Oponentský posudek disertační práce Mgr. Pavla Jiráska

„Podmínky kompaktnosti ve variačních metodách"

Předložená disertační práce se zabývá hledáním postačujících podmínek pro existenci kritického bodu daného hladkého funkcionálu. Tyto kritické body v uvažovaných příkladech odpovídají slabým řešením jistých okrajových úloh. Hledané podmínky jsou dvou typů: první popisují „geometrii" daného funkcionálu, druhé se týkají jeho jisté „kompaktnosti". Práce se soustřeďuje především na podmínky druhého typu - zabývá se zobecněním Palais – Smaleovy podmínky.

Předložená práce se skládá ze sedmi kapitol. První „Úvod" poskytuje (nutno říci, že velmi stručně) čtenáři informaci o obsahu práce. Druhá „Základy variačních metod" seznamuje čtenáře se základními větami o minimaxu (Mountain Pass, Saddle Point). V extrémně stručné (vzhledem k závěrečnému shrnutí, v němž se mluví o této kapitolce jako jedné ze dvou obsahujících hlavní původní výsledky práce) třetí kapitole je uvedena možnost, jak lze využít věty o minimaxu i v případě, že daný funkcionál předpokládanou geometrii nemá. V kapitole čtvrté „Diferenciální rovnice druhého řádu z variačního pohledu" je nejdříve ilustrováno užití věty o sedlovém bodě při důkazu existence slabého řešení homogenní Dirichletovy úlohy pro danou obyčejnou diferenciální rovnici a pak jsou (opět na homogenních Dirichletových úlohách v 1D) zkoumány „geometrické" vlastnosti, které plynou ze splnění předpokladů Fredholmovy alternativy či Landesman - Lazerových podmínek. V kapitole páté „Zobecněné podmínky kompaktnosti" jsou nejdříve (bohužel bez odkazu na zdroj) definovány Palais - Smaleova, Ceramiho a obecná podmínka kompaktnosti a zkoumány vzájemné vztahy těchto podmínek. Pak následuje přepis-překlad několikastránkového důkazu zobecněného deformačního lemmatu z práce Amrousse (není mi zřejmý smysl tohoto činu - bylo-li cílem uchránit čtenáře od shánění příslušného článku, bylo nezbytné přeložit i používaná a v citované práci i dokázaná pomocná lemmata) - že se vlastně jedná o několikastránkovou citaci, by mělo být uvedeno! Poslední část této kapitoly je ukázkou použití Ceramiho (místo Palais-Smaleovy) podmínky. Kapitola šest „Aplikace na p-Laplacian" je zřejmě klíčovou kapitolou předložené práce a obsahuje zobecnění výsledků P. Drábka a P. Takáče týkajících se Palais-Smaleových posloupností funkcionálu korespondujícího s jistým homogenním Dirichletovým problémem pro p-Laplacian. Práce je ukončena několikařadkovým „Závěrem".

A teď k samotnému hodnocení práce. Zkoumané téma je určitě aktuální, o čemž svědčí (mimo jiné) i množství prací, které jsou tomuto přístupu k okrajovým úlohám věnovány. Nelze ovšem přehlédnout, že předložená práce přináší velmi málo původních výsledků a že není dobře napsaná. V práci je (na můj vkus) příliš mnoho chyb a nejasností, a to bohužel i při uvádění základních poznatků této disciplíny. Pokusím se na několika vybraných příkladech (uvedených v pořadí, jak šly v práci za sebou) ukázat, co mám na mysli.

- str. $3^8, 9$ ... uvedená tvrzení neplatí
- str. 8_4 ... uvedené tvrzení neplatí
- str. 4 ... používané pojmy nejsou v souladu s citovanou knihou [7]
- str. 5_12 ... jedná se o globální minimum
- str. 8 ... důkaz citované věty (která je uvedena nesprávným odkazem) je doslova přepsán z [7], jen byly vynechány argumenty, proč uváděná tvrzení platí ...
- str. 8_5 ... jedná se o Corollary 7.4.24 z [7]
- str. 9^2 ... mohou to být i lokální extrémy
- str. 9-11 ... věty jsou i s důkazy (aniž je to uvedeno) přepsány z [7]
- str. 10^3 ... k čemu je dobré volit δ libovolně malé?
- str. 13^8 ... co se rozumí spočetnou bází Banachova prostoru?
- str. 14^4, 14^9, 14_15 ... uvedená tvrzení neplatí
- str. 14-15 ... Věta 3.1 (jeden z hlavních výsledků práce!) podle mě neplatí (v důkazu je chyba v domněnce na str. 15_7, že z posloupnosti $\{x^n_{k_n}\}$ lze vybrat podposloupnost požadovaných vlastností)
- str. 23^5 ... nezdá se mi poslední nerovnost (vzhledem k str. 19_6)
- str. 28 ... Poznámka 4.2 neplatí
- str. 40_6 ... nerozumím
- str. 41^5 ... to neplatí (a důkaz se zadrhne...)

- str. 51_3 ... aby to bylo v pořádku, bylo by třeba jinak definovat klasické řešení

- str. 52 – 60 ... Nikde není zformulováno tvrzení, které se na mnoha stránkách (pro mne nepřehledně) dokazuje. Navíc: předložený důkaz existence slabého řešení se opírá o nikde nezformulované věty týkající se Ceramiho či obecné podmínky kompaktnosti (poznámka na straně 45 nahoře dle mého názoru nestačí). Navíc: tyto věty by se slušelo (když už se tolik energie věnovalo překladu důkazu Věty 5.1) i dokázat.

- podstatné části kapitoly 6.2 jsou převzaty beze změny z článku [8], mělo by to být uvedeno

- str. 66_1 ... co je ψ?

- str. 61^1 ... tvrzení c) ve Větě 6.2 - klíčové větě celé disertace - je opsané tvrzení d) z předchozí věty.

- str. 67^15 ... není nikde napsáno, co je α

- str. 67_3 ... to je divné ...

- str. 74^1 ... právě závěr této části (jinak vlastně z [8] převzatého) důkazu by měl být zargumentován podrobněji

  Kromě uvedených nedostatků lze v práci najít celou řadu překlepů či nešťastných formulací.

Závěr: zpracovávané téma mi připadá zajímavé, ovšem z výše uvedených důvodů ji nedoporučuji k obhajobě.

V Ostravě 12.1.2017

Jiří Bouchala

Doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.

Reviewer's Report on the Doctoral Thesis (Ph.D.)

"Podmínky kompaktnosti ve variačních metodách"

("Compactness conditions in variational methods")

submitted by **Mgr. Pavel Jirásek** (University of West Bohemia)

(***second version*** after a major revision)

This thesis is concerned with applications of certain special variational methods, combining the saddle point and mountain pass theorems with the ***Palais-Smale(-Cerami) condition***, to quasilinear ordinary and partial differential equations of second order containing power-like nonlinearities of matching $(p-1)$-homogeneity. The *main form* of problems considered here reads as follows:

$$-\Delta_p u = \lambda\,|u|^{p-2}u + f(x) \quad \text{in } \Omega; \qquad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{1}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded open connected set (i.e., a bounded domain), $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u)$ is the quasilinear p-Laplace operator, $1 < p < \infty$, $\Delta_p\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ is the spectral parameter close to the first eigenvalue λ_1 of $-\Delta_p$, and $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ is a given function typically in $L^\infty(\Omega)$. The boundary $\partial\Omega$ of Ω is assumed to be a sufficiently smooth, compact submanifold in $\mathbb{R}^N$.

After introducing variational problems and methods in Chapters 1 and 2, an effort is made in Chapter 3 to investigate such critical points of functionals at which the functional does not have a saddle point or mountain pass geometry. The main result in this chapter, Theorem 3.1 on pages 14 – 15, is too weak to be considered a useful contribution to Variational Caculus. There is no deep idea hidden behind this theorem. Chapter 2 is a somewhat chaotic "Introduction to Variational Methods". Basic definitions and results are recalled and partly proved. Some of them are never used later, others (e.g., some important definitions) are missing (e.g., the definition of Gâteaux derivative). I have never used nor have I ever encountered *weakly anti-coercive* functionals; this concept is completely redundunt (never used later). On one hand, this chapter contains only well-known classical results from the monograph by P. Drábek and J. Milota (Ref. [7]). On the other hand, it tries to refer to possibly original articles which makes the entire chapter much more difficult to read as one has to consult numerous original articles from various sources. Chapter 2 has to be adapted to what is needed later.

In Chapter 4, second-order semilinear Dirichlet problems for ordinary differential equations of the following type are studied by standard variational methods:

$$u'' \pm c\,u' + \lambda\,u + g(t, u(t)) = 0 \quad \text{for } t \in (0,\pi); \qquad u(0) = u(\pi), \tag{2}$$

where $g\colon (0,\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous nonlinearity whose asymptotic behavior as $t \to \pm\infty$ is determined by a single linear function at both, $\pm\infty$. Landesman-Lazer-type results are proved; none of them new.

Chapter 5 contains compactness studies that compare the classical *Palais-Smale* condition with a weaker version thereof due to *G. Cerami*; the latter is then called the *Palais--Smale-Cerami* condition. The author gives a further generalization of this condition, illustrated by a number of nice examples and counterexamples. Some of them are quite simple, but mostly very helpful for good understanding of the problem setting. The style of this chapter is quite chaotic. In §5.4 the hypotheses on the reaction function $g(t,x)$ are hidden on p. 52, so that on p. 51 it is unclear if the definitions spelled there are meaningful. On p. 55 it should be recalled in which function space the sequence $\{x_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded. This should be done also for all other sequences used on p. 55 and 56.

The most important and innovative part of the thesis is Chapter 6. Standard variational methods are applied to problem (1). For the applications of the saddle point and mountain pass theorems, it is necessary to investigate the validity of the ***Palais-Smale(-Cerami) condition***. In fact, this is the *central* question of the entire Chapter 6. The main *new* results obtained by Mgr. Pavel Jirásek are collected in Theorem 6.2 on pages 66 – 67. Parts (a) – (d) of this theorem try to compare author's new results with the corresponding results obtained by P. DRÁBEK and P. TAKÁČ in Ref. [8] and recalled here in Theorem 6.1 on p. 66. However, this comparison is somewhat messed up: Parts (a) and (b) of both theorems are comparable. Part (c) of Theorem 6.1 does not seem to be comparable to any part of Theorem 6.2, whereas Part (d) of Theorem 6.1 seems to match Part (c) of Theorem 6.2. This comparison certainly needs some improvement. Throughout entire Chapter 6, it is often unclear which of the alternatives the author assumes, $1 < p < 2$ or $2 < p < \infty$?

The summary of the results and difficulties with questions left open, presented in Chapter 7, is too short to provide any more useful information in addition to the previous six chapters. This chapter should be rewritten in a more specific manner.

- Page 64: A very basic (series of) trouble(s) are several claims (but not the final conclusions) in the second paragraph on page 64. Especially the claim

  "Navíc Q_0 lze uzavřít v $L^2(\Omega)$ ..."

has to be defined precisely and proved !

The author of this thesis, Mgr. Pavel Jirásek, has treated an interesting, quite difficult subject in a respectful way. He has studied interesting, complicated open questions of the Calculus of Variations. However, his thesis is still poorly written from the rigorous mathematical point of view, although there is significant improvement of the first version. The problem setting and hypotheses are often stated at the beginning of the thesis, at best at the beginning of a chapter, and later used in a rather chaotic manner. Often, it is very unclear which hypotheses are necessary and which are not. One can only guess which hypotheses should be used. Above, I have listed only the worst mathematical errors. There are plenty more errors in this thesis but, say, of a more trivial character that the candidate himself should be able to find.

After having corrected all errors and mistakes, some of them suggested above, the author will be ready to defend his thesis.

I ***do not recommend*** that this Ph.D. thesis be accepted in partial fulfillment of the requirements for obtaining the Ph.D. degree from the University of West Bohemia in Plzeň. I cannot see any chance that the candidate could be able to defend this version of his thesis, but I see a good chance for corrections of numerous weaknesses of the current version which could lead to a successful final version of this thesis.

In Rostock, November 14, 2016

Peter Takáč

....

Prof. Dr. Peter Takáč, Ph.D.
Lehrstuhl für Angewandte Analysis

Institut für Mathematik
Universität Rostock
Ulmenstraße 69, Haus 3
D – 18051 Rostock

e-mail: peter.takac@uni-rostock.de