FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2017

Numerické řešení úlohy kontaktu elastických těles

Jan Holeček[1]

1 Úvod

Úloha kontaktu a její řešení se uplatňuje v mnoha technických aplikacích, například při modelování styku páru ozubených kol, návrhu konstrukcí, crash testech aj.
V tomto příspěvku bude stručně popsán vytvořený matematický model pro řešení úlohy jednostranného kontaktu elastického tělesa s dokonale tuhou překážkou a ukázány výsledky numerické simulace. Při formulaci vyjdeme z následujících zjednodušení. Předpokládáme malé deformace a posuvy (úloha elastostatiky) a linearizovanou překážku. Dále předpokládáme nulové tření v místě kontaktu. Úlohu řešíme ve 2D.

2 Model úlohy kontaktu bez uvažování tření

Pro vytvoření diskretizovaného matematického modelu byla použita metoda konečných prvků, odvození např. v Rohan E. (1997). Matematický model má podobu soustavy nehladkých algebraických rovnic (maximum je bráno po složkách):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{X}(\mathbf{RKu} - \mathbf{Rf}) & = & 0 \\ \max\{\mathbf{Y}(\mathbf{RKu} - \mathbf{f}), \mathbf{YRu} - \mathbf{s}\} & = & 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

$\mathbf{K}$ je matice tuhosti, $\mathbf{u}$ je vektor posuvů, $\mathbf{f}$ je vektor sil působících v uzlech, $\mathbf{s}$ je vektor vzdáleností uzlů na kontaktní hranici ve směru vnější normály na hranici. $\mathbf{R}$ je matice rotace, která převádí globální souřadnicový systém na kontaktní hranici na lokální systém s osami ve směru tečny a normály v daném bodě kontaktní hranice.$\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ jsou tzv. restrikční matice, které vybírají z vektorů jen některé stupně volnosti takto: vynásobením vektoru $\mathbf{u}$ zleva maticí $\mathbf{X}$ získáme stupně volnosti odpovídající posuvům uzlů mimo kontaktní hranici a posuvům uzlů na hranici ve směru tečny; vynásobením vektoru zleva maticí $\mathbf{Y}$ získáme stupně volnosti odpovídající posuvům uzlů na hranici ve směru normály.
První rovnice v (1) je ekvivalentní s formulací úlohy elastostatiky, druhá rovnice popisuje kontaktní podmínku. Je zřejmé, že bude nulová síla v uzlech na kontaktní hranici (není kontakt), nebo bude v daném uzlu nulová vzdálenost mezi tělesem a překážkou (případně budou nulové obě hodnoty).
Takto získaná soustava nehladkých rovnic (1) byla numericky řešena pomocí tzv. Newtonovy metody s tlumením, jejíž tvar je:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_k),$$

kde $\mathbf{x}_k$ je vektor neznámých, $\mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$ je vektor funkčních hodnot a $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ je Jacobiova matice a $\alpha \in (0, 1\rangle$ je parametr tlumení.

[1] student bakalářského studijního programu Počítačové modelování v technice, obor Počítačové modelování, e-mail: holecekj@students.zcu.cz

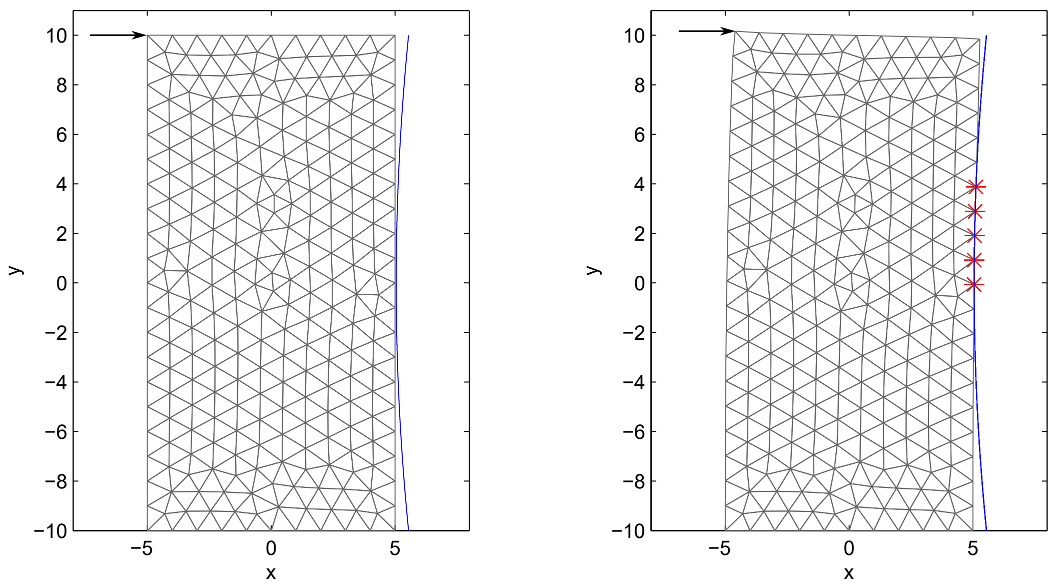
Jiný, též použitý způsob řešení je popsán v De Luca et al. (1996). Pro tento způsob je třeba přeformulovat druhou rovnici v (1) pomocí tzv. Fischerovy-Burmeisterovy funkce $\phi_{FB}(a,b) \equiv \sqrt{a^2+b^2} - (a+b)$, viz. Pieracchini S. et al. (2003)), takže řešíme úlohu $\phi_{FB}(a,b) = 0$. Oba tyto způsoby vedou ke stejným výsledkům, neboť platí $\phi_{FB}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \min(a,b) = 0$.

3 Výsledky

Matice $\mathbf{K}$ a $\mathbf{f}$ byly získány aplikací metody konečných prvků v software SfePy (Simple Finite Elements in Python), numerická simulace byla následně provedena v software MATLAB. Ukázka výsledků simulace je na obr. 1. Těleso je zatíženo osamělou silou působící v uzlu v levém horním rohu, na dolní hranici je těleso vetknuto. Uzly, ve kterých došlo ke kontaktu jsou označeny červeně, překážka vykreslena modře. Vyčíslením výrazu

$$\mathbf{Y}(\mathbf{RKu} - \mathbf{f})$$

je možné určit uzlové kontaktní síly. Jejich znalost je nezbytná pro možné rozšíření modelu o nenulové tření na kontaktní hranici. V současné době je práce rozšiřována o model suchého tření.



(a) Nezdeformované těleso. **(b)** Těleso po deformaci.

Obr. 1: Výsledky numerické simulace v software MATLAB.

Literatura

Rohan E. (1997) Contact shape optimalization of elasto-plastic bodies. *Proceedings of the University of West Bohemia '97*. University of West Bohemia.

De Luca T., Facchinei F., Kanzow C. (1996) A Semismooth Equation Approach To The Solution Of Nonlinear Complementarity Problems. *Mathematical Programming (1996) 75*.

Pieracchini S., Gasparo M. G., Pasquali A. (2003) Global Newton-type methods and semismooth reformulations for NCP. *Applied Numerical Mathematics 44 (2003)*.