

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra kybernetiky

## Diplomová práce

# Řízení rovinného pohybu permanentního magnetu magnetickým polem

Místo této strany bude  
zadání práce.

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 19. května 2017

Pavla Medvecová

## Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu této diplomové práce Prof. Ing. Miloši Schlegelovi, CSc., za odbornou pomoc a poskytnutí cenných rad a materiálů při jejím vypracování. Také bych chtěla poděkovat dalším členům Katedry kybernetiky za pomoc při sestavování reálného modelu.

Dále bych ráda poděkovala své rodině, svým přátelům a také kolegyním z Petřínské za psychickou podporu.

## **Abstract**

The purpose of this thesis is to control the motion of the permanent magnet using the currents in four coils placed in plain. The currents in coils create magnetic field and this causes forces which are acting on the magnet. The magnet is placed between two glass plates so it is necessary to control only the planar motion. The forces are described by equations and then the system model is created. This model is used for simulations in Matlab Simulink and it is controlled by state feedback. The control algorithm is then programmed in REX which is used to control the real model.

## **Key Words**

Magnetic field, magnetic induction, magnetic dipole, magnetic moment, system model, state feedback, LQ regulator.

## **Abstrakt**

Cílem této práce je řídit pohyb permanentního magnetu pomocí proudů, které vstupují do čtyř cívek umístěných do jedné roviny. Proud procházející cívkami vytváří magnetické pole a tím vznikají síly, které působí na magnet umístěný mezi dvěma deskami a je tak řízen pouze rovinný pohyb. Působící síly jsou popsány rovnicemi, ze kterých je odvozený model systému a ten je následně využit pro simulace v prostředí Matlab Simulink. Jako řízení je použita stavová zpětná vazba. Navržené řízení je následně přepsáno do prostředí REX, pomocí kterého je řízen reálný model.

## **Klíčová Slova**

Magnetické pole, magnetická indukce, magnetický dipól, magnetický moment, model systému, stavová zpětná vazba, LQ regulátor.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
1.1	Magnetické pole . . . . .	7
1.2	Solenoidová cívka . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Popis reálného modelu</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Simulace</b>	<b>14</b>
3.1	Vykreslení siločar . . . . .	14
3.2	Odvození simulačního modelu . . . . .	18
3.2.1	Pohybové rovnice . . . . .	18
3.2.2	Stavový popis . . . . .	22
3.3	Řízení . . . . .	24
3.3.1	Princip vnitřního modelu . . . . .	26
3.3.2	Určení magnetického momentu cívek . . . . .	29
3.4	Výsledky simulací . . . . .	35
3.4.1	Řízení do středu roviny . . . . .	35
3.4.2	Stabilizace magnetu v pevném bodě . . . . .	39
3.4.3	Sledování čtvercové trajektorie . . . . .	43
3.4.4	Sledování trajektorie ve tvaru osmičky . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Implementace</b>	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>64</b>
	<b>Literatura</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Schéma v Simulinku</b>	<b>66</b>
<b>B</b>	<b>Schéma v REXu</b>	<b>67</b>

# 1 Úvod

## 1.1 Magnetické pole

Magnetické pole je jedním ze základních fyzikálních polí, které může být způsobené pohybujícím se elektrickým nábojem nebo vlivem některé magnetické látky na okolí.

Magnetické pole charakterizuje konstanta  $\mu_0$ , která se nazývá permeabilita vakua a jejíž hodnota je

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}.$$

Různé látky mohou mít různé účinky na magnetické pole, ve kterém se nachází. Tato vlastnost je označena jako permeabilita  $\mu$ , která je definována

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0, \tag{1.1}$$

kde  $\mu_r$  je relativní permeabilita, jejíž hodnoty jsou u magnetických látek uváděny častěji a můžeme ji z rovnice (1.1) vyjádřit jako poměr mezi absolutní permeabilitou materiálu  $\mu$  a permeabilitou vakua  $\mu_0$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Podle této hodnoty jsou látky rozdělovány do tří základních kategorií:

- diamagnetické látky - magnetické pole zeslabují a pro relativní permeabilitu platí  $\mu_r < 1$  nebo  $\mu_r \approx 1$ ,
- paramagnetické látky - magnetické pole zesilují a pro relativní permeabilitu platí  $\mu_r > 1$  nebo  $\mu_r \approx 1$ ,
- feromagnetické látky - magnetické pole výrazně zesilují a pro relativní permeabilitu platí  $\mu_r \gg 1$ .

Feromagnetické látky již mohou tvořit silné magnety a jedná se např. o železo, kobalt nebo nikl. [7]

Dalším způsobem, jak vzniká magnetické pole, je při pohybu elektrických částic. Příkladem je procházející proud vodičem, v jehož okolí se vytváří magnetické pole. Prochází-li vodičem stacionární proud  $I$  a je-li vodič uzavřený tak, že tvoří kruhový závit, vzniká proudová smyčka.

Pokud se průměr této smyčky blíží k nule, čímž se zmenšuje její průřez  $S$ , a úměrně tomu se zvyšuje protékající proud  $I$  tak, aby zůstávala zachována velikost magnetického momentu

$$\vec{\mu} = I\vec{S}, \quad (1.2)$$

je tato smyčka nazvána magnetickým dipólem. Příkladem magnetického dipólu je i atom, okolo jehož jádra obíhá elektron a tím také vytváří proudovou smyčku.

Magnetický moment je vektorová veličina, která charakterizuje magnetické pole vytvořené v okolí magnetického dipólu. Účinky takto vzniklého magnetického pole jsou vyšetřovány v řádově větší vzdálenosti než je rozměr dipólu. Orientace magnetického momentu je souhlasná se směrem normály plochy, jejíž orientace se u proudové smyčky určuje pomocí Ampérova pravidla pravé ruky. Toto pravidlo je platné pro průchod elektrického proudu jakýmkoliv vodičem a zní:

*„Jestliže palec pravé ruky ukazuje směr elektrického proudu ve vodiči, pak pokrčené prsty ukazují orientaci magnetických indukčních čar. [8]“*

Výše uvedená formulace je vhodná zejména pro přímý vodič, dá se ale také odvodit pravidlo pro cívku, které zní:

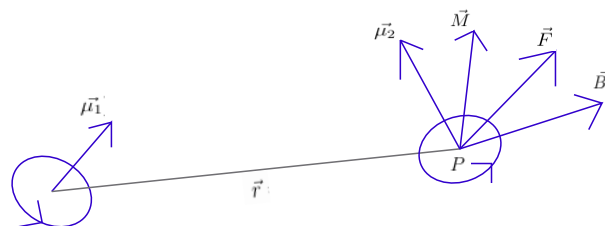
*„Cívku uchopíme do pravé ruky tak, že ohnuté prsty ukazují směr elektrického proudu v jejích závitěch. Odtážený palec pak ukazuje severní pól cívky. [1]“*

A právě ve směru severního pólu cívky působí také její magnetický moment. Ten je v případě cívky dán ještě navíc počtem závitů  $N$  a opět proudem  $I$ , který cívkou protéká, a také velikostí průřezu cívky  $S$ .

$$\vec{\mu} = NIS\vec{n}, \quad (1.3)$$

Magnetický moment tedy určuje, jak působí určitý objekt na své okolí. Účinky vytvořeného magnetického pole na jiné částice s nábojem nebo na jiné magnetické dipóly je možné popsat pomocí magnetické indukce  $B$ . Ta je pro stacionární magnetické pole neměnná v čase a záleží tak na vektoru polohy  $\vec{r}$ , ve kterém je magnetická indukce měřená, a na magnetickém momentu  $\vec{\mu}$  odpovídajícím dipólu, který magnetické pole vytváří.

Nyní bude popsána situace zobrazená na obrázku 1.1, kdy je jeden magnetický dipól umístěn do blízkosti jiného magnetického dipólu.



Obrázek 1.1: Dva dipóly umístěné u sebe



Bude-li uvažován magnetický dipól s magnetickým momentem  $\vec{\mu}_1$ , bude pak v bodě  $P$ , který je určen polohovým vektorem  $\vec{r}$ , platit pro magnetickou indukci  $\vec{B}$  následující vztah

$$\vec{B}_1 = \vec{B}(\vec{r}, \vec{\mu}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \left[ \frac{3\vec{r}(\vec{\mu}_1, \vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{\mu}_1}{|\vec{r}|^3} \right]. \quad (1.4)$$

Bude-li se nacházet v bodě  $P$  druhý magnetický dipól s magnetickým momentem  $\vec{\mu}_2$ , bude na něj první dipól působit dvěma silami, a to silou translační a silou rotační, která je nazývána silovým momentem  $\vec{M}$  a je definována

$$\vec{M} = \vec{\mu}_2 \times \vec{B}.$$

Vzhledem k vektorovému součinu, který je pro součin dvou vektorů definován jako

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel svíraný mezi vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$  a  $\vec{n}$  je jednotkový vektor k nim kolmý. Směr tohoto vektoru je dán souřadným systémem, ve kterém je vektorový součin definován. V tomto případě se jedná o pravotočivý systém, a proto platí pravidlo pravé ruky, které zní:

*„Pokud směřuje vektor  $\vec{a}$  ve směru ukazováku a vektor  $\vec{b}$  ve směru prostředníku pravé ruky, potom vektor  $\vec{c}$  vzniklý vektorovým součinem  $\vec{a} \times \vec{b}$  směřuje ve směru palce, který je umístěn kolmo k dlani. [5]“*

Konkrétně pro magnetický dipól v bodě  $P$  s magnetickým momentem  $\vec{\mu}_2$  pak bude silový moment v magnetickém poli dipólu s momentem  $\vec{\mu}_1$  definován

$$\vec{M} = \vec{\mu}_2 \times \vec{B}(\vec{r}, \vec{\mu}_1).$$

Z výše uvedeného je možné vidět, že vektorový součin je pro dva nenulové vektory nulový pouze tehdy, pokud je úhel  $\alpha$  také nulový. To znamená, že magnetický dipól s momentem  $\vec{\mu}_2$ , na který působí magnetické pole od dipólu s momentem  $\vec{\mu}_1$ , má shodnou orientaci s tímto polem a je tak rovnoběžný s vektorem magnetické indukce  $\vec{B}$ . Toto vysvětluje vznik indukčních čar, které je možné vidět např. při magnetizaci železných pilin, což je jev, při kterém moment síly působí na piliny, které se následně otočí do takové polohy, kdy je silový moment nulový, tedy kdy je směr pilin rovnoběžný s indukcí magnetického pole a piliny tak kladou co nejmenší odpor.

Magnetické indukční čáry jsou definované jako uzavřené a orientované křivky, které se neprotínají. Tečna k těmto křivkám v konkrétním bodě má směr vektoru magnetické indukce a hustota těchto čar je úměrná velikosti vektoru magnetické indukce. [3]

Druhá síla, která působí na magnetický dipól umístěný do vnějšího magnetického pole, je translační síla  $\vec{F}$

$$\vec{F} = \vec{\mu} \cdot \text{grad} \vec{B}. \quad (1.5)$$

Skalární součin je pro dva vektory definován jako

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \alpha,$$

kde  $\alpha$  je úhel svíraný mezi vektory  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ . V prvním případě tak skalární součin dvou nenulových vektorů může být nulový, pokud jsou vektory na sebe kolmé. Druhým případem, ve kterém může být síla (1.5) nulová, je případ, kdy je gradient magnetické indukce nulový. Protože gradient pole  $u = u(x, y, z)$  je definován jako

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

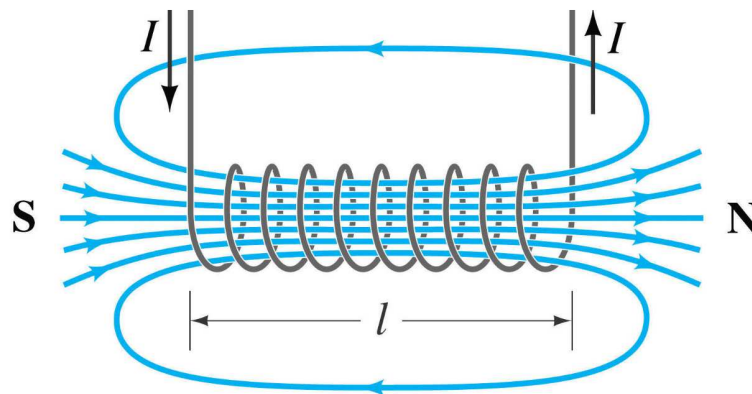
kde  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  jsou jednotkové vektory ve směru os  $x, y, z$ , znamená tedy nulový gradient magnetické indukce, že je indukce konstantní ve všech třech směrech prostoru a tedy magnetické pole je homogenní. V reálném případě tomu tak není a magnetické pole se v prostoru mění a jeho intenzita slábne přímoúměrně se vzdáleností od jeho zdroje.

Pokud budou v prostoru umístěné vedle sebe dva magnetické dipóly, budou se navzájem ovlivňovat. První magnetický dipól s momentem  $\vec{\mu}_1$  působí na dipól s momentem  $\vec{\mu}_2$  silou  $\vec{F}$  vyjádřenou vztahem

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2) = \frac{3\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^5} \cdot \left[ (\vec{\mu}_1, \vec{r})\vec{\mu}_2 + (\vec{\mu}_2, \vec{r})\vec{\mu}_1 + (\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2)\vec{r} - \frac{5(\vec{\mu}_2, \vec{r}) \cdot (\vec{\mu}_1, \vec{r})}{|\vec{r}|^2} \vec{r} \right]. \quad (1.6)$$

## 1.2 Solenoidová cívka

Solenoidová cívka je vodič stočený do kruhových závitů, kdy délka vodiče převyšuje průměr cívky. Vodič je omotaný okolo kovového jádra. Pomocí proudu, který vodičem protéká, je tak možné ovlivňovat vytvářené magnetické pole okolo cívky. Pokud jsou závitů blízko u sebe, pole jednotlivých závitů se skládají a uvnitř cívky se vytváří homogenní magnetické pole, které má směr osy cívky, jak je vidět na obrázku 1.2. K určení směru siločar se využívá Ampérovo pravidlo pravé ruky.



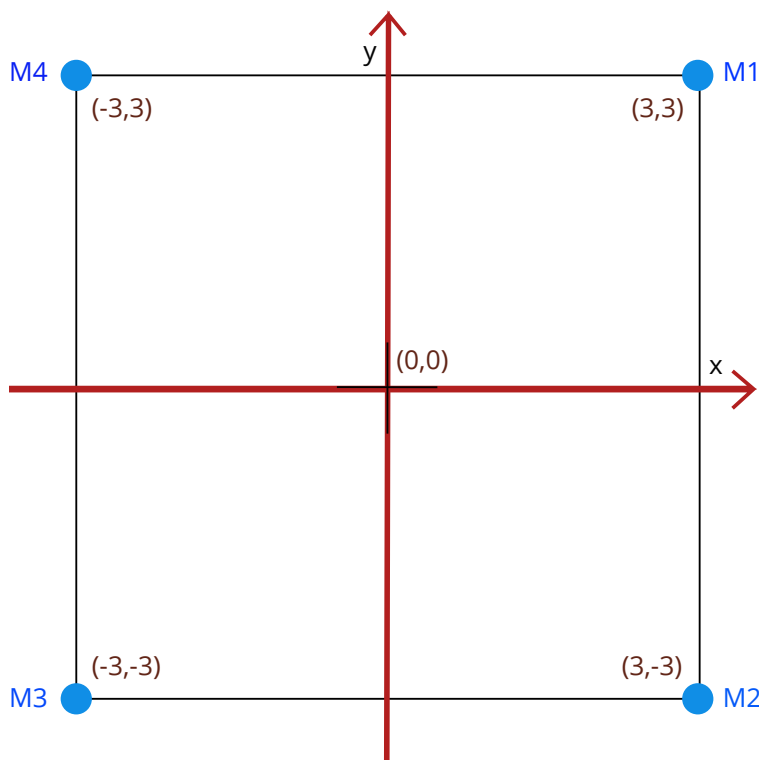
Obrázek 1.2: Podélný průřez solenoidovou cívku [4]

## 2 Popis reálného modelu

Reálný pokus bude probíhat na modelu, který se skládá ze 4 cívek stejných vlastností. Každá cívka bude ovládána pomocí proudu a má následující parametry

- počet závitů  $\approx 200$ ,
- maximální proud =  $2\text{ A}$ ,
- průřez  $\approx 0.001\text{ m}^2$ .

Cívky jsou umístěny v rovině  $xy$  a jsou uspořádány do tvaru čtverce, jehož strana je dlouhá  $6\text{ cm}$ . Rozmístění cívek je zobrazené na následujícím obrázku a uvedené souřadnice jsou v centimetrech.



Obrázek 2.1: Umístění cívek

Na rovinu, ve které jsou umístěné cívky, je položeno plexisklo, po kterém se pohybuje magnet. Volba plexiskla vychází z požadavku, aby se minimalizovalo tření při pohybu. Ve vzdálenosti odpovídající výšce magnetu je pak svrchu položeno další plexisklo, které omezuje pohyb magnetu ve svislém směru.

Magnety byly vybírány různých tvarů a vlastností. Ideálním magnetem je dostatečně lehký magnet s velkou permeabilitou, aby k jeho ovládní nebyly potřeba velké proudy v cívkách. Z tohoto důvodu na sebe bylo umístěno několik diskových magnetů, čímž se jejich účinky sečetly.

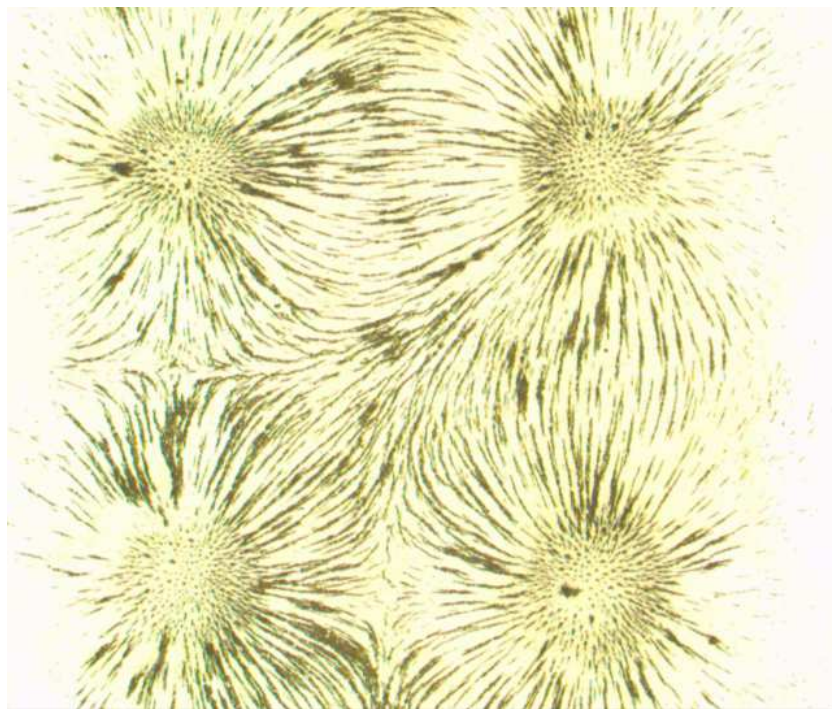
Nad cívkami je umístěna kamera, která snímá vyznačenou plochu s periodou  $T_c = 0.1$  s. Z obrazu z kamery je pak možné získat polohu magnetu v rovině  $xy$ . Takto získané souřadnice je následně možné využít k řízení pohybu magnetu.

Pro ověření magnetických polí, které cívky vytvářejí, byly využity železné piliny, pomocí kterých byly zobrazeny indukční čáry. Těchto čar bylo využito i k identifikaci toho, která cívka je zapojená na který vstup řídicího bloku v REXu. Byly tak postupně měněny směry proudů na vstupech tak, že vždy na třech cívkách byl proud kladný a na jedné cívce záporný a z vytvořených siločar bylo možné identifikovat cívku se záporným proudem.

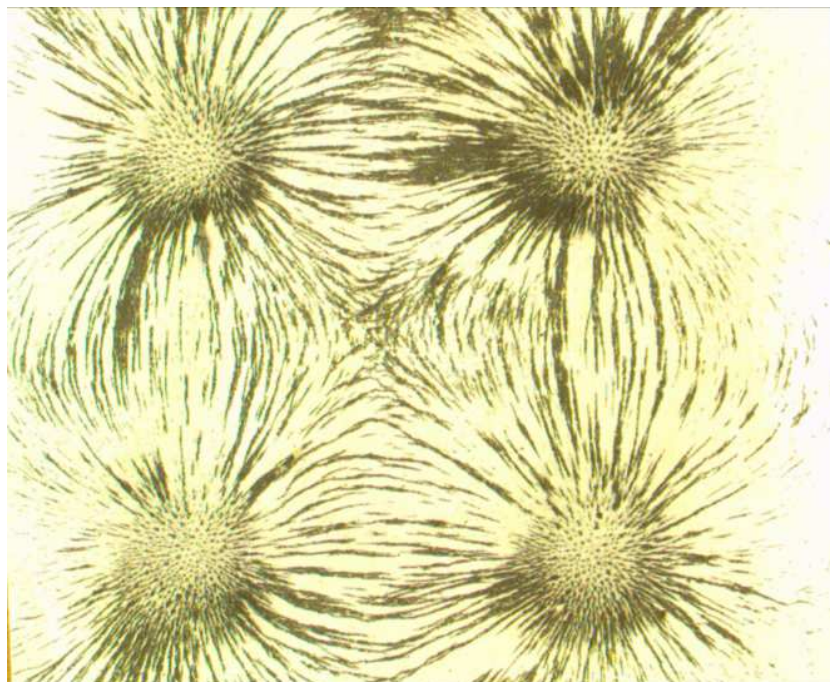
Označení cívek na obrázku 2.1 odpovídá jejich označení v REXu. Při simulacích byly tyto cívky označovány písmeny  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$ , a to odpovídá výše uvedenému označení podle následujících vztahů

$$M_1 = A, M_2 = D, M_3 = C, M_4 = B.$$

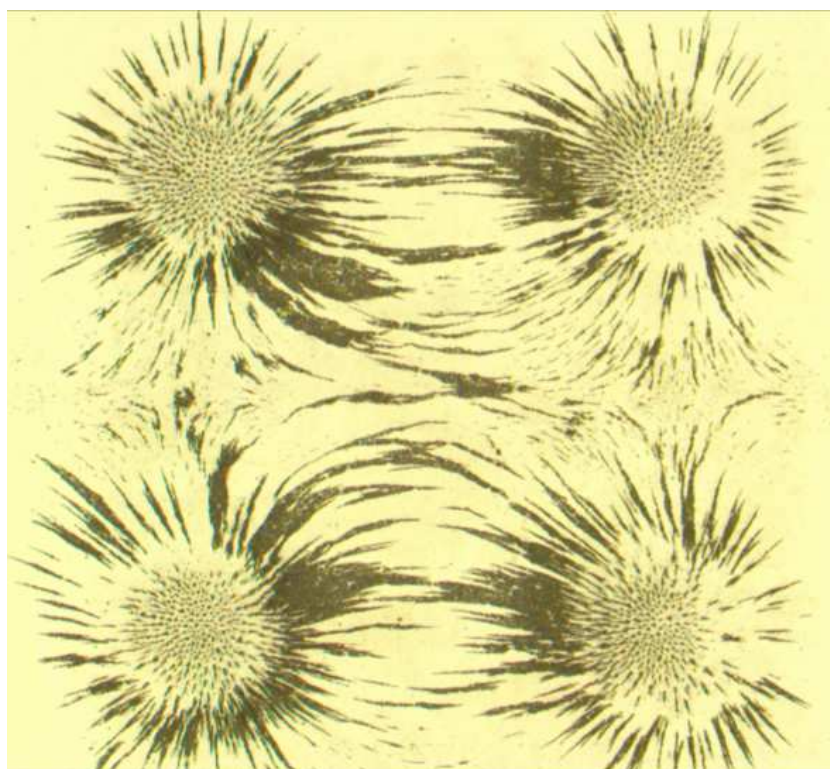
Na následujících obrázcích jsou zobrazeny některé snímky z kamery.



Obrázek 2.2: Indukční čáry pro  
 $I_A = -1$  A,  $I_B = 1$  A,  $I_C = 1$  A,  $I_D = 1$  A



Obrázek 2.3: Indukční čáry pro  
 $I_A = 1 \text{ A}$ ,  $I_B = -1 \text{ A}$ ,  $I_C = 1 \text{ A}$ ,  $I_D = -1 \text{ A}$



Obrázek 2.4: Indukční čáry pro  
 $I_A = -1 \text{ A}$ ,  $I_B = 1 \text{ A}$ ,  $I_C = 1 \text{ A}$ ,  $I_D = -1 \text{ A}$

## 3 Simulace

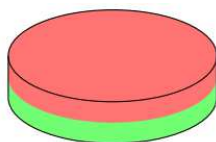
Před vlastním pokusem na reálném modelu byly provedeny simulace v prostředí Simulink, pro jejichž účel byl vytvořený model systému. Při simulaci došlo k několika zjednodušením oproti reálnému systému.

Prvním zjednodušením je nahrazení cívek a permanentního magnetu pomocí magnetických dipólů. Díky tomuto zjednodušení je možné považovat magnet i cívky pouze za bod v prostoru a je tak možné použít vztahy pro sílu (1.6) a magnetickou indukci (1.4) uvedené v úvodu.

Druhým zjednodušením je uvažování nulového tření mezi magnetem a podložkou, po které se pohybuje. Významný vliv má především klidové tření, které vzniká, když se magnet nepohybuje a zvyšuje tak sílu potřebnou pro uvedení magnetu do pohybu.

Dalším zjednodušením je uvažování pouze translačních sil, které na magnet působí, a zanedbání silového momentu, který způsobuje rotaci magnetu. Rotace okolo os  $x$  a  $y$  jsou zanedbány, protože dvě skla, mezi kterými jsou magnety umístěny, zamezují úplnému otočení magnetu. Dochází pouze k malým výchylkám, které je možné opomenout. Protože bude použit diskový magnet, jehož vlastnosti jsou shodné pro jakýkoliv úhel otočení okolo osy  $z$ , není nutné uvažovat ani rotaci magnetu okolo osy  $z$ . Bude tak uvažován magnetický moment permanentního magnetu působící pouze ve směru osy  $z$ .

Na následující obrázku je uveden příklad diskového magnetu s vyznačeným rozdělením severního a jižního pólu.



Obrázek 3.1: Příklad diskového magnetu [2]

### 3.1 Vykreslení siločar

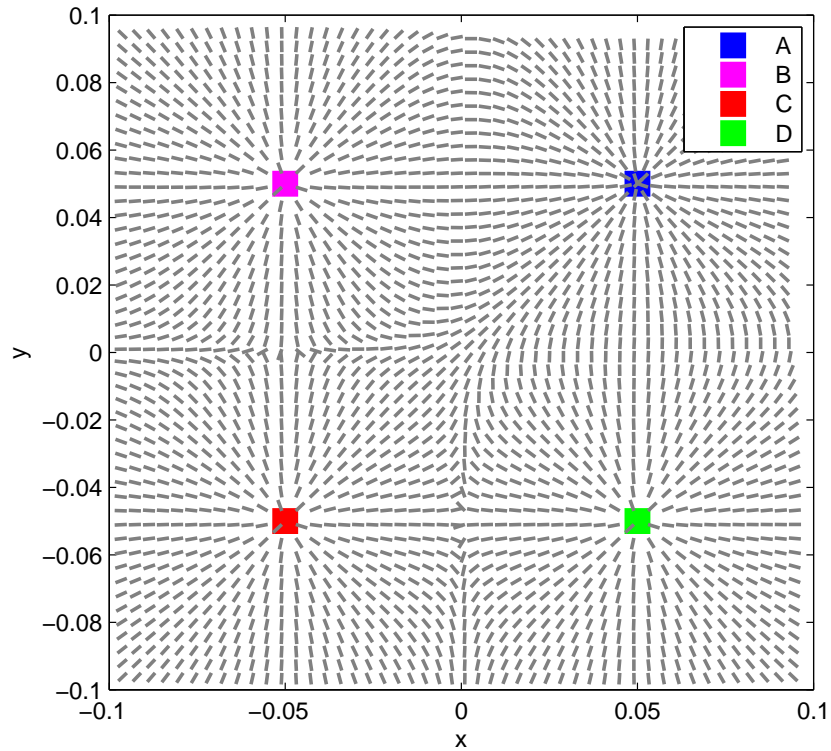
Aby byla porovnána magnetická pole vytvořená cívkou na skutečném modelu a magnetická pole vytvořená magnetickými dipóly používanými v simulacích, byly vykresleny v Matlabu siločáry vzniklé vykreslením vektorů magnetické indukce v rovině  $xy$ . Tyto siločáry vznikly sečtením magnetických indukcí od každého dipólu, k jejímž výpočtům byl využit vztah (1.4) a které jsou vykresleny na následujících obrázcích. Protože zobrazení reálných siločar probíhalo při původním umístění cívek ve vzdálenosti  $10\text{ cm}$ , je i simulační vykreslení siločar provedeno pro tuto vzdálenost.

Aby byly zachovány velikosti a směry magnetických momentů na jednotlivých cívkách jako se skutečně použitými hodnotami, byl proveden přepočet proudů podle

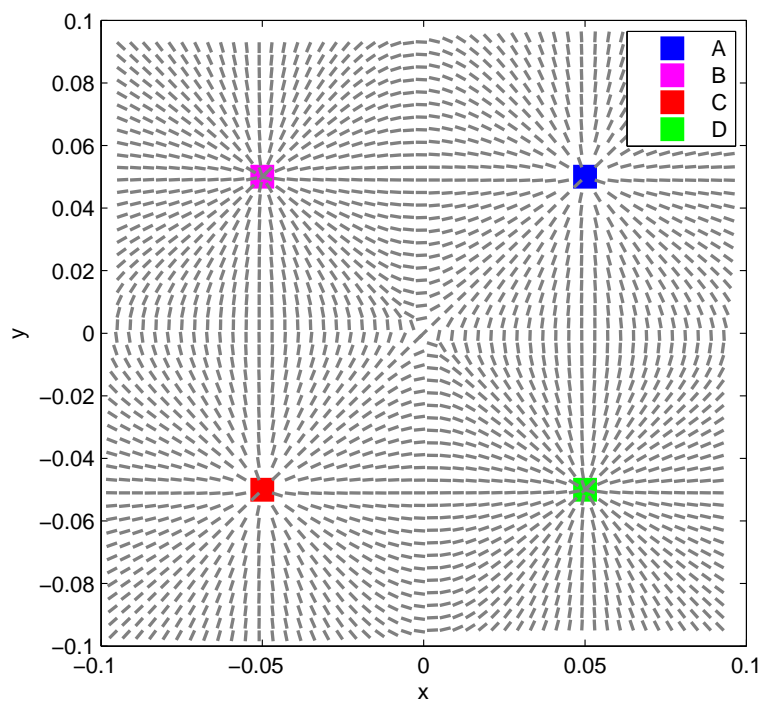
vzorce (1.3), kdy po dosazení výše uvedených hodnot a proudu  $I = 1 \text{ A}$  vyšla velikost magnetického momentu

$$\mu = 200 \cdot 1 \cdot 0.001 = 0.2$$

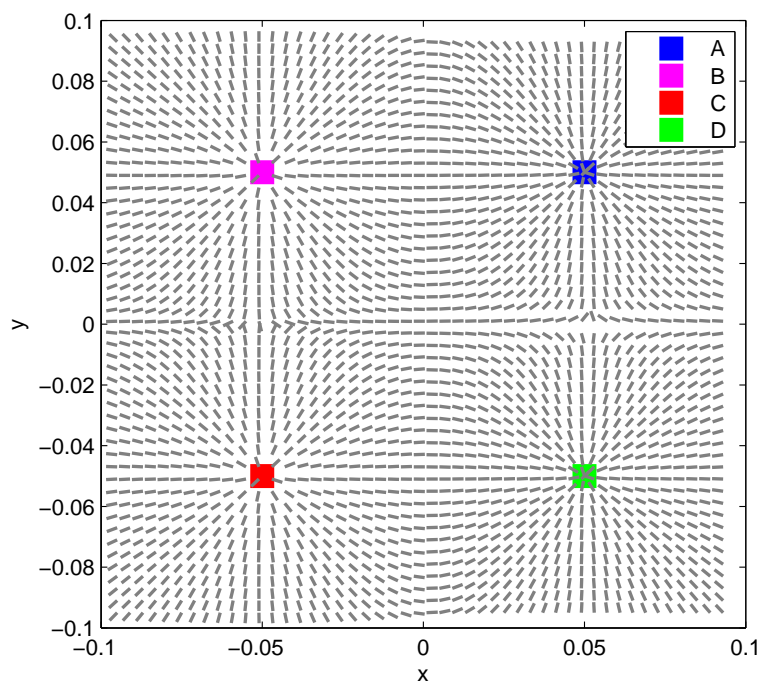
a obdobně pro proud  $I = -1 \text{ A}$  je velikost momentu  $\mu = -0.2$ . Směr magnetických momentů všech dipólů byl zvolen souhlasně se směrem osy  $z$ .



Obrázek 3.2: Indukční čáry pro  $\mu_a = -0.2$ ,  $\mu_b = 0.2$ ,  $\mu_c = 0.2$ ,  $\mu_d = 0.2$  odpovídající reálnému případu na obrázku 2.2



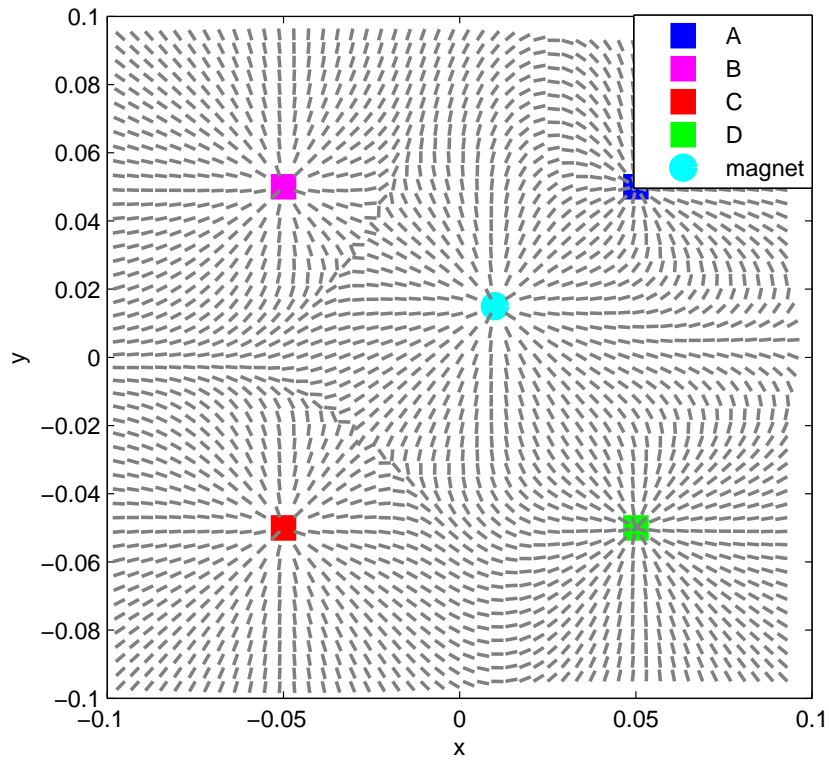
Obrázek 3.3: Indukční čáry pro  $\mu_a = 0.2$ ,  $\mu_b = -0.2$ ,  $\mu_c = 0.2$ ,  $\mu_d = -0.2$  odpovídající reálnému případu na obrázku 2.3



Obrázek 3.4: Indukční čáry pro  $\mu_a = -0.2$ ,  $\mu_b = 0.2$ ,  $\mu_c = 0.2$ ,  $\mu_d = -0.2$  odpovídající reálnému případu na obrázku 2.4



Dále byly vykresleny také siločáry ovlivněné umístěním magnetu do roviny  $xy$  mezi cívky, např. do okolí středu této roviny. Magnetický moment magnetu  $\vec{\mu}_{mag}$  byl zvolen o velikosti jedna a směr tohoto momentu je souhlasný se směrem osy  $z$ . Z obrázku 3.5 je tak zřejmé, že cívky  $B$  a  $C$ , které mají stejný směr magnetického momentu jako permanentní magnet, ho budou odpuzovat a naopak cívky  $D$  a  $A$  s opačnou orientací magnetického momentu budou magnet přitahovat.

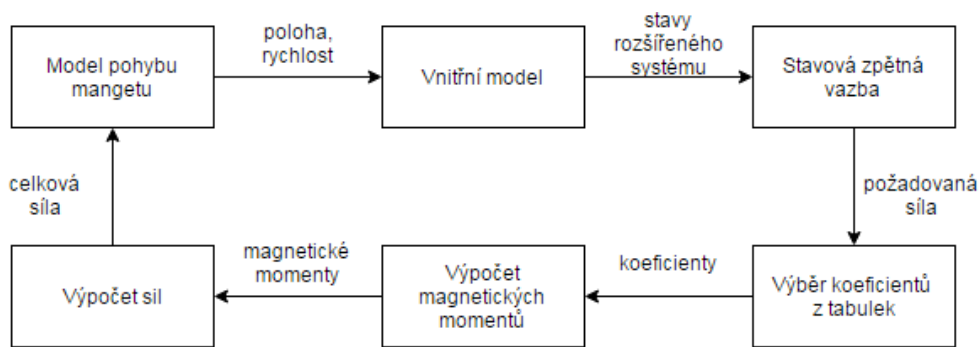


Obrázek 3.5: Indukční čáry pro  $\mu_a = -0.2, \mu_b = 0.2, \mu_c = 0.2, \mu_d = -0.2, \mu_{mag} = 1$

## 3.2 Odvození simulačního modelu

V této části budou nejprve odvozeny pohybové rovnice platné pro magnetický model, který popisuje síly působící na permanentní magnet umístěný v magnetickém poli. Následně bude odvozen stavový popis, který bude popisovat pohyb permanentního magnetu jako důsledek působení vnějších sil ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Spojením obou těchto přístupů je pak možné získat model popisující pohyb permanentního magnetu v magnetickém poli a k tomuto modelu bude navrhováno řízení.

Vytvořený simulační model a princip navrženého řízení je možné rozdělit do šesti subsystémů, které jsou zobrazené na následujícím obrázku 3.6. Jednotlivé části budou podrobněji popsány dále.



Obrázek 3.6: Simulační model

### 3.2.1 Pohybové rovnice

K vytvoření matematického popisu pohybu permanentního magnetu v prostoru byla využita Newton-Eulerova metoda, pomocí které byly odvozeny pohybové rovnice. Tyto rovnice vychází z Newtonova zákona síly

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (3.1)$$

který dává do souvislosti zrychlení tělesa  $\vec{a}$  a na něj působící sílu  $\vec{F}$ , která toto zrychlení vyvolává. Následující vzorec je platný pouze za předpokladu, že je uvažován pouze translační pohyb permanentního magnetu a rotace magnetu je eliminována jeho umístěním mezi dvě desky.

Hmotnost magnetu  $m$  bude různá v závislosti na právě použitých magnetech, které byly při praktických pokusech použity. Řádově bude jejich hmotnost v jednotkách gramů, při simulacích je použita hmotnost

$$m = 0.005 \text{ kg}.$$

Působící síla  $\vec{F}$  a zrychlení magnetu  $\vec{a}$  jsou obecně třírozměrným vektorem, protože je uvažován pohyb magnetu v prostoru  $xyz$ , který je dán pravotočivým souřadným systémem. Poloha magnetu je tak měřena ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$  a jeho aktuální

poloha bude označena také  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Tuto polohu je možné zapsat pomocí vektoru  $\vec{r}$  následovně

$$\vec{r} = [x, y, z]^T.$$

V uvedených směrech lze také určit rychlost magnetu, kterou je opět možné zapsat pomocí vektoru se třemi složkami, tedy

$$\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^T.$$

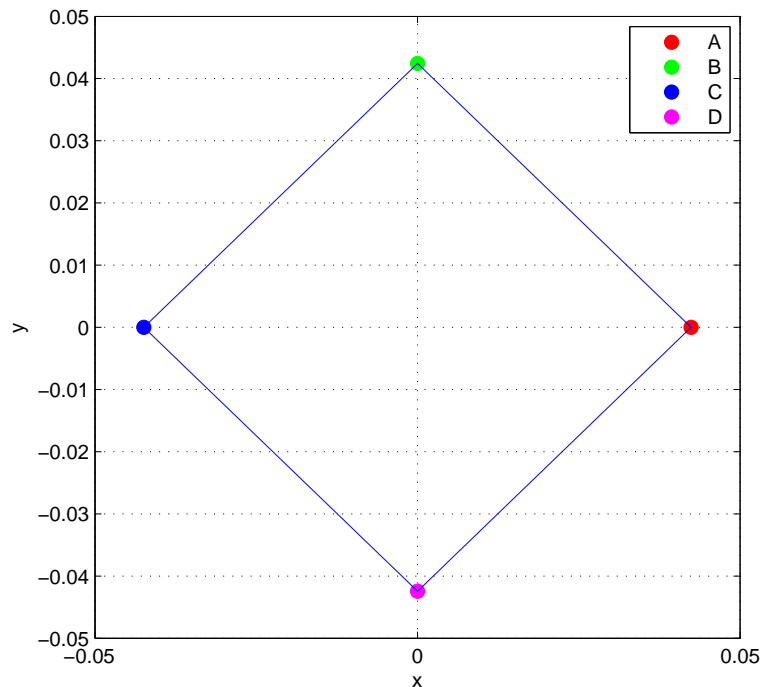
Jak již bylo zmíněno, je uvažován pouze translační pohyb, který je dán rovnicí (3.1), kterou je možné přepsat do tvaru

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}, \quad (3.2)$$

což je ekvivalentní s

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.3)$$

Síla  $\vec{F}$  je tedy celková síla, která působí na magnet. Protože je magnet umístěn v poli, které je ohraničené čtyřmi cívkami, působí na něj čtyři síly, které se vektorově sčítají.



Obrázek 3.7: Umístění cívek do roviny  $xy$

Na obrázku 3.7 je zobrazené rozložení cívek v souřadnicové soustavě, se kterou se pracuje v simulacích. Důvody pro tuto volbu umístění cívek je jejich symetričnost vzhledem k osám  $x$  a  $y$ , která je při další práci využita.

Všechny cívky jsou umístěny na ose  $x$  nebo  $y$  ve stejné vzdálenosti  $R$  od středu souřadného systému. Jejich polohové vektory tak jsou

$$\begin{aligned}\vec{a} &= [ R, 0, 0 ]^T, \\ \vec{b} &= [ 0, R, 0 ]^T, \\ \vec{c} &= [ -R, 0, 0 ]^T, \\ \vec{d} &= [ 0, -R, 0 ]^T.\end{aligned}$$

Každá cívka je při simulacích nahrazena magnetickým dipólem, jehož magnetický moment je vyjádřený např. pro cívku  $A$  ve tvaru

$$\vec{\mu}_a = \mu_a \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

obdobně i pro ostatní cívky. Magnetický moment všech cívek tak má směr souhlasný s osou  $z$ .

Sílu působící na magnet od některé cívky je možné zjednodušeně popsat rovnicí síly (1.6) pro dva magnetické dipóly. Např. pro cívku  $A$ , která bude nahrazena dipólem s magnetickým momentem  $\vec{\mu}_a$ , bude pro sílu  $\vec{F}_a$  platit

$$\vec{F}_a = \vec{F}(\vec{r} - \vec{a}, \vec{\mu}_a, \vec{\mu}_{mag}).$$

Po dosazení příslušných vektorů je tak možné sílu rozepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\vec{F}_a &= \frac{3\mu_0}{4\pi|\vec{r} - \vec{a}|^5} \cdot \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x - a_x \\ r_y - a_y \\ r_z - a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_{mag} \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{mag} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x - a_x \\ r_y - a_y \\ r_z - a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_{mag} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x - a_x \\ r_y - a_y \\ r_z - a_z \end{bmatrix} \right. \\ &\left. - \frac{5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x - a_x \\ r_y - a_y \\ r_z - a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{mag} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x - a_x \\ r_y - a_y \\ r_z - a_z \end{bmatrix}}{|\vec{r} - \vec{a}|^2} \begin{bmatrix} r_x - a_x \\ r_y - a_y \\ r_z - a_z \end{bmatrix} \right].\end{aligned}$$

Nyní je patrné, že lze tuto sílu přepsat jako funkci velikosti magnetického momentu  $\mu_a$  a vektor síly  $\vec{F}_a$  může být rozepsán do složek  $F_{ax}$ ,  $F_{ay}$ ,  $F_{az}$  podle směru, ve kterém síla působí.

$$\begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{ay} \\ F_{az} \end{bmatrix} = \frac{3\mu_0}{4\pi|\vec{r}-\vec{a}|^5} \cdot \begin{bmatrix} (r_x - a_x) \cdot \frac{\mu_{mag}|\vec{r}-\vec{a}|^2 - 5\mu_{mag}r_z^2}{|\vec{r}-\vec{a}|^2} \cdot \mu_a \\ (r_y - a_y) \cdot \frac{\mu_{mag}|\vec{r}-\vec{a}|^2 - 5\mu_{mag}r_z^2}{|\vec{r}-\vec{a}|^2} \cdot \mu_a \\ (r_z - a_z) \cdot \frac{3\mu_{mag} - 5\mu_{mag}r_z^2}{|\vec{r}-\vec{a}|^2} \cdot \mu_a \end{bmatrix}$$

Zjednodušeně lze tedy zapsat sílu  $\vec{F}_a$  jako obecnou nelineární funkci aktuální polohy magnetu  $\vec{r}$  a velikosti magnetického momentu  $\mu_a$ , ostatní hodnoty se v čase nemění a lze je tak zahrnout do obecné konstanty  $K$ .

$$\vec{F}_a = f(\vec{r}, \mu_a)$$

Obdobným způsobem by bylo možné rozepsat i ostatní síly působící na magnet od cívek  $B$ ,  $C$  a  $D$ .

$$\begin{aligned} \vec{F}_b &= \vec{F}(\vec{r} - \vec{b}, \vec{\mu}_b, \vec{\mu}_{mag}) = f(\vec{r}, \mu_b) \\ \vec{F}_c &= \vec{F}(\vec{r} - \vec{c}, \vec{\mu}_c, \vec{\mu}_{mag}) = f(\vec{r}, \mu_c) \\ \vec{F}_d &= \vec{F}(\vec{r} - \vec{d}, \vec{\mu}_d, \vec{\mu}_{mag}) = f(\vec{r}, \mu_d) \end{aligned}$$

Další silou, která na magnet působí, je síla gravitační. Tato síla může být zapsána vektorem

$$\vec{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix},$$

kde  $g$  je gravitační zrychlení a hodnota používaná při simulacích je

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$

Celkem tak na magnet působí pět sil a výsledná síla  $\vec{F}$  je dána jejich součtem.

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_a + \vec{F}_b + \vec{F}_c + \vec{F}_d. \quad (3.4)$$

Celkovou sílu  $\vec{F}$  je možné opět vyjádřit jako obecnou nelineární funkci polohy magnetu  $\vec{r}$  a velikostí magnetických momentů všech čtyř dipólů

$$\vec{F} = f(\vec{r}, \mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_d). \quad (3.5)$$

Síla také závisí na permeabilitě magnetu, která je ovšem v čase konstantní. V simulacích byla odhadnuta a použita hodnota

$$\vec{\mu}_{mag} = \mu_{mag} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}.$$

Pro dobré ovládání magnetu cívkami je proto dobré vybrat magnet s co největší magnetickou indukcí. Tím pak budou pro vyvinutí požadované síly potřeba menší magnetické momenty všech cívek, tedy podle vztahu (1.2) budou potřeba i menší proudy.

### 3.2.2 Stavový popis

Pro vytvoření modelu v prostředí Simulink, ve kterém budou spouštěny simulace, je vhodné popsat systém ve formě stavového modelu. Tento model bude popisovat pohyb magnetu v prostoru, a to jako důsledek sil, které na magnet působí a které byly odvozené v předchozí části. Stavový popis bude ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= As(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cs(t).\end{aligned}$$

kde  $s(t)$  označuje stav systému, který je závislý na čase  $t$ ,  $u(t)$  je vstupem systému, který odpovídá působící síle (3.4), a  $y(t)$  je výstupem systému.

Nejprve bude popsán pohyb magnetu pouze ve směru jedné osy. Zvoleným stavem bude poloha magnetu  $r$  a jeho rychlost  $v$ , pro kterou platí, že je derivací polohy.

Stavy budou zvoleny v následujícím pořadí

$$\begin{aligned}s_1 &= r, \\ s_2 &= v = \dot{r} = \dot{s}_1.\end{aligned}$$

V rovnici (3.3) vystupuje zrychlení magnetu, pro které platí, že je derivací rychlosti, tedy pomocí stavů definovaných výše platí rovnost

$$a = \ddot{r} = \dot{s}_2.$$

Rovnici (3.3) lze tedy za předpokladu  $u = F^*$ , kde  $F^*$  je složka celkové síly (3.4), která na magnet působí v uvažovaném směru, zapsat následovně

$$\dot{s}_2 = \frac{1}{m}F^*.$$

Výše uvedené je možné zapsat do maticové formy

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Tento stavový popis je možné použít k popisu pohybu magnetu ve směru všech tří os, čímž budou získány celkem tři stavové popisy tří systémů. Pohyb magnetu v celém prostoru je také možné zapsat pomocí jednoho systému, který bude mít celkem 6 stavů.

Těmito stavy budou zvoleny postupně polohy magnetu ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$  a následně rychlosti v těchto směrech

$$\begin{aligned} s_1 &= x, s_2 = y, s_3 = z, \\ s_4 &= \dot{x} = v_x, s_5 = \dot{y} = v_y, s_6 = \dot{z} = v_z. \end{aligned}$$

Také vstupem systému bude vektor dimenze 3, protože v každém směru  $x$ ,  $y$ ,  $z$  může působit síla o jiné velikosti, tedy dostaneme vektor vstupů

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T,$$

který odpovídá jednotlivým složkám celkové síly (3.4)  $F_x$ ,  $F_y$  a  $F_z$ .

Vektor výstupů bude postupně tvořen polohou ve směru osy  $x$ ,  $y$  a  $z$ , kterou je možné měřit.

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_x & y_y & y_z \end{bmatrix}^T$$

Stavový popis systému pak bude mít tvar

$$\begin{aligned} S : \begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \\ \dot{s}_4 \\ \dot{s}_5 \\ \dot{s}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} y_x \\ y_y \\ y_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Z tohoto popisu je zřejmé, že se jedná o tři na sobě nezávislé systémy, které popisují pohyb magnetu separovaně ve směru os  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Tyto systémy jsou ovlivněny třemi vstupy, kdy každý vstup ovlivňuje pouze jeden systém v odpovídajícím směru. V tomto případě je tedy možné použít k popisu pohybu magnetu v každém směru systém (3.6), čímž budou získány tři systémy označené  $S_x$ ,  $S_y$  a  $S_z$ .

Stavy systému  $S_x$  tak budou poloha  $x$  a rychlost  $v_x$ . Systém  $S_x$  bude popisovat pohyb ve směru osy  $x$  a jeho stavový popis bude vypadat následovně

$$\begin{aligned} S_x : \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot u_x, \\ y_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odvozený stavový popis je možné zkráceně zapsat

$$\begin{aligned} S_x : \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_x(t), \\ y_x(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Pro pohyb magnetu ve směru osy  $y$  a  $z$  bude stavový popis vypadat obdobně, protože matice dynamiky  $A$ , vstupní matice  $B$  a výstupní matice  $C$  jsou u všech tří systémů shodné.

$$\begin{aligned} S_y : \dot{y}(t) &= Ay(t) + Bu_y(t), \\ y_y(t) &= Cy(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_z : \dot{z}(t) &= Az(t) + Bu_z(t), \\ y_z(t) &= Cy(t). \end{aligned}$$

### 3.3 Řízení

Cílem této práce je řídit pohyb magnetu tak, aby sledoval požadovanou trajektorii. V předchozí části byly odvozeny modely systémů  $S_x$ ,  $S_y$  a  $S_z$  a bylo zjištěno, že tyto systémy jsou na sobě nezávislé. Z tohoto zjištění vyplývá, že pohyb magnetu je možné i řídit v těchto směrech nezávisle na sobě.

Řízení bude navrženo pomocí stavové zpětné vazby, která systém stabilizuje a zajistí, že bude magnet schopný sledovat požadovaný signál a nebo ho bude možné posunout do rovnovážného stavu, tedy do středu roviny  $xy$ . Navržená zpětná vazba zajistí, že budou póly systému umístěny podle požadavku do levé komplexní polo roviny.

Nyní budou uvedeny vlastnosti systému  $S_x$ , protože je ale tento systém ekvivalentní se systémy  $S_y$  a  $S_z$ , budou tyto vlastnosti platit i pro ně.

Neřízený systém  $S_x$  má dva póly

$$p_{x1} = 0, \quad p_{x2} = 0.$$

Oba tyto póly leží na imaginární ose a systém je tak na mezi stability. Aby bylo systém možné řídit, musí být říditelný a pozorovatelný.

Říditelnost je zjištěna pomocí hodnoty matice říditelnosti, která musí být rovna řádu systému, v tomto případě 2, což je pro získanou matici říditelnosti splněno, a to pro jakoukoliv hmotnost magnetu  $m$ .

$$Q_{COx} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

Pozorovatelnost je zjištěna stejným způsobem, a to určením hodnoty matice pozorovatelnosti, která se opět rovná dimenzi systému. Neměřený stav, kterým je rychlost magnetu, je možné dopočítat z jeho polohy, tj. z prvního stavu.



$$Q_{OBx} = \begin{bmatrix} C & CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Navrhovaná stavová zpětná vazba bude ve tvaru

$$u_x = -K_x x + u_{xref},$$

kde  $u_{xref}$  je referenční signál ve směru osy  $x$ . Po uzavření zpětné vazby tak přechází popis systému  $S_x$  do následujícího tvaru

$$\dot{x} = (A - BK_x)x + B \cdot u_{xref}.$$

K získání koeficientů matice  $K_x$  je možné použít příkaz *place* v Matlabu, který vrací příslušné koeficienty podle zadaných požadovaných pólů. Při volbě pólů ovšem není triviální zohlednit požadavky na kvalitu řízení, jako je přesnost řízení, rychlost regulace, apod. Z tohoto důvodu byl využit jiný přístup, kterým je návrh LQ regulátoru. Jde o kvadraticky optimální regulátor pro lineární systémy, který je optimální z pohledu minimalizace kvadratického kritéria  $J$ , kdy

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt.$$

Navržený regulátor je ovlivněn pomocí čtvercových matic  $Q$  a  $R$ , které umožňují penalizovat dobu ustálení jednotlivých stavů pomocí matice  $Q$  a velikost akčních zásahů pomocí matice  $R$ . Kritérium  $J$  pak zajistí kompromis mezi těmito požadavky. Tento přístup je vhodný především z důvodu omezených proudů, které mohou vstoupovat do cívek. Je tak možné tyto proudy minimalizovat.

Volba matic  $Q$  a  $R$  není opět triviální, ale v tomto případě bude provedeno zjednodušení na volbu pouze diagonálních matic, kde matice  $Q$  má stejnou dimenzi jako vektor stavů a prvky na diagonále penalizují příslušný stav. Matice  $R$  má stejnou dimenzi jako vektor vstupů a prvky na diagonále penalizují příslušný vstup. Přitom důležitá není konkrétní velikost prvků, ale podstatný je poměr mezi jednotlivými prvky matic  $Q$  a  $R$ .

K návrhu LQ regulátoru je možné použít příkaz *lqr* v Matlabu, kde vstupem je řízený systém společně se zvolenými maticemi  $Q$  a  $R$  a výstupem jsou koeficienty matice  $K$ , která je nazývána Kalmanovou maticí. Tato matice vystupuje opět ve zpětné vazbě a jde o časově neproměnnou matici.

Touto zpětnou vazbou je opět možné řídit každý systém  $S_x$ ,  $S_y$  a  $S_z$  zvlášť, a tudíž je možné zvolit si pro každý směr jiné požadavky. Protože je ovšem požadováno, aby magnet sledoval trajektorii v celé rovině  $xy$ , budou navržené zpětné vazby totožné pro systém  $S_x$  i  $S_y$ . Protože pohyb magnetu ve směru osy  $z$  je omezen shora i zdola, není systém  $S_z$  řízen vůbec. V simulačním modelu je přidána pouze podmínka pro omezení polohy magnetu ve směru osy  $z$ , a to ve výšce obou plexiskel, tedy minimální poloha je  $0.04 \text{ m}$  a maximální  $0.042 \text{ m}$ .

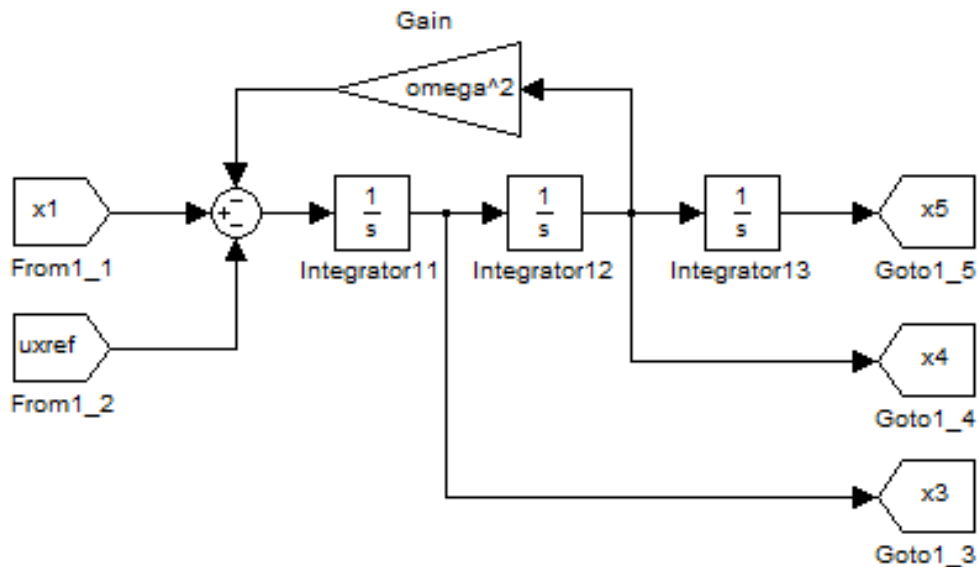
### 3.3.1 Princip vnitřního modelu

Protože je požadováno, aby magnet sledoval v rovině  $xy$  jakoukoliv křivku, je nutné postupovat podle principu vnitřního modelu, který zní:

*„Pro sledování obecného referenčního signálu  $w(t)$  v ustáleném stavu regulovanou veličinou  $y(t)$  resp. pro kompenzaci výstupní poruchy  $v(t)$  je postačující, aby póly systému generujícího referenční signál resp. výstupní poruchu byly obsaženy v pólech otevřené regulační smyčky (buď jsou obsaženy v pólech systému nebo se musí stát součástí pólů regulátoru). [6, p. 77]“*

Řešením je přidat do otevřené smyčky generátor referenčního signálu. Obecně je pro sledování konstanty nutné přidat jeden integrátor (obsahuje stejný pól jako obraz skokového signálu), do něhož vstupuje regulační odchylka. Pro sledování lineární funkce jsou potřeba dva integrátory, u paraboly jsou to tři integrátory atd.

Pokud by bylo požadováno přesné sledování periodického signálu, např. sinu-sovky, je již nutné použít dva integrátory společně s druhou mocninou frekvence referenčního signálu ve zpětné vazbě. Pokud by byl referenční signál posunut v rovině  $xy$  mimo střed této roviny, je nutné přidat ještě další integrátor. Schéma tohoto systému s vnitřním modelem generátoru referenčního signálu je pro systém  $S_{xext}$  zobrazené na obrázku 3.8 a takto rozšířený systém již obsahuje pět stavů.



Obrázek 3.8: Princip vnitřního modelu pro periodický signál

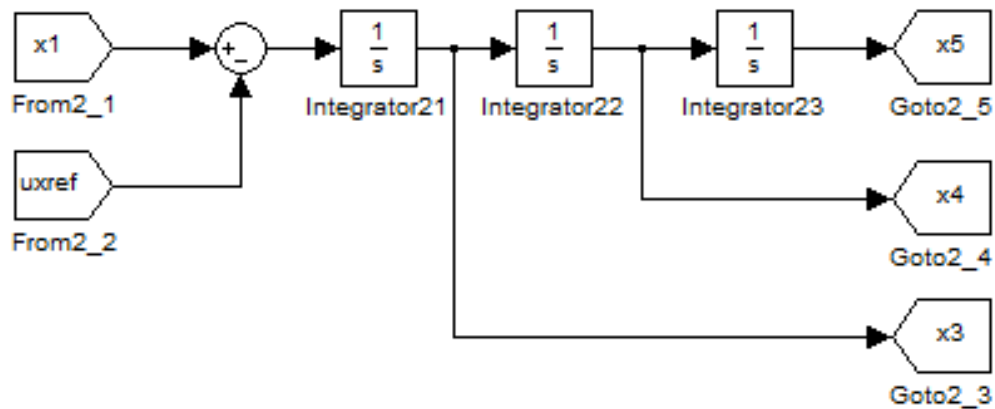
Stavový popis tak má tvar

$$S_{xext} : \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_x, \quad (3.7)$$

$$y_{xext} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

kde  $\omega$  je frekvence periodického signálu. Opět rozšířený systém  $S_{yext}$  bude vypadat obdobně. Nevýhodou tohoto přístupu je, že řízení je navrženo pro konkrétní frekvenci referenčního signálu.

Dále proto bude uvažován případ přidání tří integrátorů jako modelu referenčního signálu, jehož schéma je uvedené na obrázku 3.9.



Obrázek 3.9: Princip vnitřního modelu pro parabolu

Stavový popis rozšířeného systému  $S_{xext}$  může být zapsán následovně

$$S_{xext} : \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u_x, \quad (3.8)$$

$$y_{xext} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Podobně tomu bude i pro systém  $S_{yext}$ .

Při návrhu LQ regulátoru je uvažován rozšířený systém (3.8), jehož póly jsou opět všechny nulové.

$$p_{x1} = p_{x2} = p_{x3} = p_{x4} = p_{x5} = 0$$

Váhová matice  $Q$  je tak dimenze 5 a byla zvolena ve tvaru

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

Váha u druhého stavu, kterým je rychlost, je nižší, protože bude u reálného systému rekonstruovaná z polohy a může tak dojít ke ztrátě přesnosti, proto na řízení tohoto stavu nejsou kladeny velké požadavky.

Matice  $R$  je volena

$$R = [1],$$

mnohem větší důraz je tedy kladen na odchylky v řízení oproti penalizaci akčního zásahu.

Všechny póly uzavřeného systému se zpětnou vazbou vypočtenou podle výše uvedených kritérií tak budou v levé komplexní polorovině a dva jsou již komplexně sdružené

$$p_{cx1} = -199.75, p_{cx2} = -9.96, p_{cx3} = -1, \\ p_{cx4} = -0.71 + i0.71, p_{cx5} = -0.71 - i0.71.$$

Výstup zpětné vazby u systému  $S_x$ , tedy  $K_x x(t)$ , udává velikost síly  $\hat{F}_x$ , která musí na magnet působit, aby sledoval referenční signál v tomto směru. Platí tedy

$$\hat{F}_x = K_x x(t).$$

Stejným způsobem je získána i síla  $\hat{F}_y$ . Protože ale ve směru osy  $z$  magnet není řízen stavovou zpětnou vazbou, není získána požadovaná hodnota síly  $\hat{F}_z$ . Vzhledem k omezení pohybu magnetu v tomto směru omezen dvěma deskami z plexiskla, není nutné tuto sílu počítat a velikost  $\hat{F}_z$  je stanovena tak, aby byly minimalizovány velikosti požadovaných proudů ve všech cívkách. Z experimentů bylo zjištěno, že tohoto bude dosaženo při nulové síle  $\hat{F}_z$ .

### 3.3.2 Určení magnetického momentu cívek

Aby byl pohyb magnetu řízen cívkami, které jsou při simulaci nahrazené magnetickými dipóly, je nutné vypočítat velikost a směr magnetického momentu každého dipólu. Magnetický moment je funkcí proudu, který jím protéká, jak bylo uvedeno ve vzorci (1.2).

Celková síla byla v minulé kapitole odvozena jako nelineární funkce polohy magnetu a magnetických momentů všech cívek (3.5). Zároveň byly získány požadované síly  $\hat{F}_x$  a  $\hat{F}_y$  ze stavové zpětné vazby a síla  $\hat{F}_z$  byla stanovana jako nulová.

Toto může být zapsáno

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, \mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_d) &\stackrel{!}{=} \hat{F}_x, \\ f(\vec{r}, \mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_d) &\stackrel{!}{=} \hat{F}_y, \\ f(\vec{r}, \mu_a, \mu_b, \mu_c, \mu_d) &\stackrel{!}{=} \hat{F}_z. \end{aligned}$$

Výše uvedenou soustavu nelineárních rovnic je možné řešit v matematickém programu Maple, který umožňuje symbolické řešení. Vzhledem k tomu, že počet neznámých, kterými jsou velikosti magnetických momentů všech čtyř dipólů, je vyšší než počet rovnic, musí být zvolena jedna neznámá jako parametr. Vybrána byla velikost magnetického momentu cívky  $D$ , tedy  $\mu_d$ .

Řešením této soustavy rovnic budou opět nelineární funkce, které budou záviset na poloze magnetu, velikosti magnetického momentu cívky  $D$  a požadovaných silách, což může být zapsáno do následujících rovnic

$$\begin{aligned} \mu_a &= g(\vec{r}, \mu_d, \hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z), \\ \mu_b &= g(\vec{r}, \mu_d, \hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z), \\ \mu_c &= g(\vec{r}, \mu_d, \hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z), \end{aligned}$$

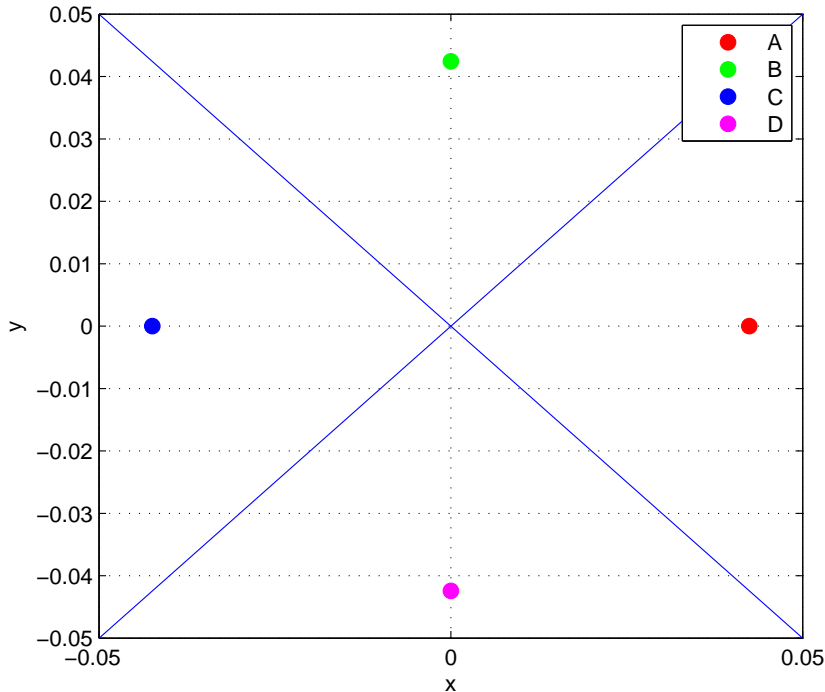
kde  $g$  je obecná nelineární funkce.

Protože výpočet těchto funkcí by v reálném čase pro každou polohu magnetu nebyl možný, bylo hledáno jiné alternativní řešení. Po rozepsání těchto funkcí pro konkrétní polohové vektory bylo zjištěno, že velikost magnetických dipólů je možné zapsat jako lineární kombinaci požadovaných sil a  $\mu_d$ , což lze zapsat do následujících rovnic

$$\begin{aligned}\mu_a &= C_{ax} \cdot \hat{F}_x + C_{ay} \cdot \hat{F}_y + C_{az} \cdot \hat{F}_z + C_{aD} \cdot \mu_d, \\ \mu_b &= C_{bx} \cdot \hat{F}_x + C_{by} \cdot \hat{F}_y + C_{bz} \cdot \hat{F}_z + C_{bD} \cdot \mu_d, \\ \mu_c &= C_{cx} \cdot \hat{F}_x + C_{cy} \cdot \hat{F}_y + C_{cz} \cdot \hat{F}_z + C_{cD} \cdot \mu_d.\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že je možné vypočítat jednotlivé koeficienty pro každou polohu před začátkem simulace a tyto koeficienty následně použít podle aktuální polohy při řízení. Protože však není možné vypočítat dopředu koeficienty s dokonalou přesností pro každý bod v prostoru, bylo jako řešení navrženo vypočítat hodnoty pouze pro pevnou výšku skla, po kterém se magnet pohybuje, a zanedbat mírné nadzvednutí v tomto směru. V této rovině pak byla určena množina bodů, pro které byly všechny koeficienty vypočteny.

Výše uvedené vztahy je možné použít pouze za předpokladu, že magnetický moment jednoho ze čtyř dipólů bude vždy volen jako parametr. Tato volba bude vždy záviset na aktuální poloze magnetu v rovině  $xy$ , kdy jako parametr bude zvolena cívka, která je od magnetu nejvíce vzdálena. Magnet je již zpravidla mimo dosah magnetického pole této cívky, a proto není nutné ji ovládat a může do ní být po celou dobu pouštěn konstantní proud. Aby bylo jasné, kdy bude magnetický moment kterého dipólu nastavený na konstantní hodnotu, byla rovina  $xy$  rozdělena na čtyři sekce, které jsou vyznačeny na obrázku 3.10.



Obrázek 3.10: Umístění cívek do roviny  $xy$  a rozdělení této roviny do čtyř sekcí

Podmínky pro přepínání konstantních magnetických momentů na cívkách jsou následující

$$\begin{aligned}\mu_a = konst. &\Leftrightarrow y > x \wedge y \leq -x, \\ \mu_b = konst. &\Leftrightarrow y \leq x \wedge y < -x, \\ \mu_c = konst. &\Leftrightarrow y < x \wedge y \geq -x, \\ \mu_d = konst. &\Leftrightarrow y \geq x \wedge y > -x.\end{aligned}$$

Získané velikosti magnetických momentů na všech cívkách jsou přivedeny na vstupy bloků, které z nich vypočítají podle dříve uvedených vzorečků celkovou sílu  $\vec{F}$ , která na systém působí. Tato síla je pak přivedena se záporným znaménkem na vstup systému, kde záporné znaménko odpovídá záporné zpětné vazbě.

Otázkou bylo, jaká je ideální velikost konstantního magnetického momentu, který je vždy nastaven na nejvzdálenější cívce. Bylo zjištěno, že pro poměrně velký rozsah nemá velikost tohoto konstantního momentu vliv na velikost ostatních momentů. Nejlepším řešením je tedy přidršet poslední velikost proudu, která byla na vstupu cívky předtím, než byla zvolena jako parametr, aby nedocházelo ke skokovým změnám.

Podle výše uvedeného bylo vypočteno 12 koeficientů pro případ, že na dipólu  $D$  je nastavený konstantní magnetický moment. V Simulinku je pro tyto hodnoty využit blok *Lookup table*. Jde o tabulku, ve které jsou uloženy vypočtené hodnoty a vstupem jsou souřadnice polohy magnetu  $x$  a  $y$ , pomocí kterých jsou vyhledány odpovídající koeficienty. V případě, že je na vstupu bloku poloha odlišná od těch, pro které byly koeficienty v tabulce uloženy, jsou koeficienty vypočteny pomocí lineární interpolace.

Stejným způsobem by mohly být vypočtené zbylé koeficienty pro případ, že je konstantní magnetický moment na dipólu  $A$ ,  $B$  nebo  $C$ . Poté by ovšem bylo získáno celkem 48 koeficientů, pro které by bylo nutné použít 48 tabulek. To by znamenalo velkou zátěž na paměť, proto byl hledán způsob, jak počet koeficientů snížit.

Protože jsou dipóly v rovině umístěné symetricky podle středu, je možné využít vypočtených 12 koeficientů pro konstantní  $\mu_D$  i pro další cívky, ovšem při jejich použití je nutné dodržet následující pravidla.

Pro konstantní magnetický moment na dipólu  $C$  jsou využity stejné koeficienty jako pro konstantní  $\mu_D$ , ale na vstupu tabulek jsou přivedeny nové souřadnice  $x'$  a  $y'$  získané ze souřadnic odpovídajících skutečné poloze magnetu podle vztahů

$$\begin{aligned}x' &= y, \\ y' &= -x.\end{aligned}$$

Momenty na zbylých dipólech  $A$ ,  $B$  a  $D$  mohou být vypočteny pomocí vztahů

$$\begin{aligned}\mu_A &= C_{by} \cdot \hat{F}_x - C_{bx} \cdot \hat{F}_y + C_{bz} \cdot \hat{F}_z + C_{bD} \cdot \mu_c, \\ \mu_B &= C_{cy} \cdot \hat{F}_x - C_{cx} \cdot \hat{F}_y + C_{cz} \cdot \hat{F}_z + C_{cD} \cdot \mu_c, \\ \mu_D &= C_{ay} \cdot \hat{F}_x - C_{ax} \cdot \hat{F}_y + C_{az} \cdot \hat{F}_z + C_{aD} \cdot \mu_c.\end{aligned}$$

Při konstantním magnetickém momentu na dipólu  $B$  jsou opět vypočteny nové souřadnice

$$\begin{aligned}x' &= -x, \\ y' &= -y\end{aligned}$$

a momenty zbylých dipólů

$$\begin{aligned}\mu_A &= -C_{cx} \cdot \hat{F}_x - C_{cy} \cdot \hat{F}_y + C_{cz} \cdot \hat{F}_z + C_{cD} \cdot \mu_b, \\ \mu_C &= -C_{ax} \cdot \hat{F}_x - C_{ay} \cdot \hat{F}_y + C_{az} \cdot \hat{F}_z + C_{aD} \cdot \mu_b, \\ \mu_D &= -C_{bx} \cdot \hat{F}_x - C_{by} \cdot \hat{F}_y + C_{bz} \cdot \hat{F}_z + C_{bD} \cdot \mu_b.\end{aligned}$$

Posledním případem je konstantní magnetický moment na dipólu  $A$ , pro který jsou použity transformované souřadnice

$$\begin{aligned}x' &= -y, \\ y' &= x\end{aligned}$$

a momenty zbylých dipólů jsou vypočtené podle vztahů

$$\begin{aligned}\mu_B &= -C_{ay} \cdot \hat{F}_x + C_{ax} \cdot \hat{F}_y + C_{az} \cdot \hat{F}_z + C_{aD} \cdot \mu_a, \\ \mu_C &= -C_{by} \cdot \hat{F}_x + C_{bx} \cdot \hat{F}_y + C_{bz} \cdot \hat{F}_z + C_{bD} \cdot \mu_a, \\ \mu_D &= -C_{cy} \cdot \hat{F}_x + C_{cx} \cdot \hat{F}_y + C_{cz} \cdot \hat{F}_z + C_{cD} \cdot \mu_a.\end{aligned}$$

Pro řízení tedy budou použity koeficienty vypočtené pro konstantní proud na cívce  $D$ . Podle toho byla i volena množina bodů, pro které budou koeficienty vypočtené předem a uloženy do tabulky. Tato množina je ve formě mřížky, kdy ve směru osy  $x$  jsou hodnoty v intervalu  $(-0.071, 0.071)$   $m$  a ve směru osy  $y$  jsou hodnoty v intervalu  $(0, 0.071)$   $m$ , protože magnet se bude v tomto případě pohybovat pouze v horní polorovině, jak je zřejmé z obrázku 3.10. Rozestup jednotlivých hodnot v těchto intervalech je  $k = 2$   $mm$ . Jak již bylo uvedeno, koeficienty pro body mimo tuto mřížku budou vypočteny pomocí lineární interpolace.

Volba vzdálenosti jednotlivých bodů, pro které budou vypočteny koeficienty, vycházela z požadavku, aby odchylka interpolovaných hodnot od hodnot správných byla maximálně v jednotkách procent, ideálně okolo 2 %. Zároveň ale byl kladen požadavek na paměť, aby vypočtených hodnot nebylo příliš mnoho.

Z tohoto důvodu byly porovnány koeficienty, vypočtené z funkcí získaných z programu Maple a označené jako  $C_f$ , tedy hodnoty správné, s koeficienty vypočtenými z tabulek  $C_t$ .

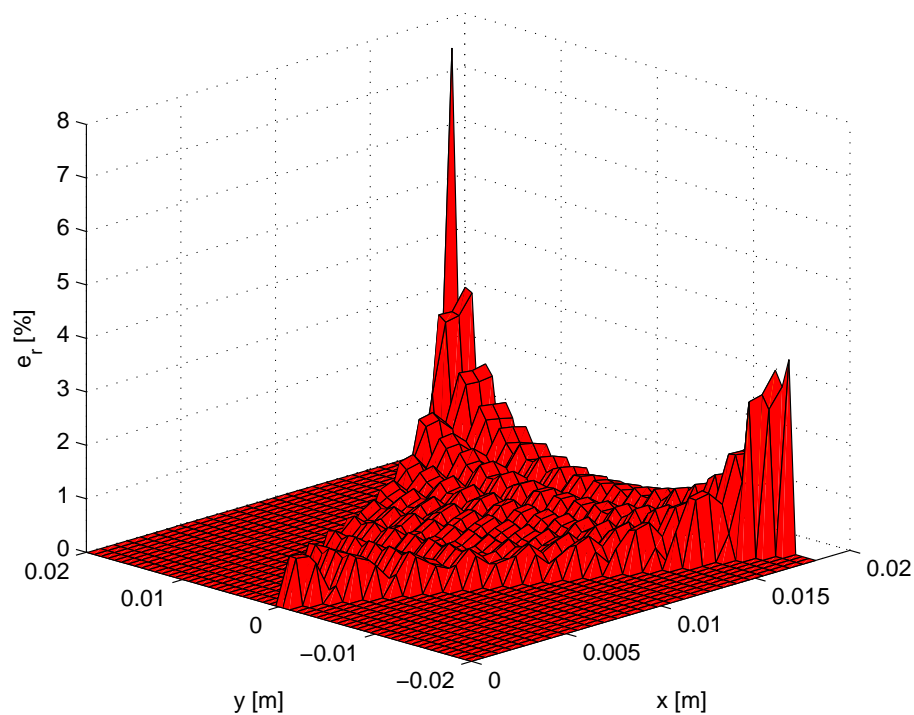


Z těchto koeficientů byla vypočtena relativní chyba v procentech

$$e_r = \frac{C_t - C_f}{C_f} \cdot 100.$$

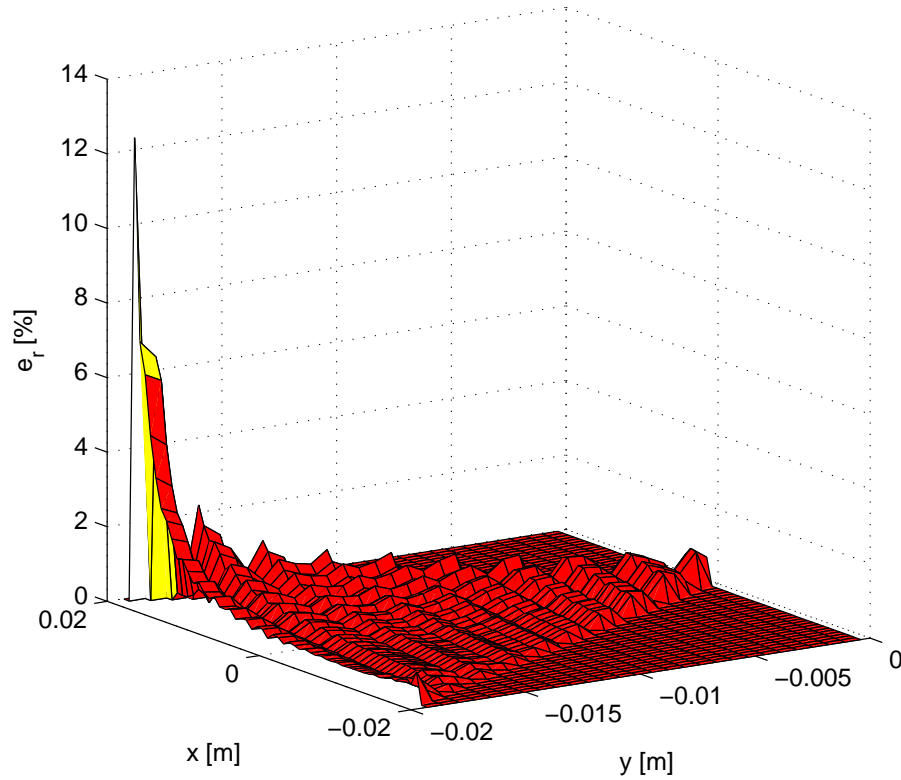
Ukázalo se, že pro blízké okolí středu roviny  $xy$ , ve kterém bude probíhat řízení magnetu, je chyba skutečně pod 2 %. Relativní chyba významně roste s klesající vzdáleností od dipólů, ve větší vzdálenosti od středu roviny tak nebude řízení uvažováno. Zmenšením vzdáleností bodů, pro které jsou koeficienty vypočteny, by bylo samozřejmě dosaženo nižších chyb, ovšem s přihlédnutím k velikosti tabulky bylo rozhodnuto ponechat rozestup mezi body  $k = 2 \text{ mm}$ .

Na následujícím obrázku 3.11 je vykreslena relativní chyba  $e_r$  v procentech, která je vypočtena pro koeficient  $C_{ax}$ , tedy koeficient pro cívku  $A$  a sílu ve směru osy  $x$  při konstantním magnetickém momentu na cívce  $C$ . Z obrázku je zřejmé, že do vzdálenosti 1.8 cm od středu ve směru osy  $x$  je velikost chyby ještě přijatelná, dále se již chyba výrazně zvyšuje.



Obrázek 3.11: Vývoj relativní chyby koeficientu  $C_{ax}$  pro konstantní magnetický moment na cívce  $C$

Dále je na obrázku 3.12 vykreslena relativní chyba  $e_r$  pro koeficient  $C_{aB}$ , tedy koeficient pro cívku  $A$ , kterým je násoben konstantní magnetický moment cívky  $B$ . Z obrázku je zřejmé, že až do vzdálenosti  $1.9\text{ cm}$  od středu ve směru osy  $y$  je velikost chyby menší než  $2\%$ , jak bylo požadováno, dále již opět roste.



Obrázek 3.12: Vývoj relativní chyby koeficientu  $C_{aB}$  pro konstantní magnetický moment na cívce  $B$

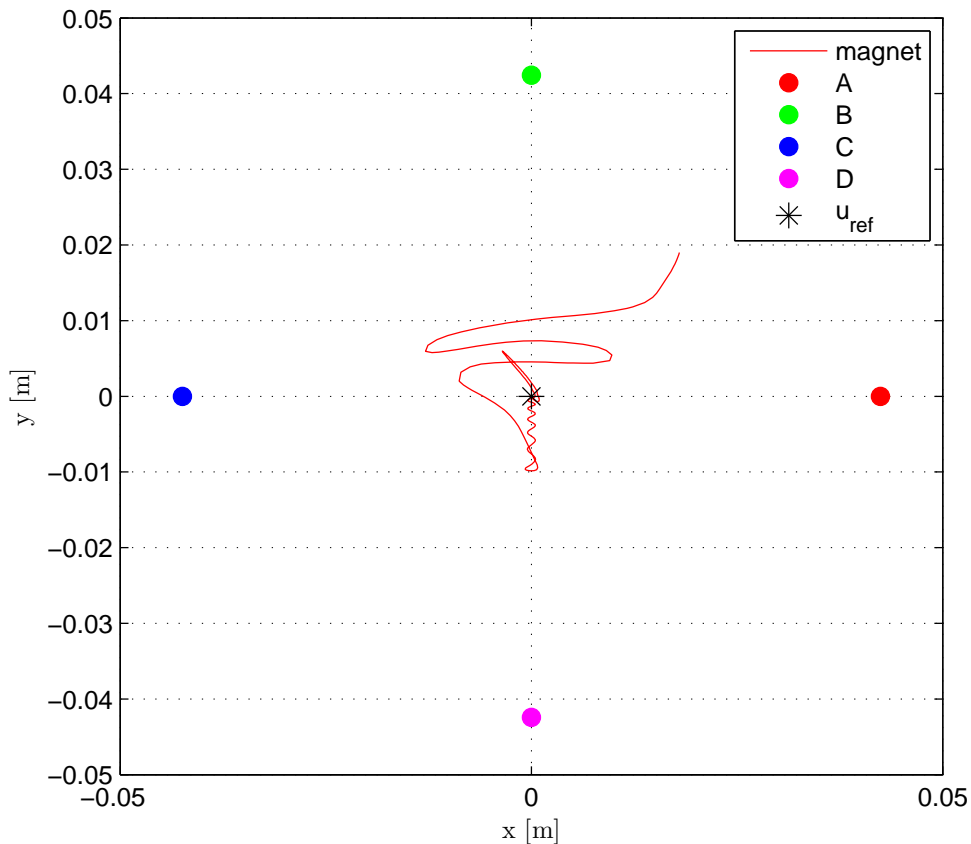
## 3.4 Výsledky simulací

Při simulacích bylo testováno navržené řízení, konkrétně LQ regulátor vypočítaný v předchozí kapitole, a to pro odvozený systém s vnitřním modelem generátoru referenčního signálu ve tvaru tří integrátorů. Řízení je testováno jak pro posun magnetu do konkrétního bodu, tak pro sledování referenčního signálu magnetem. Výsledky simulací budou vykresleny na grafech.

Aby byly simulovány podmínky řízení reálného modelu, byla do simulačního modelu přidána saturace omezující vypočtené magnetické momenty. Tím nebude možné při řízení nastavit na magnetických dipólech libovolně velký magnetický moment, což odpovídá omezeným proudům na cívkách.

### 3.4.1 Řízení do středu roviny

Jako první byl simulován případ stabilizace magnetu ve středu roviny  $xy$ . Saturace magnetických momentů byla nastavena na dolní limit  $-10$  a horní limit  $+10$ . Tato saturace způsobuje kmitání magnetu okolo osy  $y$ . Pokud by saturace nebyla uvažována, byl by pohyb magnetu přímočařejší.



Obrázek 3.13: Pohyb magnetu v rovině  $xy$  pro řízení do počátku

Na grafu 3.13 je vykreslený pohyb magnetu v rovině, počáteční podmínky byly

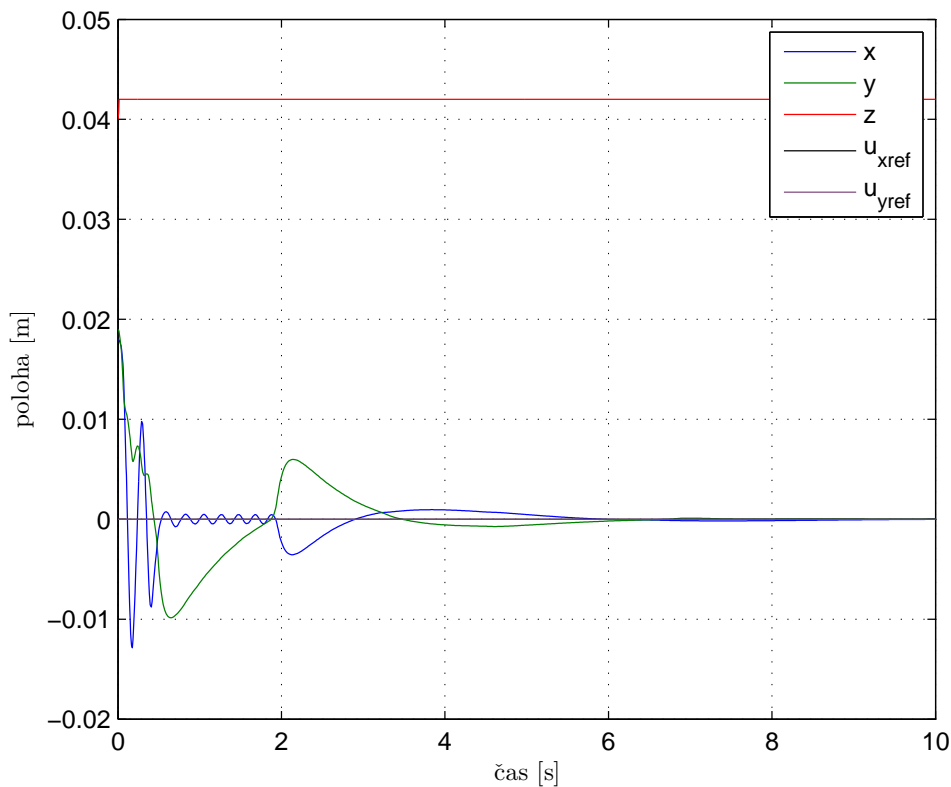
$$\vec{r}_{00} = [0.018, 0.019, 0.04]^T,$$

$$\vec{r}_{01} = [0, 0, 0]^T,$$

kde  $\vec{r}_{00}$  je vektor s počáteční polohou magnetu a  $\vec{r}_{01}$  je vektor s jeho počáteční rychlostí. Vykreslená je také hodnota  $u_{ref}$ , což je požadovaná poloha magnetu v rovině.

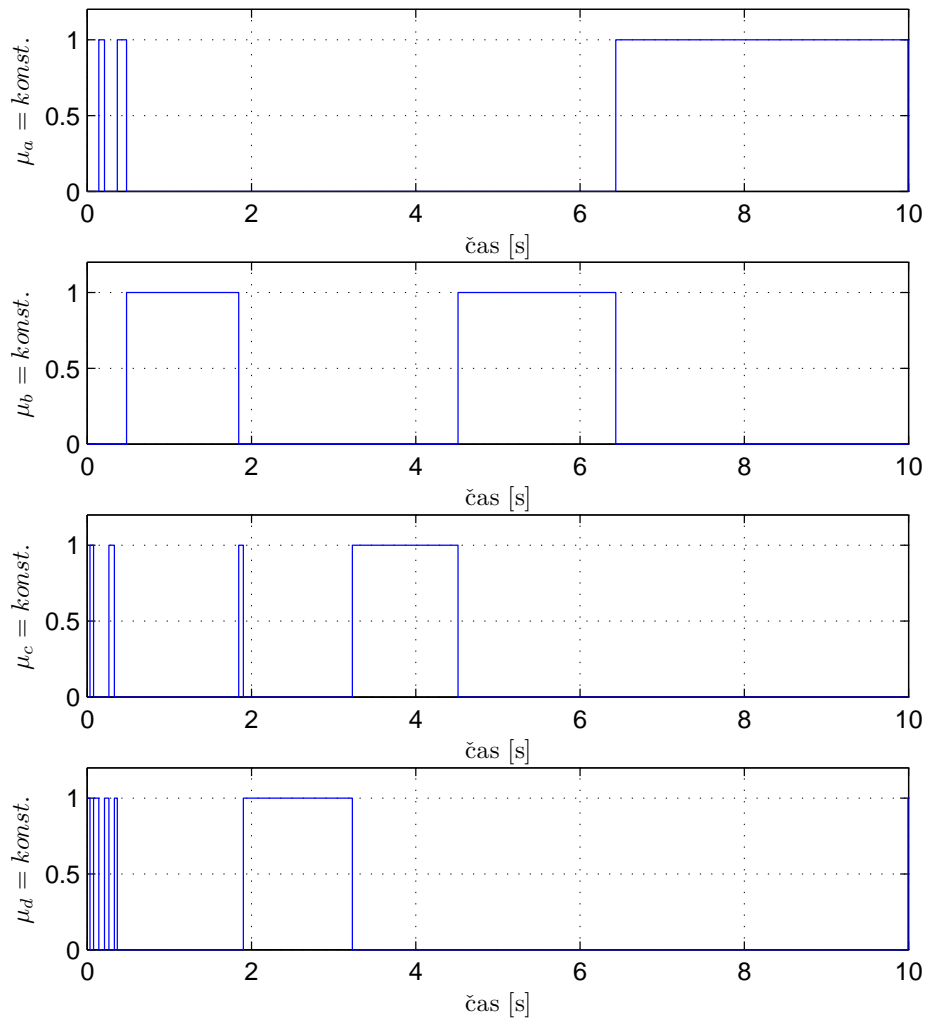
Na obrázku 3.14 jsou vykresleny souřadnice magnetu v závislosti na čase. Také je zde vykreslená poloha magnetu ve směru osy  $z$ , ze které je zřejmé, že ihned po zapnutí cívek je magnet zvednut a přitisknut k hornímu sklu. Požadovaná hodnota ve směru osy  $x$  je označena  $u_{xref}$  a obdobně požadovaná hodnota ve směru osy  $y$  je  $u_{yref}$ .

Z grafu je patrné, že se magnet již ustaluje v okolí středu roviny, ovšem poté dojde k dosažení horního limitu na magnetickém dipólu  $D$  v čase okolo 2 s, což je vidět na grafu 3.16. Tím dochází k překmitnutí a magnet se nezastaví v požadovaném bodě, protože moment  $\mu_d$  se nemůže dále zvyšovat a magnetické momenty ostatních dipólů musí na tuto skutečnost zareagovat.



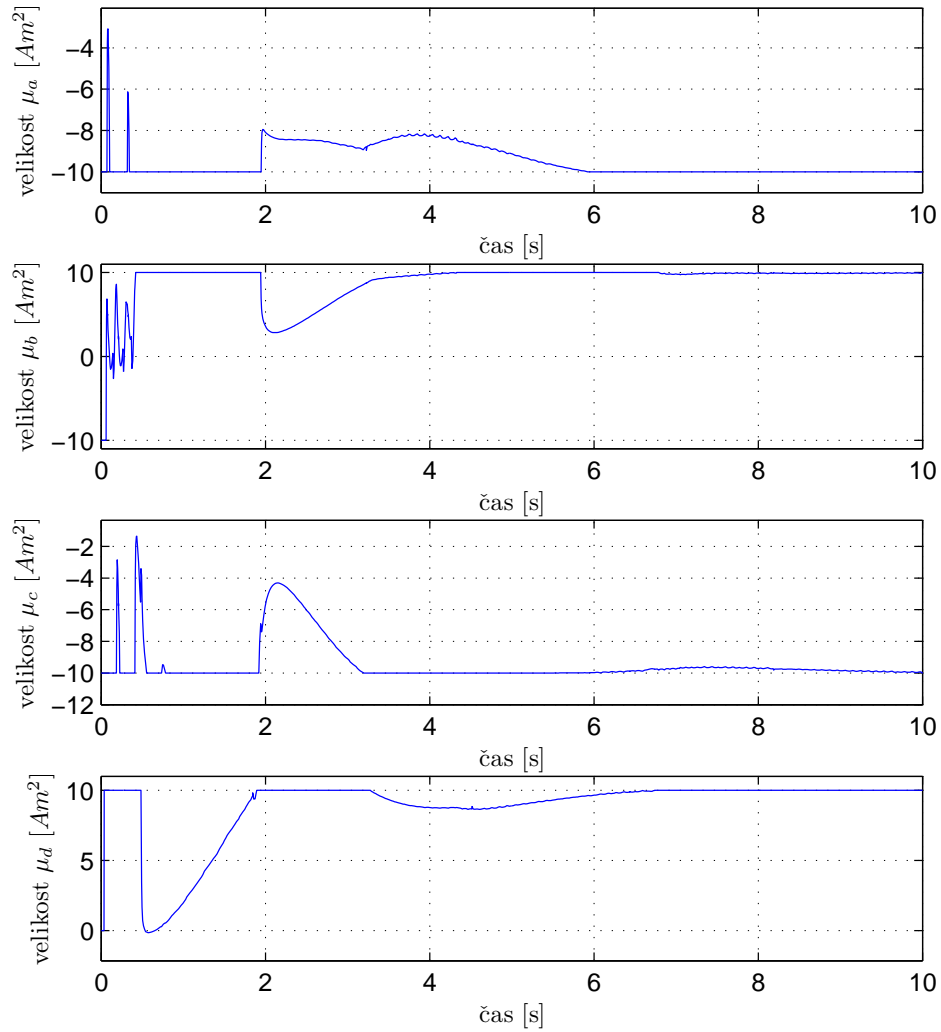
Obrázek 3.14: Souřadnice magnetu v čase pro řízení do počátku

V závislosti na aktuální poloze byl nastavován konstantní magnetický moment na nejbližším magnetickém dipólu. Na následujícím obrázku 3.15 je vykresleno toto přepínání pro jednotlivé dipóly, kde 1 znamená, že magnetický moment je konstantní, a 0, že magnetický moment je počítán z požadovaných sil.



Obrázek 3.15: Nastavování konstantních magnetických momentů jednotlivých dipólů

Na následujícím grafu 3.16 jsou zobrazeny konkrétní hodnoty magnetických momentů na všech dipólech. Byla zde nastavena saturace těchto hodnot pro simulaci reálných podmínek a ověření, zda i s touto saturací zůstává řízený systém stabilní.



Obrázek 3.16: Hodnoty magnetických momentů jednotlivých dipólů

### 3.4.2 Stabilizace magnetu v pevném bodě

Dalším případem, který byl testován, byl posun magnetu z počátku roviny do vybraného bodu. Souřadnice tohoto bodu byly zvoleny

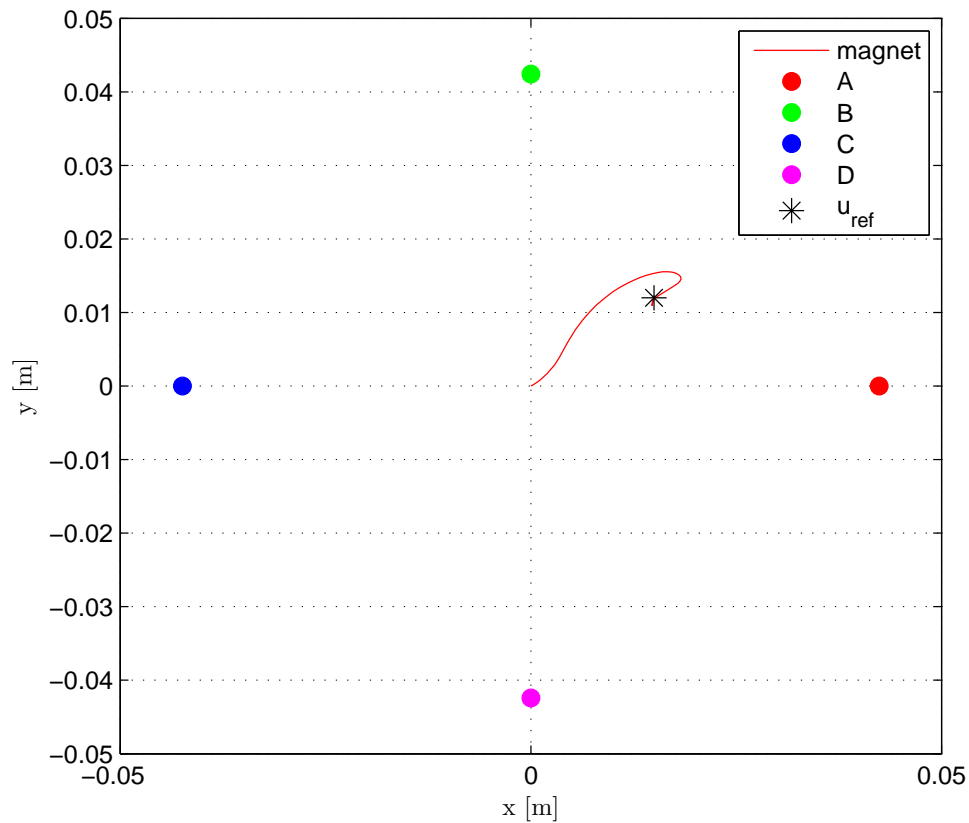
$$\vec{r}_{req} = [0.015, 0.012, 0.04]^T,$$

zatímco počáteční podmínky byly

$$\vec{r}_{00} = [0, 0, 0.04]^T,$$

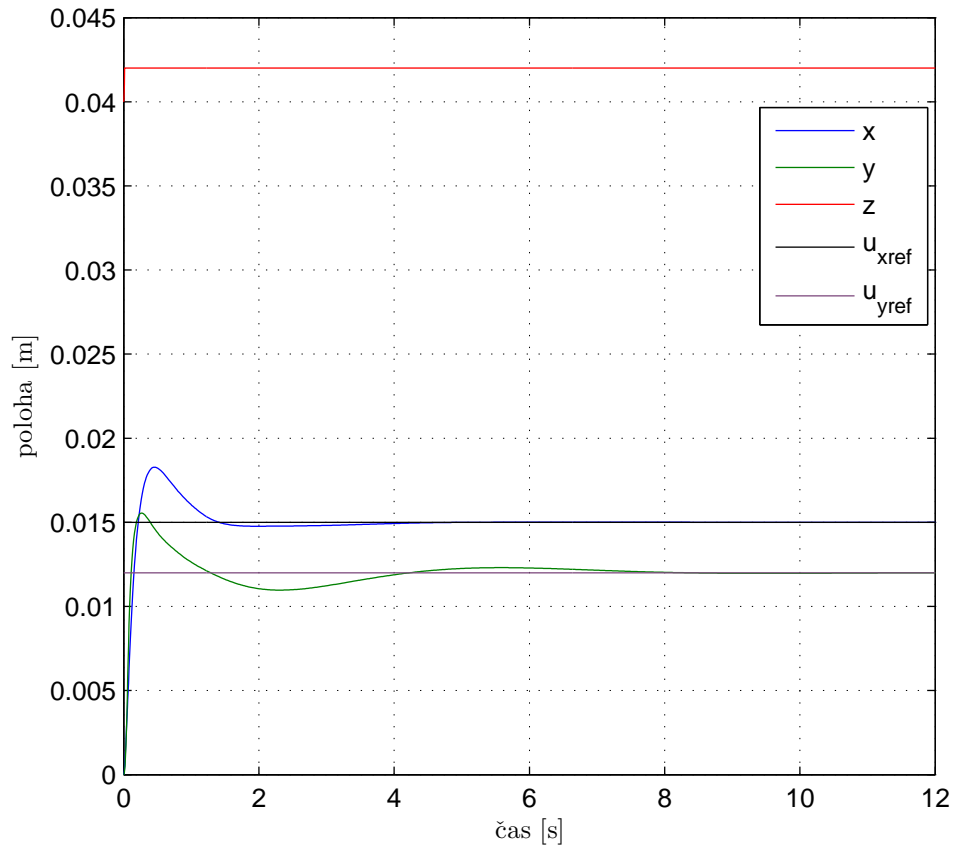
$$\vec{r}_{01} = [0, 0, 0]^T.$$

Saturace magnetických momentů byla opět nastavena na dolní limit  $-10$  a horní limit  $+10$ . Řízený pohyb magnetu v rovině  $xy$  je na obrázku 3.17.



Obrázek 3.17: Pohyb magnetu v rovině  $xy$  pro řízení do pevného bodu

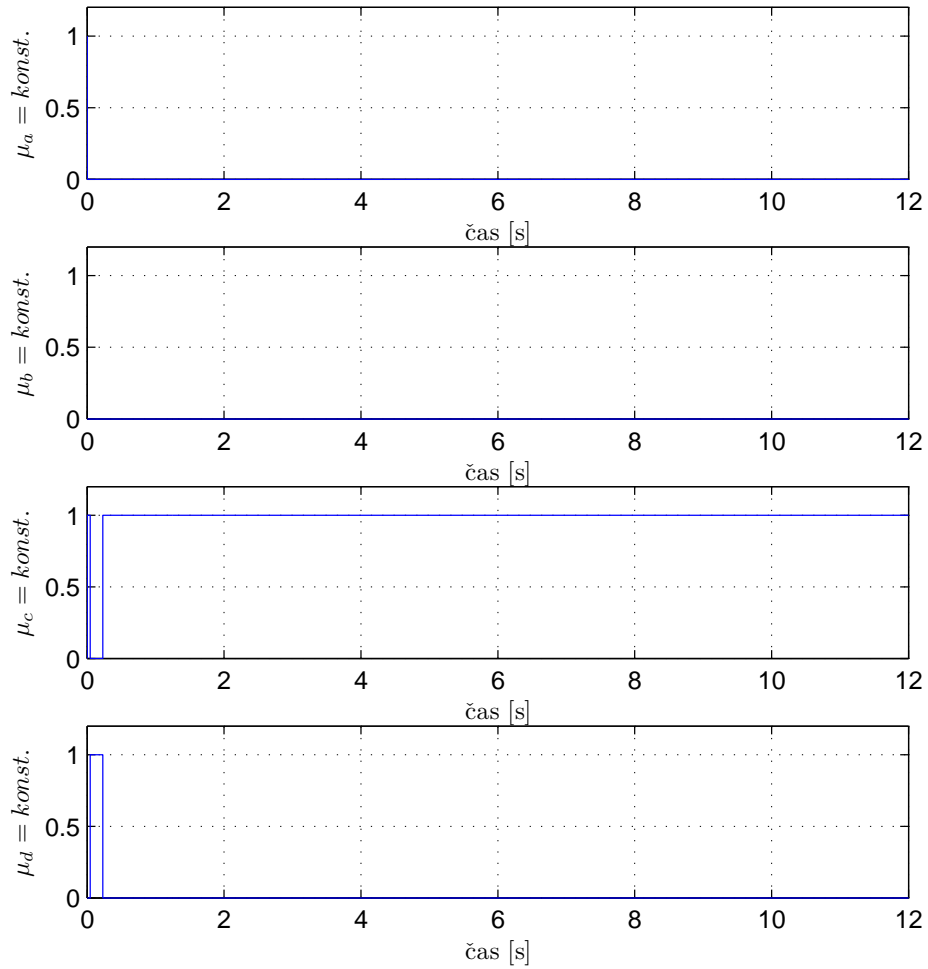
V závislosti na čase je poloha magnetu vykreslena na grafu 3.18, kde je opět vidět, že magnet je tlačěn silou k hornímu sklu.



Obrázek 3.18: Souřadnice magnetu v čase pro řízení do pevného bodu

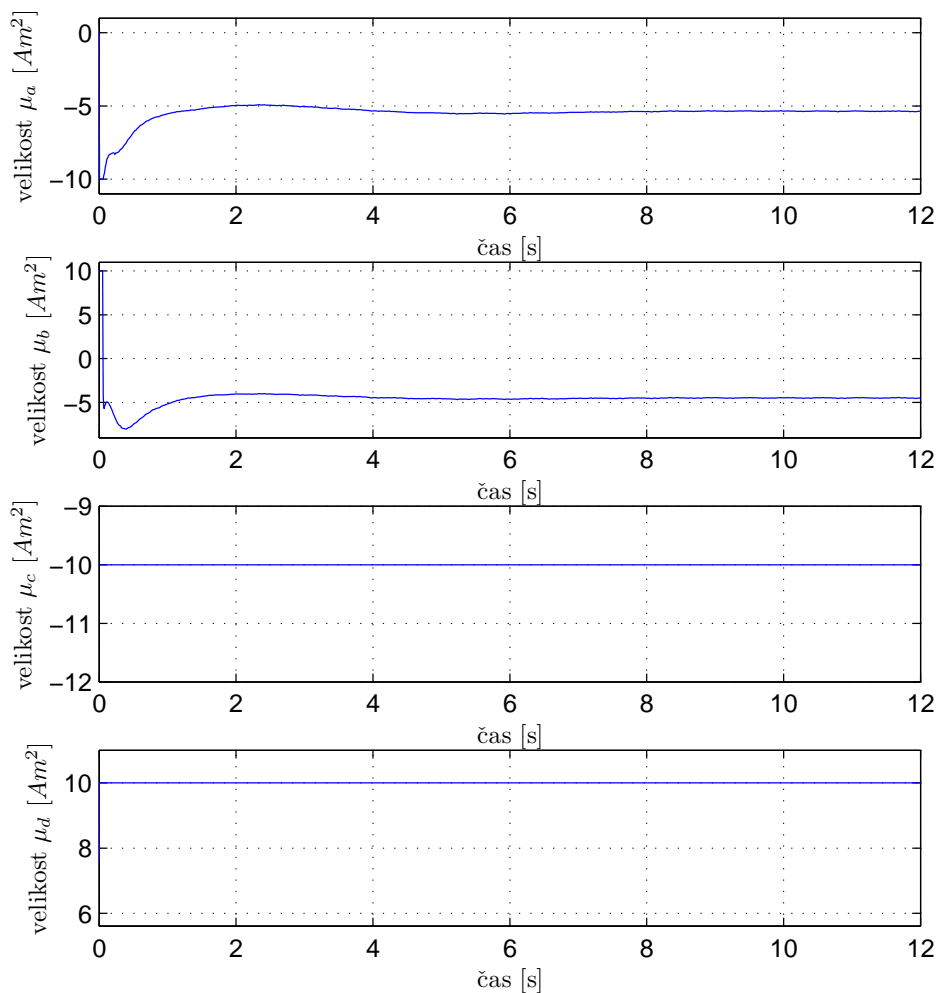


Přepínání konstantních magnetických momentů všech dipólů je uvedeno na obrázku 3.19. Vzhledem k poloze magnetu je po jeho ustálení nastavený konstantní proud stále na cívce  $C$ .



Obrázek 3.19: Nastavování konstantních magnetických momentů jednotlivých dipólů

Konkrétní velikosti magnetických momentů všech dipólů jsou na obrázku 3.20. Momenty cívek  $C$  a  $D$  jsou nastaveny na minimální a maximální hodnotu, kterou saturace umožňuje.



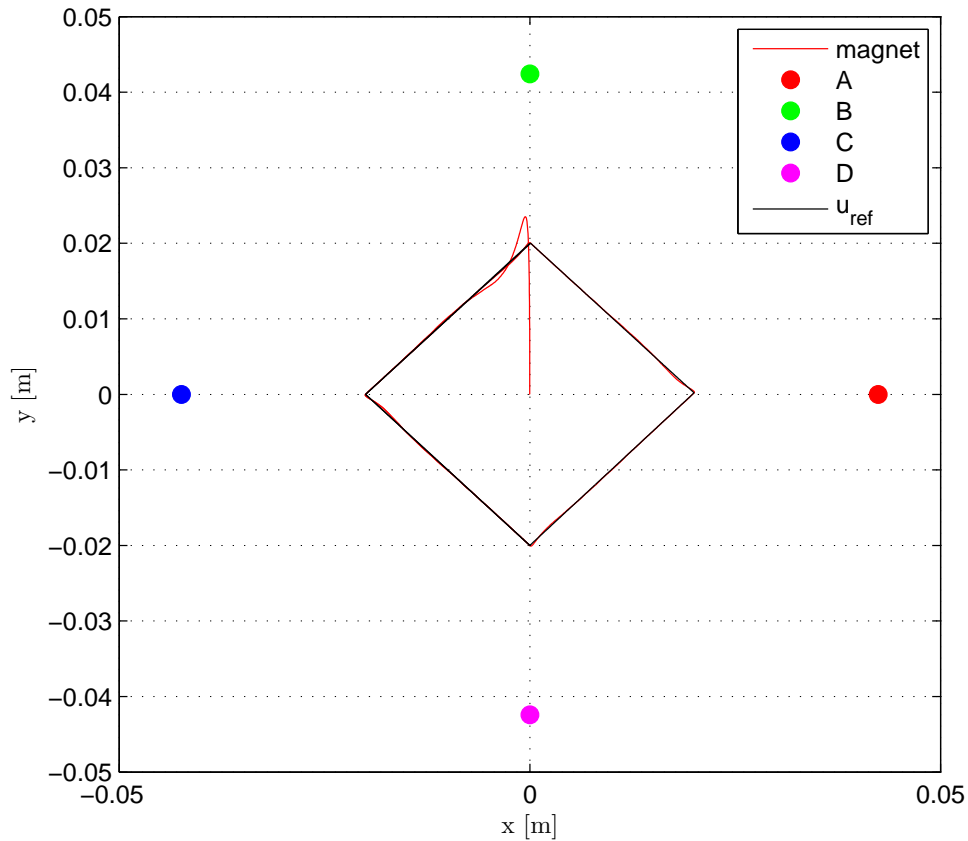
Obrázek 3.20: Hodnoty magnetických momentů jednotlivých dipólů

### 3.4.3 Sledování čtvercové trajektorie

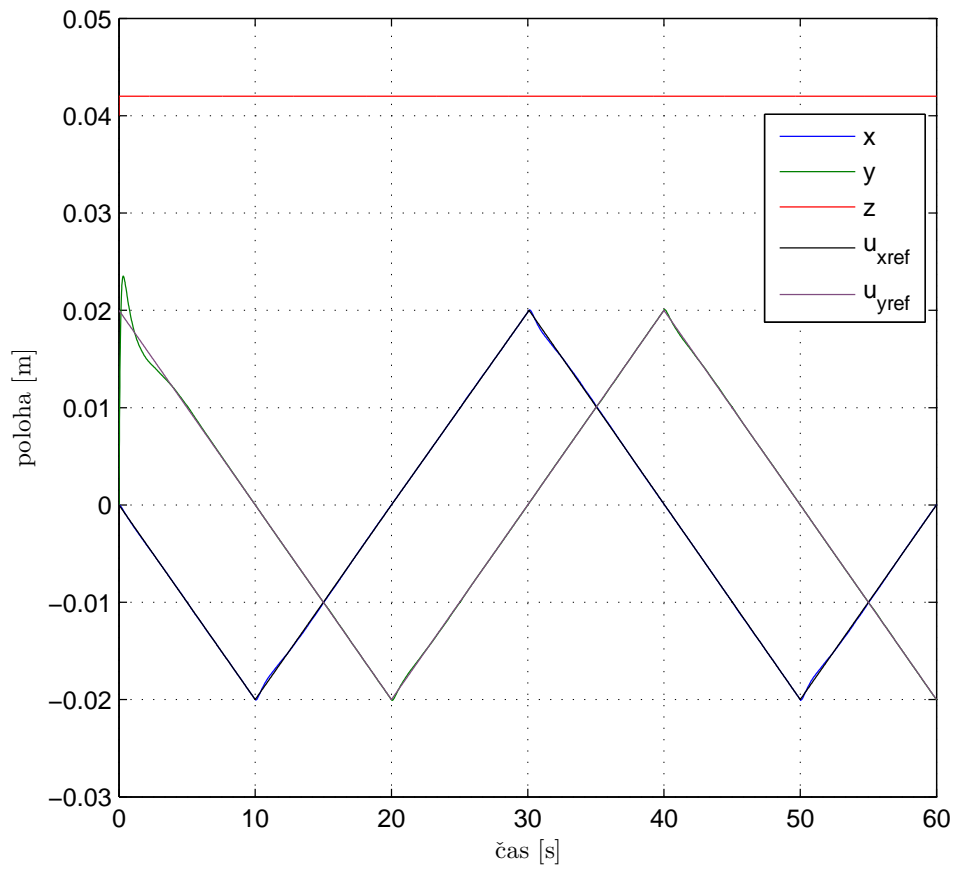
Dále bude uvažován případ, ve kterém bude magnet sledovat určitou trajektorii. Zvolen byl čtverec, jehož vrcholy leží na osách  $x$  a  $y$ , jde tak o dva trojúhelníkové signály ve směru os  $x$  a  $y$  s rozdílným fázovým posunem. Nejprve je uvažováno sledování tohoto signálu bez saturací magnetických momentů, čtverec tak může dosahovat větších rozměrů a při změně směru trajektorie nedochází k velkým výchylkám, protože nejsou omezeny akční zásahy. Úhlopříčka čtverce měří 4 cm a je použit LQ regulátor odvozený v předchozí kapitole, kladen je tedy větší důraz na rychlost ustálení stavů než na penalizaci akční veličiny.

Pohyb magnetu v rovině  $xy$  je zobrazen na grafu 3.21 a poloha magnetu v závislosti na čase na grafu 3.22. Počáteční podmínky byly zvoleny

$$\begin{aligned}\vec{r}_{00} &= [0, 0, 0.04]^T, \\ \vec{r}_{01} &= [0, 0, 0]^T.\end{aligned}$$

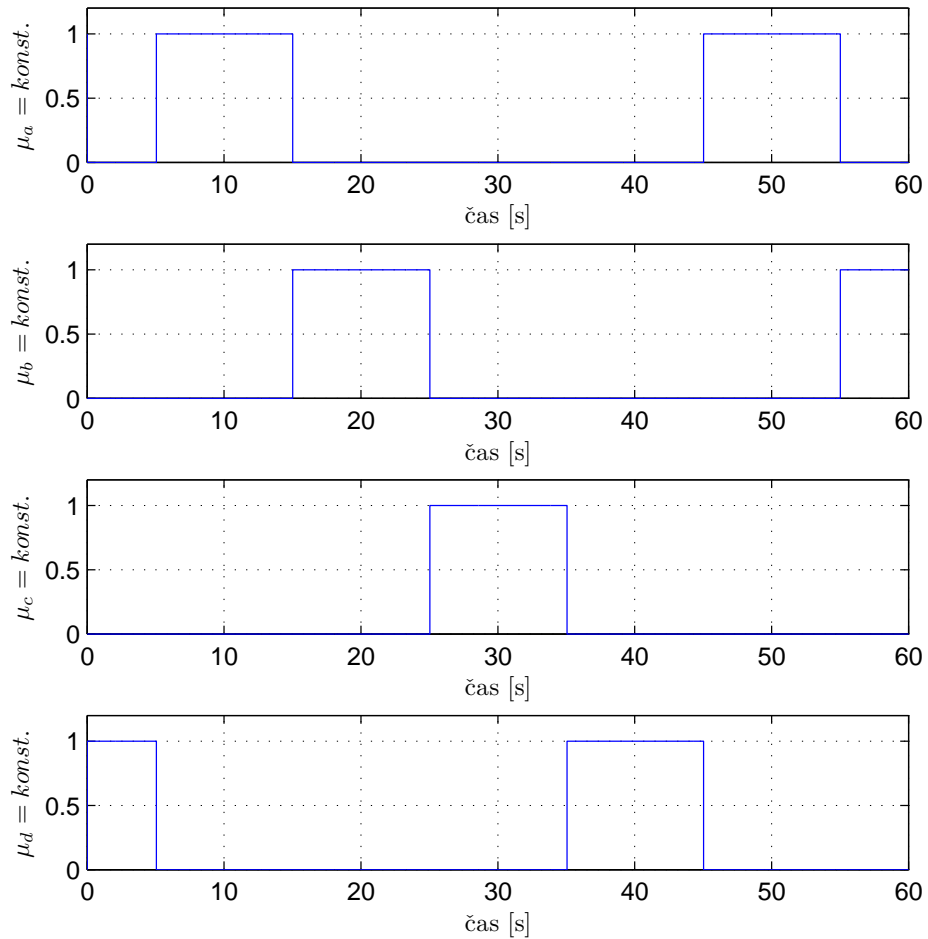


Obrázek 3.21: Pohyb magnetu v rovině  $xy$  při sledování čtvercové trajektorie bez saturace



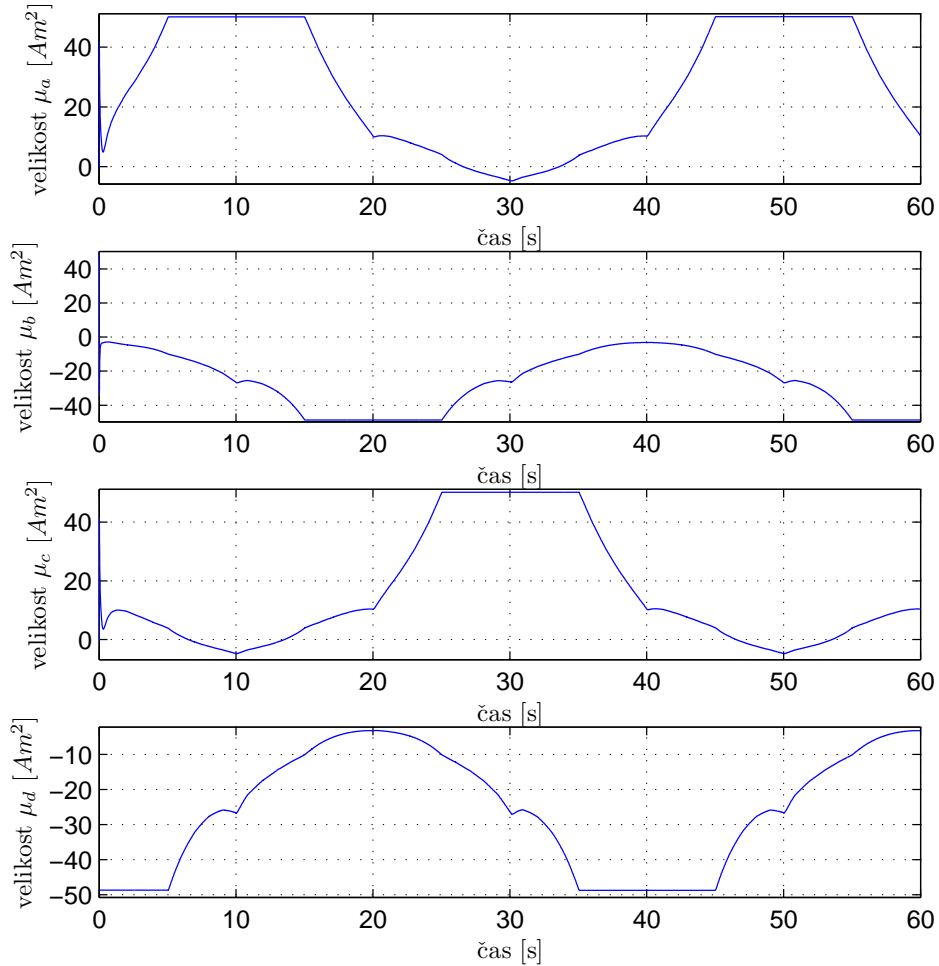
Obrázek 3.22: Souřadnice magnetu v čase při sledování čtvercové trajektorie bez saturace

Přepínání magnetických momentů všech dipólů na konstantní hodnotu je na obrázku 3.23, ze kterého je vidět, že k přepínání dochází pravidelně vzhledem k symetričnosti pohybu.



Obrázek 3.23: Nastavování konstantních magnetických momentů jednotlivých dipólů

Konkrétní velikosti magnetických momentů všech dipólů jsou na obrázku 3.24, ze kterého je zřejmé, že bez saturace dosahují momenty vysokých hodnot.



Obrázek 3.24: Hodnoty magnetických momentů jednotlivých dipólů bez saturace

Výše uvedené výsledky pro řízení bez saturace budou porovnány s řízením, které již bude bližší reálnému případu. Protože proudy na vstupu cívek jsou omezené, bude nastavená saturace magnetických momentů všech dipólů spodním limitem  $-1.5$  a horním limitem  $+1.5$ , pro tato omezení je systém ještě říditelný. Zároveň pro takto omezené zásahy byla uvažována menší oblast, ve které bude magnet řízen, rozměry čtverce jsou tak menší a jeho úhlopříčka měří  $1.4 \text{ cm}$ .

Také byl navržený nový LQ regulátor, který oproti předchozímu případu neklade tak velký důraz na rychlost ustálení stavů a nevyžaduje tak vysoké akční zásahy.

Váhová matice  $Q$  byla zvolena

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

a matice  $R$  zůstala jednotková

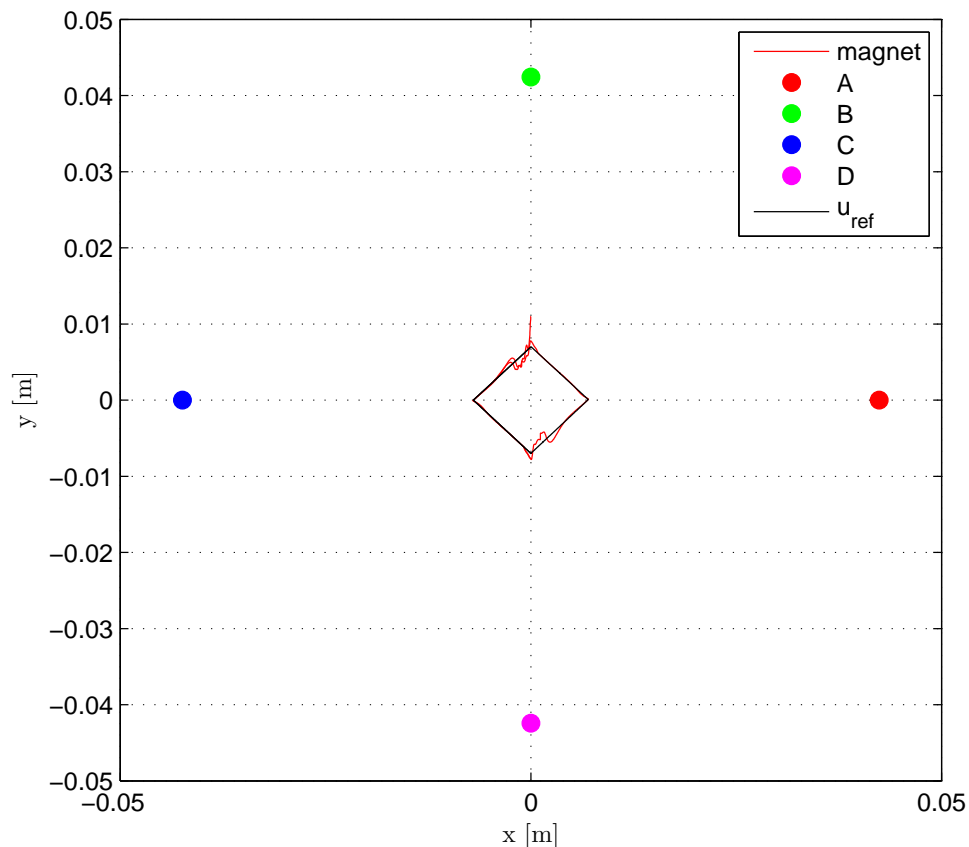
$$R = [1].$$

Póly uzavřeného systému byly umístěny takto

$$p_{cx1} = -199.97, p_{cx2} = -3, p_{cx3} = -1.03,$$

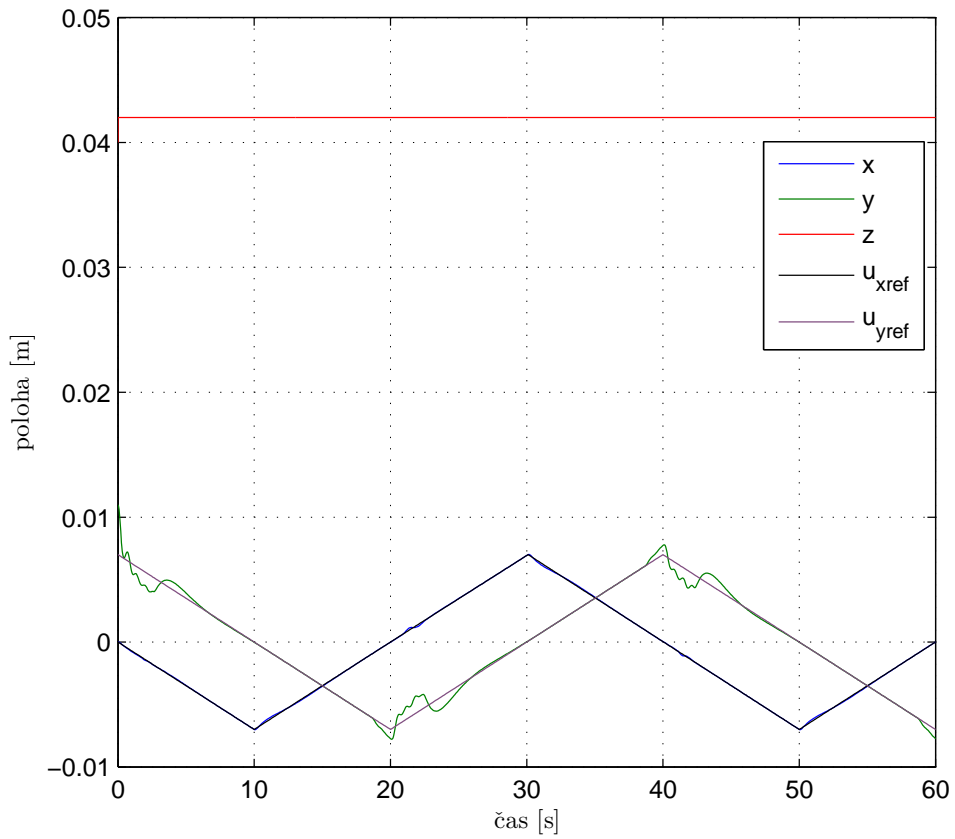
$$p_{cx4} = -0.71 + i0.73, p_{cx5} = -0.71 - i0.73.$$

Pohyb magnetu v rovině  $xy$  je zobrazen na grafu 3.25. Při změně směru trajektorie dochází k výrazným výchylkám, které způsobuje právě saturace.



Obrázek 3.25: Pohyb magnetu v rovině  $xy$  při sledování čtvercové trajektorie se saturací

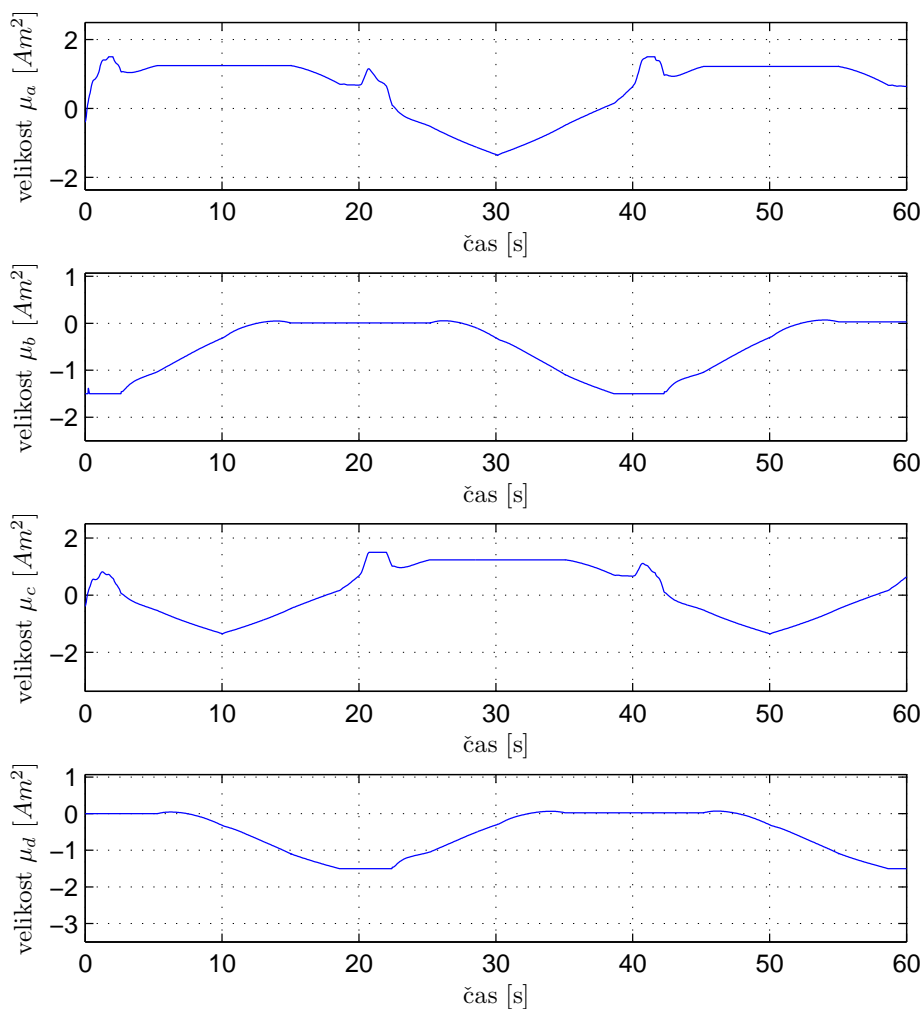
Souřadnice magnetu v závislosti na čase jsou vykresleny v grafu 3.26.



Obrázek 3.26: Souřadnice magnetu v čase při sledování čtvercové trajektorie se saturací



Přepínání konstantních magnetických momentů všech dipólů probíhá stejně jako pro případ bez saturace (obrázek 3.23). Konkrétní velikosti magnetických momentů všech dipólů jsou vykresleny na grafu 3.27.



Obrázek 3.27: Hodnoty magnetických momentů jednotlivých dipólů se saturací

### 3.4.4 Sledování trajektorie ve tvaru osmičky

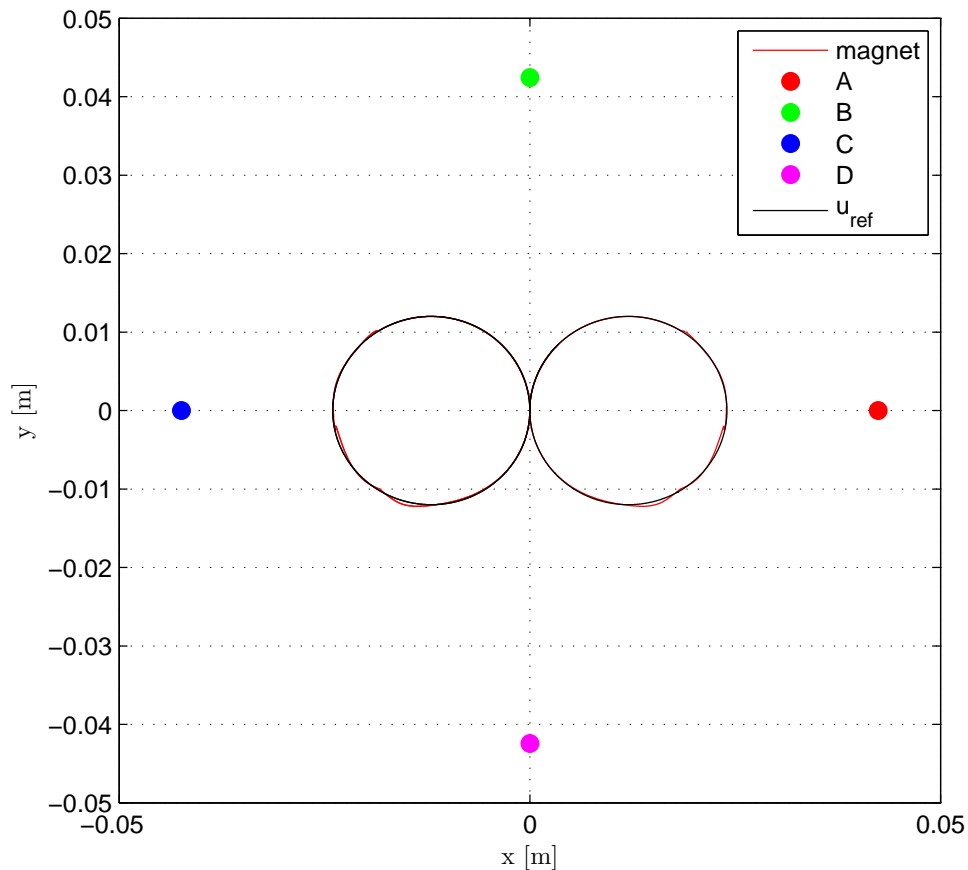
Jako poslední bude uvažován případ sledování trajektorie složené ze dvou kružnic do tvaru osmičky. Jde tak o dvě vhodně upravené sinusové křivky ve směru osy  $x$  a  $y$ . Jejich amplituda byla zvolena  $1.2\text{ cm}$  v obou směrech a frekvence obou signálů je  $f = \frac{\pi}{16} = 0.1963\text{ Hz}$ . Perioda je tedy  $T = 5.093\text{ s}$ . Použit byl LQ regulátor odvozený v předchozí kapitole.

Nejprve bude uvažován systém s vnitřním modelem generátoru referenčního signálu se třemi integrátory, se kterým bylo dosud pracováno. Poté budou výsledky porovnány s modelem obsahujícím model generátoru periodického signálu.

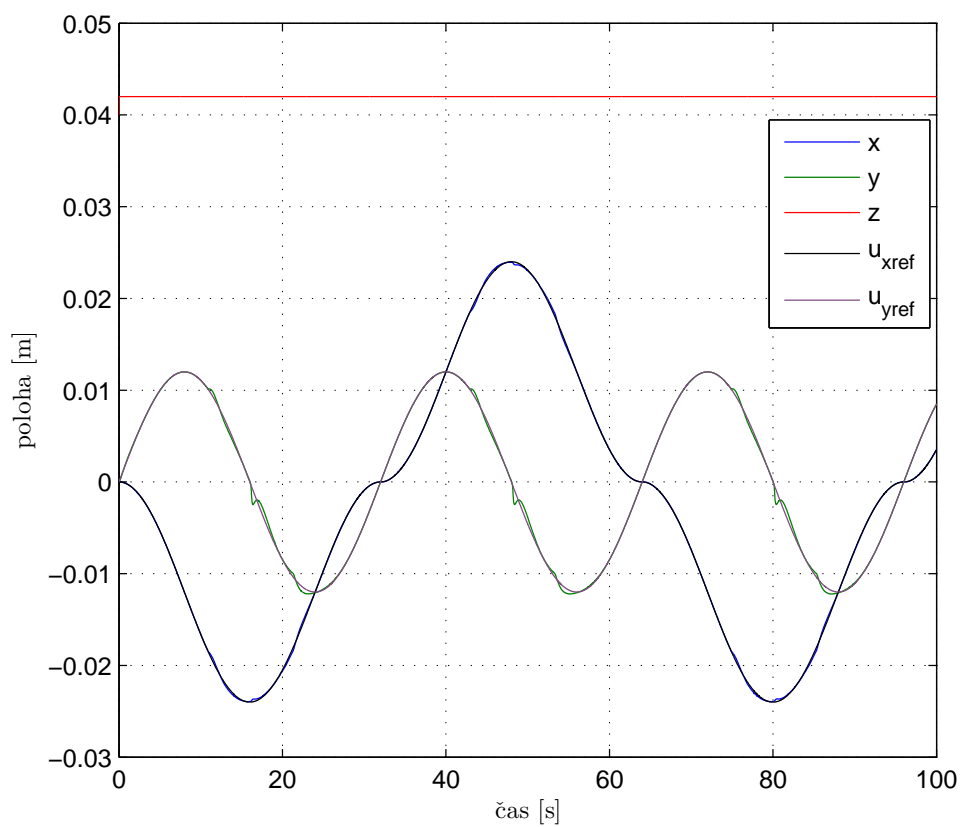
Počáteční podmínky byly zvoleny

$$\begin{aligned}\vec{r}_{00} &= [0, 0, 0.04]^T, \\ \vec{r}_{01} &= [0, 0, 0]^T.\end{aligned}$$

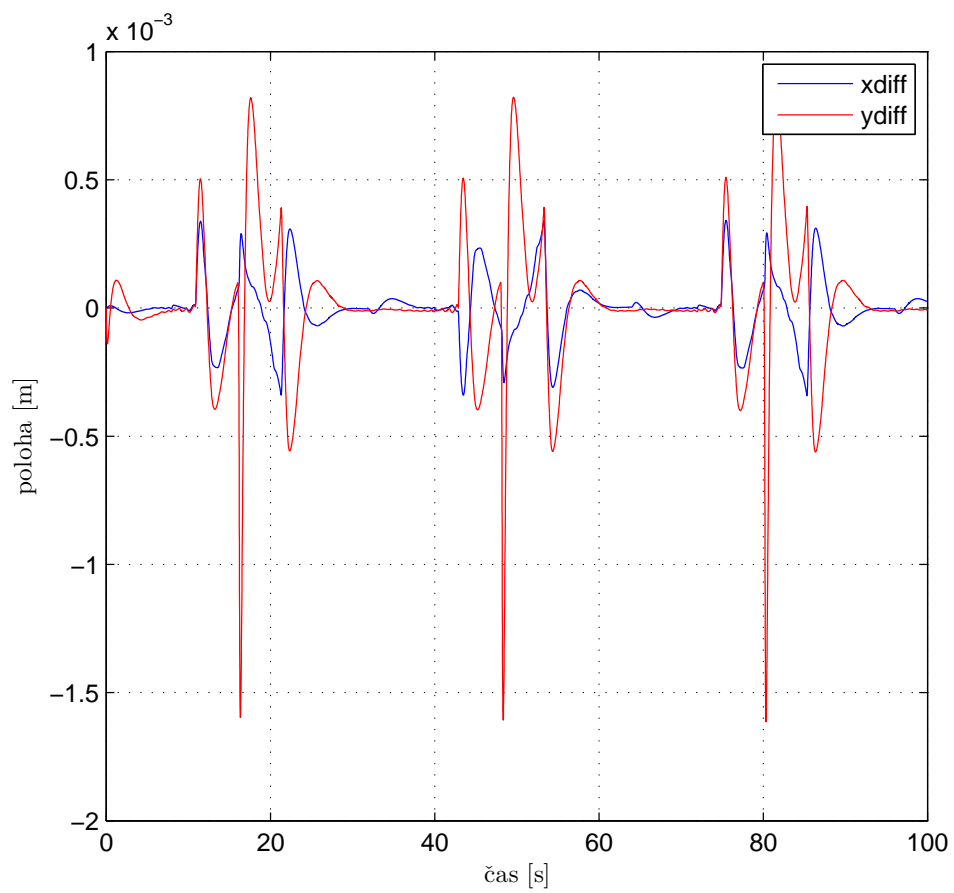
Pohyb magnetu v rovině  $xy$  je zobrazen na grafu 3.28 a poloha magnetu v závislosti na čase je na grafu 3.29. Regulační odchylka je vykreslena na grafu 3.30.



Obrázek 3.28: Pohyb magnetu v rovině  $xy$  při sledování trajektorie ve tvaru osmičky

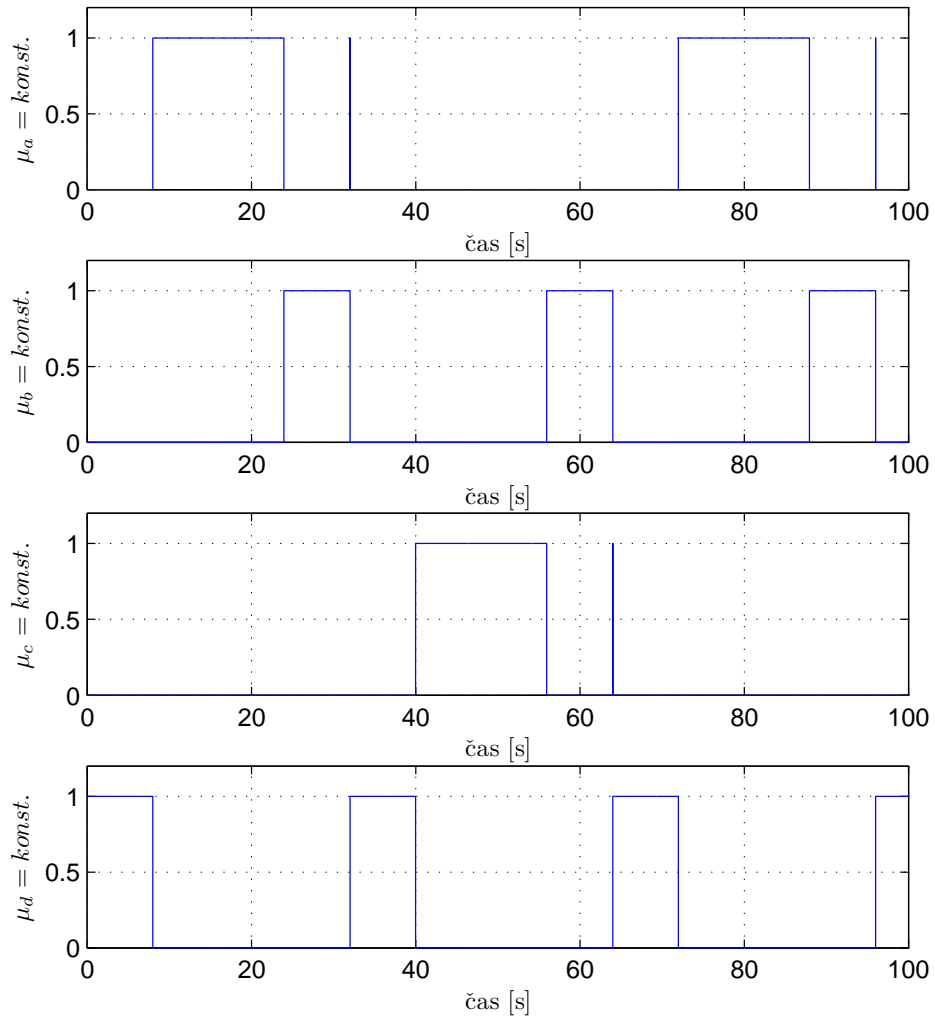


Obrázek 3.29: Souřadnice magnetu v čase při sledování trajektorie ve tvaru osmičky



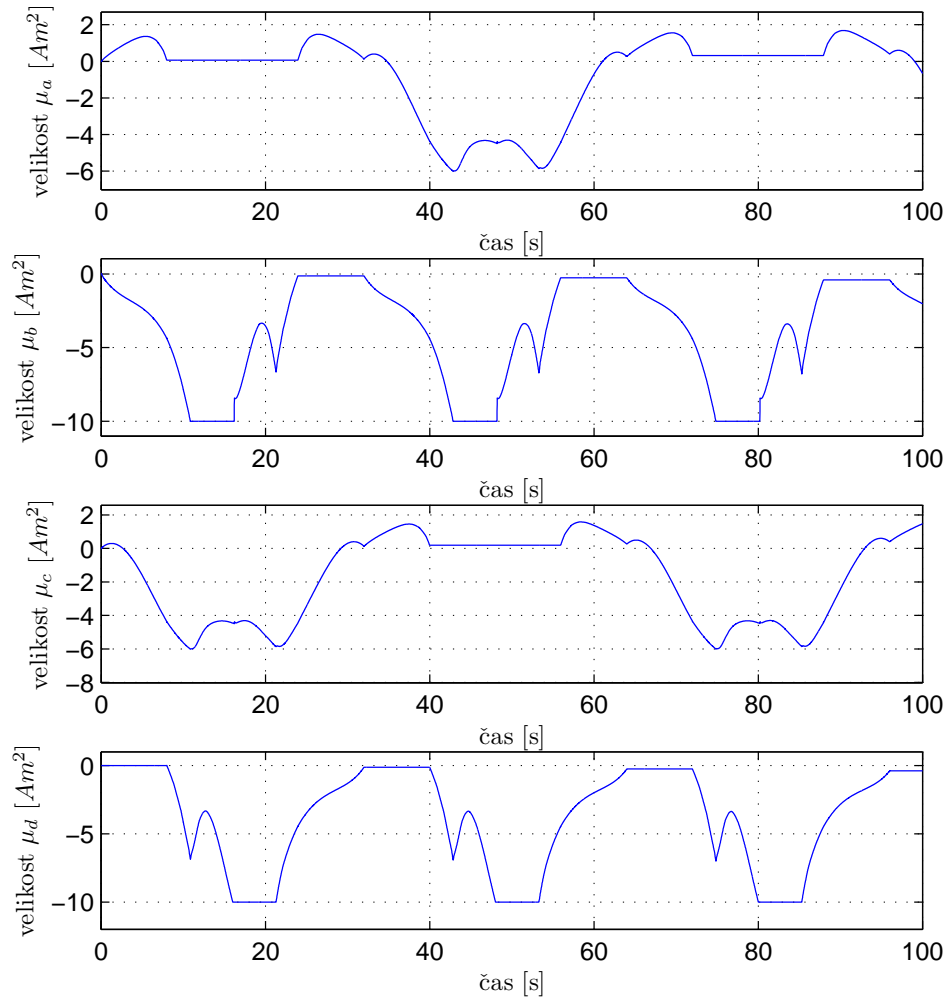
Obrázek 3.30: Regulační odchylka v čase při sledování trajektorie ve tvaru osmičky

Přepínání konstantních magnetických momentů všech dipólů je na obrázku 3.31, ze kterého je vidět, že přepínání momentů je periodický děj.



Obrázek 3.31: Nastavování konstantních magnetických momentů jednotlivých dipólů

Konkrétní velikosti magnetických momentů všech dipólů jsou na obrázku 3.32.



Obrázek 3.32: Hodnoty magnetických momentů jednotlivých dipólů

Předchozí výsledky budou porovnány s navrženým řízením pro systém s vnitřním modelem generátoru periodického signálu. Stavový popis tohoto systému pro pohyb ve směru osy  $x$  byl odvozen v předchozí podkapitole (3.7), analogicky může být popsán i pohyb ve směru osy  $y$ . Všechny póly systému mají opět reálnou část nulovou, ale oproti rozšířenému systému se třemi integrátory jsou dva póly tohoto systému komplexně sdružené

$$p_{x1} = 0 + i0.1963, p_{x2} = 0 - i0.1963, p_{x3} = p_{x4} = p_{x5} = 0.$$

Navržený LQ regulátor byl použit stejný jako dříve, tedy s váhovými maticemi

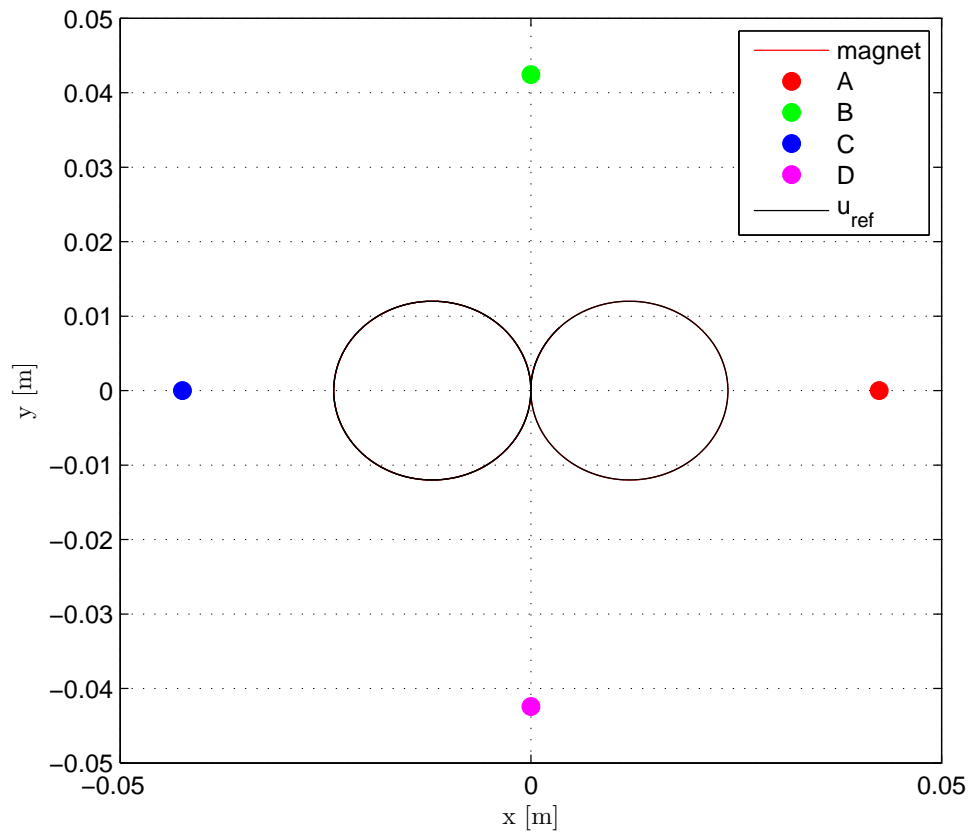
$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, R = [1].$$

Póly uzavřeného systému se zpětnou vazbou vypočtenou podle výše uvedených kritérií tak budou všechny v levé komplexní polorovině a dva jsou opět komplexně sdružené

$$p_{cx1} = -199.75, p_{cx2} = -9.96, p_{cx3} = -1, \\ p_{cx4} = -0.69 + i0.72, p_{cx5} = -0.69 - i0.72.$$

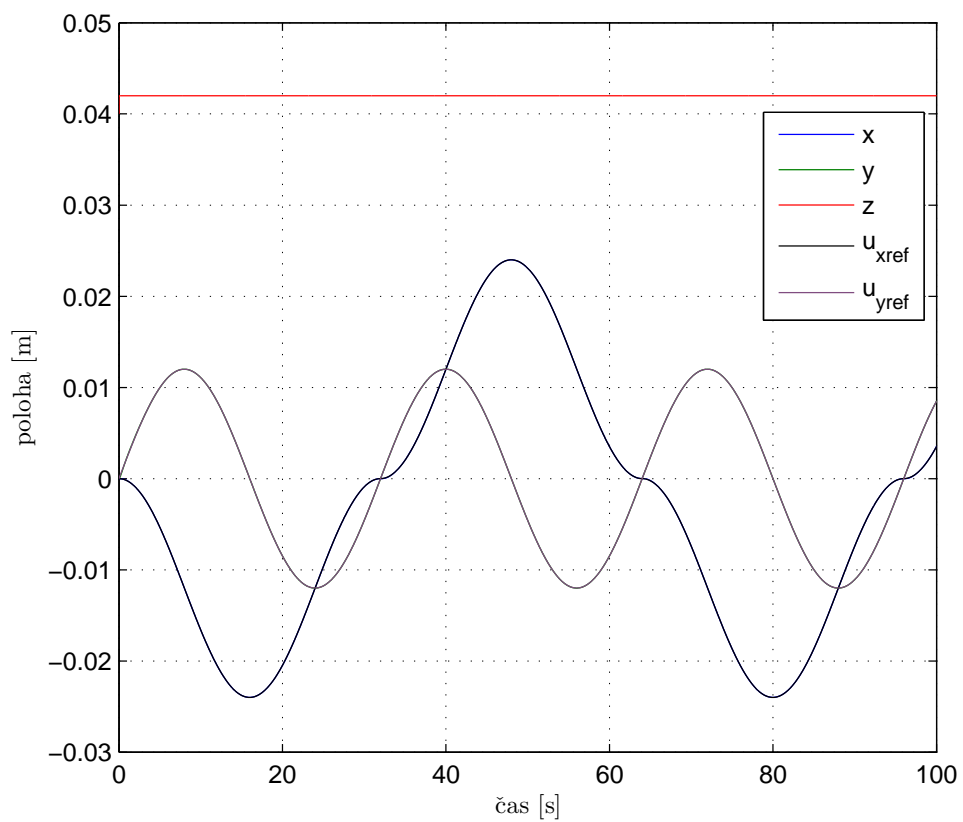
Liší se tak od přiřazených pólů předchozího systému jen v případě komplexně sdružených pólů.

Pohyb magnetu v rovině  $xy$  je zobrazen na grafu 3.33 a poloha magnetu v závislosti na čase je na grafu 3.34. Je zřejmé, že odchylky od požadované trajektorie jsou již mnohem menší, jak je vykresleno na grafu 3.35.

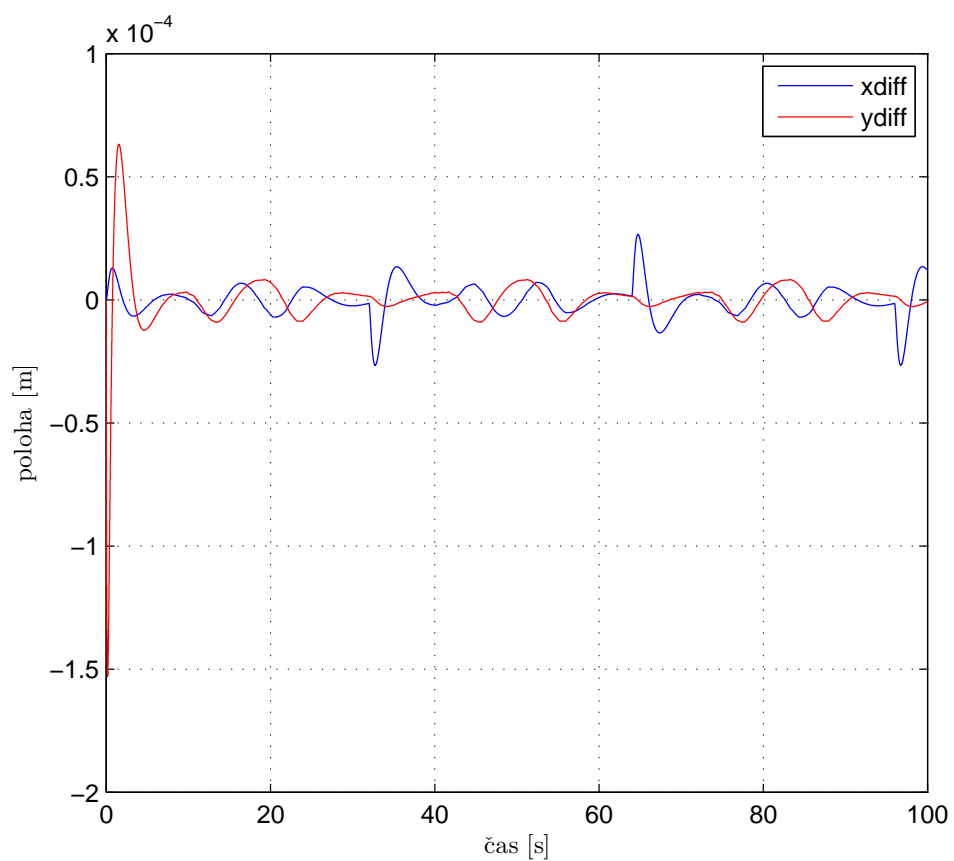


Obrázek 3.33: Pohyb magnetu v rovině  $xy$  při sledování trajektorie ve tvaru osmičky



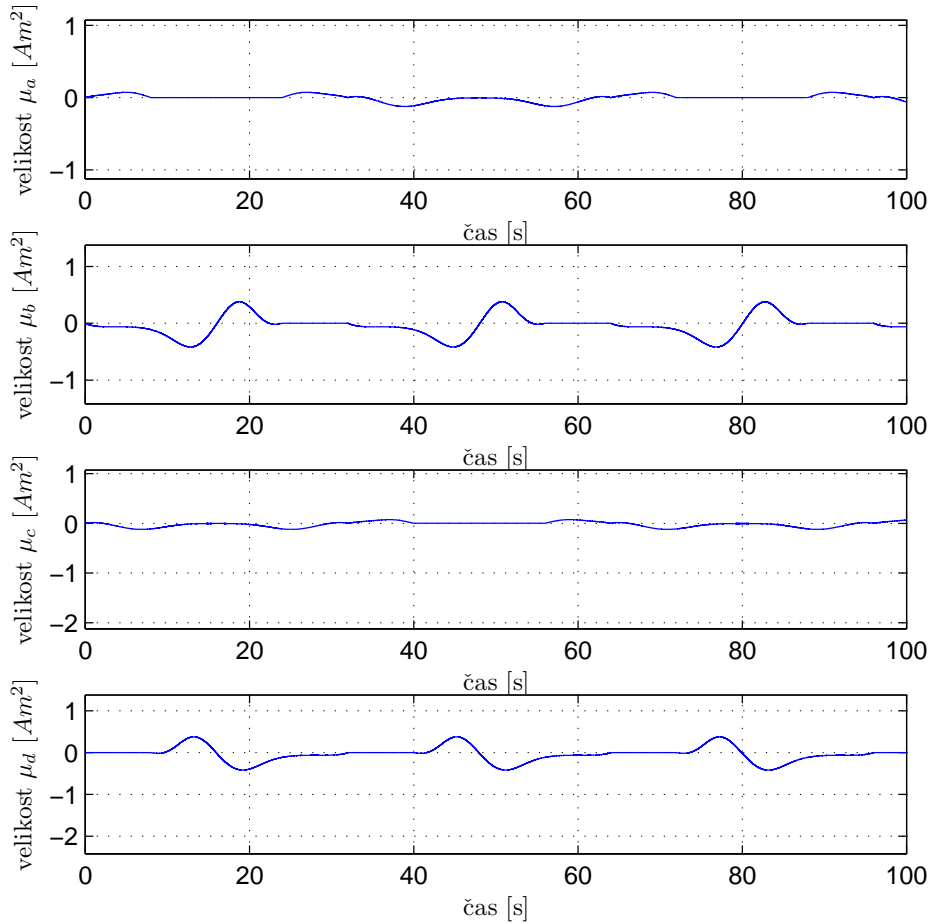


Obrázek 3.34: Souřadnice magnetu v čase při sledování trajektorie ve tvaru osmičky



Obrázek 3.35: Regulační odchylka v čase při sledování trajektorie ve tvaru osmičky

Přepínání magnetických momentů všech dipólů na konstantní hodnotu je shodné s předchozím případem na grafu 3.31. Konkrétní velikosti magnetických momentů všech dipólů jsou na obrázku 3.36. Je vidět, že jsou potřeba mnohem menší hodnoty než v předchozím případě.

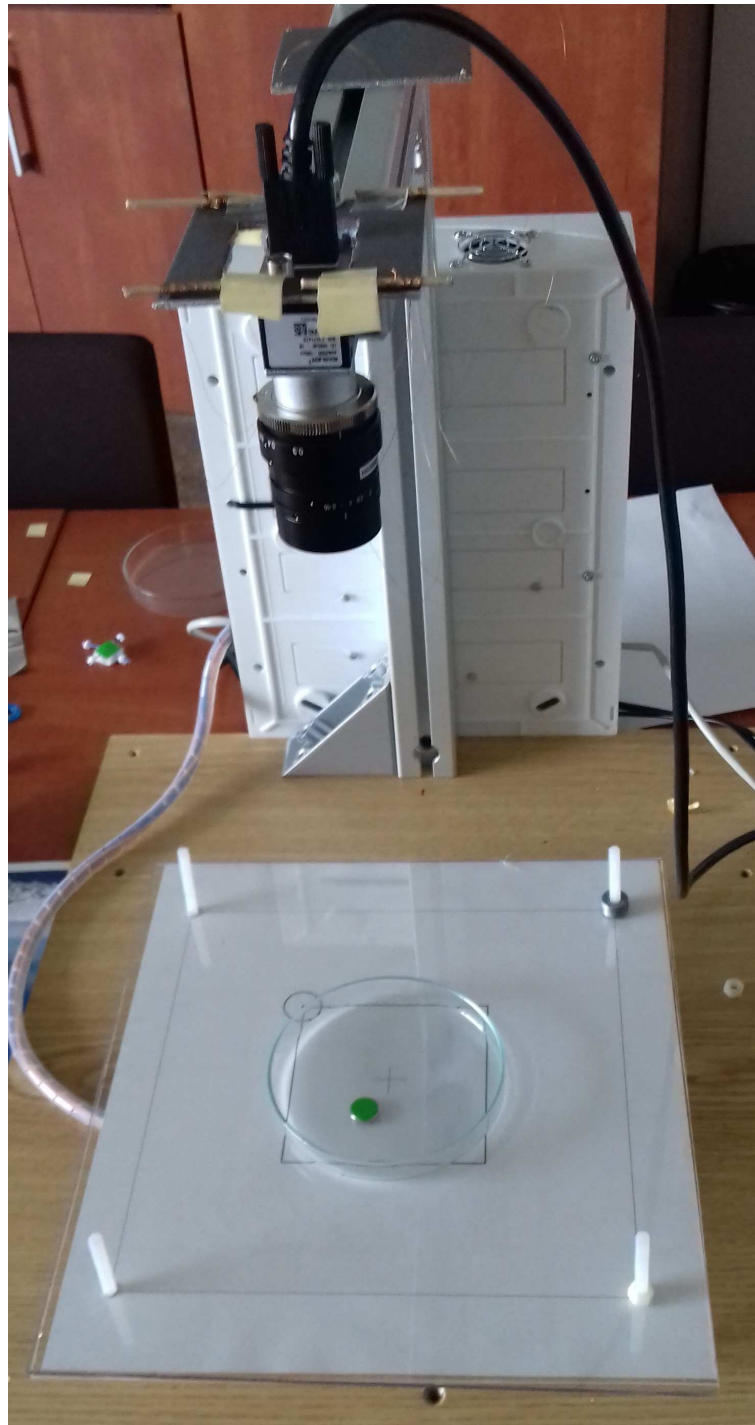


Obrázek 3.36: Hodnoty magnetických momentů jednotlivých dipólů

Tento přístup je ovšem možné využít jen při znalosti frekvence referenčního signálu, který je periodický.

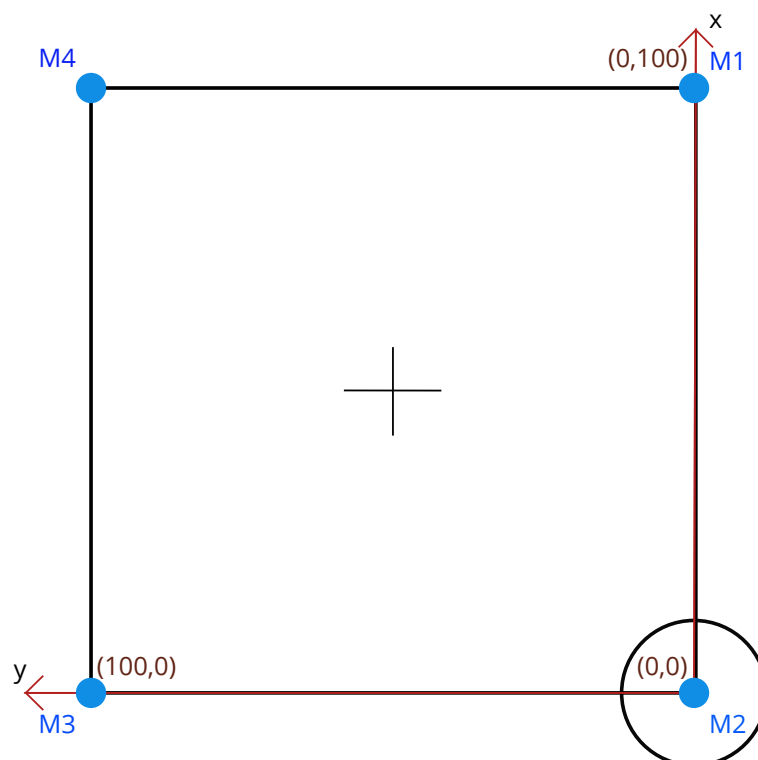
## 4 Implementace

Po provedených simulacích bylo přistoupeno k pokusům na reálném modelu. Jeho konečná podoba je zobrazená na následujícím obrázku 4.1, kde na podložce je vidět zeleně označený diskový magnet, který byl řízen.



Obrázek 4.1: Reálný model

Řídicí algoritmus, který byl použit při simulacích v prostředí Simulink, byl přepsán do prostředí REX. V něm jsou z kamery získávány informace o poloze magnetu, které přichází desetkrát za vteřinu. Získané souřadnice ale pochází z jiné soustavy souřadnic, než se kterou bylo při simulacích pracováno a pro kterou bylo řízení navrženo. Kamera nastavuje svůj souřadný systém podle rozpoznávaných záchytných bodů, které tvoří čtverec, na jehož vrcholech leží cívkky a jehož délka strany je 10 cm, a kroužek v pravém dolním rohu, který označuje počátek souřadnic. Tyto záchytné body jsou nakresleny na obrázku 4.2, kde  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  a  $M_4$  označují cívkky umístěné pod plexisklem.

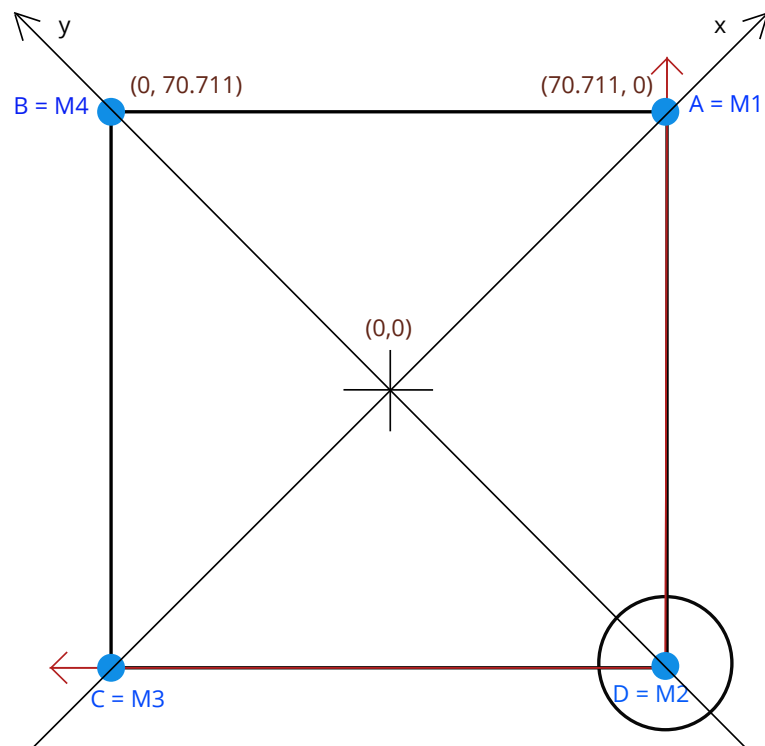


Obrázek 4.2: Souřadnicový systém rozpoznáný kamerou

Souřadnice z kamery jsou získány v milimetrech, je tedy nutné údaje přepočítat na metry, se kterými řídicí algoritmus pracuje. Dále je nutné posunout počátek souřadnic do středu vyznačené čtvercové oblasti a zvolit správnou orientaci os  $x$  a  $y$ . Při simulacích leží všechny cívkky na osách, je tak nutné ještě otočit souřadnicovou soustavu o 45 stupňů, což je zobrazené na obrázku 4.3.

Posunutí soustavy souřadnic do středu a nastavení orientace os je vyjádřeno následujícími vztahy

$$\begin{aligned} x' &= y - 50, \\ y' &= 50 - x. \end{aligned} \tag{4.1}$$



Obrázek 4.3: Souřadnicový systém po rotaci

Následná rotace tohoto souřadného systému je vyjádřena vztahy

$$\begin{aligned}x'' &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\y'' &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha,\end{aligned}$$

což po dosažení úhlu  $\alpha = \frac{-\pi}{4}$  a souřadnic (4.1) budou získány vztahy pro souřadnice v milimetrech, které udávají polohu těžiště magnetu

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(y + x), \\y'' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x - 100).\end{aligned}\tag{4.2}$$

Na reálném modelu bylo nejprve zkoumáno magnetické pole vytvořené cívkami a jeho účinky na permanentní magnet. Bylo ale zjištěno, že původní vzdálenost cívek 10 cm byla příliš velká a magnetické pole uprostřed této oblasti ohraničené cívkami bylo příliš slabé a nebylo možné magnet ovládat ve všech směrech. Cívky tak byly přemístěny blíže na vzdálenost přibližně 6 cm, což umožnilo ovládnutí magnetu i pomocí nejbližší cívkou, pokud se magnet pohybuje stále ve vyznačené čtvercové oblasti.

Dále byla vybírána výška, ve které má být umístěné plexisklo, po kterém se magnet pohybuje. Když bylo plexisklo umístěné příliš nízko, magnet se výrazně naklápěl, což způsobilo jeho zapření mezi spodním a horním sklem. To způsobovalo tření, které bránilo magnetu se pohybovat dále v rovině. Proto bylo plexisklo umístěno do výšky přibližně 4 cm, kde již moment síly není tak výrazný a magnet již nemá tak velkou snahu se otáčet.

Dalším omezením byla frekvence, se kterou byla získávána poloha magnetu. Se stejnou frekvencí totiž probíhalo i řízení, což nebylo dostačující pro řízení tohoto systému. Zároveň bylo možné měřit pouze první stav, tedy polohu magnetu. Druhý stav, kterým je rychlost magnetu, bylo nutné zjistit z vývoje polohy. K tomuto je použit blok derivace, který je v REXu k dispozici.

Stejným způsobem jako v Simulinku byly získány velikosti magnetických momentů i v REXu, kde k získání koeficientů z tabulek byl využit blok *CNA* společně s blokem *REXLANG*, ve kterém následně probíhal i vlastní výpočet. Z takto získaných magnetických momentů bylo nutné vypočítat potřebné proudy v cívkách. Původně byly proudy vypočteny podle vztahu (1.3), který závisí na počtu závitů a velikosti průřezu cívky. Podle výpočtů v kapitole 3.1 by bylo nutné vynásobit magnetický moment přibližně pěti, aby byl získán požadovaný proud. To by ovšem vedlo na velmi vysoké proudy a bylo zjištěno, že jako dostačující jsou mnohem nižší hodnoty. Konstanta pro přepočtení magnetického momentu na proud proto byla volena podle právě používaných parametrů zpětné vazby tak, aby proudy nebyly příliš vysoké, ale ani příliš nízké.

Proudy v cívkách byly omezeny pouze do 1.5 A a v REXu byly nastavovány vstupy do PWM na hodnoty od 0 do 1. Při hodnotách vyšších než 0.5 se však magnet začal převracet, proto byla přidána saturace na horní limit 0.5 a dolní limit  $-0.5$ . Byl přidán také blok *sample and hold*, který zajistil zachování poslední hodnoty proudu na vstupu cívky při přepnutí na konstantní hodnotu. Vzhledem k malému rozsahu hodnot na vstupu cívek se však často stávalo, že byla podržena maximální možná hodnota umožněná saturací a ostatní cívky nebyly schopny tento vliv kompenzovat. Proto bylo přistoupeno k úplnému vypínání nejbližší cívky.

Po provedených pokusech s různým nastavením LQ regulátoru a s různými typy magnetů bylo zjištěno, že kvůli tření není možné magnetem po podložce pohybovat pomalu a plynule. Rychlé pohyby ovšem není možné řídit z důvodů uvedených výše.

Aby bylo odstraněno tření mezi magnetem a podložkou, byla také vyzkoušena varianta, kdy byl magnet zavěšen. V tomto případě již bylo snadné magnet rozpohybovat, nicméně bylo by nutné do modelu zahrnout také dynamiku kyvadla, která zde hrála výraznou roli a pro řízení takového systému je opět frekvence řízení nedostačující.

## 5 Závěr

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit matematický a simulační model magnetu pohybujícího se v magnetickém poli. Matematický model byl odvozen pomocí pohybových rovnic a simulační model byl následně vytvořen v prostředí Simulink. K tomuto modelu byl poté navržený LQ regulátor, který byl otestován pro různé referenční signály, které magnet sledoval. Po provedení simulací, které dávaly uspokojivé výsledky, bylo přistoupeno k otestování reálného modelu.

Nejprve byl pomocí indukčních čar porovnán simulační model s reálným modelem a bylo zjištěno, že reálné siločáry zobrazené pomocí železných pilin odpovídají siločarám vykresleným v Matlabu.

Poté byl testován řídicí algoritmus v REXu a při tomto procesu se objevila spousta komplikací. Jednou z nich bylo správné nastavení kamery, která sleduje pohybující se magnet. Tento magnet bylo nutné označit barevnou značkou a tuto barvu nastavit v ovladači kamery jako referenční hodnotu. Tato hodnota ovšem závisela na aktuálním osvětlení modelu, bylo tak nutné zajistit správné osvětlení po celou dobu testování.

Bylo také nutné najít dostatečně silný, ale ne moc těžký diskový magnet, který by bylo možné řídit s minimálními proudy v cívkách a který by byl co nejširší a nejnižší, aby nedocházelo k jeho překlápění.

Nejpodstatnějšími problémy bylo však klidové tření mezi magnetem a podložkou a také frekvence, se kterou probíhá řízení. K překonání klidového tření a rozpočívání magnetu je zapotřebí velké síly, která ovšem způsobí, že se magnet začne pohybovat tak rychle, že ho řídicí algoritmus se zvolenou frekvencí není schopen uřídit.

Možným řešením by bylo najít takové materiály, které budou mít co nejmenší činitel klidového tření a z těchto materiálů vyrobit podložku, po které by se magnet pohyboval, a také jím magnet podlepit.

Dalším řešením by bylo vyvinout rychlejší ovladač kamery, který by pořizoval snímky s periodou 0.01 s, což by bylo pro řízení dostačující. Vývoj takového ovladače je ovšem dlouhodobou záležitostí.

Dalším vylepšením by byla úprava odvozeného modelu, který nyní uvažuje působení pouze translačních sil, tak, aby v něm bylo zahrnuto i působení rotačních sil, neboli momentů síly. Tyto momenty by poté mohly být vhodně navrženým řízením kompenzovány, aby nedocházelo k naklápění magnetu.

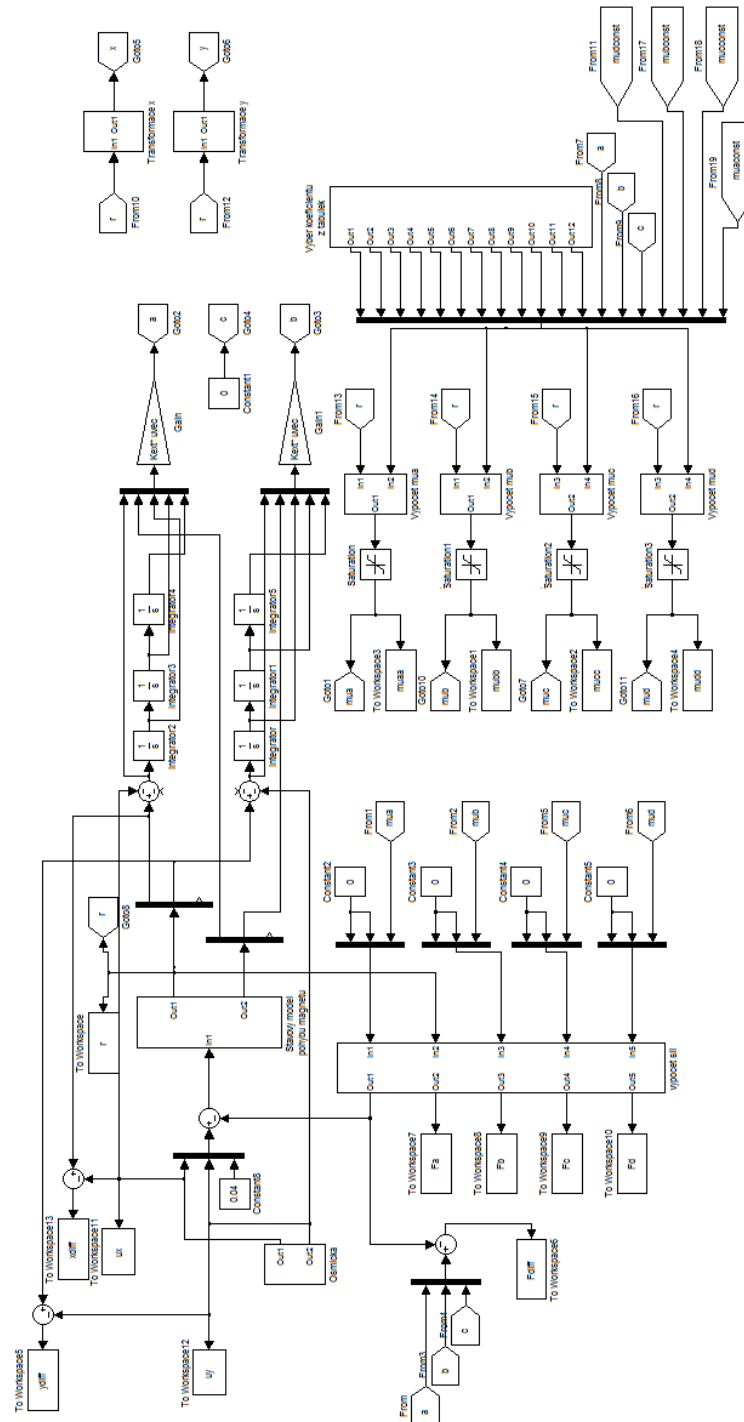
Výše uvedené návrhy budou cílem dalšího vývoje, který bude na tomto modelu probíhat.



# Literatura

- [1] *Fyzika Maršovská* [online]. 2012. [cit. 2017/05/09]. Elektromagnetické jevy. Dostupné z: <http://fyzika-marsovska.webnode.cz/zapisy-do-sesitu/a9-rocnik/elektromagneticke-jevy/>.
- [2] *Supermagnete* [online]. Webcraft GmbH, 2011. [cit. 2017/05/10]. Disc magnet data sheet. Dostupné z: [https://www.supermagnete.de/eng/data\\_sheet\\_S-08-02-N.pdf](https://www.supermagnete.de/eng/data_sheet_S-08-02-N.pdf).
- [3] *Základy elektrotechniky* [online]. SPŠE Mohelnice, n.d. [cit. 2017/05/09]. Magnetické pole. Dostupné z: <http://www.spsemoh.cz/vyuka/zae/el17.htm>.
- [4] *Mini Physics* [online]. n.d. [cit. 2017/05/10]. Magnetic field due to current in a solenoid. Dostupné z: <https://www.miniphysics.com/ss-magnetic-field-due-to-current-in-a-solenoid.html>.
- [5] *Katedra mechaniky* [online]. Katedra mechaniky, Fakulta aplikovaných věd, ZČU Plzeň, n.d. [cit. 2017/05/09]. Vektorový součin. Dostupné z: <http://www.kme.zcu.cz/kmet/bio/matvektor.php>.
- [6] DOC. ING. JIŘÍ MELICHAR, C. *Lineární systémy 2*. Katedra kybernetiky, Fakulta aplikovaných věd, ZČU Plzeň, 2011.
- [7] DOC. RNDR. KAREL RUSŇÁK, C. *Fyzika pro aplikované vědy 2*. Katedra fyziky, Fakulta aplikovaných věd, ZČU Plzeň, 2005.
- [8] KREJČÍ, J. *Educoland - Dokumentový server MU* [online]. IPVI, 2012. [cit. 2017/05/09]. Oerstedův experiment - podélný s magnetkami. Dostupné z: <https://educoland.muni.cz/fyzika/experimenty/132-oersteduv-experiment-podelny-s-magnetkami/>.

# A Schéma v Simulinku



# B Schéma v REXu

