

Posudek na doktorskou práci

Mgr. Radima Hoška

NUMERICAL SCHEMES FOR EQUATIONS
OF VISCOUS COMPRESSIBLE FLOWS:
ANALYSIS AND GEOMETRY

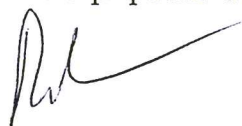
Předložená doktorská práce se skládá z úvodu a šesti článků, které buď již byly publikovány v impaktovaných časopisech, nebo byly zaslány do časopisů a probíhá recenzní řízení. Úvodní část obsahuje velmi stručný úvod do problematiky, která je dále studována, je představen přínos autora v obou částech (numerická analýza a geometrie) a je uvedena řada problémů, v jejichž studiu by autor mohl po obhájení práce pokračovat. Následují tři práce, které obsahují přínos autora v oblasti numerické analýzy: společný článek s Bangweiem She, který se týká vlastností numerické metody založené na metodě sítí (konečných diferencí), společná práce se školitelem a M. Michálkem, která se týká konvergence a stability numerické metody pro stlačitelný Navier–Stokes–Fourierův systém v hladkých oblastech založené na metodě konečných prvků a objemů a společná práce se školitelem, D. Maltesem a A. Novotným, která se týká odhadu chyb numerické metody pro stlačitelné Navier–Stokesovy rovnice. Poslední dvě práce vyšly v mezinárodních časopisech s impaktním faktorem. Zbylé tři práce se týkají problematiky tvorby sítí. Byly sepsány bez spoluautorů. První práce, která vyšla v časopise *Applications of Mathematics*, souvisí s problematikou tvorby sítě tak, aby polyhedrální oblast tvořená jednotlivými elementy sítě v jistém smyslu rovnoměrně aproximovala hladkou oblast zevnitř. Druhá práce, publikované v tom samém časopise, se týká konstrukce zjemnění sítě tvořené čtyřstěny v obecné dimenzi tak, aby příslušné zjemnění nevedlo k degeneraci čtyřstěnů. Poslední práce, u které ještě probíhá recenzní řízení, se týká konstrukce pokrytí d -rozměrného prostoru pomocí simplexů, přičemž je studována tvarová optimalizace tohoto pokrytí.

Předložená práce je nepochybně zajímavým příspěvkem k numerické analýze schémat aproximujících rovnice stlačitelného proudění jakož i ke geometrickým otázkám týkajícím se tvorby sítí. Každá část zvlášť by zřejmě mohla být obhájena jako doktorská práce, což ukazuje nejen vysokou úroveň předložené práce, ale i šíři záběru autora. Výsledky doktorské práce jsou publikovány v kvalitních časopisech s impaktním faktorem a zbylé práce, pokud se tak ještě nestalo, budou nepochybně též přijaty k publikaci.

Formální a jazyková úroveň je na dobré úrovni (což vzhledem k charakteru práce je zcela přirozené). Pokud jde o několik drobných připomínek, tak na straně 2 jsou uvedeny nestlačitelné Navier–Stokesovy rovnice a je uvedeno, že se získají ze stlačitelného systému použitím podmínky nestlačitelnosti. Je třeba říci, že toto není tak přímočaré vzhledem k různému charakteru tlaku pro stlačitelný systém (daná funkce tlaku, popřípadě teploty) a nestlačitelný systém (neznámá funkce). Pokud jde o samotné články, tak článek v Appendixu A (společný článek s B. She) obsahuje větší počet drobných typografických chyb (čárky či tečky ve formulích, kde nemají být).

Závěrem, předložená doktorská práce Mgr. Hoška je na vynikající úrovni, obsahuje zajímavé výsledky v numerické analýze rovnic stlačitelného proudění i v problematice geometrických vlastností sítí a doporučuji ji k obhajobě.

Jako námět k diskuzi u obhajoby bych se rád zeptal, jestli se Mgr. Hošek již začal věnovat některým z otevřených problémů uvedených na str. 15–16 dizertace a případně uvedl, jakých výsledků dosáhl.



V Praze dne 7. dubna 2017

Doc. Mgr. Milan Pokorný, Ph.D.





Johannes Gutenberg-Universität Mainz (JGU) D 55099 Mainz
Fachbereich 08, Institut für Mathematik

Děkanát FAV
Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Univerzitní 8
306 14 Plzeň

21.05.2017

Oponentský posudek na disertační práci RNDr. Bc. Radima Hoška: Numerická schémata pro rovnice stlačitelného proudění: Analýza a geometrie

The present dissertation deals with numerical analysis of compressible viscous fluids. The equations describing motion of compressible viscous flows follow from basic conservation laws: the conservation of mass, the momentum and energy. The resulting nonlinear coupled hyperbolic-parabolic system is called the Navier-Stokes-Fourier system. In the case that the pressure depends only on some power of the density, the flow is called barotropic and the Navier-Stokes system consists of the mass and momentum equations. For the latter the existence of the weak solutions has been firstly shown by P.L. Lions in 1998 and later generalized by Feireisl, Novotný and Petzeltová in 2001. The full system has been studied by Feireisl (2004).

The question of convergence of a suitable numerical scheme for the compressible Navier-Stokes flows has been open for a long time. Since very recently some fundamental results have been published by the group of Feireisl, and Gallouet, Novotný et al. More precisely, the convergence of a suitable numerical method has been firstly studied by Karper (2013) and later by Feireisl, Karper, Novotný (2015) and Feireisl, Karper, Michálek (2016). Here the approach of P.L. Lions is generalized and applied to the implicit combined finite volume-finite element scheme. Another approach to investigate convergence properties is based on the use of the relative entropy inequality and an assumption of the existence of a smooth exact solution. Consequently, the error estimates for barotropic Navier-Stokes equations for the combined finite volume-finite element method have been proven firstly by Gallouet, Herbin, Maltese, Novotný (2016).

Radim Hošek builds in his thesis on these cutting edge studies and contributes with some very important original results to further development of the convergence and error analysis of the compressible Navier-Stokes equations. The dissertation is written as a cumulative thesis and consists of a short introduction to the research area and six author's publications:

[A] R. Hošek, B. She: Stability and consistency of a finite-difference scheme for compressible viscous isentropic flow in multi-dimension, submitted (2017)

[B] E. Feireisl, R. Hošek, M. Michálek: A convergent numerical method for the full Navier-Stokes – Fourier system in smooth physical domains, *SIAM J. Numer. Anal.* 54(5):3062-3082 (2016)

Fachbereich 08
Physik, Mathematik und Informatik

Institut für Mathematik

Prof. Dr. Maria Lukacova
AG Numerik

Johannes Gutenberg-Universität Mainz
(JGU)
Staudingerweg 9
55128 Mainz

Tel. +49 6131 39-22831

Fax +49 6131 39-23331

Mail lukacova@mathematik.uni-mainz.de

Sekretariat:

Brigitte Burkert

Raum: 05-431

Tel. +49 6131 39-22270

Fax +49 6131 39-23331

Mail burkertb@mathematik.uni-mainz.de

[www.mathematik.uni-mainz.de](http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lukacova)
[/Members/lukacova](http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lukacova)



[C] E. Feireisl, R. Hošek, D. Maltese, A. Novotný: Error estimates for a numerical method for the compressible Navier-Stokes system on sufficiently smooth domains, *ESAIM:M2AN* 51(1):279-319 (2017)

[D] R. Hošek: Face-to-face partition of 3D space with identical well-centered tetrahedra, *Appl. Math.* 60(6):637-651 (2015)

[E] R. Hošek: Strongly regular family of boundary-fitted tetrahedral meshes of bounded C^2 domains, *Appl. Math.* 61(3):233-251 (2016)

[F] R. Hošek: Construction and shape optimization of simplicial meshes in d -dimensional space, submitted (2016)

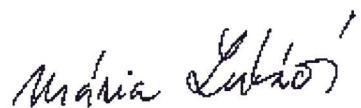
The thesis is divided into two parts. **The first part** is devoted to the stability, consistency and convergence/error analysis of suitable numerical schemes for compressible Navier-Stokes equations. In [A] finite-difference method on staggered grid, the so-called MAC scheme is considered for the approximation of the barotropic Navier-Stokes equations. The authors prove the consistency and stability with respect to suitable norms. Numerical experiments demonstrate first order convergence of the scheme. Consequently, it will be interesting to investigate the convergence or error analysis also theoretically. In publication [B] an interesting question of variational crimes is studied. These arise due to the discretization of smooth domains by tetrahedral elements. Generalizing the previous results of Feireisl et al. the authors prove unconditional convergence of the combined finite volume-finite element method to the solution of the full compressible Navier-Stokes-Fourier system. A similar question of approximation of smooth domains by a suitable mesh is studied also in [C] in the context of barotropic Navier-Stokes equations. Here the authors assume that a strong solution exists at least locally in time. The main ingredients of the proof are the discrete relative entropy inequality and the weak-strong uniqueness due to Feireisl, Jin and Novotný (2012).

The second part of the dissertation deals with the geometrical analysis of suitable meshes that are important to obtain previous convergence results on smooth domains. In [D] the Sommerville construction is discussed in order to create face-to-face tetrahedral meshes of 3D domains. The range of parameters is determined, for which the tetrahedra contain the centers of their interior spheres (the so-called well-centered property). The question of existence of family of boundary-fitted meshes is studied in [E]. The author answered positively the question, whether for three-dimensional domains it is possible to construct body-fitted convergent mesh discretizations. The Sommerville tetrahedra play again a crucial role. In [F] the author provides a constructive proof of a face-to-face simplicial partition of d -dimensional space by space-filling tetrahedral. The question of shape optimal value of the corresponding parameters is studied as well and the KKT (Karush-Kuhn-Tucker) condition is shown.

The thesis is written in a clearly understandable way. Introductory part gives a good introduction into the scientific area and nicely summarizes the main author's results. Thesis clearly documents author's high level publication activity. Since it is a thesis in numerical mathematics, I would appreciate more experimental results conducted by the candidate, that would demonstrate schemes behaviour. Indeed, numerical experiments often help to predict the convergence/error properties of the underlying scheme. I have some questions that can be discussed after the thesis presentation:

- 1) The candidate is asked to present briefly the derivation of the renormalized equation for the continuity equation in the case of the finite-difference scheme. Please point out the main ideas, the similarities and differences with the proof of Feireisl, Novotný et al. for the combined finite volume-finite element method.
- 2) What are the main reasons that the convergence result for the finite-difference scheme is not obtained?
- 3) Would it be possible to show error estimates for the finite-difference scheme for the barotropic Navier-Stokes equations using the relative entropy inequality? Can the discrete relative entropy inequality be derived?

Závěr: Předložená práce splňuje všechny předpoklady na úspěšnou disertační práci a doporučuji ji k obhajobě.



Prof. Dr. Maria Lukacova