} \\ \frac{\partial F^P}{\partial \tau_{23}} \\ \frac{\partial F^P}{\partial \tau_{13}} \\ \frac{\partial F^P}{\partial \tau_{12}} \end{bmatrix} = \dot{\Lambda}^P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \text{sgn}(\bar{\tau}_{12}) \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^P = -\dot{\Lambda}^P \cdot \frac{\partial F^P}{\partial R} = \dot{\Lambda}^P. \quad (4.42)$$

Z rovnic (4.41) a (4.42) následně vyplývá

$$\dot{\gamma}_{12}^P = \dot{\bar{\varepsilon}}^P \cdot \text{sgn}(\bar{\tau}_{12}), \quad (4.43)$$

kde  $\bar{\tau}_{12}$  představuje hodnotu efektivního smykového napětí v napěťové rovině 12. Při vyjádření změny plastické a ekvivalentní plastické deformace  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P$  a  $\Delta \bar{\varepsilon}^P$  za pomoci iteračního cyklu a za pomoci aktuální velikosti elastické a plastické deformace  $\boldsymbol{\varepsilon}^E$  a  $\boldsymbol{\varepsilon}^P$  a elastické, resp. plastické a ekvivalentní plastické deformace z předchozího kroku výpočtu  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trial}}^E$ , resp.  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trial}}^P$  a  $\bar{\varepsilon}_{\text{trial}}^P$  dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta t \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}^P &= \Delta \bar{\varepsilon}^P = \bar{\varepsilon}^P - \bar{\varepsilon}_{\text{trial}}^P, \\ \Delta t \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P &= \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P = -(\boldsymbol{\varepsilon}^E - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trial}}^E), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^P &= \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{trial}}^P + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Při následovném dosazení (4.44) do (4.43), provedení úpravy a zohlednění (4.3) dostáváme rovnici popisující závislost velikosti změny elastické deformace  $\gamma_{12}^E$  a ekvivalentní plastické deformace  $\bar{\varepsilon}^P$  v aktuálním a předchozím kroku výpočtu ve tvaru uvažovaného materiálového modelu

$$(\gamma_{12}^E_{\text{trial}} - \gamma_{12}^E) - (\bar{\varepsilon}^P - \bar{\varepsilon}_{\text{trial}}^P) \cdot \text{sgn}(\bar{\tau}_{12}) = 0. \quad (4.45)$$

## 4.5 Numerický výpočet vzniku a šíření plasticity a poškození

Rovnice (4.45) spolu s disipační funkcí plastického potenciálu (4.19) a disipačními funkcemi potenciálu poškození (4.26) tvoří celkem soustavu 11 rovnic o 11 neznámých,



konkrétně se jedná o  $\bar{\varepsilon}^P$ ,  $\gamma_{12}^P$ ,  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{33}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{13}$ ,  $D_{23}$ ,  $D_{44}$ ,  $D_{55}$  a  $D_{66}$ . Popisu výpočtu vzniku a následnému dalšímu šíření plasticity a poškození v materiálu je nutná znalost těchto proměnných v každém iteračním a časovém kroku výpočtu. Řešení plasticity a poškození lze v daném případě v každém iteračním a časovém kroku výpočtu oddělit a řešit samostatně. K výpočtu vzniku a šíření plasticity, které popisují rovnice (4.19) a (4.45), je přístupováno tak, že v případě, kdy není při numerickém výpočtu splněna podmínka pro disipační funkci plastického potenciálu ve tvaru

$$F^P = |\bar{\tau}_{12}| - (R_0 + K_R \cdot (\bar{\varepsilon}^P)^{n_R}) \leq 0, \quad (4.46)$$

je využito jednorozměrné minimalizační metody zlatého řezu [25] a iteračním výpočtem je hledána velikost elastické deformace  $\gamma_{12}^E$  ve tvaru

$$\gamma_{12}^E = \gamma_{12\text{trial}}^E + \Delta\gamma_{12} \cdot \delta = \gamma_{12\text{trial}}^E + \Delta\gamma_{12}^E, \quad (4.47)$$

kde  $\gamma_{12\text{trial}}^E$  je celková elastická deformace v napěťové rovině 12 na konci předešlého kroku výpočtu,  $\Delta\gamma_{12}$  značí celkový přírůstek příslušné deformace v daném výpočetním kroku a  $\delta$  představuje parametr metody zlatého řezu ( $\delta \in (0, 1)$ ). Pomocí tohoto parametru je realizováno rozdělení přírůstku celkové deformace  $\Delta\gamma_{12}$  na přírůstek elastické deformace v napěťové rovině 12  $\Delta\gamma_{12}^E$  a přírůstek plastické deformace v napěťové rovině 12  $\Delta\gamma_{12}^P$ , který odpovídá doplňku  $\Delta\gamma_{12}^E$  do  $\Delta\gamma_{12}$ . Výsledná rovnice řešená metodou zlatého řezu má tvar

$$\begin{aligned} & |C_{66} \cdot (\gamma_{12\text{trial}}^E + \Delta\gamma_{12} \cdot \delta)| - \\ & \left( R_0 + K_R \cdot \left( \bar{\varepsilon}_{\text{trial}}^P + \frac{\gamma_{12\text{trial}}^E - (\gamma_{12\text{trial}}^E + \Delta\gamma_{12} \cdot \delta)}{\text{sgn}(C_{66} \cdot (\gamma_{12\text{trial}}^E + \Delta\gamma_{12} \cdot \delta))} \right)^{n_R} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Pro velikost ekvivalentní plastické deformace  $\bar{\varepsilon}^P$  z rovnice (4.45) platí

$$\bar{\varepsilon}^P = \bar{\varepsilon}_{\text{trial}}^P + \frac{\gamma_{12\text{trial}}^E - \gamma_{12}^E}{\text{sgn}(\bar{\tau}_{12})}. \quad (4.49)$$

Vznik a rozvoj poškození v materiálu popisuje soustava disipačních funkcí poškození, které obecně popisuje rovnice (4.26). Při uvažování redukované termodynamické síly přidružené poškození  $\mathbf{Y}$  ( $\varepsilon^E$ ) dle (4.22),  $\mathbf{Y}_{\text{red}}$  ve tvaru uvedeném v (4.27) funkce popisující rozvoj poškození  $\mathbf{B}$ , ve tvaru popsáném rovnicí (4.24), resp. (4.25), lze jednotlivé disipační funkce potenciálu poškození zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
F_{11}^D &= \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11}^E)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11C}^0)^2 + B_{11C} (D_{11}^{\text{trial}} + \Delta D_{11}) \right) \cdot H(-\varepsilon_{11}^E) - \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11T}^0)^2 + B_{11T} (D_{11}^{\text{trial}} + \Delta D_{11}) \right) \cdot H(\varepsilon_{11}^E) \leq 0, \\
F_{22}^D &= \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22}^E)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22C}^0)^2 + B_{22C} (D_{22}^{\text{trial}} + \Delta D_{22}) \right) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) - \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22T}^0)^2 + B_{22T} (D_{22}^{\text{trial}} + \Delta D_{22}) \right) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) \leq 0, \\
F_{33}^D &= \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33}^E)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33C}^0)^2 + B_{33C} (D_{33}^{\text{trial}} + \Delta D_{33}) \right) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) - \\
&\quad \left( \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33T}^0)^2 + B_{33T} (D_{33}^{\text{trial}} + \Delta D_{33}) \right) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) \leq 0, \\
F_{12}^D &= |C_{12} \cdot \varepsilon_{11}^E \cdot \varepsilon_{22}^E| - (C_{12} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{22T}^0 + B_{1T2T} (D_{12}^{\text{trial}} + \Delta D_{12})) \cdot \\
&\quad H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) - (C_{12} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{22C}^0 + B_{1T2C} (D_{12}^{\text{trial}} + \Delta D_{12})) \cdot \\
&\quad H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) - (C_{12} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{22T}^0 + B_{1C2T} (D_{12}^{\text{trial}} + \Delta D_{12})) \cdot \\
&\quad H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{22}^E) - (C_{12} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{22C}^0 + B_{1C2C} (D_{12}^{\text{trial}} + \Delta D_{12})) \cdot \\
&\quad H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{22}^E) \leq 0, \\
F_{23}^D &= |C_{23} \cdot \varepsilon_{22}^E \cdot \varepsilon_{33}^E| - (C_{23} \cdot \varepsilon_{22T}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0 + B_{2T3T} (D_{23}^{\text{trial}} + \Delta D_{23})) \cdot \\
&\quad H(\varepsilon_{22}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - (C_{23} \cdot \varepsilon_{22T}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0 + B_{2T3C} (D_{23}^{\text{trial}} + \Delta D_{23})) \cdot \\
&\quad H(\varepsilon_{22}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) - (C_{23} \cdot \varepsilon_{22C}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0 + B_{2C3T} (D_{23}^{\text{trial}} + \Delta D_{23})) \cdot \\
&\quad H(-\varepsilon_{22}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - (C_{23} \cdot \varepsilon_{22C}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0 + B_{2C3C} (D_{23}^{\text{trial}} + \Delta D_{23})) \cdot \\
&\quad H(-\varepsilon_{22}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) \leq 0, \\
F_{13}^D &= |C_{13} \cdot \varepsilon_{11}^E \cdot \varepsilon_{33}^E| - (C_{13} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0 + B_{1T3T} (D_{13}^{\text{trial}} + \Delta D_{13})) \cdot \\
&\quad H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - (C_{13} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0 + B_{1T3C} (D_{13}^{\text{trial}} + \Delta D_{13})) \cdot \\
&\quad H(\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) - \\
&\quad (C_{13} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0 + B_{1C3T} (D_{13}^{\text{trial}} + \Delta D_{13})) \cdot \\
&\quad H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(\varepsilon_{33}^E) - \\
&\quad (C_{13} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0 + B_{1C3C} (D_{13}^{\text{trial}} + \Delta D_{13})) \cdot \\
&\quad H(-\varepsilon_{11}^E) \cdot H(-\varepsilon_{33}^E) \leq 0, \\
F_{44}^D &= \frac{1}{2} \cdot C_{44} \cdot (\varepsilon_{23}^E)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot C_{44} \cdot (\varepsilon_{23}^0)^2 + B_{44} (D_{44}^{\text{trial}} + \Delta D_{44}) \right) \leq 0, \\
F_{55}^D &= \frac{1}{2} \cdot C_{55} \cdot (\varepsilon_{13}^E)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot C_{55} \cdot (\varepsilon_{13}^0)^2 + B_{55} (D_{55}^{\text{trial}} + \Delta D_{66}) \right) \leq 0, \\
F_{66}^D &= \frac{1}{2} \cdot C_{66} \cdot (\varepsilon_{12}^E)^2 - \left( \frac{1}{2} \cdot C_{66} \cdot (\varepsilon_{12}^0)^2 + B_{66} (D_{66}^{\text{trial}} + \Delta D_{66}) \right) \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Ve výše uvedených rovnicích je zápis tenzoru poškození  $\mathbf{D}$  uvažován v přírůstkovém tvaru

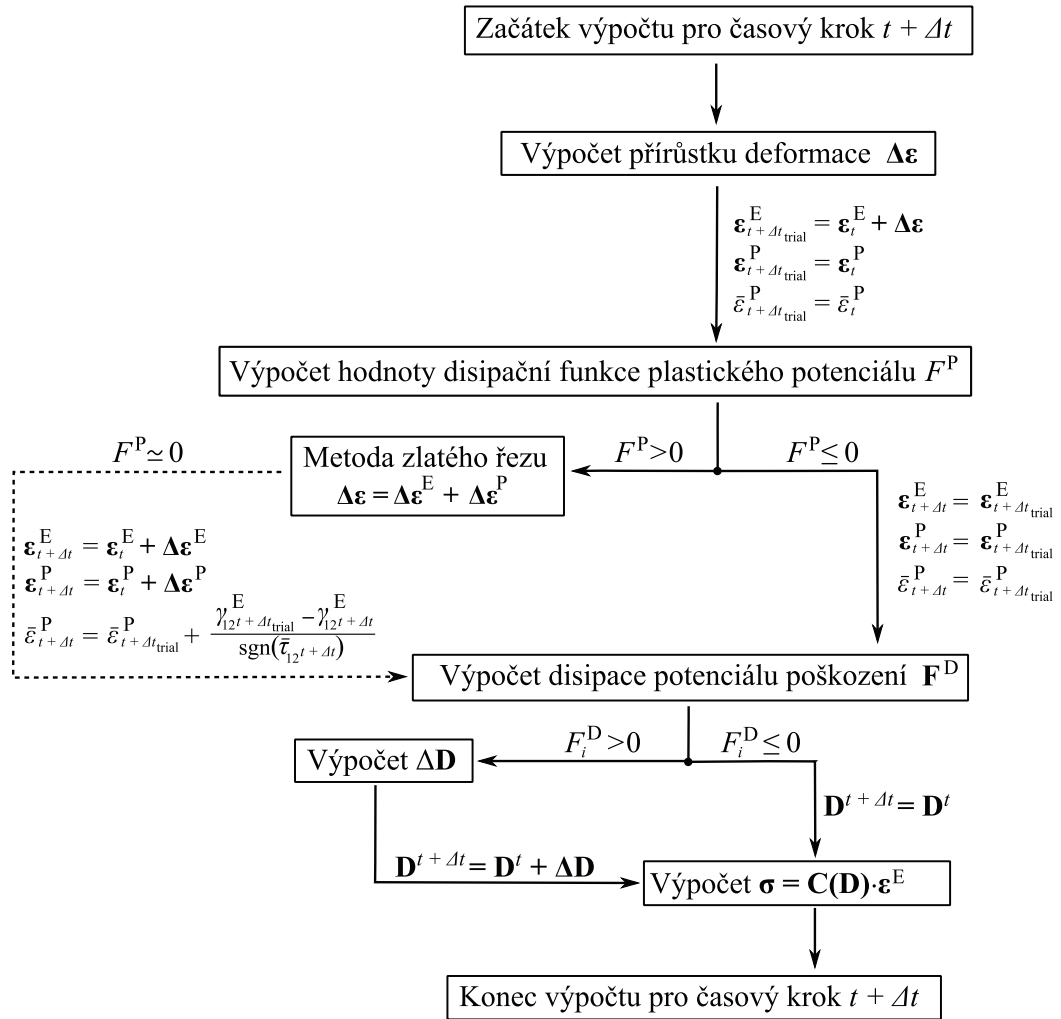
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{trial}} + \Delta \mathbf{D}, \tag{4.51}$$

kde  $\mathbf{D}_{\text{trial}}$  představuje tenzor poškození z předchozího kroku výpočtu a  $\Delta \mathbf{D}$  tenzor velikosti přírůstků poškození mezi jednotlivými kroky. Tenzory  $\mathbf{D}_{\text{trial}}$  a  $\Delta \mathbf{D}$  lze zapsat analogicky

k tenzoru  $\mathbf{D}$  (viz rovnice (4.3)) ve tvarech vektorů

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\text{trial}} &= [D_{11}^{\text{trial}}, D_{22}^{\text{trial}}, D_{33}^{\text{trial}}, D_{12}^{\text{trial}}, D_{13}^{\text{trial}}, D_{23}^{\text{trial}}, D_{44}^{\text{trial}}, D_{55}^{\text{trial}}, D_{66}^{\text{trial}}]^T, \\ \Delta \mathbf{D} &= [\Delta D_{11}, \Delta D_{22}, \Delta D_{33}, \Delta D_{12}, \Delta D_{13}, \Delta D_{23}, \Delta D_{44}, \Delta D_{55}, \Delta D_{66}]^T. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Při splnění jednotlivých nerovností, tedy pokud je splněna platnost  $F_{ij}^D \leq 0$ , které jsou popsány rovnicí (4.50), nedochází ke vzniku a k dalšímu rozvoji poškození v dané rovině  $ij$  uvažovaného materiálového modelu. Vývojový diagram pro výpočet plasticity a poškození v daném materiálovém modelu je znázorněn na obrázku 4.3.



**Obrázek 4.3:** Schéma procesu výpočtu pro daný časový krok (iteraci) v materiálovém modelu v rámci subroutine UMAT.

V případě rozlišení jednotlivých zatěžovacích stavů, tedy rozlišením tahového a tlakového zatížení materiálu v jednotlivých materiálových směrech a při neplatnosti jednotlivých nerovností uvedených v (4.50) platí obecně pro velikost přírůstků poškození  $\Delta D_{ij}$

$$\begin{aligned}
\Delta D_{11} (\varepsilon_{11}^E < 0) &= -D_{11}^{\text{trial}} + (B_{11C})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11C}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{11} (\varepsilon_{11}^E \geq 0) &= -D_{11}^{\text{trial}} + (B_{11T})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{11} \cdot (\varepsilon_{11T}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{22} (\varepsilon_{22}^E < 0) &= -D_{22}^{\text{trial}} + (B_{22C})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22C}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{22} (\varepsilon_{22}^E \geq 0) &= -D_{22}^{\text{trial}} + (B_{22T})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{22} \cdot (\varepsilon_{22T}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{33} (\varepsilon_{33}^E < 0) &= -D_{33}^{\text{trial}} + (B_{33C})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33C}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{33} (\varepsilon_{33}^E \geq 0) &= -D_{33}^{\text{trial}} + (B_{33T})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{33} \cdot (\varepsilon_{33T}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{12} (\varepsilon_{11}^E \geq 0, \varepsilon_{22}^E \geq 0) &= -D_{12}^{\text{trial}} + (B_{1T2T})^{-1} (C_{12} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{22}^E| - C_{12} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{22T}^0), \\
\Delta D_{12} (\varepsilon_{11}^E \geq 0, \varepsilon_{22}^E < 0) &= -D_{12}^{\text{trial}} + (B_{1T2C})^{-1} (C_{12} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{22}^E| - C_{12} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{22C}^0), \\
\Delta D_{12} (\varepsilon_{11}^E < 0, \varepsilon_{22}^E \geq 0) &= -D_{12}^{\text{trial}} + (B_{1C2T})^{-1} (C_{12} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{22}^E| - C_{12} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{22T}^0), \\
\Delta D_{12} (\varepsilon_{11}^E < 0, \varepsilon_{22}^E < 0) &= -D_{12}^{\text{trial}} + (B_{1C2C})^{-1} (C_{12} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{22}^E| - C_{12} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{22C}^0), \\
\Delta D_{23} (\varepsilon_{22}^E \geq 0, \varepsilon_{33}^E \geq 0) &= -D_{23}^{\text{trial}} + (B_{2T3T})^{-1} (C_{23} \cdot |\varepsilon_{22}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{23} \cdot \varepsilon_{22T}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0), \\
\Delta D_{23} (\varepsilon_{22}^E \geq 0, \varepsilon_{33}^E < 0) &= -D_{23}^{\text{trial}} + (B_{2T3C})^{-1} (C_{23} \cdot |\varepsilon_{22}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{23} \cdot \varepsilon_{22T}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0), \\
\Delta D_{23} (\varepsilon_{22}^E < 0, \varepsilon_{33}^E \geq 0) &= -D_{23}^{\text{trial}} + (B_{2C3T})^{-1} (C_{23} \cdot |\varepsilon_{22}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{23} \cdot \varepsilon_{22C}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0), \\
\Delta D_{23} (\varepsilon_{22}^E < 0, \varepsilon_{33}^E < 0) &= -D_{23}^{\text{trial}} + (B_{2C3C})^{-1} (C_{23} \cdot |\varepsilon_{22}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{23} \cdot \varepsilon_{22C}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0), \\
\Delta D_{13} (\varepsilon_{11}^E \geq 0, \varepsilon_{33}^E \geq 0) &= -D_{13}^{\text{trial}} + (B_{1T3T})^{-1} (C_{13} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{13} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0), \\
\Delta D_{13} (\varepsilon_{11}^E \geq 0, \varepsilon_{33}^E < 0) &= -D_{13}^{\text{trial}} + (B_{1T3C})^{-1} (C_{13} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{13} \cdot \varepsilon_{11T}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0), \\
\Delta D_{13} (\varepsilon_{11}^E < 0, \varepsilon_{33}^E \geq 0) &= -D_{13}^{\text{trial}} + (B_{1C3T})^{-1} (C_{13} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{13} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{33T}^0), \\
\Delta D_{13} (\varepsilon_{11}^E < 0, \varepsilon_{33}^E < 0) &= -D_{13}^{\text{trial}} + (B_{1C3C})^{-1} (C_{13} \cdot |\varepsilon_{11}^E| \cdot |\varepsilon_{33}^E| - C_{13} \cdot \varepsilon_{11C}^0 \cdot \varepsilon_{33C}^0), \\
\Delta D_{44} &= -D_{44}^{\text{trial}} + (B_{44})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{44} \cdot (\gamma_{12}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{44} \cdot (\gamma_{12}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{55} &= -D_{55}^{\text{trial}} + (B_{55})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{55} \cdot (\gamma_{12}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{55} \cdot (\gamma_{12}^0)^2 \right), \\
\Delta D_{66} &= -D_{66}^{\text{trial}} + (B_{66})^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot C_{66} \cdot (\gamma_{12}^E)^2 - \frac{1}{2} \cdot C_{66} \cdot (\gamma_{12}^0)^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Za předpokladů uvedených v úvodu kapitoly v podobě uvažování izotermického děje spolu se zanedbáním možného projevu strain-rate efektu během zatěžování materiálu byly jednotlivé funkce  $(B_{ij})^{-1}$  navrženy v závislosti na způsobu okamžitého zatížení následující předpisy:

$$\begin{aligned} \Delta D_{11} (\varepsilon_{11}^E \geq 0) = & -D_{11}^{\text{trial}} + D_{11T}^U \cdot \left[ K_{11T}^B \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{11}^E)^2 - (\varepsilon_{11T}^0)^2}{(\varepsilon_{11T}^F)^2} \right)^{n_{11T}} + \right. \\ & \left. (1 - K_{11C}^B) \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{11}^E)^2 - (\varepsilon_{11T}^0)^2}{(\varepsilon_{11T}^F)^2} \right)^{m_{11T}} \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{11} (\varepsilon_{11}^E < 0) = & -D_{11}^{\text{trial}} + D_{11C}^U \cdot \left[ K_{11T}^B \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{11}^E)^2 - (\varepsilon_{11C}^0)^2}{(\varepsilon_{11C}^F)^2} \right)^{n_{11T}} + \right. \\ & \left. (1 - K_{11C}^B) \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{11}^E)^2 - (\varepsilon_{11C}^0)^2}{(\varepsilon_{11C}^F)^2} \right)^{m_{11C}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{22} (\varepsilon_{22}^E \geq 0) = & -D_{22}^{\text{trial}} + D_{22T}^U \cdot \left[ K_{22T}^B \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{22}^E)^2 - (\varepsilon_{22T}^0)^2}{(\varepsilon_{22T}^F)^2} \right)^{n_{22T}} + \right. \\ & \left. (1 - K_{22T}^B) \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{22}^E)^2 - (\varepsilon_{22T}^0)^2}{(\varepsilon_{22T}^F)^2} \right)^{m_{22T}} \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{22} (\varepsilon_{22}^E < 0) = & -D_{22}^{\text{trial}} + D_{22C}^U \cdot \left[ K_{22C}^B \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{22}^E)^2 - (\varepsilon_{22C}^0)^2}{(\varepsilon_{22C}^F)^2} \right)^{n_{22C}} + \right. \\ & \left. (1 - K_{22C}^B) \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{22}^E)^2 - (\varepsilon_{22C}^0)^2}{(\varepsilon_{22C}^F)^2} \right)^{m_{22C}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{33} (\varepsilon_{33}^E \geq 0) = & -D_{33}^{\text{trial}} + D_{33T}^U \cdot \left[ K_{33T}^B \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{33}^E)^2 - (\varepsilon_{33T}^0)^2}{(\varepsilon_{33T}^F)^2} \right)^{n_{33T}} + \right. \\ & \left. (1 - K_{33T}^B) \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{33}^E)^2 - (\varepsilon_{33T}^0)^2}{(\varepsilon_{33T}^F)^2} \right)^{m_{33T}} \right], \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{33} (\varepsilon_{33}^E < 0) = & -D_{33}^{\text{trial}} + D_{33C}^U \cdot \left[ K_{33C}^B \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{33}^E)^2 - (\varepsilon_{33C}^0)^2}{(\varepsilon_{33C}^F)^2} \right)^{n_{33C}} + \right. \\ & \left. (1 - K_{33C}^B) \cdot \left( \frac{(\varepsilon_{33}^E)^2 - (\varepsilon_{33C}^0)^2}{(\varepsilon_{33C}^F)^2} \right)^{m_{33C}} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta D_{23} = & D_{23}^U \cdot H \left[ H (\varepsilon_{22}^E - \varepsilon_{22T}^F) \cdot H (\varepsilon_{22}^E) + H (\varepsilon_{22C}^F - \varepsilon_{22}^E) \cdot H (-\varepsilon_{22}^E) + \right. \\ & \left. H (\varepsilon_{33}^E - \varepsilon_{33T}^F) \cdot H (\varepsilon_{33}^E) + H (\varepsilon_{33C}^F - \varepsilon_{33}^E) \cdot H (-\varepsilon_{33}^E) \right], \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\Delta D_{13} = D_{13}^U \cdot H \left[ H \left( \varepsilon_{11}^E - \varepsilon_{11T}^F \right) \cdot H \left( \varepsilon_{11}^E \right) + H \left( \varepsilon_{11C}^F - \varepsilon_{11}^E \right) \cdot H \left( -\varepsilon_{11}^E \right) + H \left( \varepsilon_{33}^E - \varepsilon_{33T}^F \right) \cdot H \left( \varepsilon_{33}^E \right) + H \left( \varepsilon_{33C}^F - \varepsilon_{33}^E \right) \cdot H \left( -\varepsilon_{33}^E \right) \right], \quad (4.58)$$

$$\Delta D_{12} = D_{12}^U \cdot H \left[ H \left( \varepsilon_{11}^E - \varepsilon_{11T}^F \right) \cdot H \left( \varepsilon_{11}^E \right) + H \left( \varepsilon_{11C}^F - \varepsilon_{11}^E \right) \cdot H \left( -\varepsilon_{11}^E \right) + H \left( \varepsilon_{22}^E - \varepsilon_{22T}^F \right) \cdot H \left( \varepsilon_{22}^E \right) + H \left( \varepsilon_{22C}^F - \varepsilon_{22}^E \right) \cdot H \left( -\varepsilon_{22}^E \right) \right], \quad (4.59)$$

$$\Delta D_{44} = -D_{44}^{\text{trial}} + D_{44}^U \cdot \left[ K_{44}^B \cdot \left( \frac{(\gamma_{23}^E)^2 - (\gamma_{23}^0)^2}{(\gamma_{23}^F)^2} \right)^{n_{23}} + (1 - K_{44}^B) \cdot \left( \frac{(\gamma_{23}^E)^2 - (\gamma_{23}^0)^2}{(\gamma_{23}^F)^2} \right)^{m_{23}} \right], \quad (4.60)$$

$$\Delta D_{55} = -D_{55}^{\text{trial}} + D_{55}^U \cdot \left[ K_{55}^B \cdot \left( \frac{(\gamma_{13}^E)^2 - (\gamma_{13}^0)^2}{(\gamma_{13}^F)^2} \right)^{n_{13}} + (1 - K_{55}^B) \cdot \left( \frac{(\gamma_{13}^E)^2 - (\gamma_{13}^0)^2}{(\gamma_{13}^F)^2} \right)^{m_{13}} \right], \quad (4.61)$$

$$\Delta D_{66} = -D_{66}^{\text{trial}} + D_{66}^U \cdot \left[ K_{66}^B \cdot \left( \frac{(\gamma_{12}^E)^2 - (\gamma_{12}^0)^2}{(\gamma_{12}^F)^2} \right)^{n_{12}} + (1 - K_{66}^B) \cdot \left( \frac{(\gamma_{12}^E)^2 - (\gamma_{12}^0)^2}{(\gamma_{12}^F)^2} \right)^{m_{12}} \right]. \quad (4.62)$$

Pro mocniny  $n_{ij}$  a  $m_{ij}$  vyskytující se v předešlých rovnicích platí

$$n_{ijC/T} = \left( \frac{\varepsilon_{ij}^F}{\varepsilon_{ijC/T}^R} \right)^{a_{ijC/T}}, \quad m_{ijC/T} = \left( \frac{\varepsilon_{ij}^R}{\varepsilon_{ijC/T}^F} \right)^{b_{ijC/T}}. \quad (4.63)$$

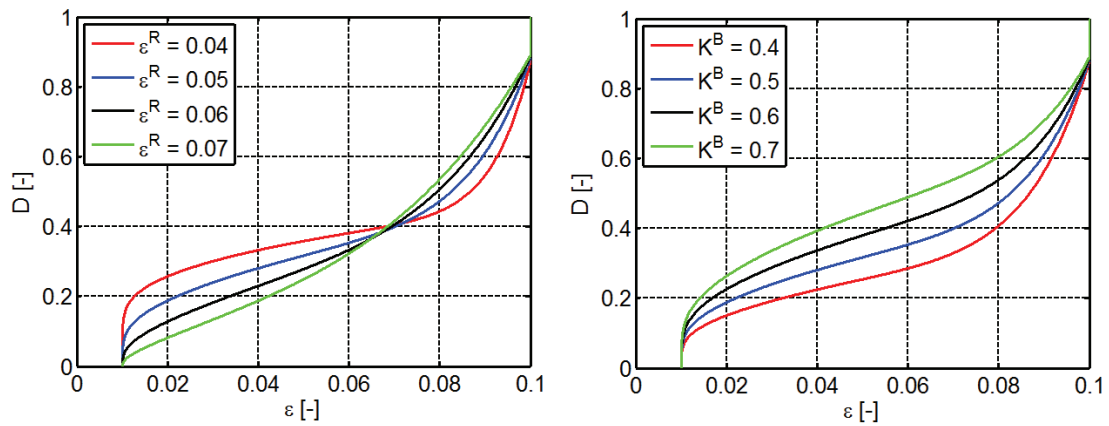
V rovnicích (4.54) až (4.62) určují jednotlivé  $\varepsilon_{ij}^0$  počáteční hodnotu velikosti elastické deformace, při jejichž překročení dochází v daném materiálovém směru, případně v materiálové rovině, k inicializaci poškození. Tento parametr  $\varepsilon_{ij}^0$  je nutné dle uvažovaného poškození dále rozlišovat pro případ tahového ( $\varepsilon_{ijT}^0$ ) a tlakového ( $\varepsilon_{ijC}^0$ ) zatížení materiálu, pokud se nejedná o prvky deformace při poškození ve smyku. Parametry  $\varepsilon_{ijT}^R$  a  $\varepsilon_{ijC}^R$  popisují polohu inflexního bodu v příslušných funkcích poškození. Parametry  $\varepsilon_{ijT}^F$  a  $\varepsilon_{ijC}^F$  jsou mezní hodnoty elastické deformace v tahu a tlaku, při kterých dochází k celkovému poškození struktury materiálu. Při těchto hodnotách nabývá funkce poškození hodnoty  $D_{ij}(\varepsilon_{ij}^F) = D_{ij}^U$ . Velikost  $D_{ij}^U$  je v případě materiálových směrů 1, 2 a 3 rozlišována pro případ vzniku poškození v tahu  $D_{ijT}^U$  a tlaku  $D_{ijC}^U$  – viz rovnice (4.54), (4.55) a (4.56). Hodnoty  $D_{ij}^U$  odpovídají velikosti vzniklého poškození v materiálu při dosažení příslušné

mezní deformace  $\varepsilon_{ij}^F$ . Materiálové parametry popisující poškození v tahu a tlaku jsou v příslušných rovnicích označeny  $K_{ijT}^B$  a  $K_{ijC}^B$ .

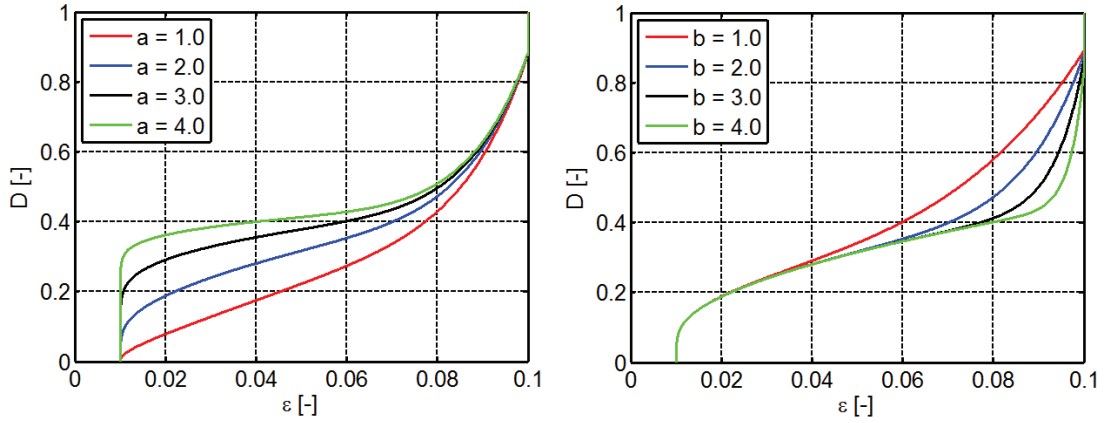
V následujícím odstavci je na jednorozměrném případě ukázán vliv jednotlivých parametrů na změně tvaru uvažované funkce  $D$  udávající velikost poškození v materiálu. Při zohlednění zápisu rovnice (4.51) lze funkci  $D$  uvažovat v zobecněném tvaru

$$D = D^U \cdot \left[ K^B \cdot \left( \frac{(\varepsilon^E)^2 - (\varepsilon^0)^2}{(\varepsilon^F)^2} \right)^{\left( \frac{\varepsilon^F}{\varepsilon^R} \right)^a} + (1 - K^B) \cdot \left( \frac{(\varepsilon^E)^2 - (\varepsilon^0)^2}{(\varepsilon^F)^2} \right)^{\left( \frac{\varepsilon^R}{\varepsilon^F} \right)^b} \right]. \quad (4.64)$$

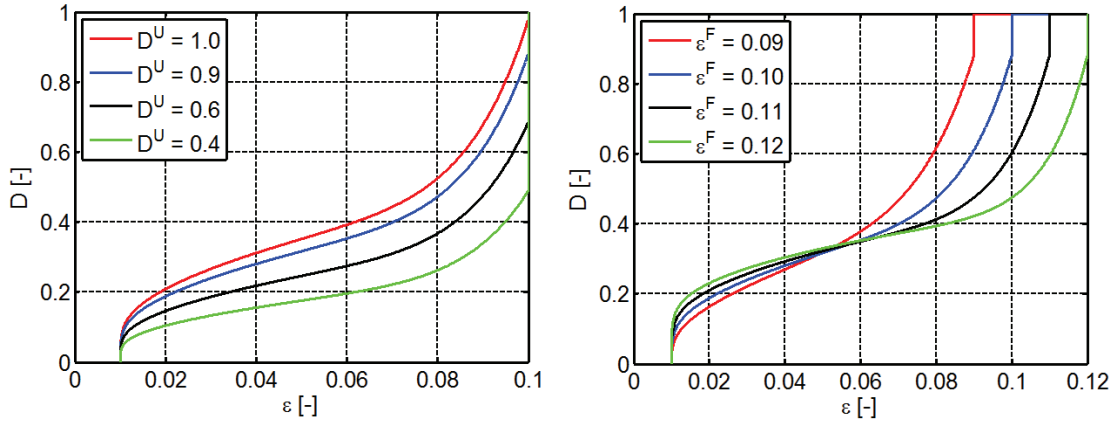
Vliv změny parametrů vyskytujících se v zobecněné funkci poškození  $D$  je znázorněn na obrázcích 4.4 až 4.6, kde je vždy ukázán vliv změny jednoho z materiálových parametrů na změně tvaru funkce poškození popsané rovnicí (4.64). Konkrétně se jedná o parametry  $\varepsilon^R$ ,  $K^B$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $D^U$  a  $\varepsilon^F$ . Výchozí hodnoty materiálových parametrů použité při vykreslení funkcí jsou  $\varepsilon^0 = 0,01$ ,  $\varepsilon^R = 0,05$ ,  $\varepsilon^F = 0,1$ ,  $D^U = 0,9$ ,  $K^B = 0,5$ ,  $a = 2$ ,  $b = 2$  a  $D^{\max} = 1$  (viz 4.65).



**Obrázek 4.4:** Vliv velikosti parametru  $\varepsilon^R$  (vlevo) a  $K^B$  (vpravo) na tvar funkce poškození.



Obrázek 4.5: Vliv velikosti parametru  $a$  (vlevo) a  $b$  (vpravo) na tvar funkce poškození.

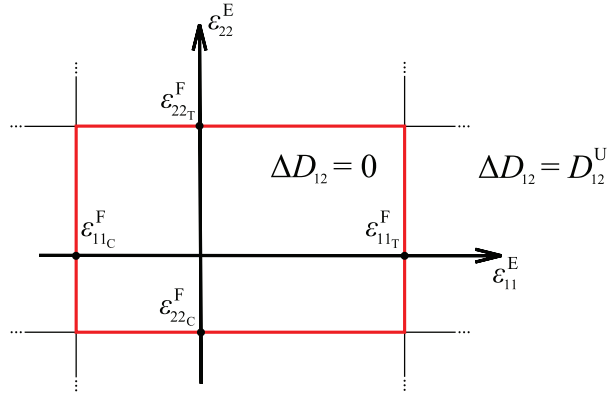


Obrázek 4.6: Vliv velikosti parametru  $D^U$  (vlevo) a  $\varepsilon^F$  (vpravo) na tvar funkce poškození.

Přírůstky poškození  $\Delta D_{23}$ ,  $\Delta D_{13}$  a  $\Delta D_{12}$ , které popisují rovnice (4.57), (4.58) a (4.59), jsou skokové funkce, které degradují nediagonální prvky matice tuhosti  $\mathbf{C}$  (viz rovnice (4.14)). Tyto rovnice jsou vyjádřeny za opětovného využití Heavisideovy funkce  $H$ . Obalová křivka vyjadřující skokový přírůstek vektoru poškození z hodnoty  $\Delta D_{12}$ , kterou vyjadřuje rovnice (4.59), je znázorněna na obrázku 4.7, kde pokud příslušné elastické deformace  $\varepsilon_{11}^E$  a  $\varepsilon_{22}^E$  nedosáhnou mezní hodnoty elastické deformace odpovídající poškození struktury v tahu a nebo v tlaku  $\varepsilon_{11T}^F$ ,  $\varepsilon_{11C}^F$ , resp.  $\varepsilon_{22T}^F$ ,  $\varepsilon_{22C}^F$ , je přírůstek poškození  $\Delta D_{12} = 0$ . V případě překročení kritické hodnoty deformace dochází ke skokovému přírůstku poškození  $\Delta D_{12}$  z hodnoty 0 na mezní hodnotu  $D_{12}^{\max} \in (0, 1)$ .

Mezní parametr poškození  $D_{ij}^U$  představuje hodnotu parametru poškození, při kterém





**Obrázek 4.7:** Obalová křivka přírůstku vektoru poškození  $\Delta D_{12}$ .

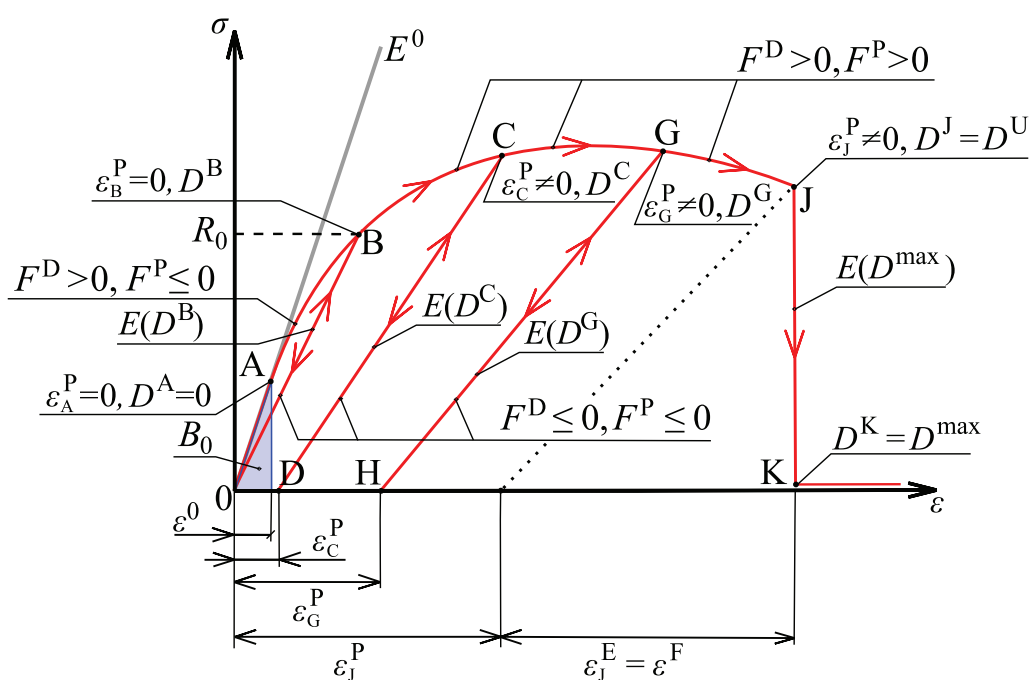
dochází vlivem porušení materiálu ke ztrátě tuhosti materiálu v daném směru a k jeho neschopnosti dále přenášet v tomto směru zatížení. Při dosažení  $D_{ij} \geq D_{ij}^U$  je nutné dále uvažovat pro konečnou degradaci příslušného prvku matice tuhosti parametru poškození  $D_{ij}^{\max}$  podmínku

$$D_{ij} \geq D_{ij}^U \Rightarrow D_{ij} = D_{ij}^{\max}. \quad (4.65)$$

Daná podmínka je uvažována i v případě vykreslení vlivu jednotlivých parametrů na velikosti funkce poškození  $D$  na obrázcích 4.4 až 4.6. Teoreticky platí  $D_{ij}^{\max} = 1$ , nicméně s ohledem na numerickou stabilitu výpočtů je v jistých případech nutno volit hodnotu menší než 1, např.  $D_{ij}^{\max} = 0.99$  [32].

Princip celého materiálového modelu kombinujícího elasto-plastické chování materiálu s poškozením je znázorněn pro případ jednoosé tahové cyklické zkoušky na obrázku 4.8. Historie zatěžování v prvním cyklu na obrázku 4.8 odpovídá fázi zatížení  $0 \rightarrow A \rightarrow B$ , kdy po překročení počáteční deformační energie poškození  $B_0$  zastoupené bodem zatížení A dochází k postupnému růstu poškození v materiálu z nulové hodnoty až na hodnotu  $D^B$  dosažené v bodě zatížení B. V případě odlehčení materiálu v prvním cyklu, kterému odpovídá fáze  $B \rightarrow 0$ , se materiál chová lineárně elasticky a s degradovaným modulem pružnosti  $E(D^A)$  se vrací do počátečního bodu 0. Druhý zatěžovací cyklus lze opět rozdělit na fázi zatížení  $0 \rightarrow B \rightarrow C$ , kdy až do dosažení bodu zatížení B se materiál chová opět lineárně elasticky s degradovaným modulem pružnosti  $E(D^A)$ . V další fázi zatížení  $B \rightarrow C$  dochází v bodě zatížení B k dosažení počáteční meze kluzu  $R_0$ , a tak vedle dalšího růstu poškození v materiálu dochází i k jeho plastickému tečení. V bodu zatížení C na konci fáze zatížení materiálu v prvním zatěžovacím cyklu je dosaženo velikosti plastické

deformace  $\varepsilon_C^P$  a poškození  $D^C$ . Pro velikost daného poškození materiálu platí  $D^B > D^A$ . Odlehčení materiálu ve druhém zatěžovacím cyklu odpovídá fázi  $C \rightarrow D$ , kdy se materiál chová opět lineárně elasticky s degradovaným modulem pružnosti  $E(D^C)$ . Bod zatížení D odpovídá plnému odlehčení bez vzniku napětí v materiálu s plastickou deformací  $\varepsilon_C^P$ . Poškození a plastické tečení v materiálu vzniká ve třetím zatěžovacím cyklu obdobným způsobem, jako ve druhém. Při dosažení zatěžovacího bodu J s kumulovanou velikostí plastické deformace  $\varepsilon_J^P$  a poškození  $D^J$ , které odpovídá hodnotě mezního poškození  $D^U$  je realizována okamžitá degradace materiálových vlastností, která se projeví ve fázi  $J \rightarrow K$  skokovou změnou velikosti napětí na nulovou hodnotu v bodě K odpovídající poškození  $D^{\max}$ .



**Obrázek 4.8:** Elasto-plastický materiálový model s poškozením v případě jednoosého cyklického zatížení.

# Kapitola 5

## Experimentální zařízení pro nízkorychlostní rázy

V této kapitole je popsáno experimentální zařízení, které bylo použito v následujících dvou kapitolách (kapitola 6 a kapitola 7) při dynamickém zatěžování testovaných vzorků v podobě příčného nízkorychlostního rázu. Vedle popisu konstrukce samotného padostroje jsou zde popsána i další zařízení, která byla během testování využívána pro zjišťování odezvy testovaných vzorků.

Předchozí rázové testy autora práce byly realizovány pomocí ocelových kuliček, pro jejichž vedení bylo využito ocelové trubky – viz [A2]. Experimentální sestavy z předchozích experimentů jsou znázorněny na obrázku 5.1. Od tohoto prvotního přístupu bylo upuštěno z důvodu neznalosti chování razníku v podobě ocelové kuličky, případně ocelového válečku, skrz trubku, kde docházelo ke značnému tření a vibracím. V daném případě šlo kvantifikovat dopadovou rychlost razníku na cílové těleso pouze omezeně. Při použití kratšího vedení, než které by odpovídalo výšce dopadu, vznikal značný rozptyl místa dopadu razníku na cílové těleso. Navíc možnost použití samotného razníku bez jakéhokoliv jeho vedení při dopadu značně omezuje možnost použití dalších přídavných zařízení v podobě bezkontaktních laserových snímačů průhybu využívaných na měření odezvy tělesa z důvodu možnosti jejich poškození odraženým razníkem. V daném případě navíc nebylo možné měřit velikost síly předané cílovému tělesu razníkem. Možnost použití hmotnějšího razníku byla omezena průměrem trubky, kterou muselo těleso procházet, což také omezovalo možnost poškození složitějších kompozitních struktur.

Z uvedených důvodů byl z hliníkových profilů stavebnicového systému Item zkonstruo-

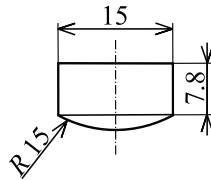


**Obrázek 5.1:** Dřívější realizace rázových zkoušek autora práce.

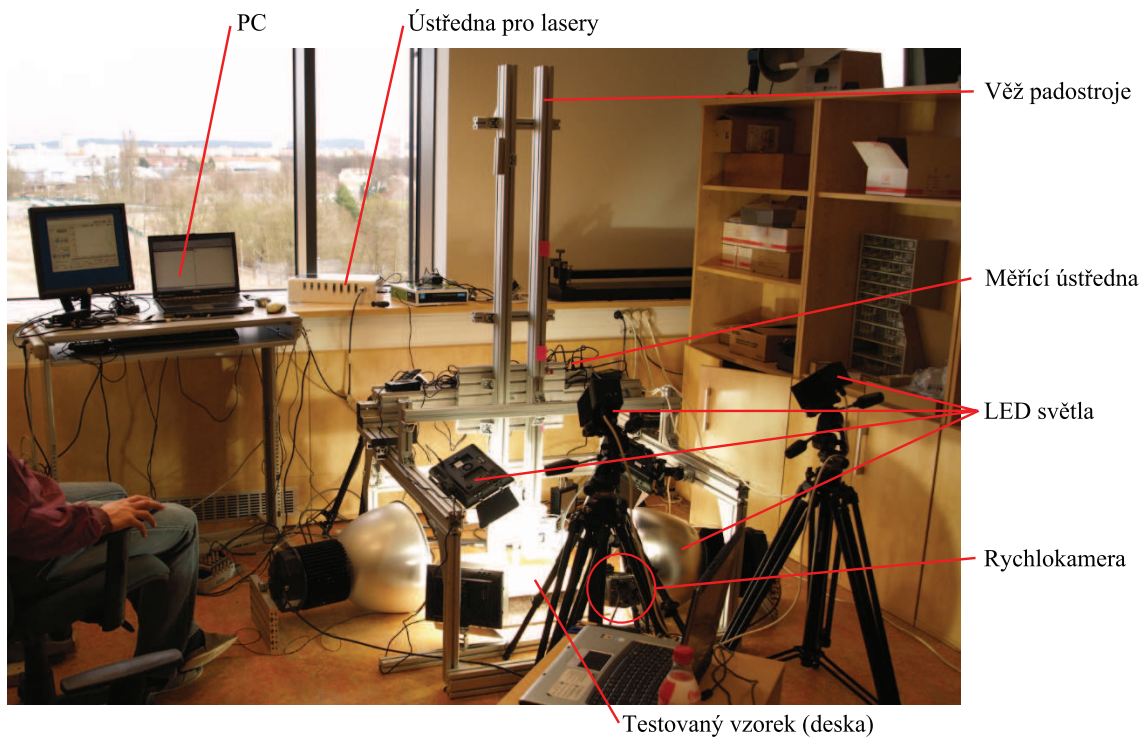
ván prototyp zkušebního zařízení na rázové děje. Jeho technické řešení je opatřeno užitným vzorem [A1]. Impaktor se v závislosti na své velikosti a hmotnosti pohybuje v systému jednoho, popř. dvou vertikálních lineárních vedení, které dohromady tvoří věž padostroje. Impaktor je urychlován vlastní tíhou, maximální dosažitelná rychlost impaktoru při uvažování volného pádu vycházející z výšky věže padostroje (délka vedení 1,75 m) je cca 5,5 m/s. Uvedená rychlost je uvažována bez tření. Poloha místa dopadu impaktoru na cílové těleso je nastavitelná ve třech osách pomocí dvou horizontálních a dalšího vertikálního lineárního vedení. Poslední jmenované vertikální vedení zajišťuje výškové nastavení a výškovou aretaci celé věže padostroje. Pro realizaci rázových dějů lze využít dvou typů impaktorů. Menší impaktor o hmotnosti cca 0,25 kg je po prvním kontaktu s cílovým tělesem a následném odražení zachycen pomocí elektromagnetu, o jehož aktivaci se stará fotosenzor. Fotosenzor funguje jako brána, kterou prochází zubový segment připevněný na impaktor. Po dosažení zadaného počtu přerušení paprsku v bráně zubovým segmentem na impaktor dochází k aktivaci elektromagnetu. Záchytem impaktoru je zajištěno, že cílové těleso je vystaveno pouze jedné rázové události. Razník byl během experimentů zachytáván ve výšce cca 30 mm nad počáteční polohou testovaného vzorku. Druhá va-

rianta razníku o hmotnosti cca 2,2 kg se pohybuje mezi dvěma lineárními vedeními bez systému záchytu. S ohledem na hmotnost daného impaktoru dochází oproti menší variantě razníku pouze k minimálním odrazům od cílového tělesa. Oba typy impaktorů lze osadit senzorem síly, který umožňuje získat průběh velikosti rázové (kontaktní) síly v závislosti na čase mezi hlavou impaktoru a cílovým tělesem. Pro všechny rázové zkoušky uvedené v této práci bylo využito sférické hlavy impaktoru s poloměrem zaoblění  $R = 15$  mm. Geometrie hlavy impaktoru je znázorněna na obrázku 5.2. Odezva testovaného tělesa na ráz byla zjišťována v podobě průhybu za využití bezkontaktních laserových snímačů délky OptoNCDT. Průběh kontaktní síly a odezva cílového tělesa na rázovou událost v podobě velikostí průhybů z bezkontaktních laserových snímačů byly synchronizovány. Pro pozdější analýzu mechanismu možného poškození testovaného tělesa během rázové události bylo při experimentech využito vysokorychlostí kamery Olympus i-Speed 2. Snímkovací frekvence činila 2000 Hz. Dostatek světla pro rychlokameru zajišťovala soustava LED lamp a bodových světel. Celková sestava experimentálního zařízení včetně jeho příslušenství je znázorněna na obrázku 5.3.

Konkrétní provedení jednotlivých realizovaných experimentů, možnosti a počty použitých bezkontaktních laserových snímačů průhybu, typ použitého impaktoru a stejně tak jeho hmotnost, odvíjející se mj. od typu použitého senzoru síly, jsou vždy uvedeny v příslušných kapitolách věnovaných experimentálnímu měření odezvy těles na nízkorychlostní rázy.



**Obrázek 5.2:** Geometrie hlavy impaktoru použitá při rázových zkouškách.



**Obrázek 5.3:** Pohled na celkovou sestavu padostroje při realizaci rázových zkoušek (lasery jsou zakryté jinou technikou).

# Kapitola 6

## Sendvičová struktura

Tato kapitola je zaměřena na testování a numerické modelování sendvičové struktury skládající se z kompozitních potahů a pěnového jádra. V první části kapitoly je uveden popis, realizace a proces identifikace materiálových vlastností kompozitního potahu, pro který bylo využito vlastního materiálové modelu popsaného v kapitole 3 této práce. Další část kapitoly je věnována identifikaci materiálových vlastností pěnového jádra. Stanovené materiálové parametry potahu a jádra byly následně ověřeny realizací tříbodové ohybové zkoušky výsledné sendvičové struktury, jakožto základní mechanické zkoušky sendvičových struktur. Poslední část kapitoly je věnována realizaci experimentu a numerické simulaci příčného nízkorychlostního rázu na sendvičový nosník a sendvičovou desku za využití padostroje popsaného v kapitole 5.

Zkoušená sendvičová struktura o celkové tloušťce 12,5 mm byla vyrobena procesem vakuové infuze. Kompozitní laminátový potah o celkové tloušťce 1,2 mm se skládal ze tří vrstev tkaniny ze skelných vláken s výrobním označením Aeroglass ( $390 \text{ g/m}^2$ ) a epoxidové matrice Epicote HGS LR 285. Jádro sendvičové struktury bylo tvořeno polymerní pěnou Airex C70.55 s uzavřenou buněčnou stěnou. Celá sendvičová struktura byla nakonec vytvrzena po dobu 6 hodin při teplotě  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ . Materiálové vlastnosti byly stanoveny pro potah a pěnu zvlášť ze vzorků dodaných výrobcem sendviče. Tímto výrobcem byl Výzkumný a zkušební letecký ústav, a.s. Praha.

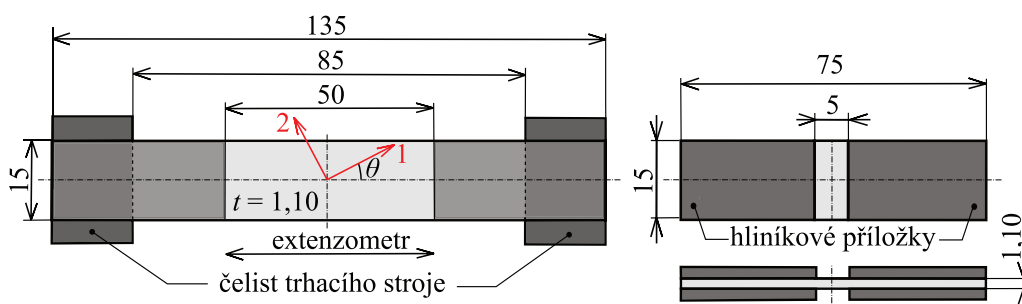


## 6.1 Materiálové vlastnosti potahu

Potah sendvičové struktury byl modelován pomocí vlastního nelineárního elastického materiálového modelu, jehož popis je uveden v kapitole 3. Tento materiálový model byl implementován do komerčního MKP softwaru Abaqus jak pro případ využití implicitního, tak explicitního řešiče pomocí subroutin UMAT a VUMAT.

### 6.1.1 Tahové a tlakové zkoušky

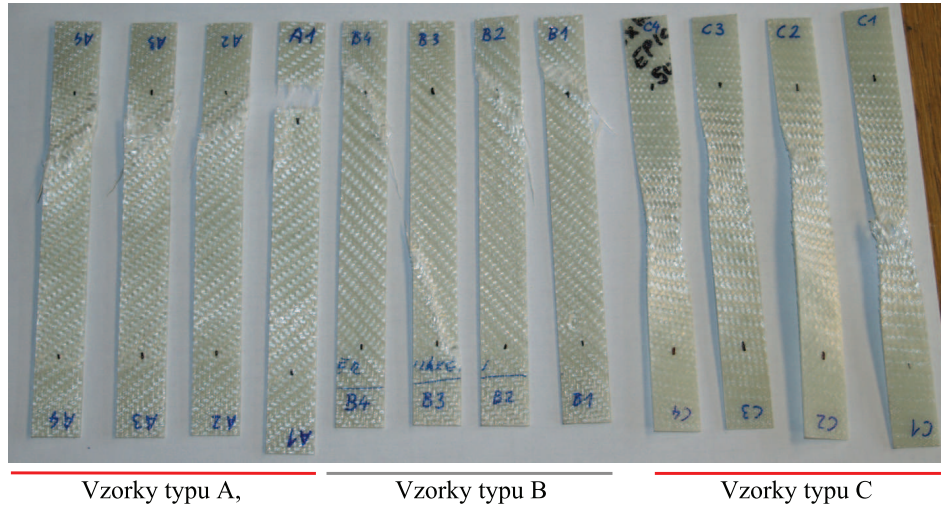
Pro stanovení materiálových vlastností kompozitního potahu sendvičové struktury byla provedena série tahových a tlakových zkoušek dle norem ASTM (norma ASTM D3039/D3039M-08 a D3410/D3410M-03). Experimentálně byly testovány tři typy vzorků potahu, které se mezi sebou lišily orientací materiálových směrů vůči směru zatěžování vzorku. Typ vzorku označený jako A má materiálový směr 1 shodný se směrem zatěžování ( $\theta = 0^\circ$ ), vzorky B mají směr zatěžování shodný se směrem materiálu 2 ( $\theta = 90^\circ$ ). Vzorky C jsou vzorky, u kterých směr zatěžování svírá v počátku zatěžování úhel  $\theta = 45^\circ$  vůči materiálovému směru 1, resp. 2. Celkové rozměry tahových vzorků činily  $135 \times 15$  mm. Geometrie testovaných tahových vzorků s uvedením celkových rozměrů, délky uložení v čelistech trhačického stroje a délky ramínek extenzometru je uveden na obrázku 6.1. Pro testování bylo využito trhačického stroje Zwick Z050. Rychlost zatěžování činila  $v = 2,0$  mm/min. Poškození a stav tahových vzorků typu A, B a C po realizaci zatěžování je znázorněn na obrázku 6.2.



**Obrázek 6.1:** Geometrie tahových (vlevo) a tlakových (vpravo) vzorků kompozitního sendvičového potahu.

Geometrie tlakových vzorků je znázorněna na obrázku 6.1. Vzorky byly opatřeny hliníkovými příložkami v místě kontaktu s čelistmi trhačického stroje. Pro zamezení vzpěru





**Obrázek 6.2:** Vzorky typu A, B a C po realizaci tahových zkoušek.

tlakových vzorků a vyvolání pouze tlakového zatížení činila vzdálenost mezi hliníkovými příložkami pouze 5 mm. Rychlost zatěžování činila  $v = 0,5$  mm/min.

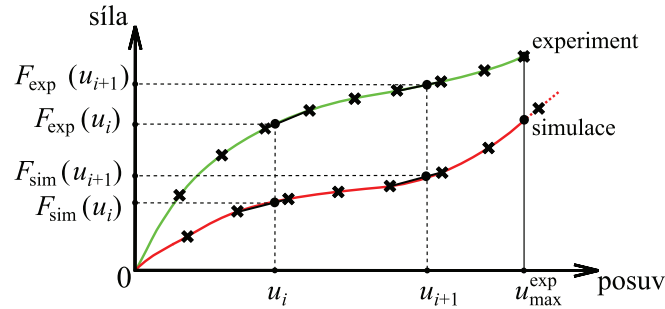
### 6.1.2 Identifikace materiálových parametrů potahu

Pro identifikaci materiálových parametrů potahu z tahových zkoušek bylo využito matematické optimalizace. Hlavním cílem byla minimalizace chyby mezi výsledky experimentu a numerické simulace. Optimalizační proces byl řízen programem OptiSLang 3.2.0. Pro optimalizaci bylo využito evolučního *Nature-inspired* algoritmu [23]. Minimalizována byla objektivní funkce (residuum) ve tvaru

$$r = \frac{1}{n_\theta} \sum_{\theta} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{F_{\text{sim}}(u_i, \theta) - F_{\text{exp}}(u_i, \theta)}{F_{\text{exp}}^{\text{max}}(\theta)} \right)^2 \right), \quad (6.1)$$

kde  $\theta$  značí příslušný typ vzorku, tj. A, B a C,  $u_i$  značí posuv v  $i$ -tém bodu vyhodnocení a  $F_{\text{sim}}(u_i, \theta)$  a  $F_{\text{exp}}(u_i, \theta)$  představují hodnoty sil z numerické simulace a experimentu při posuvu  $u_i$  v  $i$ -tém bodu vyhodnocení pro typ vzorku  $\theta$ . Velikost maximální síly z experimentu pro typ vzorku  $\theta$  nese označení  $F_{\text{exp}}^{\text{max}}(\theta)$ ,  $n_\theta$  představuje celkový počet typů vzorků. Výpočet residua  $r$  byl realizován v programu Matlab. Před samotným výpočtem residua  $r$  bylo v případě potřeby provedeno zkrácení křivky ze simulace na velikost posuvu odpovídajícímu maximálnímu posuvu z experimentu  $u_{\text{max}}^{\text{exp}}$ . Pro výpočet residua v bodě vyhodnocení  $i$  je potřeba porovnávat velikost  $F_{\text{sim}}$  a  $F_{\text{exp}}$  odpovídající stejnému posuvu

$u_i$ , kvůli čemuž byly výsledky numerické simulace a experimentu mezi svými jednotlivými body posuvů interpolovány lineární funkcí, ze které byly následně vypočteny velikosti  $F_{\text{sim}}(u_i)$  a  $F_{\text{exp}}(u_i)$  odpovídající příslušným  $u_i$  rovnoměrně rozdělující interval  $\langle 0, u_{\text{max}}^{\text{exp}} \rangle$  na  $n$  bodů. Při výpočtech bylo uvažováno  $n = 50$ . Princip stanovení objektivní funkce je znázorněn na obrázku 6.3.



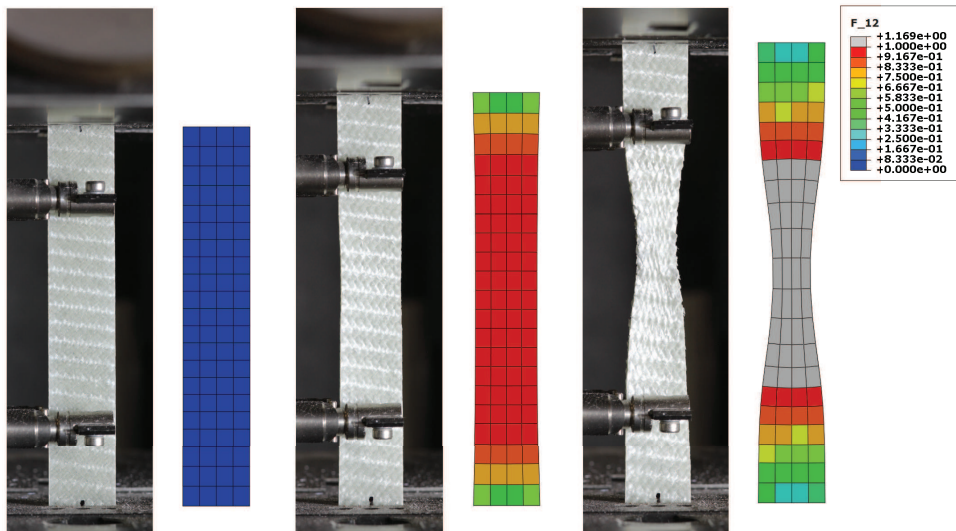
**Obrázek 6.3:** Princip výpočtu objektivní funkce.

Hledány byly optimální hodnoty parametrů  $E_1, E_2, A_1, A_2, \varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0, G_{12}^0, \tau_{12}^0, l_{12}$  a  $k_{12}$ . Pevnosti materiálu byly jak v případě tahových tak tlakových zkoušek určeny přímo z experimentálních dat. Materiálové parametry  $E_3, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$  a  $\nu_{31}$  byly převzaty z [100]. Materiálové parametry kompozitního potahu sendvičové struktury jsou shrnuty v tabulce 6.1 [A4, A8]. Význam jednotlivých materiálových parametrů je uveden v kapitole 3 – viz rovnice (3.10) až (3.19). Obrázek 6.5 uvádí porovnání tahových zkoušek vzorků typu A, B a C z experimentu a MKP simulací za využití identifikovaných materiálových parametrů uvedených v tabulce 6.1. Šedé křivky znázorněné na obrázku 6.5 jsou experimentálně získaná data z tahových zkoušek, ze kterých byla zprůměrováním na společném základu následně vytvořena referenční křivka (zelená barva). Tato křivka  $F_{\text{exp}}$  byla využita při optimalizaci materiálových parametrů MKP modelu jako cílová funkce – viz 6.1.

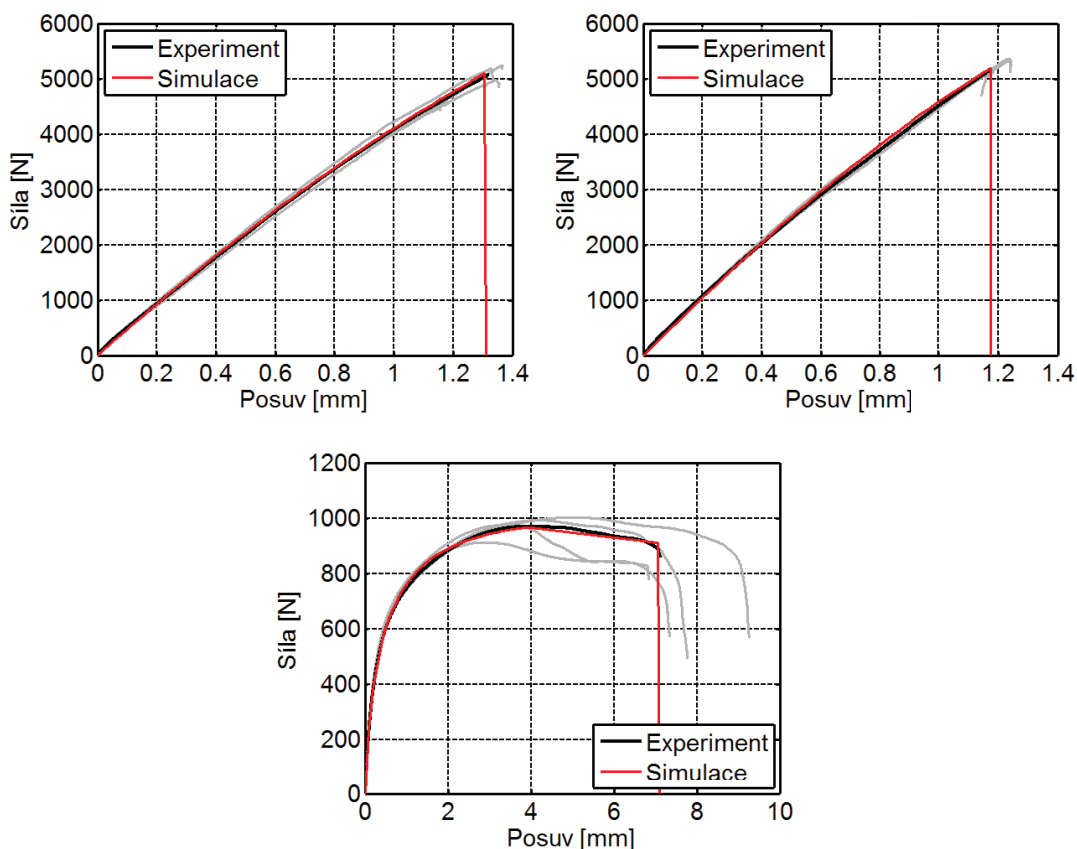
Srovnání výpočtového modelu tahové zkoušky z numerické simulace s fotografiemi z experimentu je pro typ vzorku C uvedeno na obrázku 6.4. V případě numerické simulace je na obrázku 6.4 znázorněn index porušení ve smyku v materiálové rovině 12  $\mathcal{F}_{12}$  kritéria maximálních napětí. Porovnání ukazuje stav vzorku na počátku tahového zatěžování, při dosažení maximální síly a při dosažení maximálního prodloužení vzorku před jeho porušením.

**Tabulka 6.1:** Materiálové parametry potahu.

$E_1$	$E_2$	$E_3$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{31}$	$G_{13}$	$G_{23}$
[GPa]	[GPa]	[GPa]	[-]	[-]	[-]	[GPa]	[GPa]
16,90	18,50	8,00	0,337	0,337	0,280	4,00	2,75
$G_{12}^0$	$\tau_{12}^0$	$k_{12}$	$l_{12}$	$A_1$	$A_2$	$\varepsilon_{11}^0$	$\varepsilon_{22}^0$
[GPa]	[MPa]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
4,96	39,66	5	0,9	10,0	14,0	0,008	0,005
$\gamma_{11}^F$	$X_T$	$X_C$	$Y_T$	$Y_C$	$S_L$	$\rho_C$	
[-]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[kg · m <sup>-3</sup> ]	
0,320	325	65	347	67	35	1154	



**Obrázek 6.4:** Porovnání tahového vzorku typu C mezi experimentem a numerickou simulací: nezatížený vzorek (vlevo), vzorek při zatížení maximální silou (uprostřed) a vzorek při dosažení maximálního posuvu před jeho porušením (vpravo), vizualizace kritéria porušení v napěťové rovině 12 porušení  $\mathcal{F}_{12}$ .



**Obrázek 6.5:** Výsledné tahové diagramy kompozitního potahu: Vzorky typu A (vlevo nahoře), vzorky typu B (vpravo nahoře) a vzorky typu C (dole uprostřed).

## 6.2 Identifikace materiálových parametrů pěny

Pro modelování chování pěny v MKP programu Abaqus byl zvolen materiálový model pro pěny o nízké hustotě (*Low-Density Foam Material Model*) [15], který zvolený software metody konečných prvků Abaqus již obsahuje v základu. Model uvažuje izotropní materiál s nulovým Poissonovým číslem, což je charakteristické pro polymerní pěny o nízké hustotě. Chování materiálu jak v tahu, tak tlaku vychází z uživatelem předepsané závislosti velikosti napětí na velikosti aktuální deformace, což umožňuje vhodným způsobem modelovat nelineární chování polymerních pěn. S ohledem na nulové Poissonovo číslo není třeba zadávat předpis pro chování modelovaného izotropního materiálu ve smyčkové oblasti. Celkové chování materiálu lze popsat pouze pomocí předpisů dvou křivek

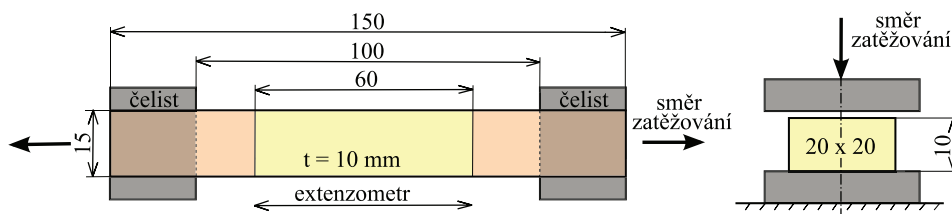
popisujících chování pěnového materiálu při jednoosém zatížení v tahu a tlaku.

### 6.2.1 Tahové a tlakové zkoušky

Pro tahové zkoušky bylo využito vzorků polymerní pěny o rozměrech  $150 \times 15$  mm a tloušťce 10 mm. Geometrie vzorků včetně umístění extenzometru a počáteční vzdálenosti čelistí trhacího stroje je znázorněna na obrázku 6.6. Rychlost posuvu čelistí během tahového zatěžování polymerních pěnových vzorků činila 2,0 mm/min. Výsledná nelineární závislost velikosti napětí (logaritnického napětí) na aktuální velikosti uvažované logaritnické deformace  $\sigma_{ii}(\varepsilon_{ii})$  byla v případě chování materiálu v tahu popsána pomocí polynomu pátého stupně ve tvaru

$$\sigma_{ii}(\varepsilon_{ii}) = 92,6 \cdot \varepsilon_{ii} + 198,8 \cdot (\varepsilon_{ii})^2 - 134,2 \cdot (\varepsilon_{ii})^3 - 2,3 \cdot (\varepsilon_{ii})^4 + 11,8 \cdot (\varepsilon_{ii})^5, \quad (6.2)$$

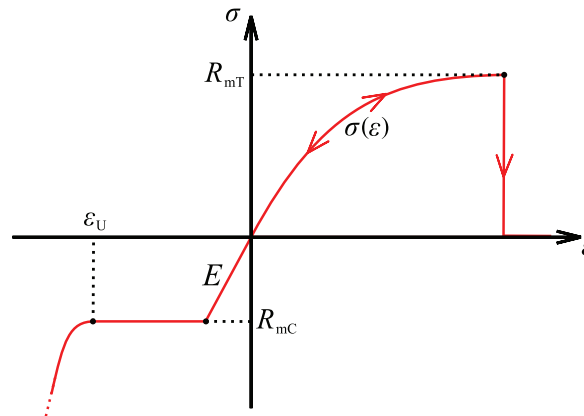
kde  $i = 1, 2$  a  $3$ . Tvar závislosti  $\sigma_{ii}(\varepsilon_{ii})$  byl stanoven v programu Matlab proložením referenční křivky, která byla vypočtena zprůměrováním experimentálních dat, polynomem. Vzorky o rozměrech  $20 \times 20 \times 10$  mm byly podrobeny tlakové zkoušce. Geometrie tlakových vzorků spolu se způsobem jejich zatěžování je znázorněna na obrázku 6.6. Testované tlakové vzorky byly volně umístěny v pracovním prostoru tlakového přípravku trhacího stroje. Rychlost stlačování tlakových vzorků činila  $v = 2,0$  mm/min.



**Obrázek 6.6:** Geometrie pěnových vzorků a způsob jejich zatěžování v případě tahové (vlevo) a tlakové (vpravo) zkoušky.

Typický průběh závislosti velikosti napětí na velikosti deformace, kterou popisuje materiálový model pěny, je znázorněna na obrázku 6.7. V daném případě chování materiálu v tahové oblasti popisuje křivka závislosti  $\sigma(\varepsilon)$  uvedená v rovnici (6.2). Ke křehkému porušení materiálu dochází v případě dosažení pevnosti materiálu v tahu  $R_{mT}$ . Chování pěny v tlaku je rozděleno na tři části, kdy v první se materiál chová lineárně elasticky s modulem pružnosti v tahu  $E$ . Po překročení meze kluzu  $R_{mC}$  se materiál následně chová

jako ideálně elasto-plastický materiál. Tento stav ve skutečnosti odpovídá drcení jednotlivých buněk pěny za konstantní hodnoty tlakového napětí. Po rozdrcení všech buněk pěny nastává po překročení mezní tlakové deformace  $\varepsilon_U$  fáze hutnění rozdrcené pěny, pro kterou je charakteristický prudký nárůst tuhosti materiálu. Materiálové parametry pěny byly stanoveny přímo z experimentálních dat z provedených tahových a tlakových zkoušek. Materiálové parametry testované polymerní pěny jsou shrnuty v tabulce 6.2 [A8].

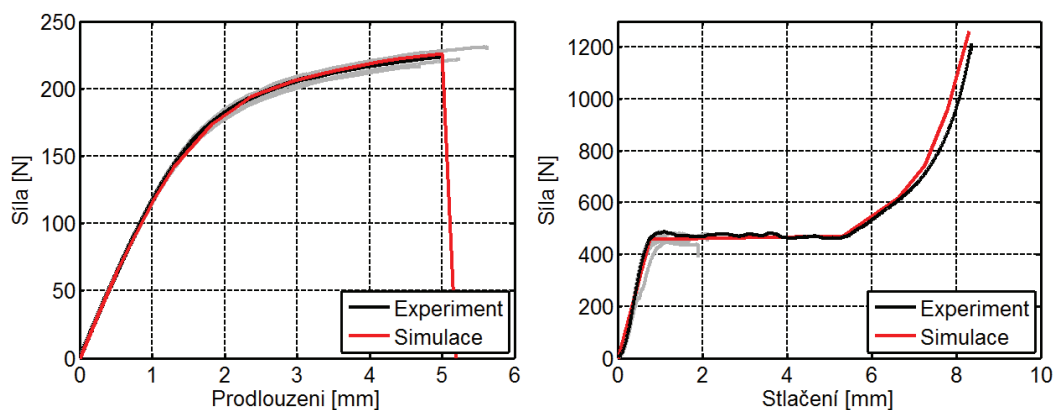


**Obrázek 6.7:** Závislost napětí a deformace pro uvažovaný materiálový model polymerní pěny jádra sendvičové struktury v případě jednoosé napjatosti.

**Tabulka 6.2:** Materiálové parametry polyurethanové pěny.

$E$	$R_{mC}$	$R_{mT}$	$\rho_f$	$\nu$	$\varepsilon_U$
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]	[-]	[-]
50	1,2	1,5	60	0,0	0,53

Pro ověření materiálových parametrů byl v programu Abaqus vytvořen výpočtový model realizované tahové a tlakové zkoušky polymerní pěny a byly provedeny příslušné numerické simulace. Obrázek 6.8 uvádí srovnání výsledků simulace s experimentálními daty v podobě závislosti síly na velikosti prodloužení v případě realizované tahové a tlakové zkoušky. Výpočtový model tlakové zkoušky byl realizován jako plně kontaktní úloha bez uvažování tření mezi pěnou a tlakovým přípravkem. Chování materiálu v tahu bylo popsáno pomocí (6.2). Pěnové vzorky byly v obou případech modelovány pomocí objemových prvků (typ C3D8). Simulace byly řešeny za využití explicitního řešiče v MKP programu Abaqus.

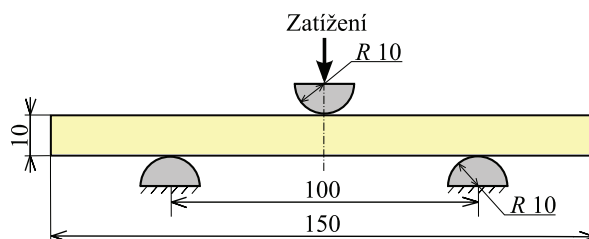


**Obrázek 6.8:** Diagramy závislosti velikosti síly na prodloužení pro případ tahové (vlevo) a tlakové (vpravo) zkoušky polyurethanové pěny.

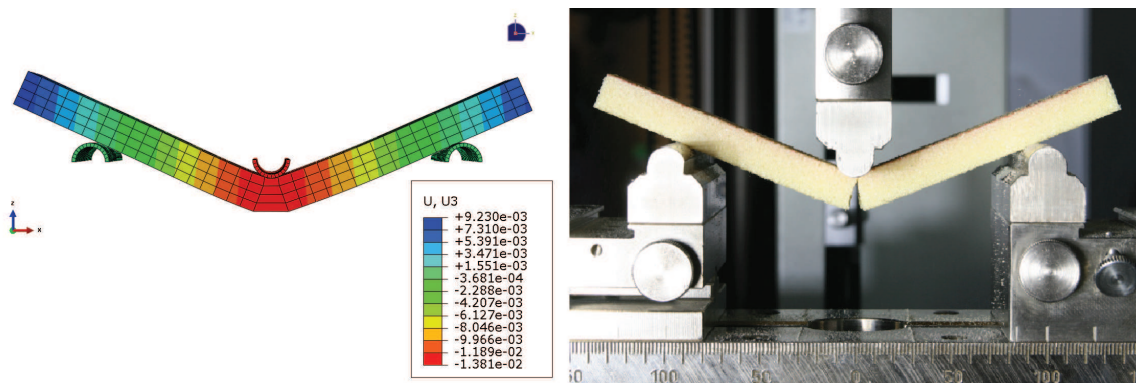
## 6.2.2 Tříbodový ohyb pěny

Z důvodu ověření materiálových parametrů byl následně realizován experiment v podobě tříbodového ohybu polyurethanových pěnových vzorků o rozměrech  $150 \times 15$  mm a tloušťce 10 mm [A5]. Geometrie uložení pěnových vzorků a rozmístění jednotlivých podpor je znázorněno na obrázku 6.9. Rychlost zatěžování byla 2,0 mm/min. Při experimentu došlo vlivem ohybu vzorku k jeho lomu v místě podpory, která vzorek zatěžovala. Lom směřoval od dolní k horní zatěžované ploše pěnového vzorku – viz obrázek 6.10, který uvádí srovnání mezi experimentem a numerickou simulací v době vzniku porušení. V případě numerické simulace byl výpočtový model sestaven jako plně kontaktní úloha. Vzniklé porušení v podobě lomu pěnového vzorku je v případě numerické simulace uvedené na obrázek 6.10 patrné na objemových elementech s výrazným protažením, u kterých byla při jejich porušení v dalších časových krocích výpočtu nulována tuhost. Odstranění porušených elementů nebylo uvažováno. Výsledky odezvy v podobě závislosti síly na průhybu testovaného pěnového vzorku jsou znázorněny na obrázku 6.11. Numerická simulace byla řešena s využitím explicitního řešiče v MKP programu Abaqus.

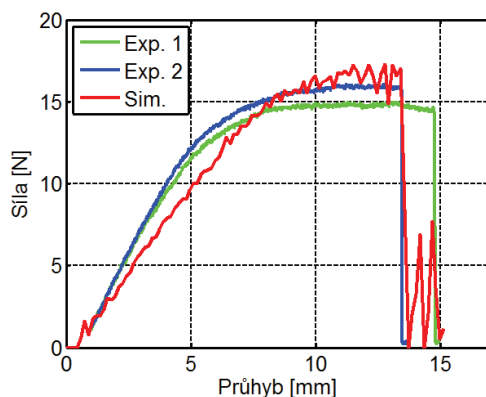




Obrázek 6.9: Geometrie třibodové ohybové zkoušky polymerních pěnových vzorků.



Obrázek 6.10: Tahová zkouška pěnového vzorku (vlevo), třibodový ohyb (vpravo).



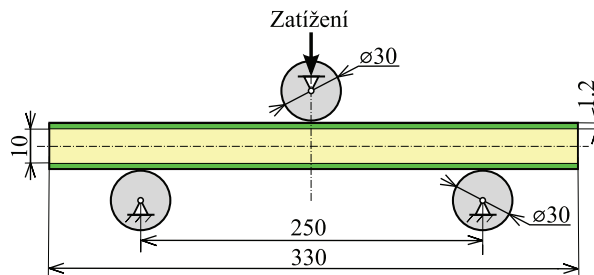
Obrázek 6.11: Závislost síly na průhybu pěny při zatížení třibodovým ohybem.

### 6.3 Statický třibodový ohyb sendvičového nosníku

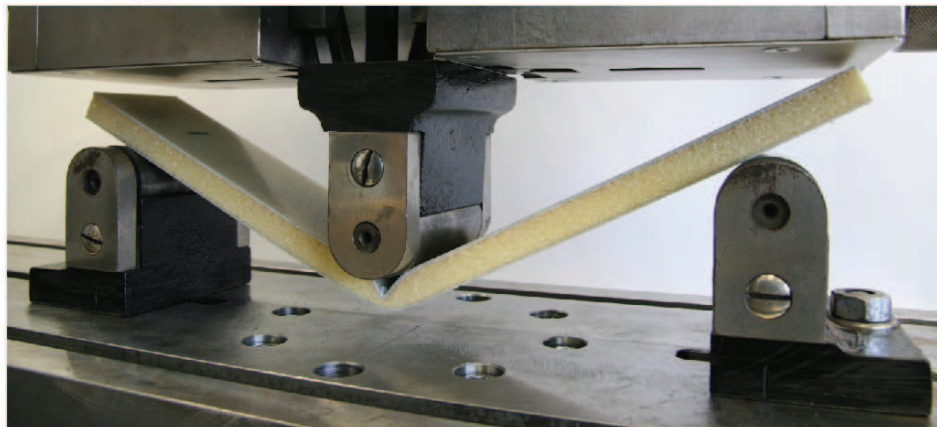
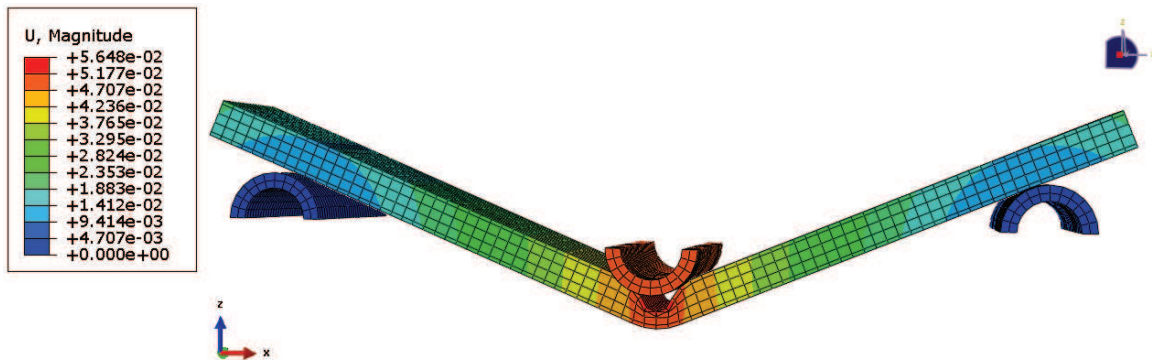
Materiálové vlastnosti sendvičové struktury v podobě kompozitního potahu a pěnového jádra byly stanoveny odděleně v předchozích dvou podkapitolách. Před samotným dynamickým zatěžováním byl proveden statický test sendvičového nosníku v podobě jeho příčného třibodového ohybu. Experiment byl proveden pro validaci materiálových vlast-



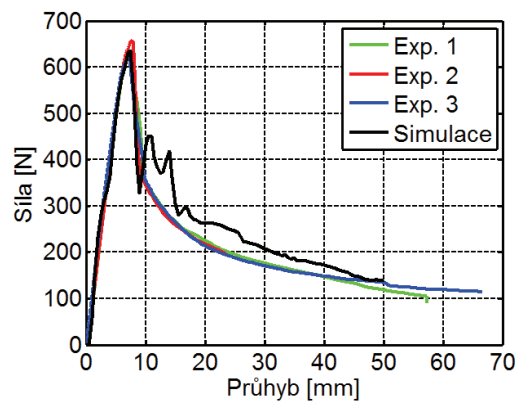
ností celé sendvičové struktury a tím i celého modelu sendvičové struktury, která bude dále využita pro dynamické testování [A5]. Statická zkouška tříbodovým ohybem patří mezi základní zkoušky sendvičových struktur (viz kapitola zabývající se současným stavem problematiky), kdy díky statickému zatěžování je zjištěna odezva samotné struktury bez projevu setrvačných účinků projevujících se v dynamických úlohách. Geometrie sendvičového nosníku o rozměrech  $330 \times 50$  mm je spolu s jeho uložením a geometrií podpor znázorněna na obrázku 6.12. Podpory o průměru 30 mm byly rotačně uloženy, což umožnilo odvalování nosníku po podporách bez vzniku třecích sil mezi dolními podporami a dolním potahem sendvičového nosníku během zatěžování. Materiálový směr 1 potahu sendvičové struktury měl směr shodný s delší hranou nosníku, tj. s délkou nosníku. Při zatížení sendvičového nosníku došlo nejprve k poškození kompozitního potahu, což mělo za následek zhroucení celé sendvičové struktury. Výsledné vzniklé poškození sendvičové struktury z experimentu a numerické simulace je patrné na obrázku 6.13. Porovnání závislosti působící síly na průhybu nosníku mezi provedenými experimenty a numerickou simulací je uvedeno na obrázku 6.14. Na uvedeném porovnání je patrný pokles tuhosti sendvičového nosníku po vzniku poškození horního potahu.



**Obrázek 6.12:** Rozměry sendvičového nosníku spolu s rozměry a rozmístěním jednotlivých podpor v případě statického zatížení sendvičového nosníku tříbodovým ohybem.



Obrázek 6.13: Porovnání výpočtového modelu s experimentem.



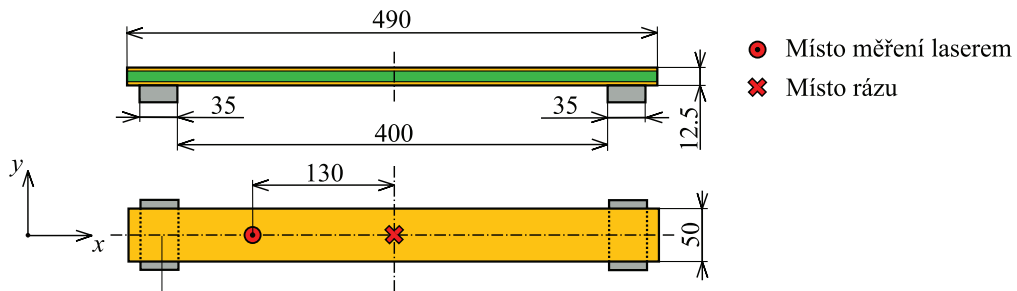
Obrázek 6.14: Závislost síly na velikosti průhybu při tříbodovém ohybu sendvičového nosníku.

## 6.4 Nízkorychlostní ráz na sendvičový nosník

### 6.4.1 Realizace experimentu

Sendvičové nosníky o rozměrech  $490 \times 50$  mm a tloušťce 12,5 mm byly podrobeny sérii nízkorychlostních rázů za využití padostroje ( popis zařízení viz kapitola 5). Sendvičové

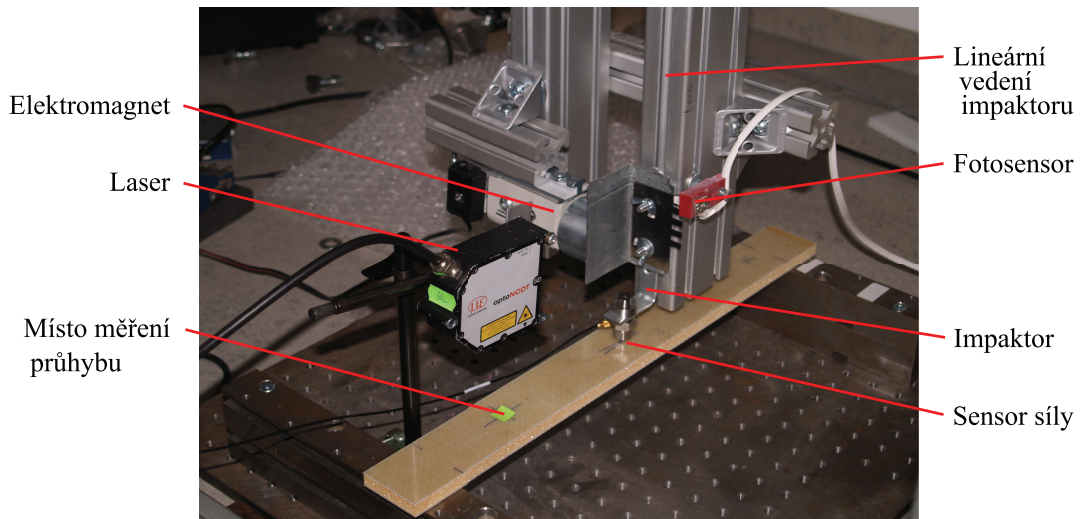
nosníky byly volně položeny na dvou rovnoběžných ocelových podporách o šířce 35 mm s částečným přesahem na obou koncích nosníku. Odezva nosníku na nízkorychlostní rázy byla zjišťována za využití jednoho bezkontaktního laserového snímače posuvu, který měřil průhyb nosníku v předem zvoleném bodě na horním potahu nosníku. Místo rázu impaktoru byl ve středu horního potahu nosníku. Konkrétní usazení nosníku na podporách spolu se základní geometrií úlohy a umístěním zvoleného bodu měření je znázorněno na obrázku 6.15.



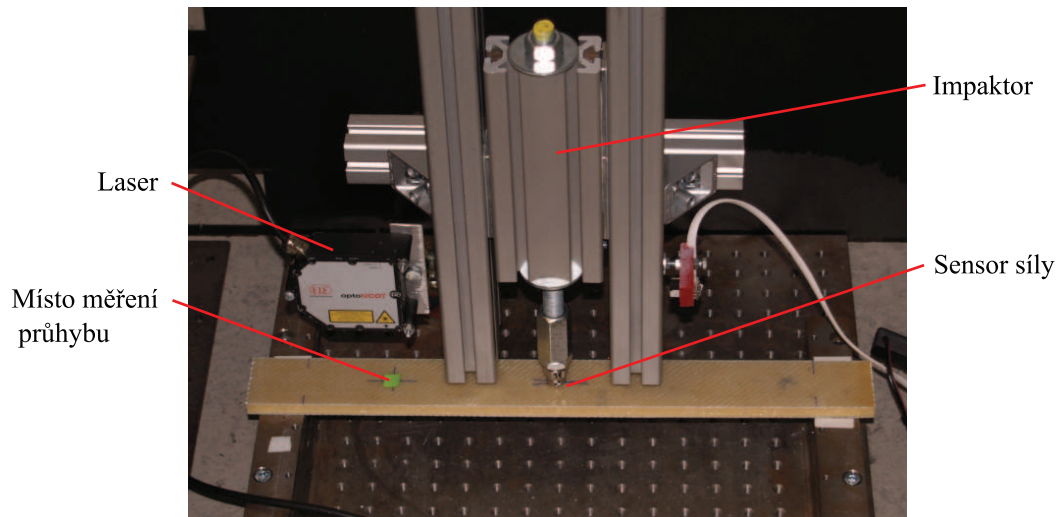
**Obrázek 6.15:** Uložení sendvičového nosníku a jeho geometrie.

Série rázů byla realizovaná za využití dvou typů impaktorů, tj. za využití menšího typu impaktoru o hmotnosti  $m = 0,246$  kg a impaktoru o hmotnosti  $m = 2,211$  kg. Oba impaktory byly osazeny senzorem síly (BrüelKjaer 8200). Hlava razníku měla sférický tvar, rozměry hlavy razníku viz obrázek 5.2. V případě impaktoru o hmotnosti  $m = 0,246$  kg bylo využito elektromagnetického záchytu razníku po prvním rázu na testovanou sendvičovou strukturu. Obrázek 6.16 a obrázek 6.17 znázorňují realizaci experimentu za využití malého, resp. velkého razníku [A10, A11]

V případě razníku o hmotnosti  $m = 0,246$  kg se rozsah dopadových rychlostí pohyboval v rozmezí  $v = 2,5$  až  $4,5$  m/s s krokem 1 m/s. Při rázech nedošlo k viditelnému poškození struktury sendvičového nosníku. Testování sendvičových nosníků razníkem o hmotnosti  $m = 2,211$  kg bylo realizováno v rozsahu dopadových rychlostí  $v = 1$  až  $4$  m/s s krokem 1 m/s, a následně pro dopadové rychlosti  $v = 2,25$  m/s a  $v = 2,5$  m/s. Od rychlosti  $v = 2$  m/s docházelo k poškození horního potahu v místě dopadu impaktoru v podobě poškození matrice potahu. Od dopadové rychlosti  $v = 2,5$  m/s docházelo k poškození horního potahu v celé šířce nosníku – viz obrázek 6.18. V daném případě nedochází k drcení pěnového jádra a poškozený sendvičový nosník neztrácí svou ohybovou tuhost. Při dopadové rychlosti impaktoru  $v = 3$  m/s dochází vlivem rázu nejdříve k poškození hor-

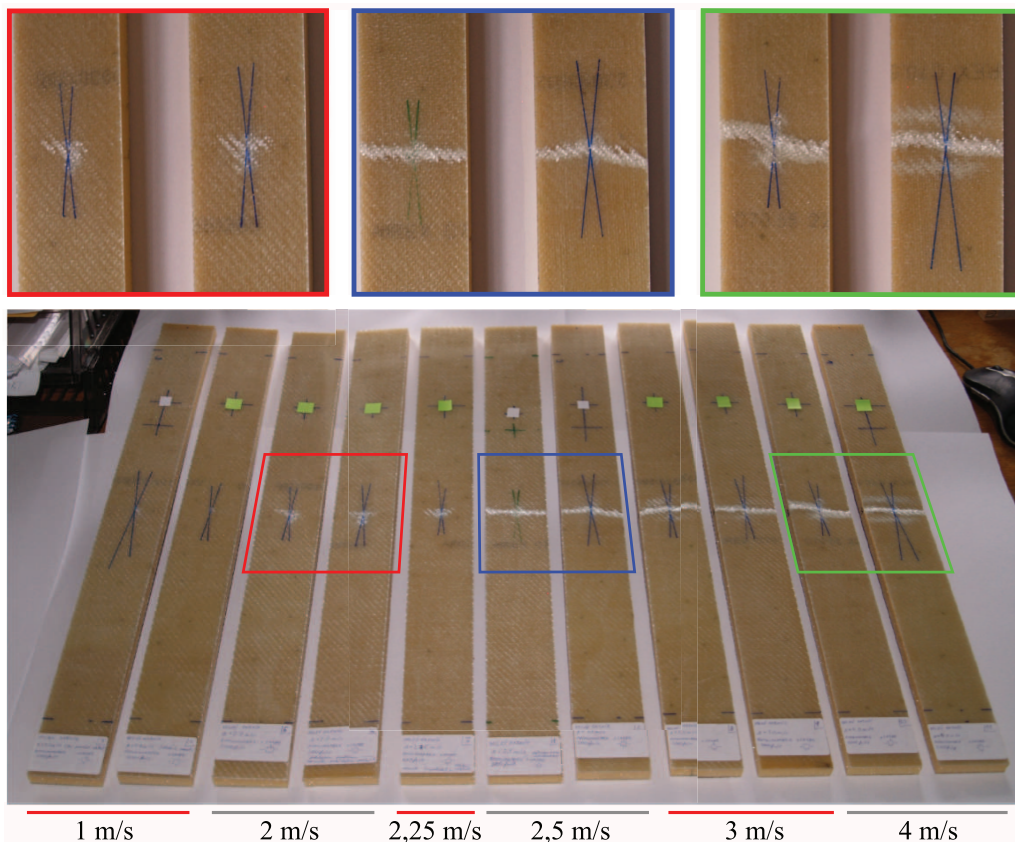


Obrázek 6.16: Sendvičový nosník a impaktor o hmotnosti  $m = 0,246$  kg.



Obrázek 6.17: Sendvičový nosník a impaktor o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.

ního potahu a k jeho následnému vlomení směrem dovnitř do jádra potahu spojeného s drcením pěnového jádra sendvičové struktury, což vede ke zhroucení sendvičové struktury. Pro dopadovou rychlost větší než  $v = 3$  m/s nosníky již ztrácely značnou část své ohybové tuhosti. K viditelnému poškození spodního potahu sendvičových nosníků vlivem rázu nedošlo ani v jednom případě. Rozvoj poškození sendvičových nosníků v závislosti na dopadové rychlosti impaktoru je pro případ razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg znázorněn na obrázku 6.18.



**Obrázek 6.18:** Rozvoj poškození sendvičových nosníků v závislosti na dopadové rychlosti impaktoru o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.

Série obrázků z vysokorychlostní kamery, která zachycuje důležité momenty v chování a vzniku poškození sendvičového nosníku při rázovém zatížení impaktorem o hmotnosti  $m = 2,211$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4,0$  m/s, je uvedena v příloze B. Počátek času ( $t = 0$  s) odpovídá prvotnímu kontaktu hlavy impaktoru s horním potahem sendvičového nosníku. V čase  $t \approx 4,5$  ms dochází k porušení horního kompozitního potahu sendvičového nosníku. Následně dochází k postupnému drcení pěnového jádra nosníku. Chování sendvičového nosníku během experimentu uvedené v příloze B je porovnáno s chováním nosníku z numerické simulace.

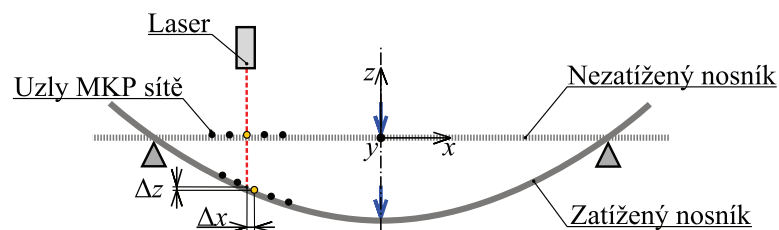
#### 6.4.2 Numerické simulace a interpolace posuvů ze simulace

Numerické simulace byly realizovány v MKP softwaru Abaqus 6.14. Pro variabilitu výpočtového modelu vytvořen program v jazyce Python, díky kterému byl dle zadaných



parametrů automaticky sestaven výpočtový model v programu Abaqus pro simulace rázových zkoušek. Výpočtový model byl sestaven jako kontaktní úloha skládající se v daném případě ze čtyř těles, tj. sendvičového nosníku, dvou podpor a razníku. Tření mezi jednotlivými tělesy nebylo uvažováno. Výpočtová síť byla vytvořena z osmi-uzlových objemových prvků typu C3D8 v případě sendvičového nosníku a C3D8R v případě podpor a razníku. Složitý tvar razníku byl zjednodušen a pro numerické simulace byla modelována pouze samotná kulová hlava razníku, které byla následně přidána hmotnost odpovídající hmotnosti celého původního razníku. Hmotnost a tuhost kabelu senzoru síly byla v simulacích zanedbána. Podpory a hlava razníku byly uvažovány z oceli. Úloha byla řešena explicitním řešičem.

Výsledné průhyby z numerických simulací byly vypočteny pomocí interpolace z posuvů uzlů konečno-prvkové sítě, které se nacházejí v okolí bodu místa měření průhybu laserem během experimentu. Důvodem interpolace jsou velké průhyby vznikající jak zatížením nosníku, tak jeho uložením na dvou podporách, a zejména umístěním bodu měření průhybu laserem během experimentu. Situace a vznikající odchylka při zjišťování průhybu z jednoho uzlu výpočtové sítě simulace vůči skutečnému měření laserem je znázorněna na obrázku 6.19. Bez provedení interpolace posuvu k místu měření laserem by byl průhyb nosníku ze simulace zjištěný přímo z uzlu výpočtové sítě zkruslen o velikost  $\Delta z$ , který by se měnil v každém časovém kroku výpočtu, resp. vyhodnocení, v závislosti na velikosti průhybu nosníku a jeho posuvu vůči statickým podporám. Interpolace posuvů z numerické simulace z programu Abaqus byla realizována v programu Matlab, kdy z aktuálních souřadnic uzlů vyskytujících se na povrchu výpočtové sítě testovaného tělesa v okolí bodu měření byla ze znalosti polohy bodu měření (složka souřadnic  $x, y$ ) dopočítána třetí složka souřadnice  $z$ , ze které byla následně stanovena velikost průhybu v daném bodu. Interpolaci bylo nutné provést pro každý časový krok. Pro zpracování výsledků byla využita metoda bilineární prostorové interpolace [76].



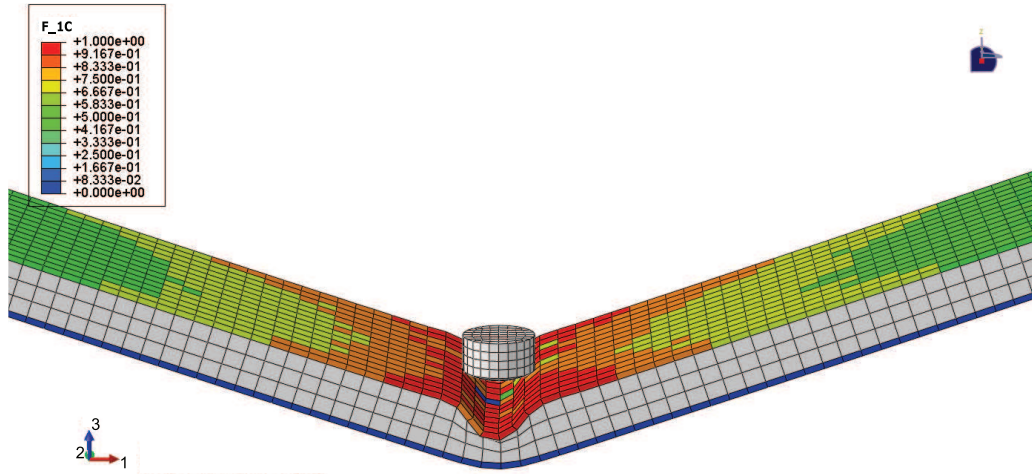
**Obrázek 6.19:** Princip interpolace posuvů - ukázka na 2D případě.

### 6.4.3 Porovnání výsledků experimentu s numerickou simulací

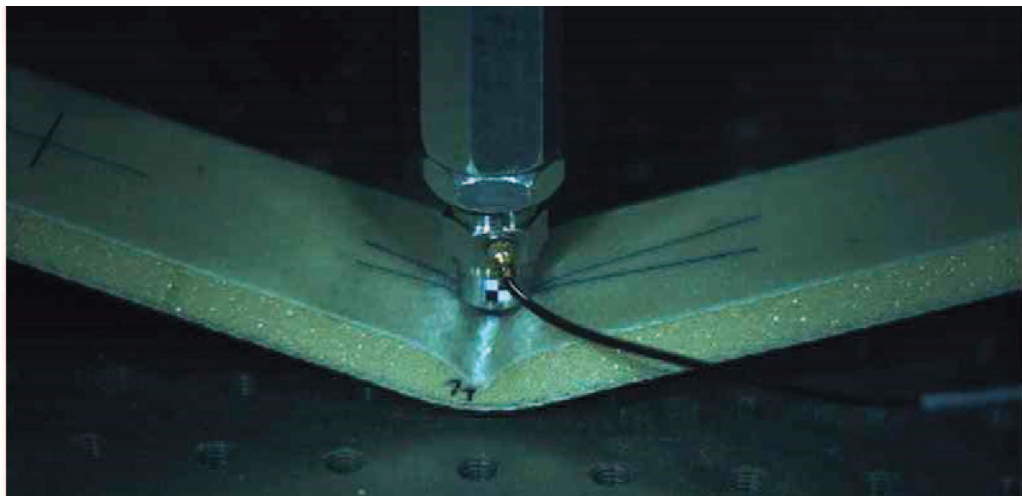
Numerické simulace byly realizovány pouze pro první rázovou událost razníku se sendvičovým nosníkem. Výsledky byly v případě razníku o hmotnosti  $m = 0,246$  kg vyhodnoceny v rozsahu časového intervalu  $t = \langle 0; 20 \rangle$  ms. Srovnání výsledků mezi experimentem a numerickou simulací v podobě průhybu nosníku v měřeném bodě (poloha bodu viz obrázek 6.15) a velikosti kontaktní síly je pro realizovaný rozsah dopadových rychlostí  $v = 2,5$  m/s až  $v = 4,5$  m/s uvedeno na obrázcích 6.22 až 6.24 [A10]. Na uvedených průhybech je patrné, že po dosažení maximálních průhybů v časech cca  $t = 5$  ms od začátku samotné rázové události dochází k odpružení sendvičového nosníku a jeho následnému odrazu z podpor v čase  $t = 10$  ms proti směru zatěžování. Z průběhu kontaktních sil je patrné, že razník nebyl po celou dobu rázu v kontaktu s horním potahem sendvičového nosníku. Po prvním kontaktu razníku s horním potahem dochází v průběhu kontaktní síly ke krátkodobému odlehčení razníku a testovaného vzorku. Rozdíly v průběhu kontaktní síly znázorněné na obrázcích 6.22 až 6.24, lze přisuzovat zanedbání tlumení v kontaktu v případě numerických simulací. Na daném se mohly projevit i vznikající vibrace razníku během experimentu způsobené vůlí v lineárním vedení.

Porovnání výsledků mezi numerickou simulací a experimentem v podobě průběhu průhybu a velikosti kontaktní síly v závislosti na čase je pro realizované rázové události s razníkem o hmotnosti  $m = 2,211$  kg uvedeno na obrázcích 6.25 až 6.30 [A11]. Provedené porovnání je realizované v čase  $t = \langle 0; 30 \rangle$  ms od počátku rázové události. U nosníku zatíženého dopadovou rychlostí  $v = 2,5$  m/s nedošlo v případě numerické simulace k celkovému poškození horního kompozitního potahu v místě kontaktu s razníkem, což způsobilo markantní rozdíly v průběhu průhybu a kontaktní síly mezi numerickou simulací a experimentem. Od dopadové rychlosti razníku  $v = 3,0$  m/s, tj. pro realizované zkoušky s dopadovou rychlostí razníku  $v = 3,0$  m/s a  $v = 4,0$  m/s, již dochází při simulaci k celkovému poškození horního potahu a následnému drcení pěny. Sendvičový nosník v daných případech ztrácí značnou část své ohybové tuhosti. Zbytkovou ohybovou tuhost nosníku zajišťuje dolní kompozitní potah, který zůstává nepoškozen. Shodně s experimentem již nedochází u daných dopadových rychlostí k odrazu razníku od nosníku, nýbrž kulová plocha razníku přimačkává poškozený sendvičový nosník, který vlivem poškození potahu ztrácí svou ohybovou tuhost a je ohýbán působením tíhy razníku. Obrázek 6.20 znázorňuje numerickou simulaci sendvičového nosníku pro dopadovou rychlost  $v = 4$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg na konci výpočtu, tedy v čase  $t = 30$  ms. Na obrázku je znázor-

něna vizualizace indexu porušení v tlaku v materiálovém směru 1  $\mathcal{F}_{1C}$ . Pro porovnání je na obrázku 6.21 uveden snímek pořízený vysokorychlostní kamerou pro shodné podmínky zatěžování.

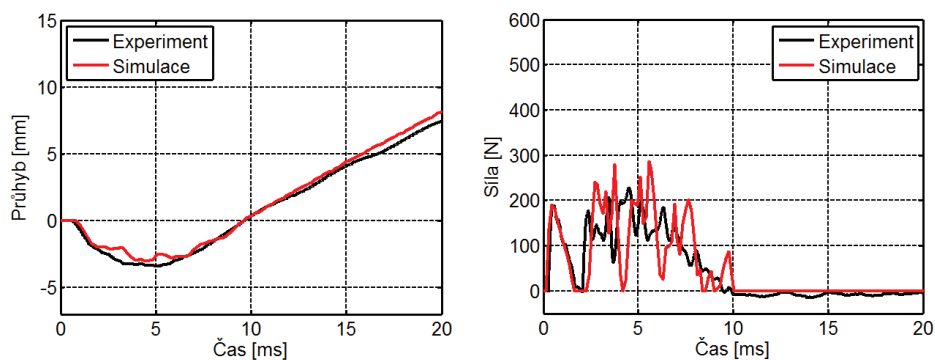


**Obrázek 6.20:** Numerická simulace rázové události razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4$  m/s v čase  $t = 30$  ms od začátku rázu. Znáznorněn je index porušení v tlaku ve směru 1  $\mathcal{F}_{1C}$ .

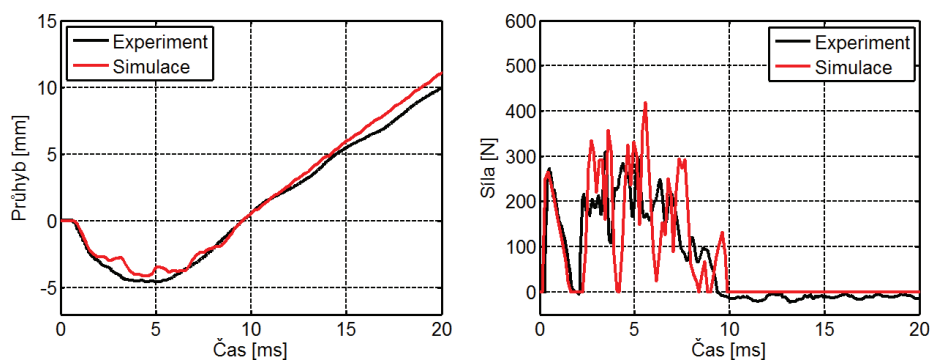


**Obrázek 6.21:** Poškození sendvičového nosníku razníkem o hmotnosti  $m = 2,211$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4$  m/s při realizaci experimentu v čase  $t = 30$  ms od začátku rázové události.

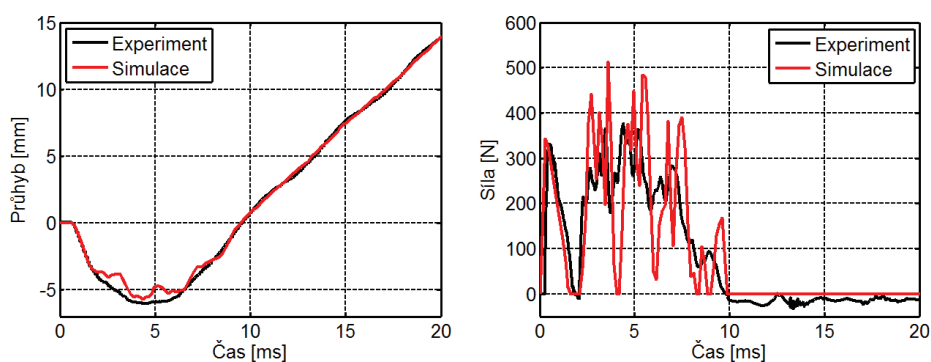




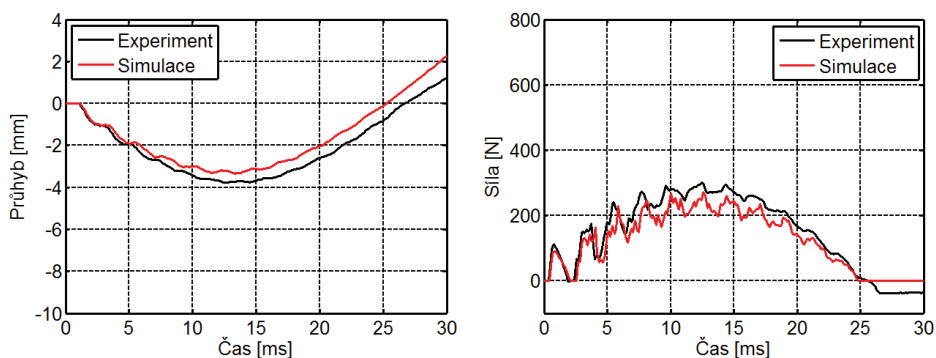
**Obrázek 6.22:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 2,5$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 0,246$  kg.



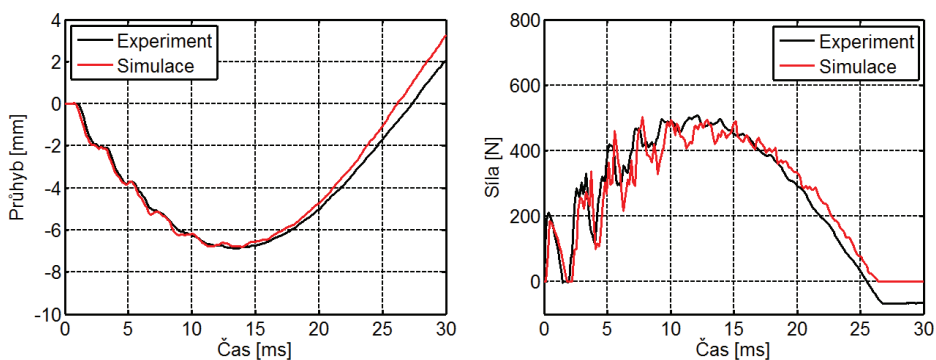
**Obrázek 6.23:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 3,5$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 0,246$  kg.



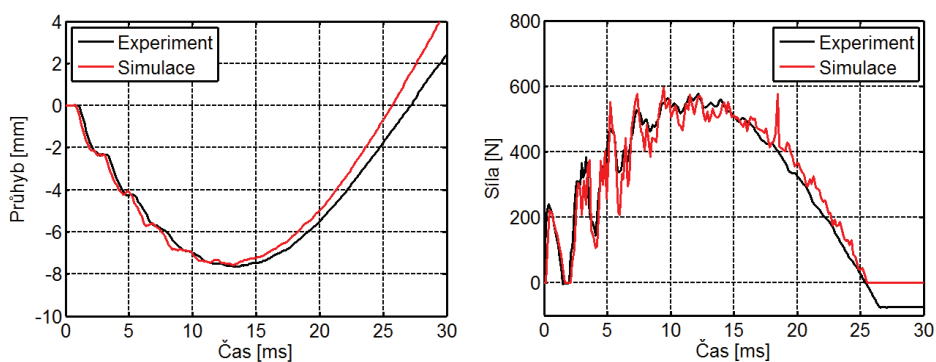
**Obrázek 6.24:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 4,5$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 0,246$  kg.



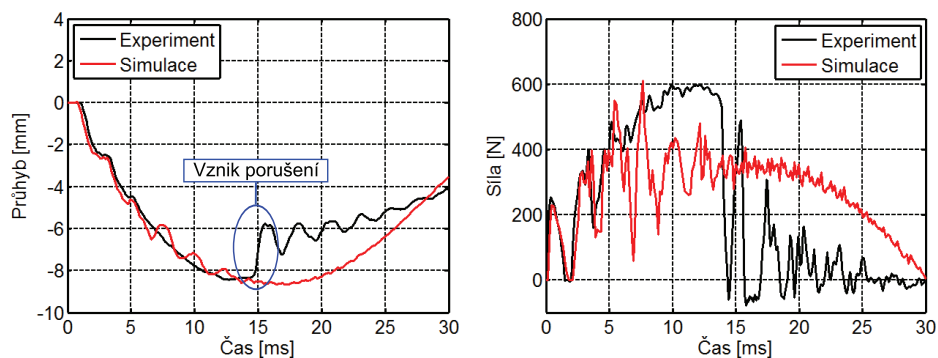
**Obrázek 6.25:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 1$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.



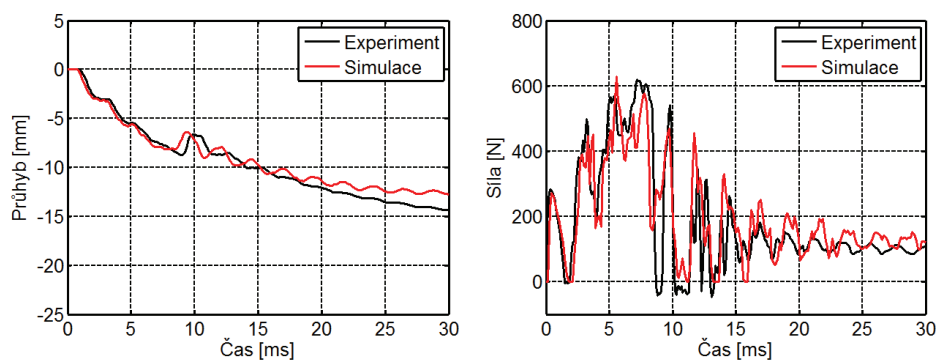
**Obrázek 6.26:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 2$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.



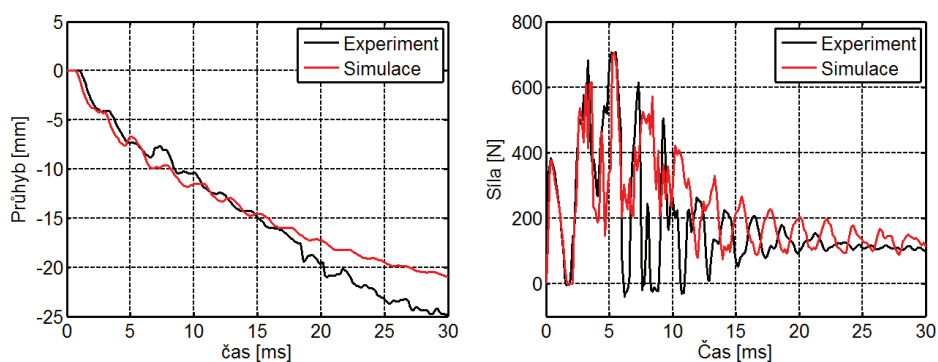
**Obrázek 6.27:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 2,25$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.



**Obrázek 6.28:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 2,5$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.



**Obrázek 6.29:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 3$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.



**Obrázek 6.30:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičového nosníku mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 4$  m/s razníku o hmotnosti  $m = 2,211$  kg.

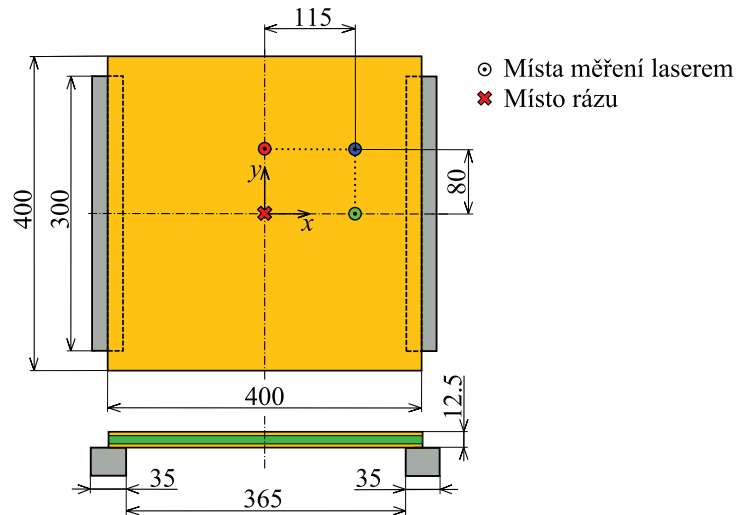
## 6.5 Nízkorychlostní ráz na sendvičovou desku

Vedle nízkorychlostního rázu na sendvičový nosník, který je uveden v předešlé kapitole, byl obdobným způsobem realizován i nízkorychlostní ráz na sendvičovou desku. Hlavním důvodem realizace bylo zjištění schopnosti výpočtového modelu sendvičové struktury predikovat chování i na větším výpočtovém celku v podobě desky, kde byl předpokládán vznik jiné odezvy struktury a zejména pak i její jiné poškození. Větší rozměry desky oproti nosníku umožnily navíc zjištění a porovnání odezvy mezi experimentem a numerickou simulací ve více bodech.

### 6.5.1 Experiment

Sendvičová deska o rozměrech  $400 \times 400$  mm a tloušťce 12,5 mm byla podrobena nízkorychlostnímu rázu razníkem o hmotnosti  $m = 2,336$  kg. Razník byl v daném případě vybaven senzorem síly Kistler 9712B. Odezva sendvičové desky na nízkorychlostní ráz byla zjišťována ve třech zvolených bodech pomocí bezkontaktních laserových snímačů průhybu. Pozice jednotlivých bodů je spolu se základními rozměry znázorněna na obrázku 6.31. Místo rázu impaktoru bylo ve středu horního potahu sendvičové desky. Opět byla využita sférická hlava impaktoru - geometrie viz obrázek 5.2. Deska byla uložena na dvou rovnoběžných ocelových podporách o délce 300 mm podél 2 hran desky s přesahem 17,5 mm. Testování sendvičové desky bylo realizováno pro rozsah dopadových rychlostí impaktoru  $v = 2$  až  $5$  m/s s krokem  $1$  m/s.

K porušení celistvosti sendvičové desky během rázu nedošlo. Docházelo však k poškození horního kompozitního potahu v podobě poškození matrice v místě kontaktu horního potahu s kulovou hlavou impaktoru, a to již od dopadové rychlosti  $v = 2$  m/s. Vedle poškození samotného potahu docházelo od počátku testování i k poškození pěnového jádra, které se projevilo vznikem trvalé deformace ve tvaru kulového vrchlíku v horní ploše potahu. Průměr hraniční kružnice se se zvyšující se dopadovou rychlostí impaktoru měnil zcela minimálně a činil ve všech případech cca 40 mm. U sendvičové desky zatížené dopadovou rychlostí  $v = 5$  m/s došlo navíc během rázu k jejímu trvalému příčnému prohnutí. Velikost vzniklého prohnutí desky činila mezi středem desky a středem podpírané hrany desky hodnotu 1,5 mm. Směr prohnutí desky odpovídá směru vedení rázu.



Obrázek 6.31: Uložení sendvičové desky a její geometrie.

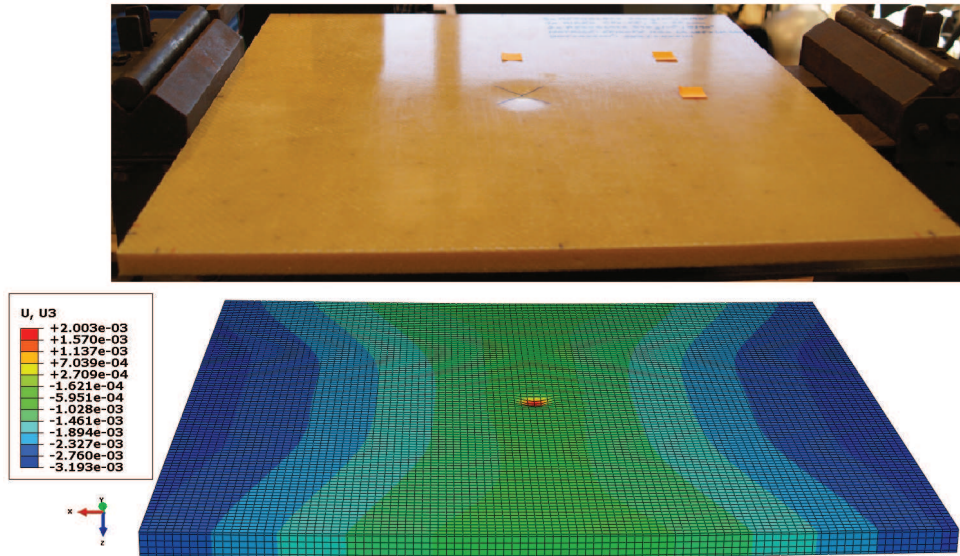
## 6.5.2 Numerické simulace a výsledky

Výpočtový model byl v programu Abaqus sestaven za využití programu napsaného v programovacím jazyce Python. Podmínky úlohy byly uvažovány shodně s úlohou rázového zatížení sendvičového nosníku – viz podkapitola 6.4.2.

Při simulaci dochází k poškození pěnového jádra a ke vzniku trvalé deformace horního potahu v celém rozsahu dopadových rychlostí impaktoru  $v = 2$  až  $5$  m/s s krokem  $1$  m/s. Porovnání vzniklého poškození sendvičové struktury z experimentu a numerické simulace je pro případ rázu impaktorem o hmotnosti  $m = 2,336$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 5$  m/s znázorněn na obrázku 6.32. Pro znázornění trvalé deformace sendvičové desky v případě numerické simulace je vykreslena vizualizace průhybu ve směru příčném na desku na konci numerické simulace, tj. v čase  $t = 150$  ms.

Detail celkového vzniklého poškození desky včetně uvedení měřítka je pro případ experimentu a numerické simulace srovnán na obrázku 6.33. V případě numerické simulace je znázorněn index porušení v tlaku ve směru  $1 \mathcal{F}_{1C}$ , resp. index porušení materiálu ve smyku v napěťové rovině  $12 \mathcal{F}_{12}$ , kde je také znázorněn řez přes tloušťku desky.

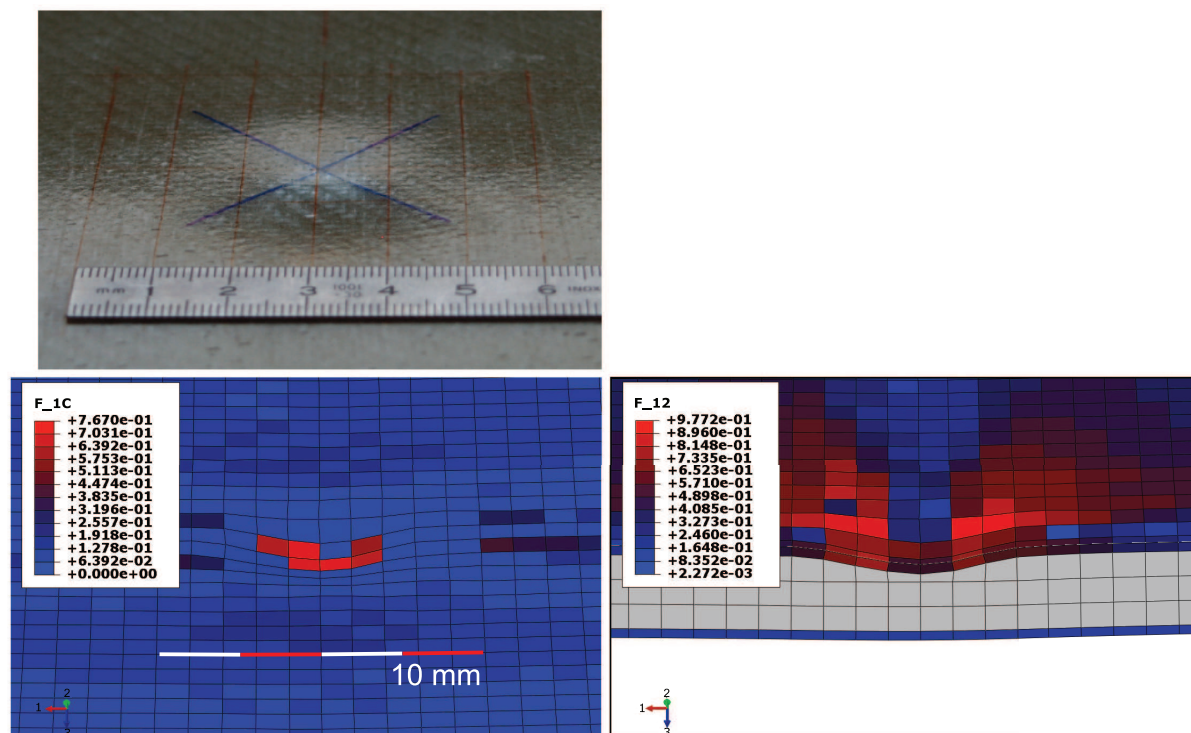
Ze záznamu z rychlokamery bylo zjištěno, že ke vzniku poškození horního potahu způsobeného poškozením pěny dochází až při dosažení maximálního průhybu sendvičové desky. Vznik tohoto poškození se projevuje na odezvě desky v podobě průhybů v měřených bodech, kdy průběhy průhybů v jednotlivých měřených bodech jsou v oblasti největších dosažených hodnot téměř konstantní. Téměř konstantní průhyby v dané oblasti jsou vy-



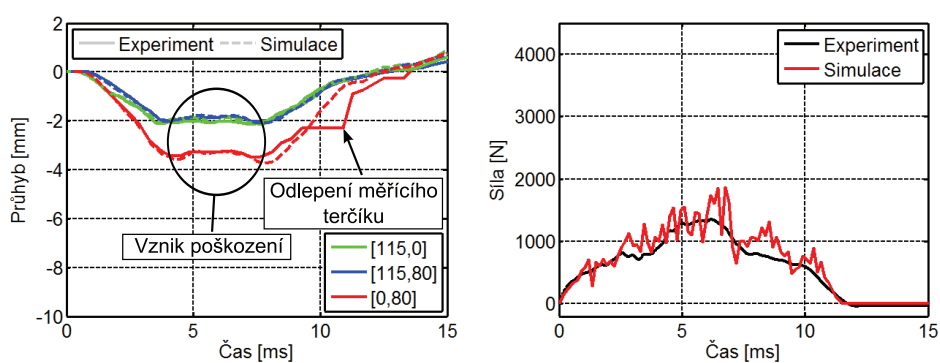
**Obrázek 6.32:** Porovnání vzniklého poškození sendvičové desky z experimentu a numerické simulace pro dopadovou rychlost impaktoru  $v = 5$  m/s a impaktor o hmotnosti  $m = 2,336$  kg.

volány právě vznikem lokálního poškození v podobě vzniku kulového vrchlíku v horním potahu sendvičové struktury v místě dopadu impaktoru.

Numerické simulace byly realizovány pouze pro první rázovou událost razníku se sendvičovou deskou. Výsledky byly vyhodnoceny v časovém rozmezí  $t = \langle 0; 15 \rangle$  ms od počátku rázové události. Srovnání výsledků mezi experimentem a numerickou simulací je pro jednotlivé dopadové rychlosti razníku ( $v = 2, 3, 4$  a  $5$  m/s) v podobě průhybů v jednotlivých bodech měření a velikosti kontaktní síly znázorněno na obrázcích 6.34 až 6.37 [A9]. Poloha jednotlivých bodů, ve kterých byl měřen průhyb, odpovídá na uvedených porovnáních barvou čáry a souřadnicí bodům měření znázorněným na obrázku 6.31. Skok objevující se ve výsledcích jednoho z průhybů z experimentu pro dopadovou rychlost  $v = 2$  m/s, který je znázorněn na obrázku 6.34, byl způsoben odlepením terčičku z povrchu potahu desky v místě měření laserem v době rázu. Na stejném obrázku je označena i oblast téměř konstantních průhybů vznikajících v důsledku poškození desky. Pro ostatní dopadové rychlosti je projev vzniku poškození obdobný.

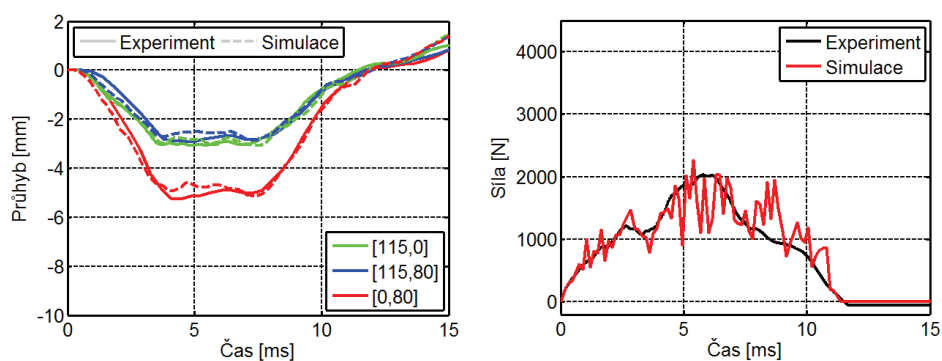


**Obrázek 6.33:** Porovnání vzniklého poškození sendvičové struktury mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 5$  m/s. Numerické simulace znázorňuje index porušení v tlaku v materiálovém směru 1  $\mathcal{F}_{1C}$  (vlevo dole) a v řezu index porušení ve smyku v rovině 12  $\mathcal{F}_{12}$  (vpravo dole).

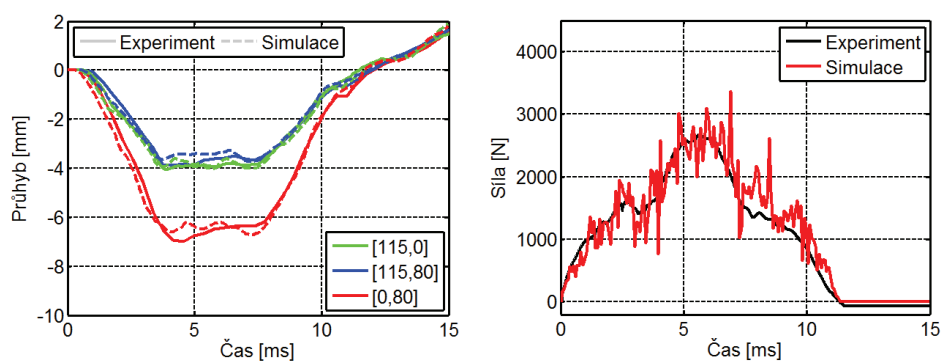


**Obrázek 6.34:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 2$  m/s.

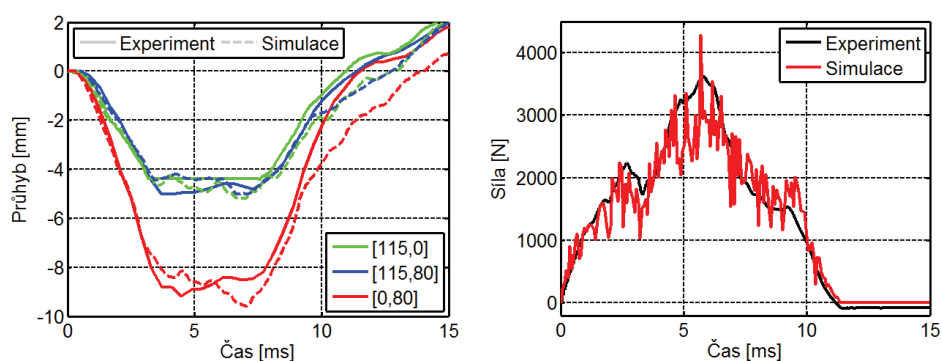




**Obrázek 6.35:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 3$  m/s.



**Obrázek 6.36:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 4$  m/s.



**Obrázek 6.37:** Porovnání průhybu a kontaktní síly sendvičové desky mezi experimentem a numerickou simulací pro dopadovou rychlost  $v = 5$  m/s.



## 6.6 Shrnutí kapitoly

Kapitola se zabývá sestavením a testováním modelu sendvičové struktury, která pro modelování chování potahu využívá autorem navrženého nelineárního elastického modelu s poškozením. Pro modelování pěnového jádra sendvičové struktury bylo využito nelineárního izotropního modelu polymerních pěn o nízké hustotě z knihoven MKP softwaru Abaqus. Nelineární elastický materiálový model s poškozením byl do MKP softwaru Abaqus implementován za využití uživatelských subroutine UMAT a VUMAT. Je zde popsán princip identifikace materiálových parametrů tkaninového potahu a polymerní pěny z realizovaných tahových a tlakových zkoušek. Identifikace materiálových parametrů tkaninového kompozitního potahu byla realizována s využitím matematické optimalizace. Optimalizační proces byl řízen programem OptiSLang.

Stanovené materiálové parametry modelu kompozitního potahu a polymerního pěnového jádra byly validovány statickou třibodovou zkouškou sendvičového nosníku. V kapitole je uveden princip využívané interpolace posuvů numerické simulace pro možnost jejich objektivního porovnání s výsledky z laserových měřičů posuvu z experimentu. Sestavený model sendvičové struktury byl následně podroben srovnání s experimentem v případě realizace příčných nízkorychlostních rázů na sendvičový nosník a sendvičovou desku. Nosník a deska se během rázu vůči sobě odlišovaly nejen rozdílnou odezvou, ale i vznikem odlišného poškození. V obou případech bylo dosaženo dobré shody mezi výsledky numerické simulace a experimentu. Porovnávány byly průběhy kontaktních sil mezi razníkem a sendvičovou strukturou a průběhy průhybů ve zvolených bodech testovaných těles. Vznik a rozvoj poškození mezi numerickými simulacemi a experimenty byl porovnám pouze vizuálně. Jako podklad pro vznik poškození z realizovaných experimentů byly využity snímky z vysokorychlostní kamery. I v daném případě bylo dosaženo dobré shody.

# Kapitola 7

## Tkaninový kompozit

První část této kapitoly je věnována identifikaci materiálových parametrů navrženého elasto-plastického materiálového modelu tkaninového kompozitu s poškozením, který je popsán v kapitole 4. Ve druhé části této kapitoly je provedena verifikace materiálové modelu s experimentem na úloze příčného nízkorychlostního rázu na tkaninovou kompozitní desku.

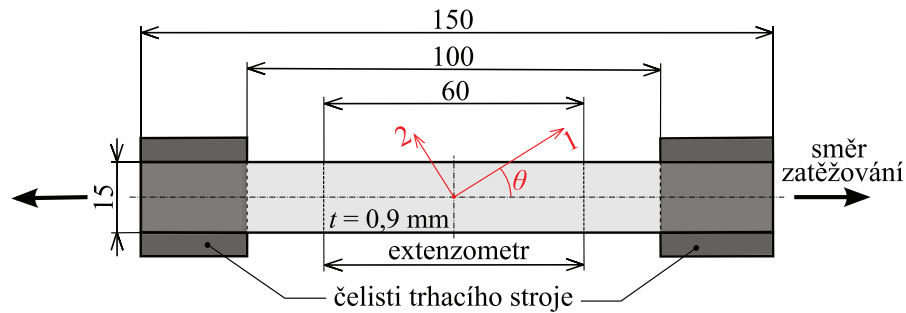
Za materiál byl zvolen tkaninový kompozit vyrobený ze tří vrstev skelné tkaniny s plátovou vazbou ( $816 \text{ g/m}^2$ ) a epoxidové matrice Epicote MGS LR 385. Materiál byl následně vytvrzen po dobu 6 hodin při teplotě  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ . Výrobce je Výzkumný a zkušební letecký ústav, a.s., Praha.

### 7.1 Identifikace materiálových parametrů

#### 7.1.1 Tahové a tlakové zkoušky

Pro stanovení materiálových vlastností tkaninového kompozitního materiálu byly realizovány série tahových a tlakových zkoušek. V případě tahového zatížení bylo z desky z daného materiálu vyříznuto pomocí vodního paprsku celkem 7 typů vzorků, které se mezi sebou lišily orientací materiálových směrů vůči směru zatěžování vzorku. Tahové vzorky byly označeny písmenem T a následně číslicí, udávající velikost úhlu  $\theta$ , který svíral materiálový směr 1 vůči směru zatěžování jednotlivých vzorků. Rozsah daného úhlu byl v rozmezí od  $0^\circ$  do  $90^\circ$  s krokem  $15^\circ$ . Celkem u jednotlivých tahových vzorků materiálový směr 1 svíral vůči směru zatěžování úhel  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  a  $90^\circ$ , podle čehož

jednotlivé vzorky nesly označení T0, T15, T30, T45, T60, T75, T90. U vzorků nesoucích označení T0 byl materiálový směr 1 totožný se směrem zatěžování, naopak v případě vzorků označených T90 byl směr zatěžování vzorků kolmý na materiálový směr 1, resp. totožný s materiálovým směrem 2. Celkové rozměry tahových vzorků včetně délky uložení v čelistech trhacího stroje a umístění ramínek extenzometru jsou uvedeny na obrázku 7.1. Rozměry tahových vzorků byly zvoleny dle normy ASTM (ASTM D3039/D3039M-08).

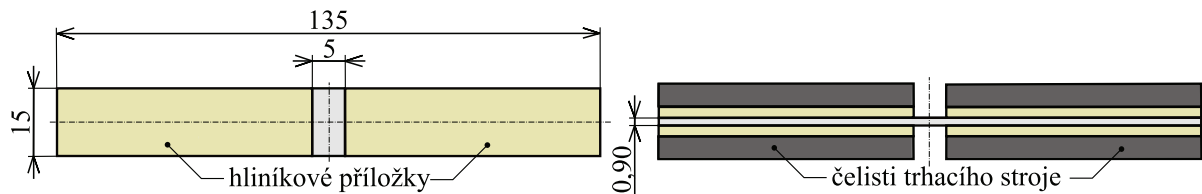


**Obrázek 7.1:** Geometrie tahových vzorků tkaninového kompozitního materiálu.

Vzhledem k předpokládané existenci plastického toku a poškozování materiálu byly realizovány cyklické tahové zkoušky s krokovým zvyšováním celkového prodloužení testovaného vzorku během každém cyklu. Na realizaci experimentálního testování bylo využito trhacího stroje Zwick Z050, rychlost zatěžování činila  $v = 10 \text{ mm/min}$ . Zatěžování posuvem bylo realizováno do dosažení celkového prodloužení vzorku  $u = 2 \text{ mm}$  s krokem  $\Delta u = 0,2 \text{ mm}$ , po překročení této hodnoty zatěžování pokračovalo s krokem prodloužení  $\Delta u = 0,5 \text{ mm}$ . Hodnoty prodloužení materiálu byly kontrolovány a zaznamenávány z extenzometru trhacího stroje. Fáze odlehčování byla řízena silou z důvodu zamezení vzniku vzpěru a ohybu vzorků v případě již rozvinuté plastické deformace. Při odlehčování byla uvažována dolní mez síly 10 N, resp. 100 N v případě, kdy ve fázi odlehčení na hodnotu síly 10 N již docházelo ke kroucení a vzpěru vzorků a kdy navíc hrozila možnost vzniku pohybu vzorků v samosvorných čelistech trhacího zařízení ve fázi odlehčování. Všechny vzorky byly před zahájením cyklického testování předzatíženy hodnotou 5 N. Srovnání vzorků na začátku a na konci zatěžování z experimentu je uvedeno v příloze A.

Tlakové vzorky, jejichž geometrie a způsob zatížení je uveden na obrázku 7.2, nesly označení C s doplněním velikosti úhlu  $\theta$  se shodným významem jako v případě tahových vzorků. Zkoušeny byly jen dva typy tlakových vzorků – C0 a C90. Rychlost zatěžování činila  $v = 1,3 \text{ mm/min}$ , zatěžování bylo řízeno posuvem až do porušení vzorku. Tlakové

zkoušky byly realizovány podle normy ASTM (ASTM D3410/D3410M-08). Zatěžování bylo ukončeno při poklesu síly na 20% nejvyšší hodnoty síly dosažené u konkrétního testovaného tlakového vzorku. Z důvodu malých rozměrů vzorku byl během zatěžování měřen posuv čelistí trhacího stroje vůči sobě. V počátku zatěžování docházelo k vymezení vůle mezi hliníkovými příložkami vzorku a čelistmi trhacího stroje, což se na pracovním diagramu projevilo posuvem při nulové, popř. velmi nízké síle.



**Obrázek 7.2:** Geometrie tlakových vzorků tkaninového kompozitního materiálu.

### 7.1.2 Proces identifikace materiálových parametrů

Pro zpracování a analýzu dat z experimentu bylo využito aplikace ploTRA [43]. Tato aplikace naprogramovaná v jazyce Python byla vyvinuta na katedře mechaniky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Hlavními autory jsou Ing. Tomáš Kroupa, Ph.D., Ing. Kryštof Kunc a Ing. Hana Srbová. PloTRA byla v této práci využita ke zprůměrování tahových zkoušek jednotlivých typů tahových vzorků a k proložení každé hysterézní smyčky vznikající při cyklickém zatěžování přímkou spolu se stanovením její směrnice. Hysterézní chování uvažovaný materiálový model nepostihuje. Hysterézní smyčky byly z toho důvodu aproximovány přímkou procházející nejnižším bodem a bodem, tvořícím průsečík křivek odlehčení a opětovného zatížení každé z cyklických smyček. Princip proložení hysterézních smyček přímkou je znázorněn na obrázku 7.3. Zpracované výsledky byly následně využity v procesu identifikace materiálových parametrů navrženého elasto-plastického materiálového modelu s poškozením. Pro identifikaci materiálových parametrů bylo využito matematické optimalizace. Optimalizační proces byl řízen programem OptiSLang 3.2.0. Pro realizaci optimalizace a stanovení materiálových parametrů byl materiálový model prezentovaný v kapitole 4 implementován do MKP softwaru Abaqus 6.14 pomocí subrutiny UMAT. Samotný výpočtový model tahové zkoušky kompozitních vzorků byl vytvořen parametricky ve formě programu v programovacím jazyce Python. Daný program byl následně využit v konečnoprvkovém programu Abaqus pro automa-

tické sestavení výpočtového modelu dle zadaných parametrů. Vedle subroutiny UMAT byly pro vlastní simulaci využity subroutiny UDISP, URDFIL a UEXTERNALDB, které byly použity pro realizaci zatěžování dle podmínek experimentu a ukládání a využívání výsledků v průběhu numerické simulace. Daného bylo nutné využít z důvodu měnících se podmínek a způsobu zatěžování v každém cyklu cyklického zatěžování. Fáze odlehčení u výpočtového modelu byla vždy ukončena při dosažení dolní meze síly, fáze zatěžování vzorku byla ukončena při dosažení příslušného posuvu uzlů výpočtové sítě, které svou polohou odpovídaly umístění ramínek extenzometru během realizace experimentu. Numerický model tahové zkoušky byl sestaven z objemových osmiuzlových elementů (typ C3D8). Z důvodu možnosti vzniku a rozvoje poškození materiálu v místech jeho upnutí v čelistech trhacího stroje a možnosti projevu v celkových výsledcích experimentu byla simulována celá geometrie testovaných vzorků, včetně části upnutí v čelistech. Pro část vzorku upnutou v čelistech byla během simulace uvažována možnost vzniku pouze plastického tečení materiálu, poškození nebylo v dané části uvažováno. Proces identifikace materiálových parametrů byl řízen prostřednictvím programu OptiSLang. Pro optimalizace bylo využito evolučního *Nature-inspired* optimalizačního algoritmu NOA [23]. Cílem optimalizace byla minimalizace rozdílu mezi výsledky experimentu a numerické simulace. Při optimalizaci byla minimalizována cílová funkce  $r$  skládající se ze součtu celkem sedmi residuí (rozdílů)

$$r = r_{Fl} + r_k + r_{u^P} + r_{F_{\max}} + r_{u_{F_{\max}}} + r_{F_{u_{\max}}} + r_{D_{\max}}. \quad (7.1)$$

Tvary jednotlivých residuí byly stanoveny tak, aby vhodně a jednoduše zachytily jevy v materiálu v podobě plastického tečení a poškození materiálu.

**Residuum rozdílu obalových křivek.** Tvar residua udávajícího rozdíl mezi tahovými křivkami z experimentu a numerické simulace byl uvažován ve tvaru

$$r_{Fl} = \frac{1}{n_\theta} \cdot \sum_{\theta} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{F_{\exp}(u_i, \theta) - F_{\text{sim}}(u_i, \theta)}{F_{\exp}^{\max}(\theta)} \right)^2 \right) \right). \quad (7.2)$$

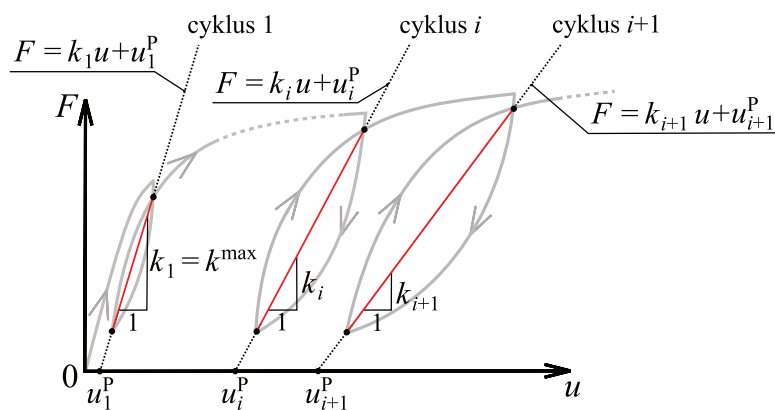
V uvedené rovnici  $F_{\exp}(u_i, \theta)$  a  $F_{\text{sim}}(u_i, \theta)$  představují hodnoty síly z experimentu, resp. numerické simulace, při posuvu  $u_i$  v  $i$ -tém bodu vyhodnocení pro typ vzorku  $\theta$  a  $F_{\exp}^{\max}(\theta)$  je velikost maximální dosažené síly při experimentu pro typ vzorku  $\theta$ . Posuv  $u_i$  odpovídá rozdílů posuvů z extenzometru, popř. příslušným bodům výpočtové sítě v případě numerické simulace. Vyhodnocení bylo realizováno v  $n$  bodech, které odpovídají počtu

zatěžovacích cyklů. Vyhodnocení bylo provedeno vždy v bodech odpovídající koncům zatěžovacích fází jednotlivých cyklů.

**Residuum rozdílu směrnic cyklů.** Princip stanovení směrnice cyklů je znázorněn na obrázku 7.3. Pro residuum vyjadřující rozdíl mezi směrnicemi cyklů z experimentu a numerické simulace byl uvažován tvar

$$r_k = \frac{1}{n_\theta} \cdot \sum_{\theta} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{k_{\text{exp}}(i, \theta) - k_{\text{sim}}(i, \theta)}{k_{\text{exp}}^{\text{max}}(\theta)} \right)^2 \right) \right), \quad (7.3)$$

kde  $k_{\text{exp}}(i, \theta)$  a  $k_{\text{sim}}(i, \theta)$  jsou hodnoty směrnic z experimentu a numerické simulace v  $i$ -tém cyklu cyklicky zatěžovaného vzorku  $\theta$  a  $k_{\text{exp}}^{\text{max}}(\theta)$  představuje největší hodnotu směrnice z experimentu pro typ vzorku  $\theta$ .



**Obrázek 7.3:** Princip proložení přímky hysterezní smyčkou cyklického zatížení a stanovení směrnice cyklu  $k$ .

**Residuum plastického tečení.** Vznikající rozdíly ve vzniku a rozvoji plastického tečení materiálu popisuje residuum uvažované ve tvaru

$$r_{u^P} = \frac{1}{n_\theta} \cdot \sum_{\theta} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{u_{\text{exp}}^P(u_i, \theta) - u_{\text{sim}}^P(u_i, \theta)}{u_{\text{exp}}^{\text{max}}(\theta)} \right)^2 \right) \right), \quad (7.4)$$

kde  $u_{\text{exp}}^P(u_i, \theta)$  a  $u_{\text{sim}}^P(u_i, \theta)$  představuje velikosti posuvu odpovídající plastickému tečení materiálu během cyklického zatěžování z experimentu a numerické simulace. Dané hodnoty je nutné před výpočtem residua v případě numerické simulace vždy dopočítat využitím rovnice přímky, které popisuje směrnice cyklů. Hodnoty  $u^{P, \theta}(u_i)$  odpovídají trvalým

deformacím materiálu pro daný typ vzorku  $\theta$  při plném odlehčení v daném cyklu, tj. pro  $F = 0 \text{ N}$  – viz obrázek 7.3.

**Residuum velikosti maximální síly.** Residuum je uvažováno ve tvaru

$$r_{F_{\max}} = \frac{1}{n_{\theta}} \cdot \sum_{\theta} \left( \left( 1 - \frac{F_{\text{sim}}^{\max}(\theta)}{F_{\text{exp}}^{\max}(\theta)} \right)^2 \right), \quad (7.5)$$

kde  $F_{\text{sim}}^{\max}(\theta)$  a  $F_{\text{exp}}^{\max}(\theta)$  představují velikost maximální dosažené síly během numerické simulace, resp. experimentu pro příslušný typ vzorku označený  $\theta$ .

**Residuum velikosti posuvu při maximální síle.** Dané residuum v kombinaci s residuem velikosti maximální síly  $r_{F_{\max}}$  je využito k minimalizaci rozdílu celkové polohy maximální síly mezi experimentem a numerickou simulací. Residuum je uvažováno shodně s  $r_{F_{\max}}$  ve tvaru

$$r_{u_{F_{\max}}} = \frac{1}{n_{\theta}} \cdot \sum_{\theta} \left( \left( 1 - \frac{u(F_{\text{sim}}^{\max}(\theta))}{u(F_{\text{exp}}^{\max}(\theta))} \right)^2 \right), \quad (7.6)$$

kde  $u(F_{\text{sim}}^{\max}(\theta))$  a  $u(F_{\text{exp}}^{\max}(\theta))$  jsou velikosti posuvů při dosažené maximální síle pro typ vzorku  $\theta$  během numerické simulace a experimentu.

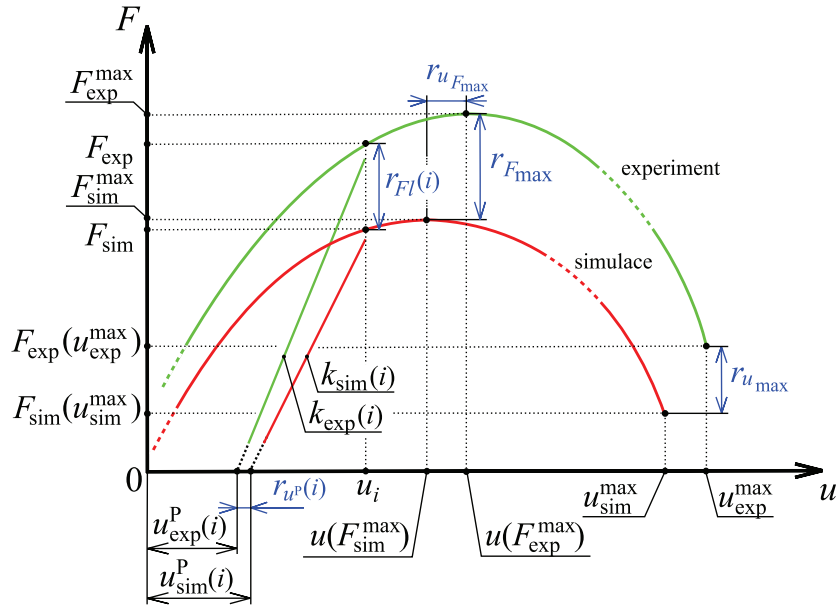
**Residuum velikosti síly odpovídající maximálnímu dosaženému posuvu.** K porovnání stavu poškození materiálu a zjištění stavu degradace materiálových vlastností na konci zatěžování materiálu je využito residuum porovnávající velikosti sil  $F_{\text{exp}}(u_{\text{exp}}^{\max}(\theta))$  a  $F_{\text{sim}}(u_{\text{sim}}^{\max}(\theta))$  dosažených při maximálním posuvu během experimentu a numerické simulace  $u_{\text{exp}}^{\max}$  a  $u_{\text{sim}}^{\max}$  pro typ vzorku  $\theta$ . Residuum má tvar

$$r_{F_{u_{\max}}} = \frac{1}{n_{\theta}} \cdot \sum_{\theta} \left( \left( \frac{F_{\text{sim}}(u_{\text{sim}}^{\max}(\theta))}{F_{\text{exp}}^{\max}(\theta)} \right)^2 \right). \quad (7.7)$$

**Residuum poškození materiálu.** Pro porovnání velikosti dosaženého poškození v materiálu  $D$  s mezní hodnotou  $D^U$ , při jejímž dosažení dochází v materiálu k plné degradaci materiálových vlastností reprezentující porušení materiálu, bylo uvažováno residuum ve tvaru

$$r_{D_{\max}} = \sum_{ij} \left( 1 - \frac{D_{ij}}{D_{ij}^{\max}} \right)^2, \quad (7.8)$$

kde  $D_{ij} = \max(D_{ij}(\theta))$  představuje největší hodnotu příslušného parametru poškození pro daný typ vzorku  $\theta$  a  $ij = 11, 22, \dots$  značí jednotlivé prvky tenzoru poškození  $\mathbf{D}$  viz (4.3).



**Obrázek 7.4:** Znázornění proměnných v tahovém diagramu využitých pro stanovení residuí.

Plasticitu a poškození je nutné z důvodu jejich provázanosti v materiálovém modelu řešit pospolu, tj. pro daný materiál je nutné identifikovat naráz jak parametry plasticity, tak rozvoje poškození v materiálu. Hlavní důvod spočívá v tom, že rozvoj poškození v materiálu je vázán na elastickou deformaci, jejíž velikost ovlivňuje rozvoj plastického tečení v materiálu. Identifikace materiálových parametrů byla realizována pro typy vzorků T0, T90 a T45. V případě materiálových směrů 1 a 2 byly optimalizovány elastické materiálové parametry v podobě modulů pružnosti v tahu  $E_1$  a  $E_2$  a materiálové parametry popisující vznik a rozvoj poškození materiálu v daných materiálových směrech v případě zatížení materiálu tahem  $\varepsilon_{11T}^0$ ,  $\varepsilon_{11T}^R$ ,  $\varepsilon_{11T}^F$ ,  $a_{11T}$ ,  $b_{11T}$ ,  $K_{11T}^B$  a  $D_{11T}^U$ , resp.  $\varepsilon_{22T}^0$ ,  $\varepsilon_{22T}^R$ ,  $\varepsilon_{22T}^F$ ,  $a_{22T}$ ,  $b_{22T}$ ,  $K_{22T}^B$  a  $D_{22T}^U$  v případě materiálového směru 2. Z parametrů popisujících chování materiálu ve smyku v rovině 12, kde je také dominantní plastické tečení, se jednalo o určení modulu pružnosti ve smyku  $G_{12}$ , parametrů popisujících plastické tečení  $R_0$ ,  $K_R$  a  $n_R$  a parametry stanovující stav poškození materiálu ve smyku v rovině 12  $\gamma_{12}^0$ ,  $\gamma_{12}^R$ ,  $\gamma_{12}^F$ ,  $a_{66}$ ,  $b_{66}$ ,  $K_{66}^B$  a  $D_{66}^U$ .

Z realizovaných tlakových zkoušek v materiálových směrech 1 a 2 byly stanoveny přímo



pevnosti materiálu, ze kterých byly ze znalosti  $E_1$  a  $E_2$  z tahových zkoušek určeny příslušné deformace v tlaku  $\varepsilon_{11c}^0$  a  $\varepsilon_{22c}^0$ . Parametry poškození byly navrženy autorem práce tak, aby si materiál v případě poškození v tlaku zachoval jistou zbytkovou pevnost. Okamžitá degradace materiálu je uvažována v případě chování materiálu ve smyku v rovinách 23 a 13. Materiálové parametry  $E_3, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{23}$  a  $\nu_{31}$  byly převzaty z [100].

Výsledné materiálové parametry tkaninového kompozitního materiálu jsou shrnuty v tabulkách 7.1 až 7.3, kde jsou uvedeny elastické parametry (tabulka 7.1), parametry plastického tečení materiálu (tabulka 7.2) a parametry vzniku a rozvoje poškození v materiálu (tabulka 7.3) uvažované pro navržený materiálový model uvedený v kapitole 4.

Obrázky 7.5 a 7.7 znázorňují porovnání výsledných cyklických tahových zkoušek mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorky typu T0, T90 a vzorek typu T45, které odpovídají materiálovým směrům 1 a 2 a chování materiálu ve smyku v rovině 12. Šedě jsou na obrázcích vykresleny původní experimentální data a černě pak experimentální data zpracovaná pomocí programu PloTRA využité pro samotnou identifikaci. Srovnání rozvoje plastického tečení během zatěžování u vzorků typu T0 a T90 je spolu s porovnáním tangent mezi experimentem a numerickou simulací uvedeno na obrázku 7.6, resp. na obrázku 7.8 v případě vzorku typu T45. V případě numerické simulace je rozvoj plasticity u vzorků typu T0 a T90 nulový. Porovnání výsledků numerických simulací cyklických zkoušek pro typy vzorků T15 a T75, resp. T30 a T60 je uvedeno na obrázku 7.9 a obrázku 7.11. Srovnání rozvoje plasticity a směrnic tangent je pro dané vzorky uvedeno na obrázku 7.10 a obrázku 7.12. Křivky cyklických tahových zkoušek a stejně tak i rozvoj plasticity spolu se směrnicemi tečen vycházejí v případě numerických simulací pro dvojice typů vzorků T15, T75 a T30, T60 oproti realizovaným experimentům shodně. V případě rozvoje plasticity a směrnic tangent se dané příslušné křivky vzorků typů T15 a T75 a stejně tak T30 a T60 překrývají.

**Tabulka 7.1:** Elastické materiálové parametry.

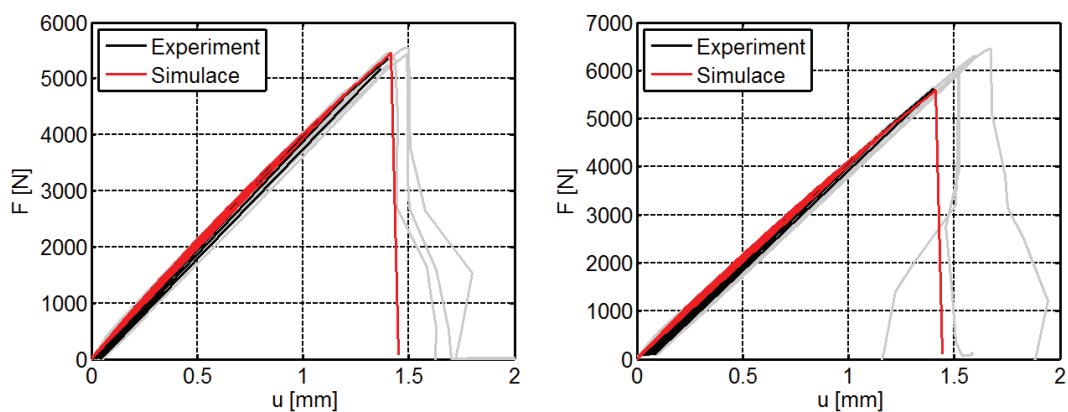
$E_1$	$E_2$	$E_3$	$G_{12}$	$G_{13}$	$G_{23}$	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{31}$
[GPa]	[GPa]	[GPa]	[GPa]	[GPa]	[GPa]	[-]	[-]	[-]
25,30	25,79	8,00	4,50	4,50	2,75	0,337	0,337	0,280

**Tabulka 7.2:** Materiálové parametry křivky zpevnění.

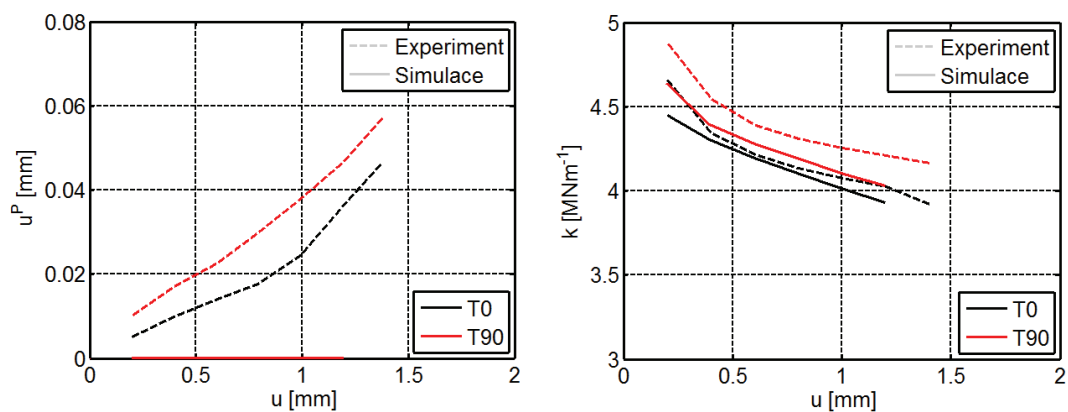
$R_0$	$K_R$	$n_R$
[MPa]	[MPa]	[-]
35	265	0,4

**Tabulka 7.3:** Parametry popisující poškození materiálu, jednotky [-].

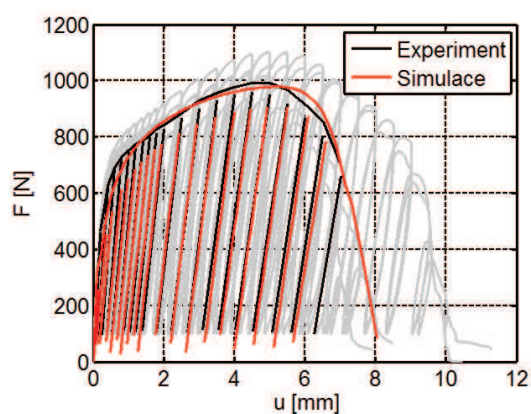
$\varepsilon_{11T}^0$	$\varepsilon_{11C}^0$	$\varepsilon_{22T}^0$	$\varepsilon_{22C}^0$	$\varepsilon_{33T}^0$	$\varepsilon_{33C}^0$	$\gamma_{23}^0$	$\gamma_{13}^0$	$\gamma_{12}^0$
0,0030	0,00699	0,0040	0,00763	0,0	0,00763	0,0	0,0	0,00475
$\varepsilon_{11T}^R$	$\varepsilon_{11C}^R$	$\varepsilon_{22T}^R$	$\varepsilon_{22C}^R$	$\varepsilon_{33T}^R$	$\varepsilon_{33C}^R$	$\gamma_{23}^R$	$\gamma_{13}^R$	$\gamma_{12}^R$
0,00842	0,0500	0,0060	0,0500	0,0001	0,0500	0,0001	0,0001	0,01018
$\varepsilon_{11T}^F$	$\varepsilon_{11C}^F$	$\varepsilon_{22T}^F$	$\varepsilon_{22C}^F$	$\varepsilon_{33T}^F$	$\varepsilon_{33C}^F$	$\gamma_{23}^F$	$\gamma_{13}^F$	$\gamma_{12}^F$
0,01253	0,20	0,01367	0,20	0,02333	0,20	0,035	0,035	0,03912
$a_{11T}$	$a_{11C}$	$a_{22T}$	$a_{22C}$	$a_{33T}$	$a_{33C}$	$a_{44}$	$a_{55}$	$a_{66}$
1,2657	5,0	1,2017	5,0	0,5	5,0	0,5	0,5	1,8
$b_{11T}$	$b_{11C}$	$b_{22T}$	$b_{22C}$	$b_{33T}$	$b_{33C}$	$b_{44}$	$b_{55}$	$b_{66}$
0,0	10,0	0,0	10,0	100,0	10,0	100,0	100,0	0,855
$K_{11T}^B$	$K_{11C}^B$	$K_{22T}^B$	$K_{22C}^B$	$K_{33T}^B$	$K_{33C}^B$	$K_{44}^B$	$K_{55}^B$	$K_{66}^B$
1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,76
$D_{11T}^U$	$D_{11C}^U$	$D_{22T}^U$	$D_{22C}^U$	$D_{33T}^U$	$D_{33C}^U$	$D_{44}^U$	$D_{55}^U$	$D_{66}^U$
0,129	0,75	0,121	0,75	1,0	0,75	1,0	1,0	1,0
$D_{23}^U$	$D_{13}^U$	$D_{12}^U$	$D_{ijT}^{\max}$	$D_{ijC}^{\max}$				
1,0	1,0	1,0	1,0	0,75				



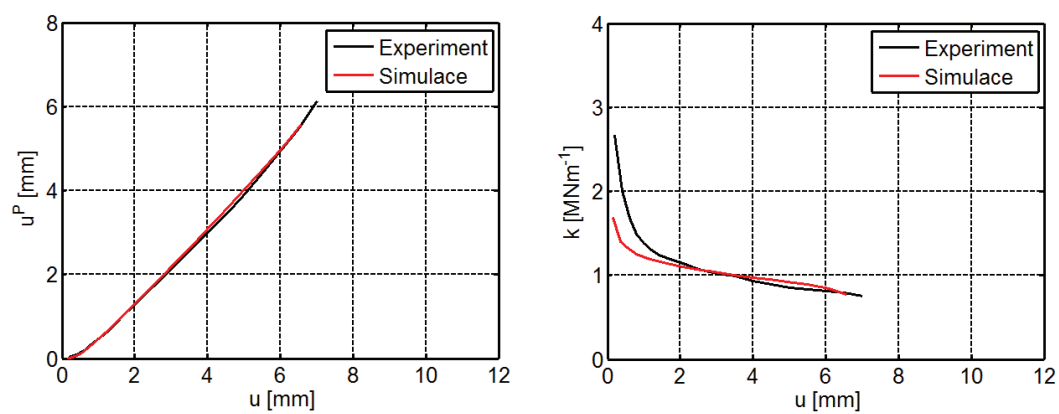
**Obrázek 7.5:** Výsledné tahové diagramy skelného tkaninového kompozitu: Vzorky T0 (vlevo) a T90 (vpravo).



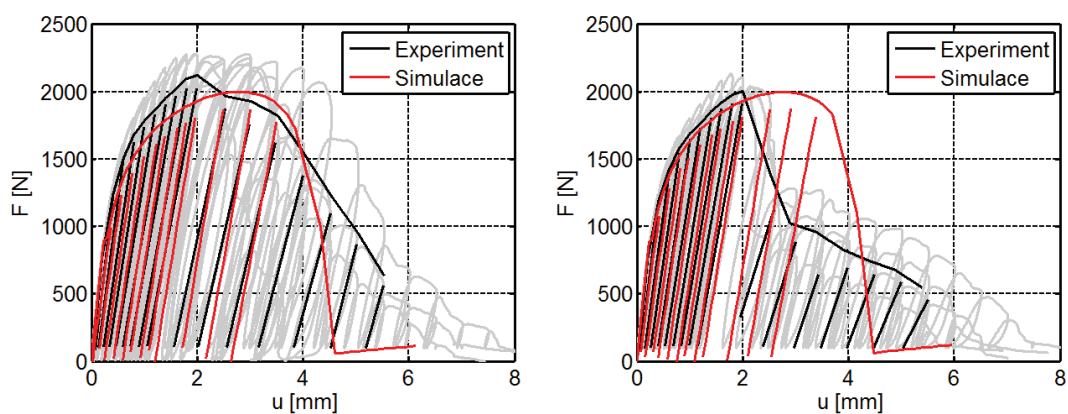
**Obrázek 7.6:** Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrnic tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorky T0 a T90.



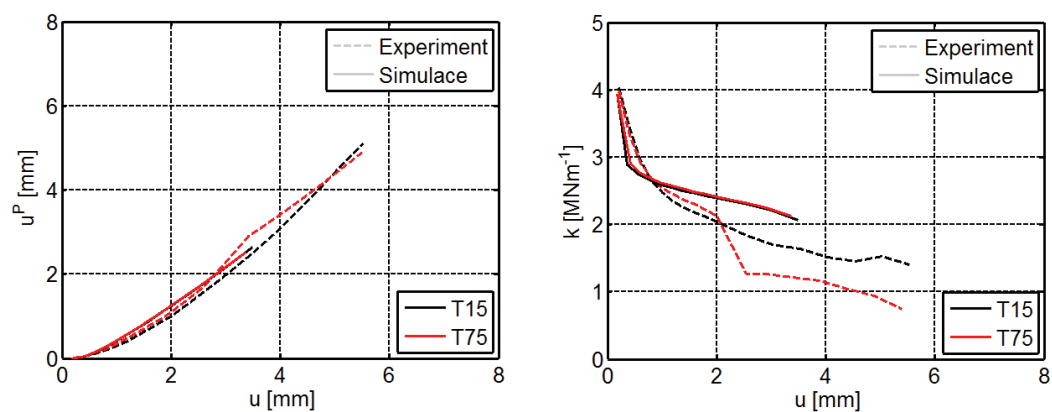
Obrázek 7.7: Výsledný tahový diagram skelného tkaninového kompozitu pro vzorek T45.



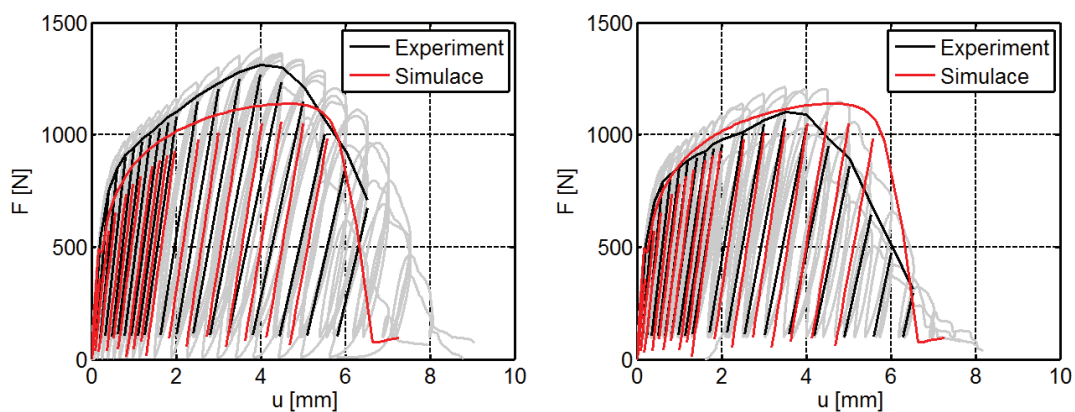
Obrázek 7.8: Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrnic tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorek T45.



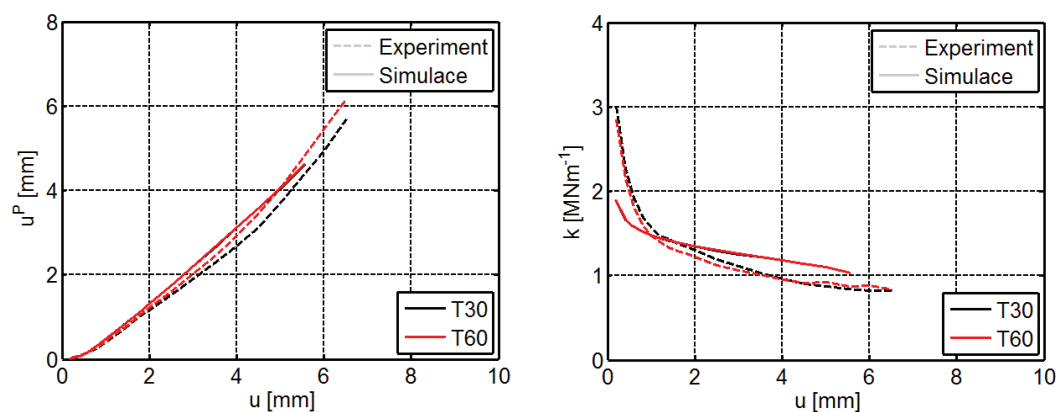
**Obrázek 7.9:** Výsledné tahové diagramy skelného tkaninového kompozitu: Vzorky T15 (vlevo) a T75 (vpravo).



**Obrázek 7.10:** Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrnic tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorky T15 a T75.



**Obrázek 7.11:** Výsledné tahové diagramy skelného tkaninového kompozitu: Vzorky T30 (vlevo) a T60 (vpravo).



**Obrázek 7.12:** Srovnání rozvoje plasticity během zatěžování (vlevo) a směrnic tangent (vpravo) mezi experimentem a numerickou simulací pro vzorky T30 a T60.

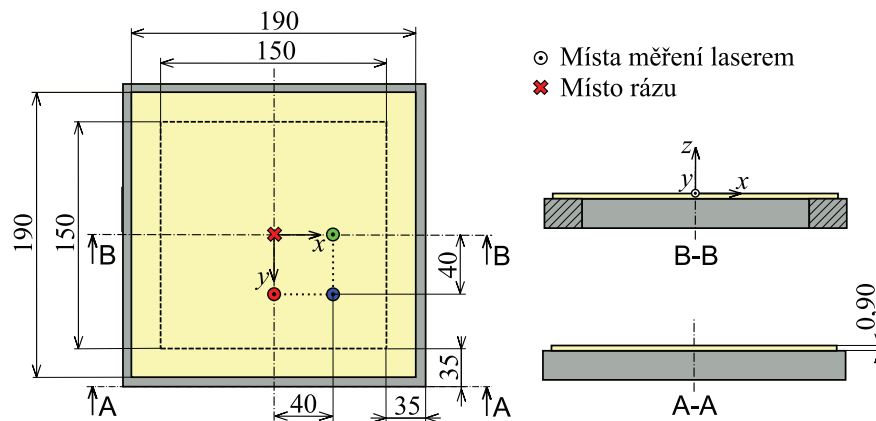
## 7.2 Nízkorychlostní ráz na kompozitní desku

Kompozitní tkaninová deska z materiálu, jehož materiálové parametry byly identifikovány v předchozí podkapitole, byla podrobena dynamickému testování v podobě série příčných nízkorychlostních rázů za účelem validace materiálového modelu a schopností jeho popisu reálných úloh. S ohledem na nízkou ohybovou tuhost testovaného kompozitního materiálu nebylo možné úspěšně realizovat další experimentální testování kompozitního materiálu v podobě statických, resp. kvazistatických tříbodových ohybů. Dynamické zkoušení muselo být omezeno pouze na desku podepřenou podél všech hran. Při testování nosníků a desek podepřených na dvou podporách docházelo obvykle ke vtlačení testovaných vzorků mezi podpory, kde docházelo díky instalovanému spodnímu dorazu razníků na věži padostroje k jejich zapříčení bez vzniku poškození a zaznamenání použitelné odezvy.

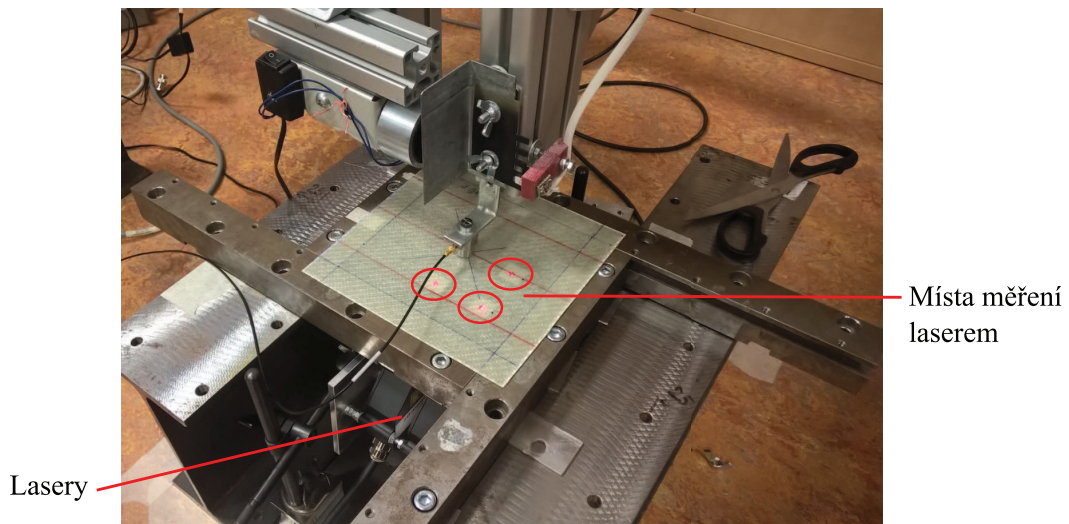
### 7.2.1 Realizace experimentu

Kompozitní tkaninová deska z materiálu, jehož materiálové vlastnosti byly identifikovány v předchozí podkapitole, byla podrobena dynamickému testování v podobě příčných nízkorychlostních rázů za využití experimentálního zařízení – padostroje (technický popis zařízení viz kapitola 5). Kompozitní deska o rozměrech  $190 \times 190$  mm a tloušťce 0,90 mm byla volně usazena na ocelový rám, který danou desku podpíral podél všech jejích čtyř hran. Geometrie desky včetně jejího usazení na ocelový rám je znázorněna na obrázku 7.13. Odezva desky na ráz byla měřena v podobě jejího průhybu za využití bezkontaktních laserových snímačů posuvů ve třech zvolených bodech na povrchu desky – rozmístění bodů měření viz obrázek 7.13. Vzhledem k malým rozměrům desky byly bezkontaktní laserové snímače umístěny zespoda desky pod nosným ocelovým rámem.

Nízkorychlostní rázy byly realizovány impaktory o hmotnostech  $m = 0,242$  kg a  $m = 2,336$  kg. Rozmezí dopadových rychlostí impaktoru bylo při použití impaktoru o hmotnosti  $m = 0,242$  kg  $v = 1$  až  $4$  m/s s uvažovaným krokem  $1$  m/s. V případě impaktoru o hmotnosti  $m = 2,336$  kg byla deska podrobena rázovému zatížení s dopadovými rychlostmi v rozmezím  $v = 2$  až  $4$  m/s a krokem opět  $1$  m/s. Impaktor o hmotnosti  $m = 0,242$  kg byl zachycen po prvním odrazu od kompozitní desky pomocí záchyty (konstrukční popis viz kapitola 5). Obrázek 7.14 znázorňuje realizaci experimentu s impaktorem o hmotnosti  $m = 0,242$  kg. Z obrázku je vedle uložení kompozitní desky patrné i uvažované umístění laserových snímačů průhybu pod deskou.



**Obrázek 7.13:** Geometrie kompozitní desky a její uložení při zatížení nízkorychlostním rázem.



**Obrázek 7.14:** Realizace příčného nízkorychlostního rázu na kompozitní desku s impaktorem o hmotnosti  $m = 0,242$  kg.

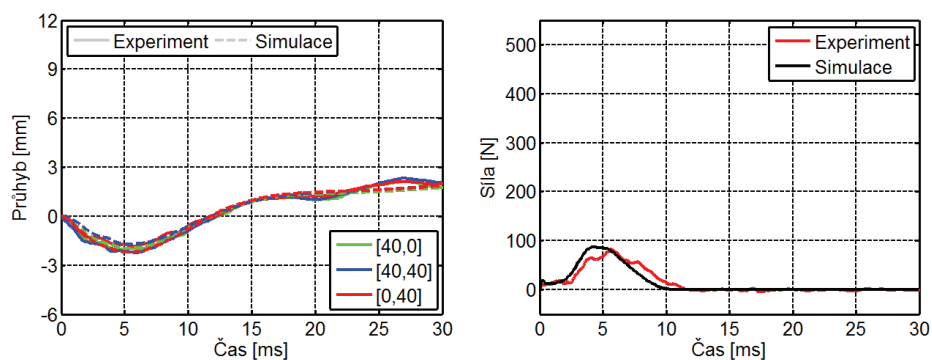
Viditelné poškození kompozitní desky při zatížení příčným nízkorychlostním rázem impaktorem o hmotnosti  $m = 0,242$  kg v rozsahu uvažovaných dopadových rychlostí nastalo. Poškození kompozitní desky vznikalo od dopadové rychlosti  $v = 2$  m/s při použití impaktoru o hmotnosti  $m = 2,336$  kg. Poškození vznikalo v místě kontaktu hlavy impaktoru s deskou v podobě poškození matrice desky. Rozvoj poškození desky nastal až při dopadové rychlosti  $v = 4$  m/s, kdy došlo ke vzniku poškození od místa dopadu impaktoru diagonálně k rohům desky. Poškození vznikající při experimentech bylo nesymetrické, kdy na jedné polovině desky je poškození ostře ohraničené a na druhé polovině desky se po-



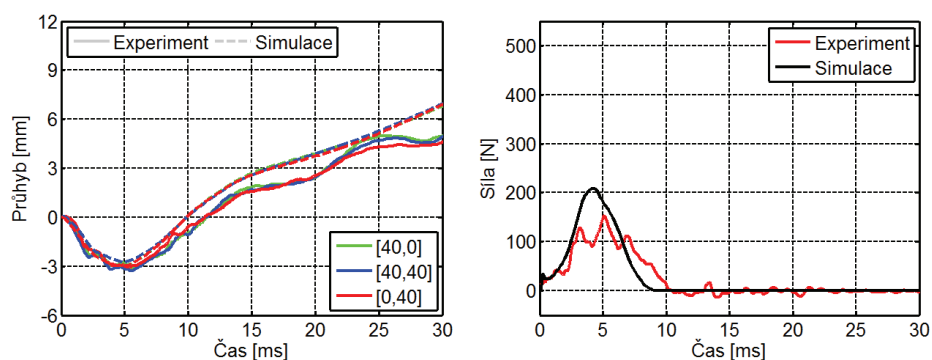
škození rozpíná podél diagonály desky bez ostrého ohraničení. Na vzniku nesymetrického poškození má vliv skutečné místo dopadu impaktoru na kompozitní desku, které bylo při daném rázu posunuto o cca 4 mm ve směru osy  $y$  vůči středu desky směrem k výraznějšímu poškození desky. Za střed skutečného místa dopadu impaktoru byl uvažován střed kruhového poškození vzniklého v místě dopadu impaktoru. Rozdíl mezi středem místa dopadu desky a geometrickým středem desky je patrný na výřezu na obrázku 7.24. Tato skutečnost byla v daném případě zohledněna i v numerické simulaci.

## 7.2.2 Numerické simulace a porovnání výsledků

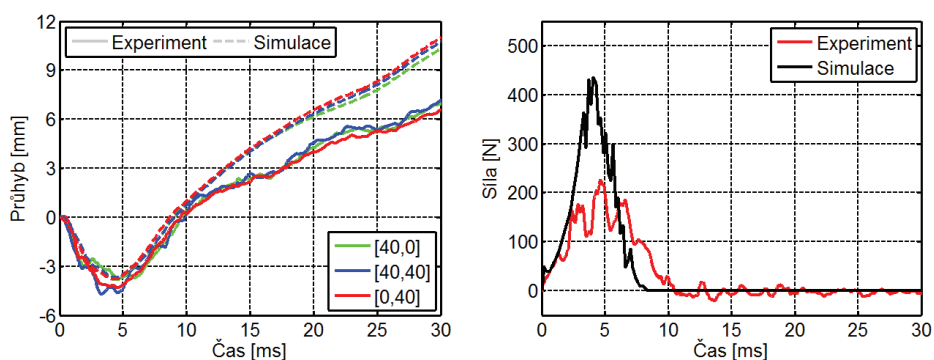
Výpočtový model byl sestaven za využití programu pro sestavení rázové úlohy vytvořeném v programovacím jazyce Python. Simulace byly realizovány explicitním řešičem v programu Abaqus. Vyhodnocení numerické simulace a experimentu bylo pro všechny rázové události realizováno v časovém rozmezí  $t \in \langle 0; 30 \rangle$  ms od počátku rázu impaktoru na kompozitní desku. Daný časový úsek odpovídal prvnímu rázu impaktoru na kompozitní desku. Odezva kompozitní desky na ráz v podobě jejího průhybu a velikosti kontaktní síly vznikající mezi kulovou hlavou impaktoru a kompozitní deskou jsou pro uvažovaný rozsah dopadových rychlostí znázorněny na obrázcích 7.15 až 7.21. Průhyby z numerické simulace byly interpolovány do bodů odpovídajícím bodům měření průhybu při experimentech. Popis a důvod interpolace průhybů z numerické simulace je blíže popsán v předchozí kapitole práce (podkapitola 6.4.2). Vznikající špičky v průběhu kontaktní síly numerické simulace na počátku rázu v porovnání s experimentem mohou být způsobeny zanedbaným tlumením v kontaktu. Další možností je i zanedbané tlumení v materiálu, případně skutečnost, že při experimentu mohlo docházet k útlumu impaktoru jeho vůlí ve vedení.



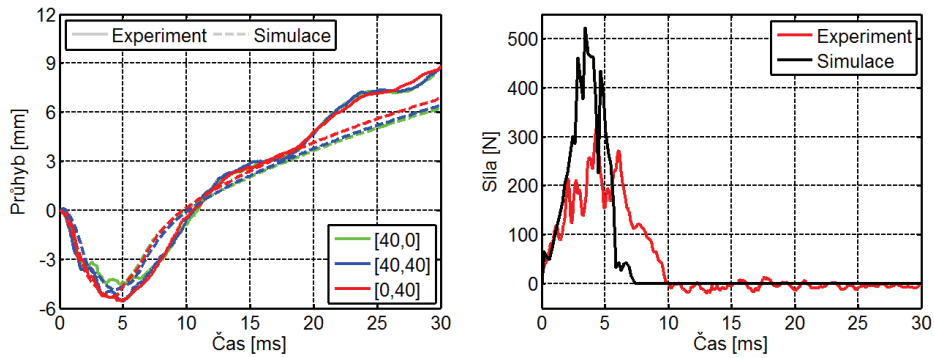
**Obrázek 7.15:** Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti  $m = 0,242$  kg a dopadovou rychlost  $v = 1$  m/s.



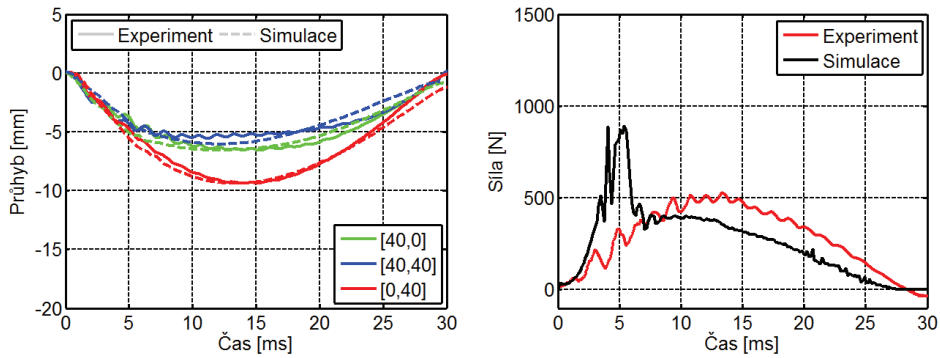
**Obrázek 7.16:** Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti  $m = 0,242$  kg a dopadovou rychlost  $v = 2$  m/s.



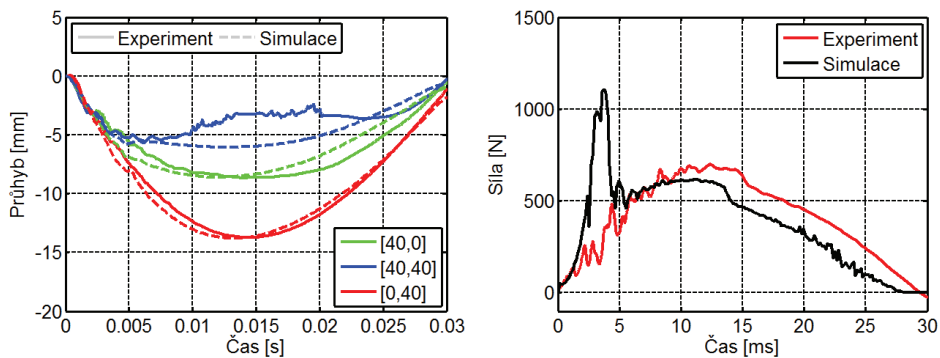
**Obrázek 7.17:** Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti  $m = 0,242$  kg a dopadovou rychlost  $v = 3$  m/s.



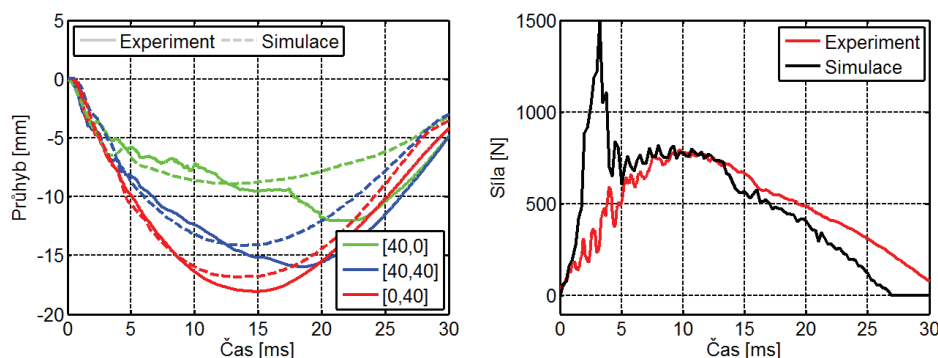
**Obrázek 7.18:** Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti  $m = 0,242$  kg a dopadovou rychlost  $v = 4$  m/s.



**Obrázek 7.19:** Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti  $m = 2,338$  kg a dopadovou rychlost  $v = 2$  m/s.



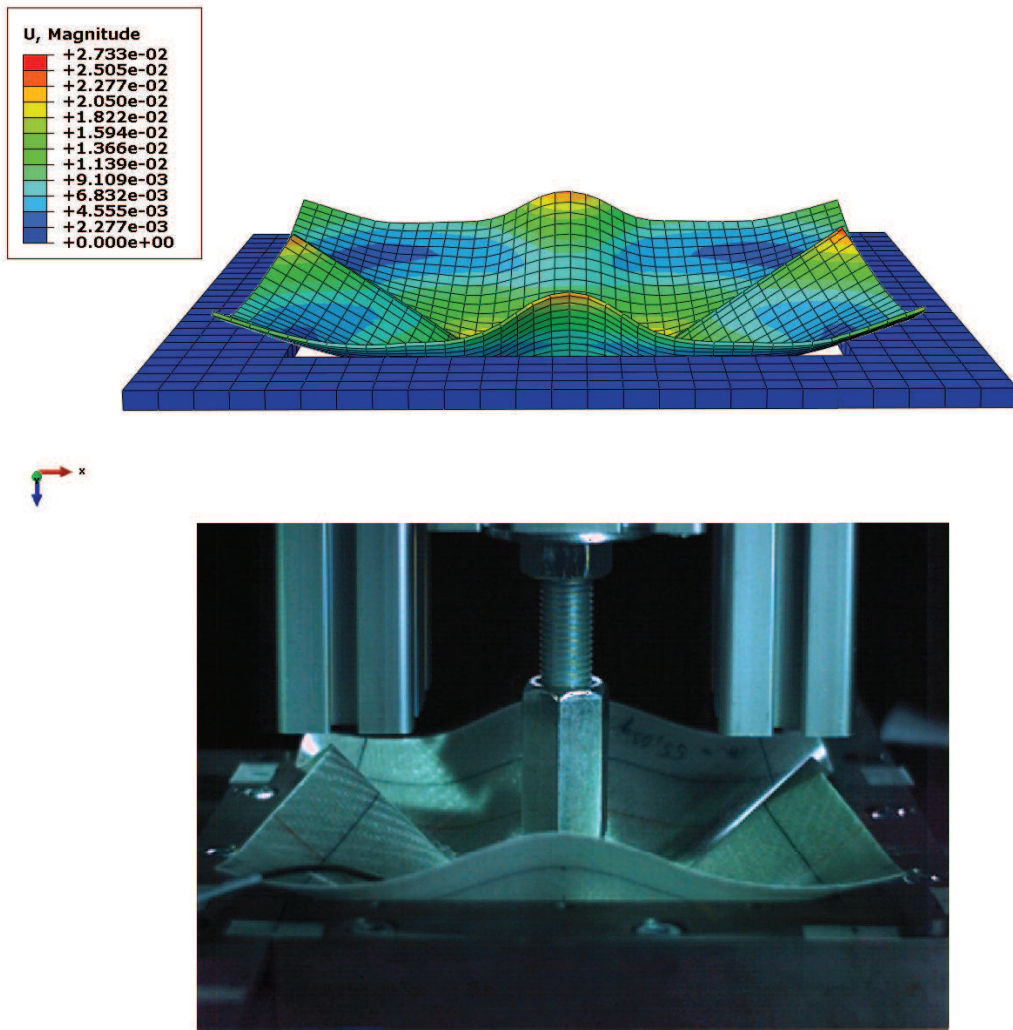
**Obrázek 7.20:** Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti  $m = 2,338$  kg a dopadovou rychlost  $v = 3$  m/s.



**Obrázek 7.21:** Porovnání průhybu a kontaktní síly kompozitní desky mezi experimentem a numerickou simulací pro razník o hmotnosti  $m = 2,338$  kg a dopadovou rychlost  $v = 4$  m/s.

Obrázek 7.22 znázorňuje porovnání deformace kompozitní desky vznikající při experimentu z rychlokamery a numerické simulaci při příčném zatížení impaktorem o hmotnosti  $m = 2,336$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4$  m/s. V případě numerické simulace jsou znázorněny velikosti průhybu v příčném směru. Znázorněny jsou nejvyšší průhyby vznikající na desce v čase  $t = 15$  ms od začátku rázové události. Série obrázků z vysokorychlostní kamery zachycující chování kompozitní desky při zatížení impaktorem o hmotnosti  $m = 2,336$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4,0$  m/s je uvedena v příloze C. Obrázky z experimentu jsou doplněny o ukázkou chování desky z numerické simulace ve stejnou dobu průběhu rázu. Počátek času ( $t = 0,0$  s) odpovídá prvotnímu kontaktu hlavy impaktoru s kompozitní deskou. Dané srovnání je provedeno v časovém rozmezí numerické simulace, tj. v čase  $t \in \langle 0; 30 \rangle$  ms. Vznik a rozvoj poškození kompozitní desky nebylo vysokorychlostní kamerou při rázu zachyceno z důvodu značné deformace desky. Poškození vznikalo na vnitřní části desky a na hladkém povrchu desky se vlivem značné deformace desky během rázu vyskytují odrazy světla od osvětlovací techniky.

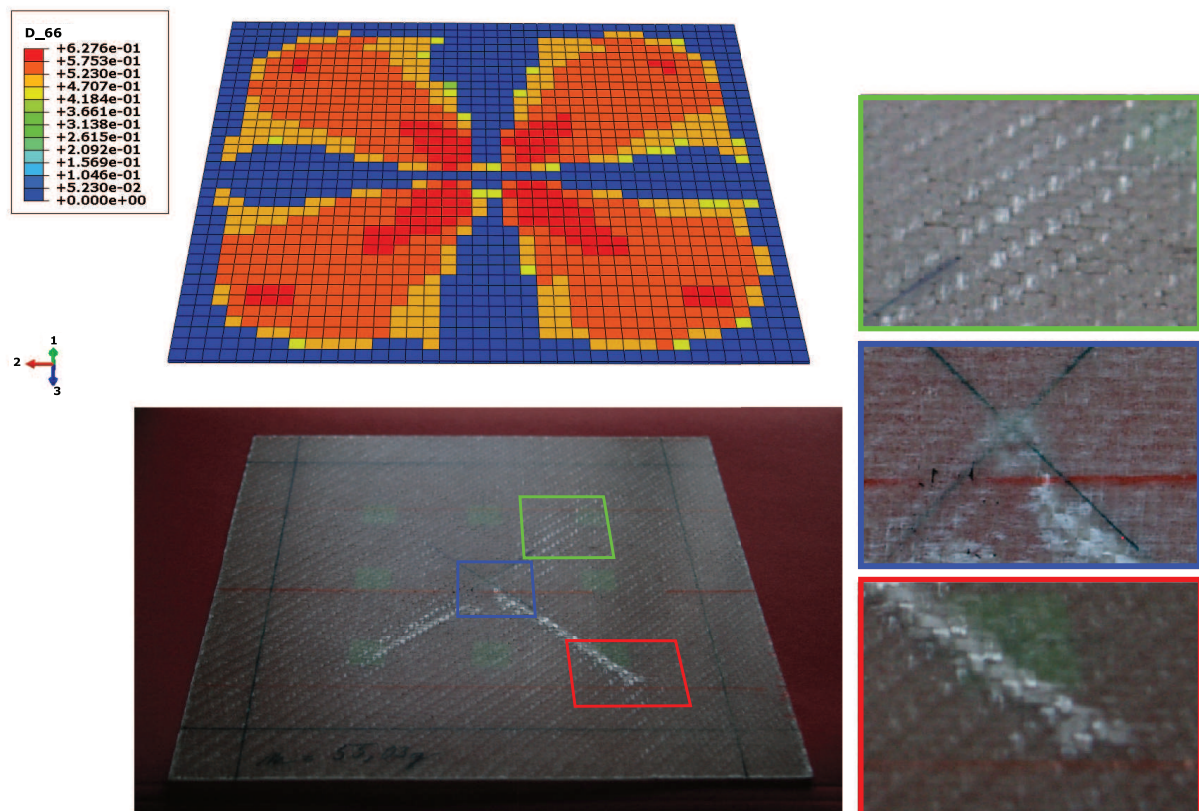
Při simulacích k poškození desky s impaktorem o hmotnosti  $m = 0,242$  kg shodně s realizovanými experimenty nedošlo. V případě impaktoru o hmotnosti  $m = 2,336$  kg bylo při simulacích zjištěno poškození kompozitní desky od dopadové rychlosti  $v = 2$  m/s. K poškození desky při numerických simulacích docházelo v místě dopadu impaktoru ve směru 2 v tahu – poškození  $D_{22}$ . Od dopadové rychlosti  $v = 3$  m/s docházelo v numerických simulacích ke kumulaci poškození  $D_{66}$  ve smyku v napěťové rovině 12. Pro uvedenou dopadovou rychlost nepřesáhla v daném případě velikost uvedeného poškození hodnoty  $D_{66} = 0,4$ . Obrázek 7.23 znázorňuje porovnání vzniklého poškození desky z numerické



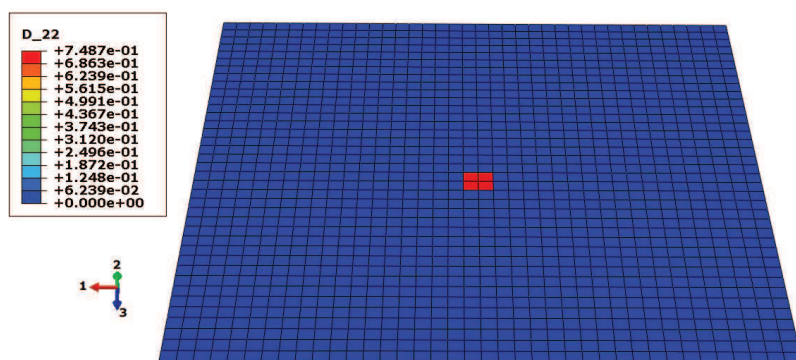
**Obrázek 7.22:** Ukázka deformace kompozitní desky v čase  $t = 15$  ms z numerické simulace a z vysokorychlostní kamery při experimentu při zatížení impaktorem o hmotnosti  $m = 2,336$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4$  m/s.

simulace a experimentu pro dopadovou rychlost  $v = 4$  m/s s impaktorem o hmotnosti  $m = 2,336$  kg. V případě numerické simulace je na obrázku 7.23 vykresleno poškození ve smyku v napěťové rovině  $12 D_{66}$ . Na výřezech z experimentu uvedených na obrázku 7.23 jsou patrná odlišná poškození desky, která byla způsobena dopadem impaktoru mimo její střed. Obrázek 7.24 zobrazuje vzniklé poškození desky ve směru  $2 D_{22}$  z numerické simulace, které vzniklo v daném případě tahovým namáháním. Dané poškození, které znázorňuje v případě numerické simulace obrázek 7.24, je v případě experimentu patrné na výřezu s modrým ohraničením uvedeném na obrázku 7.23.





Obrázek 7.23: Porovnání poškození kompozitní desky z numerické simulace a experimentu po realizaci rázu impaktoru o hmotnosti  $m = 2,336$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4,0$  m/s.



Obrázek 7.24: Vizualizace poškození kompozitní desky v tahu ve směru 2 po rázovém zatížení impaktorem o hmotnosti  $m = 2,336$  kg s dopadovou rychlostí  $v = 4,0$  m/s.

## 7.3 Shrnutí kapitoly

První část kapitoly je věnována procesu identifikace materiálových vlastností tkaninového kompozitu, pro jehož modelování bylo využito navrženého hyperplastického materiálového modelu s poškozením. Tento model byl implementován do programu Abaqus za využití subroutin UMAT a VUMAT. Pro identifikaci materiálových parametrů z cyklických tahových zkoušek bylo využito matematické optimalizace řízené programem OptiSLang. Cílem byla minimalizace rozdílu výsledků experimentu a numerických simulací.

Navržený model spolu s identifikovanými materiálovými parametry byl následně verifikován pomocí příčného nízkorychlostního rázu na kompozitní tkaninovou desku. Výpočtový model dané úlohy byl sestaven za využití vytvořeného programu v programovacím jazyce Python. Výsledky numerických simulací vykazují při porovnání s výsledky experimentu dobré shody v případě srovnání průhybů ve zvolených bodech na povrchu desky. V případě numerické simulace byly výsledné posuvy získány interpolací výsledků do jednotlivých míst měření. Průběhy kontaktních sil vznikající mezi impaktorem a tkaninovou deskou během rázu v případě numerické simulace vykazují v porovnání s výsledky z experimentu značné odchylky v počátcích vzniku rázového zatížení v podobě růstu špiček průběhů sil. Dané odchylky mohly vzniknout zanedbaným tlumením v kontaktu mezi impaktorem a kompozitní deskou při numerických simulacích, případně během experimentu mohlo docházet k tlumení impaktoru v důsledku vůle v lineárním vedení. Dále bylo provedeno kvantitativní porovnání výsledků vzniklého poškození mezi experimentem a numerickou simulací.

# Závěr

Předkládaná práce se zabývá simulací chování kompozitních materiálů. Práce je zaměřena na problematiku simulace chování kompozitů při nízkorychlostním rázu. Práce je rozčleněna na celkem sedm kapitol. V úvodu práce je čtenář seznámen se samotným pojmem kompozitní materiál a s krátkým přehledem historie využití těchto materiálů v technických a průmyslových oborech. Spolu s časovým vývojem jsou dále uvedeny i jeho hlavní přednosti a nevýhody.

První kapitola je věnována shrnutí současného stavu problematiky testování a modelování kompozitních materiálů se zaměřením na problematiku modelování a testování kompozitních sendvičových struktur s pěnovým jádrem. V první části kapitoly je uveden popis materiálových jevů obecně se vyskytujících ve zkoumaných materiálech následovaný rozbohem vývoje materiálových modelů založených na termomechanických principech. Sendvičovým strukturám s kompozitním potahem a jádrem z polymerních pěn je věnována třetí část první kapitoly. Čtenář se zde seznámí se stavem numerického simulování kompozitních potahů a polymerních pěn sendvičového jádra, popisem jejich chování a vznikem obvyklých poškození. V poslední části první kapitoly je provedeno shrnutí získaných poznatků z předchozích částí kapitoly, které byly následně využity při vypracování disertační práce.

Druhá kapitola je zaměřena na shrnutí teoretických a matematických základů v případě modelování plasticity a poškození v materiálech. Po krátkém seznámení se s fyzikální podstatou vzniku plasticity a poškození v materiálech je další část kapitoly věnována popisu obecného rozkladu celkové deformace na elastickou a plastickou část v aditivní podobě v případě uvažování velkých deformací elasto-plastického materiálu a logaritmické deformace. Následně je daná dekompozice deformace aplikována na případě jednorozměrné úlohy elasto-plastického materiálu s poškozením. Na stejném typu úlohy jsou dále uvedeny matematické základy modelování plasticity a poškození materiálu. V případě po-



škození materiálu je před uvedením základů modelování uveden rozbor metod a hypotéz modelování poškození s odvozením výsledných konstitutivních vztahů.

Ve třetí kapitole je uvedeno odvození autorem navrženého nelineárního elastického materiálového modelu tkaninového kompozitu s poškozením, který byl využit pro model potahu sendvičové struktury. Model uvažuje nelineární chování v materiálových směrech 1 a 2 a v napěťové rovině 12 v případě smyku. Nelineární chování ve smyku v napěťové rovině je modelováno pomocí nelineární funkce s konstantní asymptotou v kombinaci s postupnou degradací materiálových vlastností vycházející z Weibullova rozdělení v kombinaci s kritériem maximálního napětí.

Čtvrtá kapitola uvádí odvození hyperplastického materiálového modelu s poškozením navrženého pro modelování tkaninových kompozitů. Model je navržen v souladu s termodynamickými principy vycházejícími z prvního a druhého termodynamického zákona. Model uvažuje plastické tečení materiálu v případě smyku v napěťové rovině 12 a využívá aditivního rozkladu logaritmické deformace. Rozklad deformace na elastickou a plastickou část deformace je řešen iteračně za využití metody zlatého řezu. Poškození materiálu je realizováno za využití navržených degradačních funkcí odvíjejících se od velikosti příslušné elastické deformace.

V páté kapitole je popsána konstrukce a provedení experimentálního zařízení - padostroje, které bylo na katedře mechaniky sestaveno pro možnost realizace rázových zkoušek. Vedle popisu konstrukce samotného padostroje jsou v dané kapitole popsána i další měřicí a záznamová zařízení, kterých bylo využito při experimentálním zjišťování chování testovaných materiálu během rázových událostí uvedených v následujících dvou kapitolách.

Šestá kapitola se zabývá sestavením modelu sendvičové struktury, u které je pro modelování kompozitního potahu využito elastického nelineárního materiálového modelu popsaného ve třetí kapitole. Jádro sendvičové struktury je modelováno za využití nelineárního izotropního modelu polymerních pěn o nízké hustotě z knihoven MKP softwaru Abaqus, ve kterém byly také všechny příslušné simulace realizovány. Nelineární elastický materiálový model s poškozením byl do MKP softwaru Abaqus implementován za využití uživatelských subroutin UMAT a VUMAT pro možnost využití jak implicitního, tak explicitního řešiče. Dále zde byla provedena identifikace materiálových parametrů tkaninového potahu a polymerní pěny z realizovaných tahových a tlakových zkoušek. Identifikace materiálových parametrů tkaninového kompozitního potahu byla realizována s využitím matematické

optimalizace. Stanovená materiálová data kompozitního potahu a polymerního pěnového jádra byla validována za pomoci statické třibodové ohybové zkoušky sendvičového nosníku. Pro sestavení výpočtového modelu dané úlohy a stejně tak úlohy příčného rázového zatížení byl vytvořen program v jazyce Python, který na základě zadaných parametrů postavil příslušný výpočtový model pro MKP software Abaqus. V další části kapitoly je uveden princip interpolace posuvů numerické simulace pro možnost jejich objektivního porovnání s výsledky z laserových měřičů posuvu z experimentu. Sestavený model sendvičové struktury byl následně podroben srovnání s experimentem v případě realizace příčných nízkorychlostních rázů na sendvičový nosník a sendvičovou desku. Nosník a deska se vůči sobě odlišovaly rozdílnou odezvou na ráz a zejména pak vznikem odlišného poškození. V obou případech bylo dosaženo shody mezi výsledky numerické simulace a experimentu v podobě průběhu velikosti kontaktní síly mezi razníkem a sendvičovou strukturou a mezi průhyby sendvičové struktury. Vznik a rozvoj poškození mezi numerickými simulacemi a experimenty byl porovnán vizuálně ze snímků z vysokorychlostní kamery. I v daném případě bylo dosaženo dobré shody.

První část sedmé kapitoly je zaměřena na proces identifikace materiálových vlastností tkaninového kompozitu, pro jehož modelování bylo využito hyperplastického materiálového modelu s poškozením uvedeného ve čtvrté kapitole práce. Navržený materiálový model byl implementován do programu Abaqus za využití subroutin UMAT a VUMAT, které umožňují realizace numerických simulací jak za využití implicitního, tak explicitního řešiče. Pro identifikaci materiálových parametrů z cyklických tahových zkoušek bylo využito matematické optimalizace řízené programem OptiSLang. Materiálové parametry plasticity a poškození bylo nutné z důvodu implicitně svázaného materiálového modelu optimalizovat spolu. Problematice realizace samotného procesu identifikace materiálových vlastností je pak věnována samostatná podkapitola. Navržený model spolu s identifikovanými materiálovými parametry byl následně verifikován pomocí příčného nízkorychlostního rázu na kompozitní tkaninovou desku. Pro sestavení výpočtového modelu bylo využito vytvořeného programu v jazyce Python. Výsledky numerických simulací vykazují při porovnání s výsledky experimentu dobré shody v případě srovnání průhybů ve zvolených bodech na povrchu desky. V případě numerické simulace byly výsledné posuvy získány interpolací výsledků do jednotlivých míst měření. Průběhy kontaktních sil vznikající mezi razníkem a tkaninovou deskou během rázu v případě numerické simulace vykazují v porovnání s výsledky z experimentu značné odchylky v počátcích vzniku rázo-

vého zatížení v podobě růstu špiček průběhů sil. I přes snahu autora práce se dané rozdíly v průbězích kontaktních sil nepodařilo při realizaci numerických simulací odstranit. Dané odchylky mohou vznikat zanedbaným tlumením v kontaktu mezi razníkem a kompozitní deskou při numerických simulacích. Nutno podotknout, že hodnota tlumení nebyla během celého rázu konstantní z důvodu vůle ve vedení razníků. Při rázu mohlo dojít k posuvu, případně k natočení desky vůči svému původnímu uložení a uvažovanému bodu rázů důsledkem nadměrné deformace desky. Bylo provedeno porovnání výsledků vzniklého poškození mezi experimentem a numerickou simulací. Vznik poškození mezi numerickými simulacemi a experimenty byl kvantitativně porovnán. Rozvoj poškození během experimentu nebylo možné z důvodu značné deformace testované desky během rázu a oblasti vzniku poškození stanovit ze snímků z vysokorychlostní kamery.

## Zhodnocení cílů disertační práce

V následující části je provedeno zhodnocení dosažených cílů se stanovenými cíli, které jsou uvedeny v úvodu práce.

1. *Navrhnout numericko-experimentální metodiku využívající optimalizačních metod pro identifikaci materiálových vlastností a analyzovat vlivy parametrů jako např. rychlosti dopadu impaktoru, energie zavedené do kompozitní struktury rázovou budící silou aj.;*

Numericko-experimentální metodika využívající optimalizačních metod pro identifikaci materiálových vlastností byla sestavena pro oba navržené materiálové modely, její popis je uveden v příslušných kapitolách práce. Při provedení srovnání je patrná značná složitost v případě identifikace materiálových parametrů tkaninového kompozitu za využití elasto-plastického materiálového modelu s poškozením oproti obdobnému materiálu za využití nelineárního elastického modelu s poškozením.

Autor práce se zabýval i problematikou a návrhem numericko-experimentální metodiky využívající optimalizačních metod pro identifikaci materiálových parametrů v případě dynamického zatížení materiálu nízkorychlostním rázem. Při znalosti geometrie a skladby materiálu, místa dopadu a dopadové rychlosti impaktoru bylo možné identifikovat materiálové parametry testovaného materiálu [A3]. Residuum představovala odezva materiálu

v podobě průhybu. Daná metodika byla testována na případě jednosměrových kompozitních desek zatížených nízkorychlostním rázem, kdy při srovnání výsledků průhybů desky z numerické simulace a experimentu pro určitý rozsah dopadových rychlostí vykazovaly numerické simulace rostoucí chybu průhybů se zvyšující se dopadovou rychlostí v porovnání s experimentem [A6, A7]. Navrženou optimalizační metodou byla postupně provedena identifikace materiálových parametrů jednosměrového dlouhovláknového kompozitu pro jednotlivé dopadové rychlosti. Identifikované materiálové parametry vykazovaly nahodilé hodnoty a danou metodu nelze před provedením citlivostní analýzy a vyloučení řady materiálových parametrů vůbec použít [A3]. Samotné výsledky rázových zkoušek v podobě průhybů nejsou navíc jako základní data pro určení materiálových parametrů zcela vhodné, protože tyto výsledky mohou být zatíženy nepřesnostmi vznikajícími při realizaci experimentů (např. nepřesnost v uložení testovaného tělesa, odchylka v dopadové rychlosti impaktoru či odchylka uvažovaného místa dopadu impaktoru na testované těleso od místa skutečného). Vznikající nesrovnalosti při porovnání výsledků průhybů z numerické simulace a experimentů v závislosti na dopadové rychlosti impaktoru byly odstraněny aplikací interpolace výsledků z numerické simulace před jejich porovnáním s experimentálními daty (viz podkapitola 6.4.2). Navržená numericko-experimentální metodika využívající optimalizačních metod pro identifikaci dynamických materiálových parametrů s ohledem na rychlost dopadu impaktoru nebyla do disertační práce zahrnuta z důvodu její neprokázané využitelnosti v praxi. Použitý materiál, na kterém byla metodika testována, nespadá do oblasti modelování složitějších kompozitních struktur, na které je práce zaměřena.

Z výše uvedeného vyplývá, že rychlost dopadu impaktoru, případně energie zavedená do kompozitní struktury budící rázovou silou má v případě nízkorychlostních rázů minimální vliv na identifikované hodnoty materiálových parametrů. Pro nízkorychlostní rázy lze využít staticky určené materiálové parametry. To potvrzují jednak závěry z provedené rešerše dané problematiky, a stejně tak i výsledky rázových zkoušek uvedené v práci.

- 2. Analyzovat vliv a nutnost modelování kompozitní struktury s využitím nelineárního konstitutivního vztahu zejména ve smyku.*

Pro co nejvěrohodnější vypovídající hodnotu numerických simulací zaměřených na testování konstrukcí a zjišťování vhodnosti aplikace nových materiálů by numerické simulace měly vykazovat obdobné chování, které vykazuje daný materiál při experimentálním testování. Z experimentálních výsledků je patrné, že zkoušené tkaninové kompozity vykazují značnou nelinearitu ve smyku, proto je nutné nelineární chování uvažovat i v případě numerických simulací. V práci jsou na navržených materiálových modelech ukázány dva možné přístupy k modelování nelineárního chování tkaninových kompozitů. Použití jednotlivých modelů závisí na uvažovaném druhu řešené úlohy.

- 3. Vybrat, eventuálně modifikovat vhodná kritéria porušení predikující porušení jak ve vrstvě kompozitního materiálu, tak v mezivrstvě mezi dvěma vrstvami sousedních lamin.*

Práce je zaměřena na problematiku modelování složitějších kompozitních struktur v podobě tkaninových kompozitů. Jak již bylo zmíněno v rešerši práce, kritéria porušení jsou navržena pro predikci porušení jednosměrových kompozitů a jejich užití v práci je tak značně omezené. Pro predikci porušení vlastního nelineárního elastického materiálového modelu tkaninového kompozitu s poškozením bylo využito kritéria maximálních napětí. Elasto-plastický materiálový model s poškozením uvažoval postupnou degradaci materiálových vlastností za pomoci navržené funkce poškození závislé na velikosti elastické deformace. Model se v daném případě obešel bez nutnosti využití kritéria porušení v obvyklém vyjádření, tj. za využití příslušných hodnot mezních napětí nebo deformací. Provedení celkové degradace materiálových vlastností se řídilo dle velikosti dosaženého kumulovaného poškození. Pro predikci zbytkové tuhosti a pevnosti materiálu nejsou samotná kritéria porušení v případě tkaninových kompozitů vhodná.

Použití a zahrnutí intralaminárních kritérií do navržených materiálových modelů bylo do značné míry omezeno faktem, že při experimentálním testování tkaninových kompozitů nedošlo k vytvoření a jednoznačnému prokázání vzniku delaminace mezi jednotlivými vrstvami tkaniny. Testované tkaninové kompozity vykazovaly víceméně poškození tlakem v podobě poškození matrice při příčných rázech. Intralaminární kritéria porušení navržené

modely neobsahují. Delaminace nevznikala ani v případě testování sendvičové struktury, kdy nedocházelo k porušení rozhraní mezi tkaninovým kompozitním potahem a polymerním pěnovým jádrem. S ohledem na částečné prosycení pěnového jádra pryskyřicí z vnějších potahů dosahují daná rozhraní vyšší pevnosti než samotná pěna.

#### 4. *Validovat výpočtové modely experimentem.*

Oba navržené modely byly podrobeny srovnání s experimentálními daty z provedených nízkorychlostních rázů. V případě nelineárního elastického modelu kompozitního potahu byl model testován v rámci navrženého modelu sendvičové struktury. Sendvičová kompozitní struktura byla vedle série nízkorychlostních rázů podrobena i základní zkoušce těchto struktur v podobě statické tříbodové ohybové zkoušky. Daná zkouška byla realizována až do zhroucení celkové sendvičové struktury. Obdobnému testu byla vystavena i samotná polymerní pěna tvořící jádro sendvičové struktury. Navržený elasto-plastický materiálový model tkaninového kompozitu s poškozením byl validován sérií příčných nízkorychlostních rázů. Další testování tohoto modelu bylo do značné míry omezeno nízkou ohybovou tuhostí testovaného materiálu. V případě realizovaných nízkorychlostních rázů byly výpočtové modely srovnány s experimentálními daty v podobě časových průběhů průhybů testovaných materiálů ve zvolených bodech a spolu s průběhy kontaktních sil vznikajících mezi impaktorem a testovaným tělesem. Chování testovaného materiálu, vznik a rozvoj poškození během realizovaných nízkorychlostních rázů byl porovnán s výsledky numerických simulací pouze vizuálně za využití záznamů z vysokorychlostní kamery.

## **Přínos práce**

Hlavní přínos předkládané práce spočívá v navržení dvou materiálových modelů pro modelování tkaninových kompozitů. Konkrétně byl navržen nelineární elastický materiálový model tkaninového kompozitu s porušením a hyperplastický materiálový model tkaninového kompozitu s porušením. Dané modely byly implementovány do komerčního MKP softwaru Abaqus 6.14 jak pro případ využití implicitního, tak explicitního řešiče za využití materiálových subroutin UMAT a VUMAT napsaných v programovacím jazyce Fortran. Modely, které by byly schopny obdobným způsobem popisovat chování kompozitních materiálů, knihovny daného MKP softwaru nenabízejí. Pro oba modely byla

sestavena a v práci je také představena numericko-experimentální metodika využívající optimalizačních metod pro identifikaci materiálových parametrů jednotlivých modelů. Dále byl sestaven výpočtový model sendvičové struktury skládající se z pěnového jádra a kompozitního potahu. Byly vytvořeny programy v jazyce Python, které na základě zadaných parametrů automaticky sestaví jednotlivé výpočtové modely využívané v práci pro MKP software Abaqus. Všechny numerické simulace jsou v práci podloženy realizovanými experimenty. V případě nízkorychlostních rázů byl pro daný účel sestaveno experimentální zařízení – padostroj.

Ve své další práci by se autor chtěl nadále věnovat modelování kompozitních materiálů, zejména pak dalšímu vývoji a rozvoji již sestavených materiálových modelů kompozitních materiálů. Pozornost by autor dále rád směřoval do problematiky modelování polymerních pěn, kde by chtěl docílit sestavení vlastního elasto-plastického materiálového modelu polymerní pěny.

# Literatura

- [1] S. Abrate. *Impact Engineering of Composite Structures*. Springer WienNewYork, Udine, Italy, 2011. ISBN: 978-3-7091-0522-1.
- [2] R. K. Abu Al-Rub and G. Z. Voyiadjis. On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials. *International Journal of Solid Structures*, vol. 40, 2003.
- [3] L. Aktay, A. F. Johnson, and M. Holzapfel. Prediction of impact damage on sandwich composite panels. *Computational Materials Science*, vol. 32, 2005.
- [4] T. Anderson and E. Madenci. Experimental investigation of low-velocity impact characteristics of sandwich composites. *Composite Structures*, vol. 50, 2000.
- [5] P. M. A. Areias, J. M. A. César de Sá, and C. A. Conceição António. A gradient model for finite strain elastoplasticity coupled with damage. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 39, 2003.
- [6] G. Belingardi, M. P. Cavatorta, and R. Duella. Material characterization of a composite-foam sandwich for the front structure of a high speed train. *Composite Structures*, vol. 61, 2003.
- [7] M. Birsan, T. Sadowski, L. Marsavina, E. Linul, and D. Pietras. Mechanical behavior of sandwich composite beams made of foams and functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 50, 2013.
- [8] P. O. Bouchard, L. Bourgeon, S. Fayolle, and K. Mocellin. An enhanced lemaître model formulatin for materials processing damage computation. *International Journal of Material Forming*, vol. 4, no. 3, 2011.



- [9] M. C. Boyce, G. G. Weber, and D. M. Parks. On the kinematics of finite strain plasticity. *Massachusetts Institute of Technology, Technical Report No. 14*, 1988.
- [10] M. Á. Caminero, F. J. Montáns, and K. J. Bathe. Modeling large strain anisotropic elasto-plasticity with logarithmic strain and stress measure. *Computers and Structures, vol. 89*, 2011.
- [11] M. Canadija and J. Mosler. On the thermomechanical coupling in finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening by means of incremental energy minimalization. *Preprint of an article accepted by International Journal of Solids and Structures*, 2011.
- [12] J. L. Chaboche. Continuum damage mechanics: Part i - general concepts, part ii - damage growth, crack initiation, and crack growth. *Journal of Applied Mechanics, vol. 55*, 1988.
- [13] A. Chemami, K. Bey, J. Gilgert, and Z. Azari. Behaviour of composite sandwich foam-laminated glass/epoxy under solicitation static and fatigue. *Composites: Part B, vol. 43*, 2012.
- [14] I. F. Collins and G. T. Houlsby. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. *Report No. OUEL 2100/96, University of Oxford, Department of Engineering Science*, 1997.
- [15] Dassault Systèmes Simulia Corp. *Abaqus documentation, Version 6.14*. 2014.
- [16] E. A. de Souza Neto, D. Perić, and D. R. J. Owen. *Computational Methods for Plasticity - Theory and Applications*. John Wiley and Sons Ltd., West Sussex, United Kingdom, 2008. ISBN: 978-0-470-69452-7.
- [17] M. V. Donadon, L. Iannucci, B. G. Falzon, J. M. Hodgkinson, and S. F. de Almeida. A progressive failure model for composite laminates subjected to low velocity impact damage. *Computers and Structures, vol. 86*, 2008.
- [18] I. Einav, G. T. Houlsby, and G. D. Nguyen. Coupled damage and plasticity models derived from energy and dissipation potentials. *International Journal of Solids and Structures, vol. 44*, 2007.

- [19] R. Fatia, J. Oliver, and M. Cervera. A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *Journal Solids Structures*, vol. 35, No. 14, 1998.
- [20] D. Feng and F. Aymerich. Damage prediction in composite sandwich panels subjected to low-velocity impact. *Composites: Part A*, vol. 52, 2013.
- [21] L. J. Gibson. Biomechanics of cellular solids. *Journal of Biomechanics*, vol. 38, 2005.
- [22] L. Gigliotti and S. T. Pinho. Prediction of the post-crushing compressive response of progressively crushable sandwich foam cores. *Composites: Part A*, vol. 80, 2016.
- [23] Dynardo GmbH. *OptiSLang Documentation, Version 3.2.0*. <http://www.dynardo.de/en/software/optislang.html>, 2011.
- [24] M. J. Hinton, A. S. Kaddourb, and P. D. Soden. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence. *Composites Science and Technology*, vol. 62, 2002.
- [25] Z. Hlaváč. Metody numerické minimalizace. <http://www.kme.zcu.cz/download/predmety/448-dso5.pdf>, 2013.
- [26] M. Horák and M. Jirásek. An extension of small-strain models to the large-strain range based on an additive decomposition of logarithmic strain. *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics*, vol. 16, 2013.
- [27] G. T. Houlsby and A. M. Puzrin. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials. *International Journal of Plasticity*, vol. 16, 2000.
- [28] H. M. Hsiao and I. M. Daniel. Strain rate behavior of composite materials. *Composites Part B*, vol. 29, 1998.
- [29] I. Ivanñez, C. Santiuste, E. Barbero, and S. Sanchez-Saez. Numerical modelling of foam-cored sandwich plates under high-velocity impact. *Composite structures*, vol. 93, 2011.
- [30] I. Ivanez, C. Santiuste, and S. Sanchez-Saez. Fem analysis of dynamical flexural behaviour of composite sandwich beams with foam core. *Composite Structures*, vol. 92, 2010.

- [31] W. Jiang, Y. Li, Y. Shu, and Z. Fan. Analysis of metallic ductile fracture by extended gurson models. *13th International Conference on Fracture, June 16-21, 2013, Beijing, China*, 2013.
- [32] H. E. Johnson, L. A. Louca, S. Mouring, and Fallah S. A. Modelling impact damage in marine composite panels. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 36, 2009.
- [33] M. Kachanov. On the concept of damage in creep and in the brittle-elastic range. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 3, 1994.
- [34] A. S. Kaddour, M. J. Hinton, and P. D. Soden. A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates-additional contributions. *Composites Science and Technology*, vol. 64,, 2004.
- [35] P. I. Kattan and G. Z. Voyiadjis. Decomposition of damage tensor in continuum damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, september 2001.
- [36] S. Kilchert, A. F. Johnson, and H. Voggenreiter. Modelling the impact behaviour of sandwich structures with folded composite cores. *Composites: Part A*, vol. 57, 2014.
- [37] E. H. Kim, M. S. Rim, I. Lee, and T. K. Hwang. Composite damage model based on continuum damage mechanics and low velocity impact analysis of composite plates. *Composite structures*, vol. 95, 2013.
- [38] K. O. Koksal and C. Karakoc. An isotropical damage model for concrete. *Materials and Structures*, vol. 32, 1999.
- [39] Z. Kořínek. Historie použití kompozitních materiálů u lodí, letadel, automobilů a v kosmické technice. *Dostupné na: <http://mujweb.cz/zkorinek/historie.pdf>*.
- [40] T. Kroupa. *Poškození kompozitů vlivem rázu*. Disertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2006.
- [41] T. Kroupa, R. Zemčík, and J. Klepaček. Temperature dependence of parameters of non-linear stress-strain relationship for carbon epoxy composites. *Materials and Technology*, vol. 43, no. 2, 2009.

- [42] K. Kunc. *Mikromechanický model tkaninového kompozitu*. Bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2010.
- [43] K. Kunc. *Implementace elasto-plastického modelu s degradací materiálových parametrů pro textilní kompozity do komerčního MKP softwaru*. Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2013.
- [44] G. S. Langdon, D. Karagiozova, C. J. von Klemperer, G. N. Nurick, A. Ozinsky, and E. G. Pickering. The air-blast response of sandwich panels with composite face sheets and polymer foam cores: Experiments and predictions. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 54, 2013.
- [45] G. S. Langdon, C. J. von Klemperer, B. K. Rowland, and G. N. Nurick. The response of sandwich structures with composite face sheets and polymer foam cores to air blast loading: Preliminary experiments. *Engineering Structures*, vol. 36, 2012.
- [46] I. Lapczyk and J. A. Hurtado. Progressive damage modeling in fibre-reinforced materials. *Composites: Part A*, vol. 38, 2007.
- [47] V. Laš. *Mechanika kompozitní materiálů*. Západočeská univerzita v Plzni, 2008. ISBN: 978-80-7043-698-9.
- [48] W. Lee, J. Cao, P. Badel, and P. Boisse. Non-orthogonal constitutive model for woven composites incorporating tensile effect on shear behavior. *Journal of Material Forming*, vol. 1, supplement 1, 2008.
- [49] J. Lemaitre. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, 1984.
- [50] J. Lemaitre. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 107, 1985.
- [51] J. Lemaitre and J. Dufailly. Damage measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 28, No. 5/6, 1987.
- [52] J. Lin, Y. Liu, and T. A. Dean. A review on damage mechanisms, models and calibration methods under various deformation conditions. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 18, 2005.

- [53] V. A. Lubarda. An analysis of large-strain damage elastoplasticity. *Solids Structures*, vol. 31, no. 21, 1994.
- [54] V. A. Lubarda. *Elastoplasticity Theory*. CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, USA, 2002. ISBN: 0-8493-1138-1.
- [55] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Dover Publications, inc., New York, USA, 2008. ISBN-13: 978-0486462905.
- [56] J. Lubliner, R. L. Taylor, and F. Auricchio. A new model of generalized plasticity and its numerical implementation. *Journal Solids Structures*, vol. 30, No. 22, 1993.
- [57] B. Luccioni, S. Oller, and R. Danesi. Coupled plastic-damaged model. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 129, 1996.
- [58] P. Maa, F. Zhang, Z. Gao, G. Jiang, and Y. Zhu. Transverse impact behaviors of glass warp-knitted fabric/foam sandwich composites through carbon nanotubes incorporation. *Composites: Part B*, vol. 56, 2014.
- [59] A. G. Mamalis, K. N. Spentzas, D. P. Papapostolou, and N. Pantelidis. Finite element investigation of the influence of material properties on the crushing characteristics of in-plane loaded composite sandwich panels. *Thin-Walled Structures*, vol. 63, 2013.
- [60] A. C. Manalo, T. Aravinthan, and W. Karunasena. Shear behaviour of glued structural fibre composite sandwich beams. *Construction and Building Materials*, vol. 47, 2013.
- [61] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, inc., New York, USA, 1994. ISBN: 0-486-67865-2.
- [62] A. Matzenmiller, J. Lubliner, and R. L. Taylor. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of Materials*, vol. 20, 1995.
- [63] C. Menna, A. Zinno, D. Asprone, and A. Prota. Numerical assessment of the impact behavior of honeycomb sandwich structures. *Composite Structures*, vol. 106, 2013.
- [64] P. Miamí, P. P. Camanho, J. A. Mayugo, and C. G. Dávila. A continuum damage model for composite laminates-part i - constitutive model. *Mechanics of Materials*, vol. 39, 2007.

- [65] N. J. Mills. *Polymer Foams Handbook - Engineering and Biomechanics Applications and Design Guide*. Elsevier Ltd., Oxford, Great Britain, 2007. ISBN: 978-0-7506-8069-1.
- [66] N. J. Mills, R. Stampfli, F. Marone, and P. A. Bruhwiler. Finite element micromechanics model of impact compression of closed-cell polymer foams. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, 2009.
- [67] R. A. W. Mines and N. Jones. Approximate elastic-plastic analysis of the static and impact behaviour of polymer composite sandwich beams. *Composites*, vol. 26, 1995.
- [68] F. J. Montáns and K. J. Bathe. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 63, 2005.
- [69] A. Mostafa, K. Shankar, and E. V. Morozov. Effect of shear keys diameter on the shear performance of composite sandwich panel with pvc and pu foam core: Fe study. *Composite Structures*, vol. 102, 2013.
- [70] S. Murakami. *Continuum Damage Mechanics - A Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, Netherland, 2012. ISBN: 978-94-007-2665-9.
- [71] R. Nasirzadeh and A. R. Sabet. Study of foam density variations in composite sandwich panels under high velocity impact loading. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 63, 2014.
- [72] W. J. Nauta. *Stabilisation of low density, closed cell polyethylene foam*. PhD thesis, University of Twente, Eindhoven, Netherlands, 2000.
- [73] M. K. Nielsen, H. S. Morgan, and R. D. Krieg. A phenomenological constitutive model for low density polyurethane foams. *Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, report for National Technical Information Service, USA*, 1987.
- [74] G. D. Nguyen. A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory. *A Thesis of Doctor of Philosophy, The University of Oxford*, 2005.

- [75] G. D. Nguyen, A. M. Korsunsky, and J. Belnoue. A nonlocal coupled damage-plasticity model for the analysis of ductile failure. *International Journal of Plasticity*, vol. 64, 2015.
- [76] S. Olivík. Ukázka možností interpolace dat v softwaru matlab. <https://mat.fsv.cvut.cz/komisevstez/13/prispevky/olivik.pdf>, 2006.
- [77] R. Olsson. Mass criterion for wave controlled impact response of composite plates. *Composites: Part A*, vol. 31, 2000.
- [78] E. Ondráček. Příspěvek k teorii plastického potenciálu. *Aplikace matematiky*, vol 8, no. 3, 1963.
- [79] M. Ortiz. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mechanics and Materials*, vol. 4, 1985.
- [80] A. M. Puzrin and G. T. Houlsby. Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, 2001.
- [81] S. H. Pyo and H. K. Lee. An elastoplastic damage model for metal matrix composites considering progressive imperfect interface under transverse loading. *International Journal of Plasticity*, vol. 26, 2010.
- [82] W. Ramberg and W. R. Osgood. Description of stress-strain curves by three parameters. *Technical Note No. 902, National Advisory Committee for Aeronautics*, 1943.
- [83] K. T. Ramesh. High strain rate and impact experiments. *Chapter 33 in book: Handbook of Experimental Solid Mechanics - W.N. Sharpe, Springer*, 2008.
- [84] V. Rizov, A. Shipsha, and D. Zenkert. Indentation study of foam core sandwich composite panels. *Composite Structures*, vol. 69, 2005.
- [85] V. I. Rizov. Non-linear indentation behavior of foam core sandwich composite materials - a 2d approach. *Computational Materials Science*, vol. 35, 2006.
- [86] P. J. G. Schreurs. *Computational Material Models - Lecture notes*. Eindhoven University of Technology, Department of Mechanical Engineering, Eindhoven, Netherlands, <http://www.mate.tue.nl/piet/edu/cmm/pdf/cmmsyl1314.pdf>, 2014.



- [87] B. R. Seth. Generalized strain measure with applications to physical problems. *Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics*, 1962.
- [88] M. Shariyat and A. Niknami. Impact analysis of strain-rate-dependent composite plates with sma wires in thermal environments: Proposing refined coupled thermoelasticity, constitutive and contact models. *Composite Structures*, vol. 136, 2016.
- [89] Z. Shengqing and C. Gin Boay. Damage and failure mode maps of composite sandwich panel subjected to quasi-static indentation and low velocity impact. *Composite structures*, vol. 101, 2013.
- [90] A. Tabiei and R. Murugesan. Thermal structural forming simulation of carbon and glass fiber reinforced plastic composites. *International Journal of Composite Materials*, vol. 5, No. 6, 2015.
- [91] A. U. Ude, A. K. Ariffin, and C. H. Azhari. Impact damage characteristics in reinforced woven natural silk/epoxy composite face-sheet and sandwich foam, coremat and honeycomb materials. *International Journal of Impact Engineering*, vol. 58, 2013.
- [92] K. Y. Volokh. An approach to elastoplasticity at large deformations. *Faculty of Civil and Environmental Engineering, Israel Institute of Technology, Haifa*, 2012.
- [93] G. Z. Voyiadjis and B. Deliktas. A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, 2000.
- [94] G. Z. Voyiadjis and T. Park. The kinematics of damage for finite-strain elasto-plastic solids. *International Journal of Engineering Science*, vol. 37, 1999.
- [95] S. Wijnands. *Volumetric behavior of polymer foams during compression and tension*. Bachelor of Science End Project, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, Netherlands, <http://www.mate.tue.nl/mate/pdfs/12240.pdf>, 2010.
- [96] J. W. Wu and J. Li. On the mathematical and thermodynamical descriptions of strain equivalence based anisotropic damage model. *Mechanics and Materials*, vol. 40, 2008.



- [97] H. Xiao, O. T. Bruhns, and A. Meyers. Elastoplasticity beyond small deformations. *Acta Mechanica*, vol. 182, 2006.
- [98] C. F. Yen. Ballistic impact modeling of composite materials. *7th International LS-Dyna User's Conference, Dearborn, Michigan*, 2006.
- [99] S. S. Yu, Y. Lu, and Y. Cai. The strain-rate effect of engineering materials and its unified model. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 10, no. 4, 2006.
- [100] R. Zemčík, T. Kroupa, V. Laš, and H. Purš. Identification of material characteristics of sandwich panels. *Bulletin of Applied Mechanics*, vol. 26, 2011.
- [101] G. Zhang, B. Wang, L. Ma, L. Wu, S. Pan, and J. Yang. Energy absorption and low velocity impact response of polyurethane foam filled pyramidal lattice core sandwich panels. *Composite structures*, vol. 108, 2014.
- [102] Z. L. Zhang, C. Thalow, and J. Odegård. A complete gurson model approach for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 67, 2000.
- [103] Y. Zheng. *Nonlinear Strain Rate Dependent Composite Model for Explicit Finite Element Analysis*. PhD thesis, The Graduate Faculty of The University of Akron, 2006.
- [104] J. Zhou, Z. W. Guan, and W. J. Cantwell. The impact response of graded foam sandwich structures. *Composite Structures*, vol. 97, 2013.

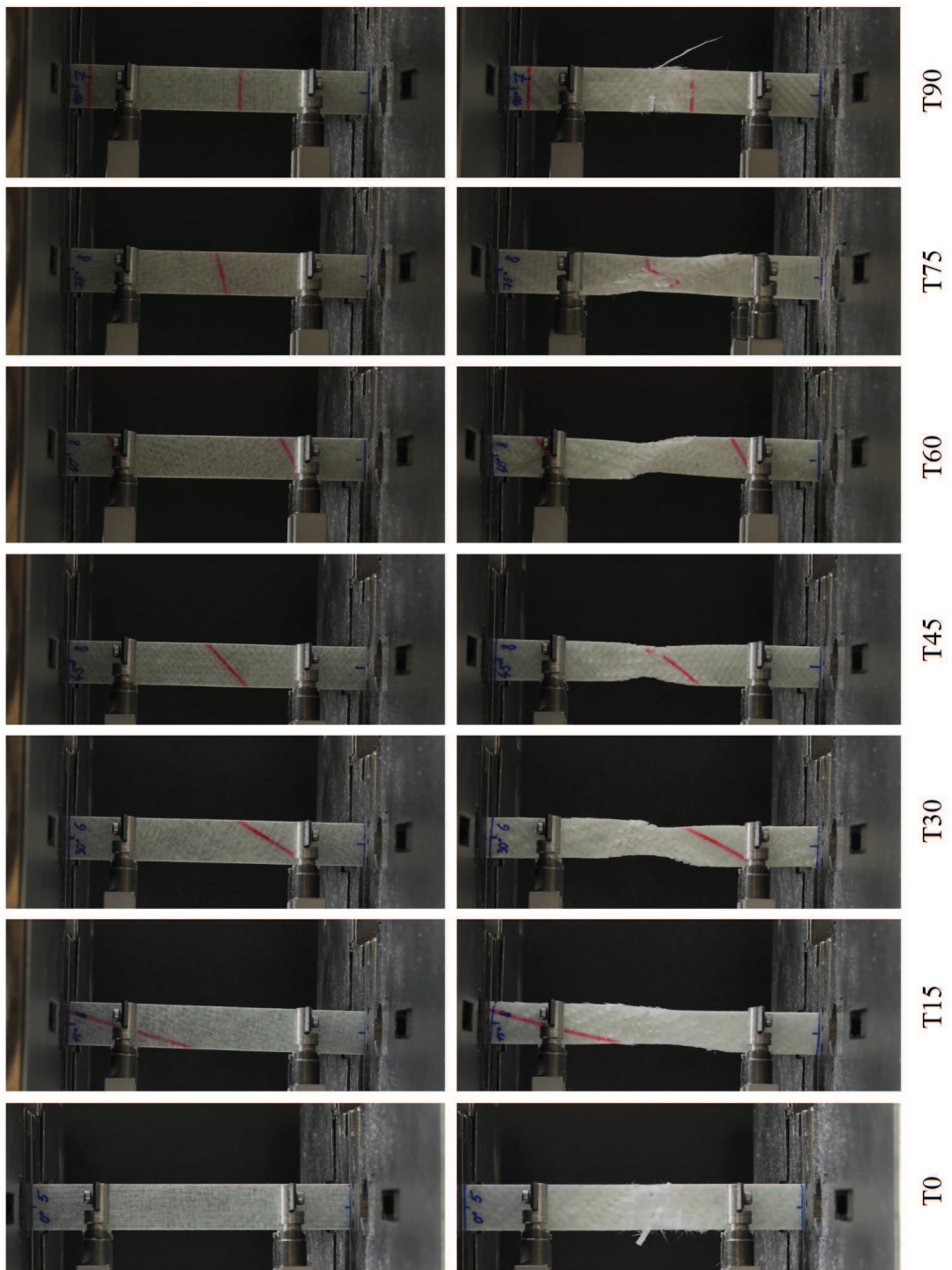
# Soupis prací autora souvisejících s tématem práce

- [A1] T. Kroupa, J. Bartošek, and T. Mandys. *Zařízení pro nízkorychlostní rázové zkoušky*. Prototyp, funkční vzorek, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2011.
- [A2] T. Mandys. *Numerická simulace rázu tělesa na kompozitovou desku*. Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2010.
- [A3] T. Mandys, T. Kroupa, and V. Laš. Determination of value of shear modulus for linear stress-strain relationship in case of impact on composite plate. *Proceedings of the 50th Annual Conference on Experimental Stress Analysis, Czech Technical University in Prague, Praha, 2012*.
- [A4] T. Mandys, T. Kroupa, and V. Laš. *Identification of Material Parameters of Sandwich Composite Panel for Low-Velocity Impact Loading*. 21st international conference on materials and technology - program and book of abstracts, Inštitut za Kovinske Materiale in Technologije, Ljubljana, Slovenia, 2013. ISBN: 978-961-92518-6-7.
- [A5] T. Mandys, T. Kroupa, and V. Laš. Progressive failure analysis of composite sandwich beam in case of quasistatic loading. *Material and Technology, vol. 48, no. 4, 2014*.
- [A6] T. Mandys, T. Kroupa, V. Laš, R. Zemčík, and J. Bartošek. Finite element analysis of failure of composite plate in ls-dyna in case of low-velocity impact. *Proceedings of the 3rd ECCOMAS thematic conference on Mechanical Response of Composite, Leibnitz University Hannover, Hannover, 2011*.

- [A7] T. Mandys, T. Kroupa, V. Laš, R. Zemčík, and J. Bartošek. Investigation of response of composite plate subjected to low-velocity impact. *Proceedings: 49th international scientific conference: Experimental stress analysis 2011, University of Technology, Brno*, 2011.
- [A8] T. Mandys, V. Laš, and T. Kroupa. Identification of material parameters of sandwich composite panel. *International Journal of Advanced Engineering*, vol. 7, 2013.
- [A9] T. Mandys, V. Laš, T. Kroupa, C. Štádler, and J. Bartošek. Elastic model of composite sandwich structure model with progressive damage for low-velocity impact. *54th conference on experimental stress analysis, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň*, 2016.
- [A10] T. Mandys, V. Laš, T. Kroupa, and R. Zemčík. *Progressive Failure Analysis of Sandwich Beam in Case of Transversely Low-Velocity Impact*. Experimental Stress Analysis 2014, Research and Testing Institute Plzeň, Plzeň, 2014. ISBN: 978-80-231-0377-6.
- [A11] T. Mandys, V. Laš, T. Kroupa, and R. Zemčík. Experimental and numerical investigation of response of sandwich composite beam subjected to low-velocity impact. *Applied Mechanics and Materials*, vol. 732, 2015.

# Příloha A

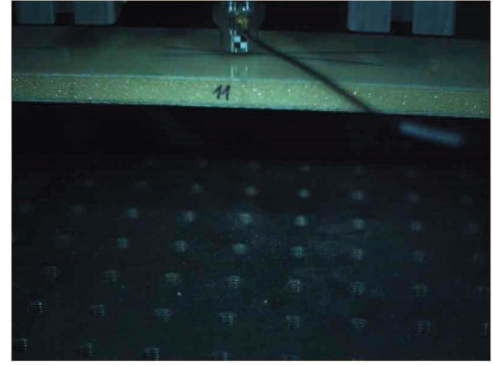
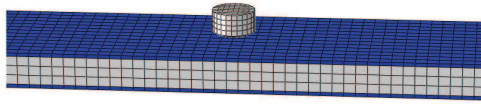
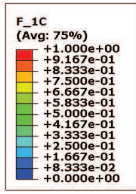
## Tahové vzorky tkaninového kompozitu



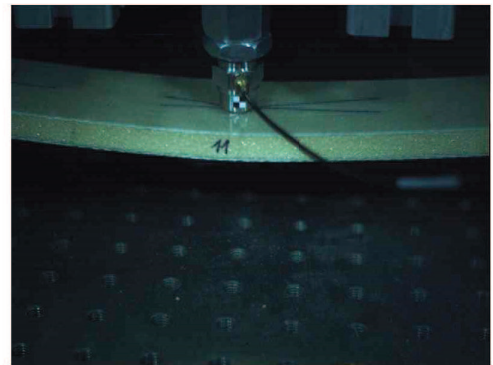
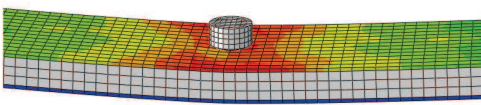
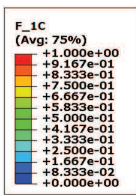
Srovnání vzorků typu T0 - T90 na začátku a konci tahového zatěžování.

## Příloha B

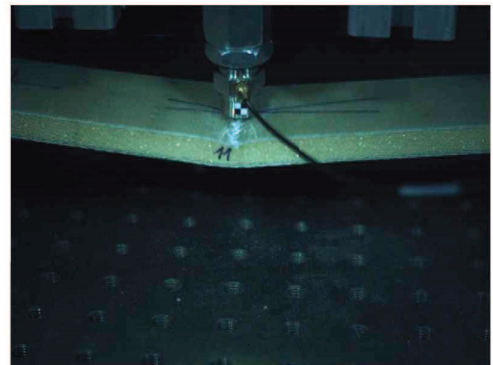
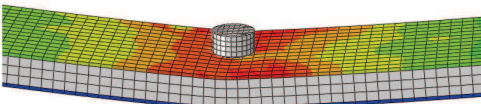
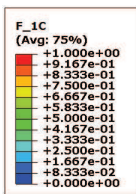
Porovnání průběhu poškození  
sendvičového nosníku při  
nizkorychlostním rázu



$t = 0$  ms



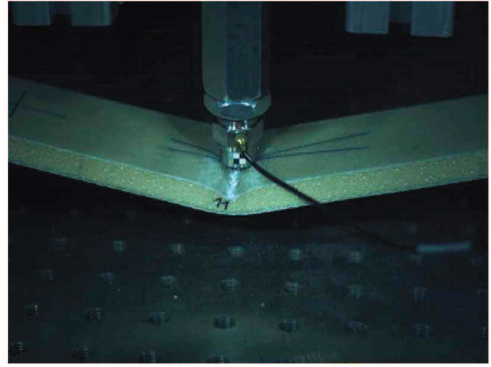
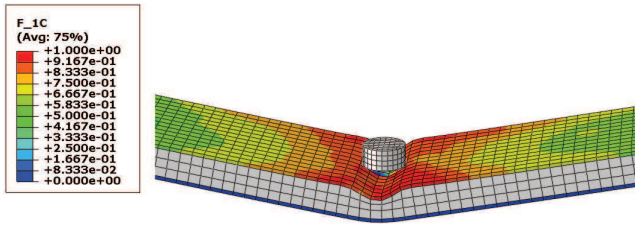
$t = 4$  ms



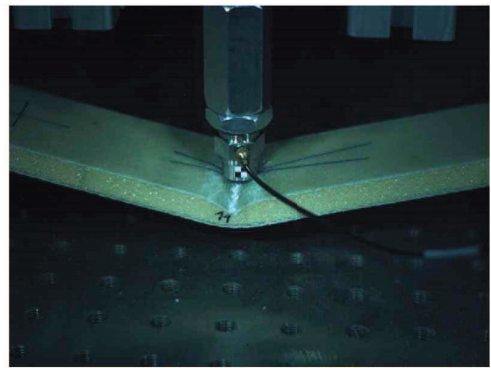
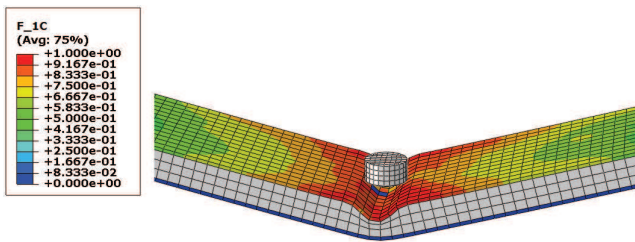
$t = 4,5$  ms

d

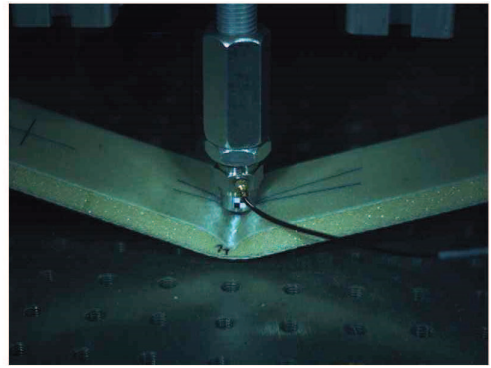
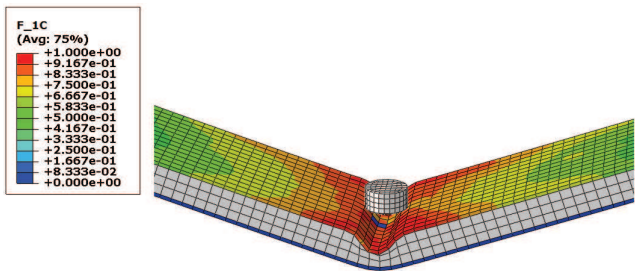




$t = 13 \text{ ms}$



$t = 20 \text{ ms}$



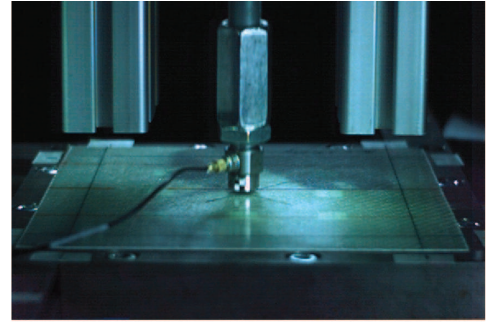
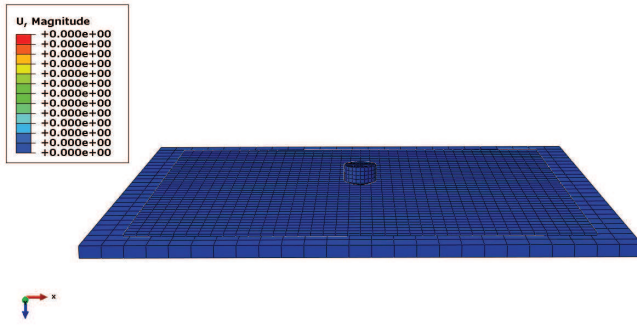
$t = 30 \text{ ms}$

e

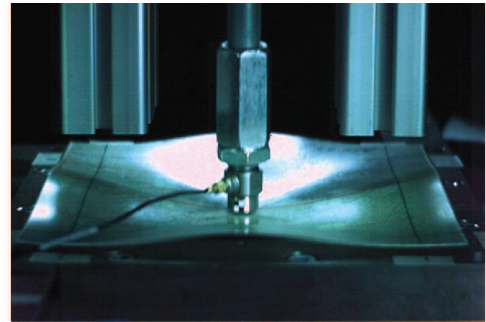
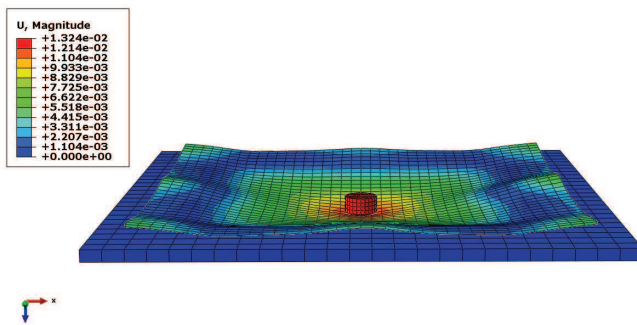


## Příloha C

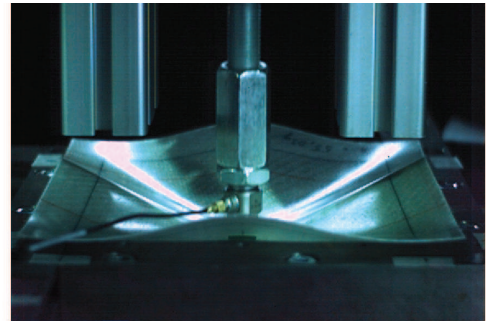
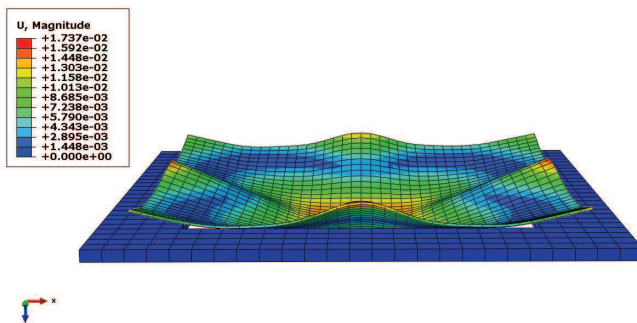
### Porovnání chování kompozitní desky při nízkorychlostním rázu



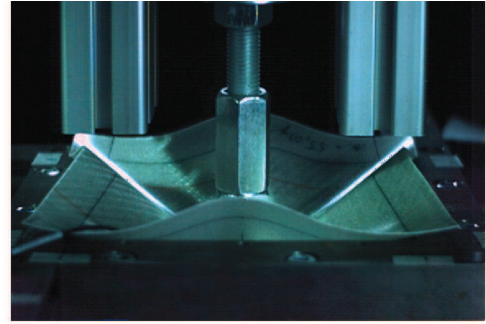
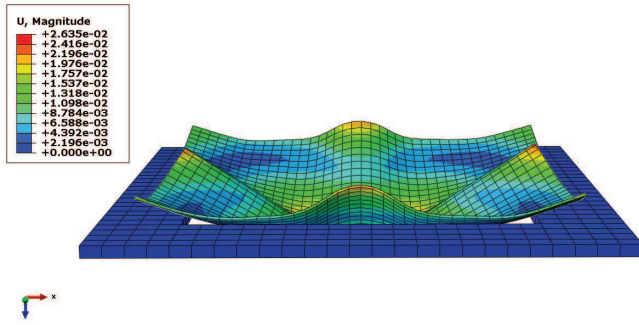
$t = 0 \text{ ms}$



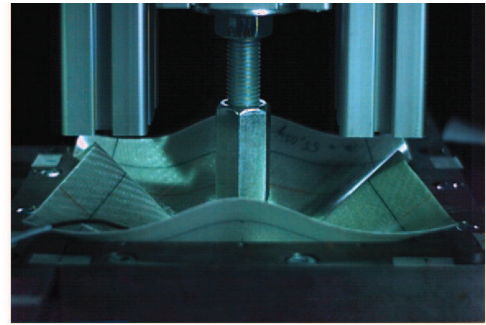
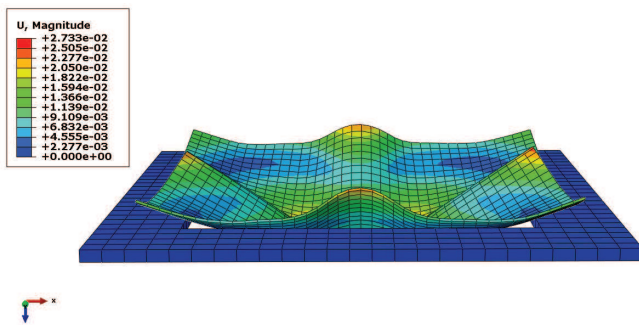
$t = 3 \text{ ms}$



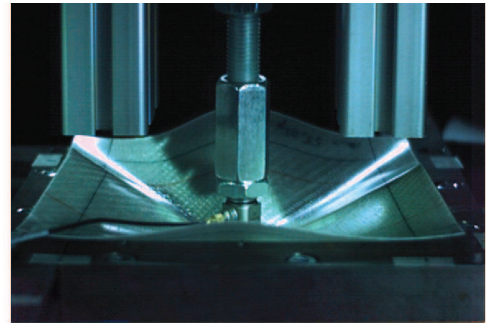
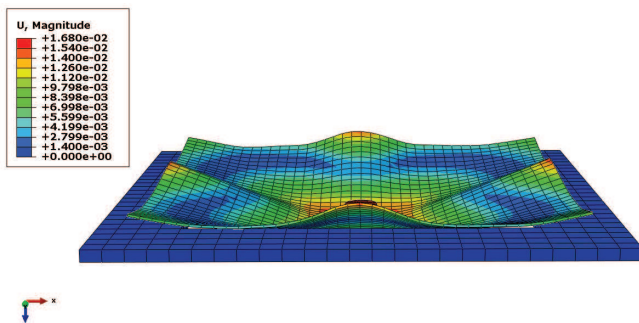
$t = 5 \text{ ms}$



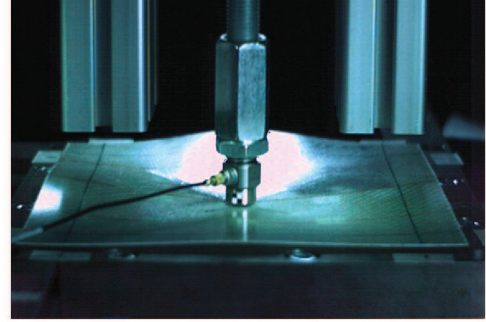
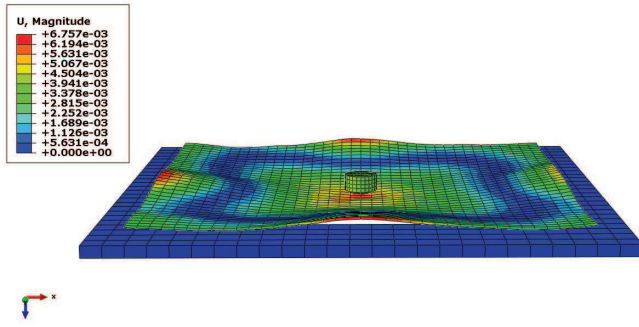
$t = 10$  ms



$t = 15$  ms



$t = 25$  ms



$t = 30 \text{ ms}$