Popularizace vědy ve volnočasových aktivitách žáků ZŠ - matematika

Tento modul je zaměřen na následující témata v kontextu věkové skupiny žáků základních škol: motivace k zájmu o studium technických a přírodovědných oborů, možnosti a typy popularizace vědy, získávání informací z nejnovějších vědeckých výzkumů, náměty pro aktivity zájmového kroužku, náměty projektů, experimentů, tipy na exkurze apod.

Obsah:

- Motivace k zájmu o studium matematiky
- Možnosti a typy popularizace matematiky
- Možnosti získávání nejnovějších informací z vědeckých výzkumů
- Náměty aktivit pro popularizaci matematiky

Tento material vznikl z finanční podpory Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky v rámci projektu „Popularizace vědy a badatelsky orientované výuky“, registrační číslo CZ.1.07/2.3.00/45.0007.

Popularizace vědy ve volnočasových aktivitách žáků ZŠ - matematika

Tento modul/kurz je zaměřen na následující témata v kontextu věkové skupiny žáků základních škol: motivace k zájmu o studium technických a přírodovědných oborů, možnosti a typy popularizace vědy, získávání informací z nejnovějších vědeckých výzkumů, náměty pro aktivity zájmového kroužku, náměty projektů, experimentů, tipy na exkurze apod.

Autoři:

doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.
Mgr. Lukáš Honzík, Ph.D.
Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.
RNDr. Václav Kohout

K plnohodnotnému využití této studijní opory je nutný přístup k on-line zdrojům a materiálům.

Tento materiál vznikl z finanční podpory Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky v rámci projektu „Popularizace vědy a badatelsky orientované výuky“, reg .č. CZ.1.07/2.3.00/45.0007.

1 Popularizace matematiky - úvodem

Přestože se matematika dosti často v průběhu několika prvních let školní docházky propadne v oblibě žáků z nejoblíbenějších předmětů mezi předměty neoblíbené, je třeba mít na paměti, že se nejedná jen o nudnou větu o počítání s čísly vyžadující encyklopedické znalosti vzorečků a postupů, ale dokáže být také zábavná a hlavně poskytuje základy pro řešení problémů v řadě dalších oborů lidské činnosti, mezi nimiž můžeme jmenovat různá statistická šetření a průzkumy (nemusí jít jen o předvolební průzkumy a průzkumy veřejného mínění, ale také třeba statistické výzkumy v rámci biologie), predikce budoucího vývoje (ať už například v demografii, v meteorologii či nejrůznějších hrách) a mnoho dalších činností.

1.1 Motivace k zájmu o studium matematiky

Každý den s matematikou. Proč?

Matematika totiž vytváří prostředky a nástroje, které umožňují správně vysvětlit a pochopit nejen přírodní jevy. Tak jako nemůžete číst tyto řádky, aniž umíte česky a aniž znáte abecedu, není možné ani poznávat zákonitosti přírody bez znalosti alespoň základních matematických poznatků - kniha přírody, kniha světa, ve kterém žijeme, je napsána matematikou. Bez znalosti matematické abecedy se obejdou pouze vědy založené na subjektivních pocitech a tvrzeních, která nelze dokázat ani experimentálně ověřit, jako psychologie, filozofie nebo pedagogika (byť i v rámci těchto oborů se dají provádět například statistická šetření).
Matematika se po řadu století rozvíjela - a dodnes rozvíjí - v úzké provázanosti s fyzikou; v posledních desetiletích však pronikla do dalších oblastí, jejichž pracovníci zjistili, že matematickými prostředky mohou úspěšně řešit složité problémy vlastního oboru a že matematické metody jsou pro ně nenahraditelné - jde o biologii, lékařství, ekonomii, jazykovědu, historii, vojenství atd. Abstrakcí jednoduchých pojmů odpozorovaných přímo z reálné skutečnosti a jejich další abstrakcí a zobecněním dospěla současná matematika k pojmům, které už s reálným světem zdánlivě vůbec nesouvisejí. Tato vysoká míra abstrakce však není ani trochu samoúčelná. Teorie, které se dnes zdají být běžné praxi na hony vzdálené, se v budoucnosti mohou ukázat jako velice užitečné.

1.2 Možnosti a typy popularizace matematiky

Matematika má na základních a středních školách dosti specifickou pozici - mezi žáky a studenty, pomineme-li výběrové třídy, nebývá moc oblíbená, protože ve školních lavicích se často setkávají s nepříliš živým a zajímavým výkladem a spoustou vzorečků. I přes tento "hendikep" je možné najít vhodné a pěkné způsoby, jak matematiku popularizovat.

Zajímavou ukázkou zpestření a popularizování matematiky mohou být různé matematické programy, ať už se jedná o programy dynamické geometrie (mezi dosti známé zástupce této třídy programů patří aplikace Cabri Geometry či GeoGebra) nebo programy zastupující systémy počítačové algebry typu Wolfram Mathematica, Maple a podobné. Sem můžeme zařadit třeba jednoduchý program wxMaxima zvládající jednodušší výpočetní operace včetně například řešení některých integrálů a diferenciálních rovnic nebo webové prostředí (přesněji výpočetní a vědomostní engine) Wolfram|Alpha dostupný na webové adrese www.wolframalpha.com, který nejen že dokáže řešit a počítat zadané úlohy, ale slouží též jako jakási encyklopedie a v jisté míře zvládne i "pseudokomunikaci" s uživatelem, kdy je schopný odpovídat na jednoduché otázky.

Samostatnou kapitolu, která přispívá k popularizaci matematiky, tvoří úlohy tzv. rekreační matematiky. Kromě relativně známých rébusů typu sudoku, kakuro, nurikabe a různých jejich variant sem patří i logicko-matematické úlohy vycházející z Einsteinovy hádanky, kterou prý vytvořil mladý Albert Einstein (jiné zdroje uvádějí anglického spisovatele Lewise Carrolla) a zpaměti ji dokážou vyřešit pouhá 2 % procenta lidí.

Úloha spočívá v tom, že spolu se zadáním ve tvaru: "V 5 domech, z nichž každý je natřen jinou barvou, žije 5 mužů různých národností, přičemž každý muž má svůj oblíbený nápoj, kouří svou oblíbenou značku cigaret (pomineme nepříliš výchovný aspekt tohoto tvrzení) a chová svá zvířata," je řešiteli předloženo i několik tipů/podmínek, umožňujících logické řešení:

- Angličan žije v červeném domě.
- Švéd chová psy.
- Dán pije čaj.
- Zelený dům je hned nalevo od bílého.
- Obyvatel zeleného domu pije kávu.
- Ten, co kouří Pall Mall, chová ptáky.
- Obyvatel žlutého domu kouří Dunhill.
- Ten, co žije ve prostředním domě, pije mléko.
- Nor žije v prvním domě.
- Ten, co kouří Blend, žije vedle toho, co chová kočky.
- Ten, co chová koně, žije vedle toho, co kouří Dunhill.
- Ten, co kouří Blue Master, pije pivo.
- Němec kouří Prince.
- Nor žije vedle modrého domu.
- Ten, co kouří Blend, má souseda, který pije vodu.

Řešitelovým úkolem je zjistit, kdo z mužů chová rybičky.

1.3 Možnosti získávání informací z nejnovějších vědeckých výzkumů

Mluvíme-li o nejnovějších vědeckých výzkumech, je třeba mít na paměti, že tyto se v matematice v poslední době objevují spíše ve smyslu získávání nových poznatků v oborech s matematikou, konkrétně s aplikovanou matematikou, úzce spojených (můžeme sem zahrnout nové šifrovací a kódovací algoritmy využívané třeba v bankovnictví). Z této skutečnosti plyne, že tyto nové poznatky bude spíše možné nalézt v některém z periodik příslušných danému oboru, než v časopisech čistě matematických. I když i v těch lze najít zajímavé články o aktuálním dění v matematice. Jako příklad jmenujme kupříkladu časopisy *Matematika-fyzika-informatika* (časopis je dostupný v elektronické verzi zde) nebo *Učitel matematiky*.

2 Náměty pro aktivity zájmového kroužku

V níže uvedeném odkazu najdete dva náměty pro práci s žáky - užití Geogebry při řešení slovních úloh a námět pro práci v různých číselných soustavách.

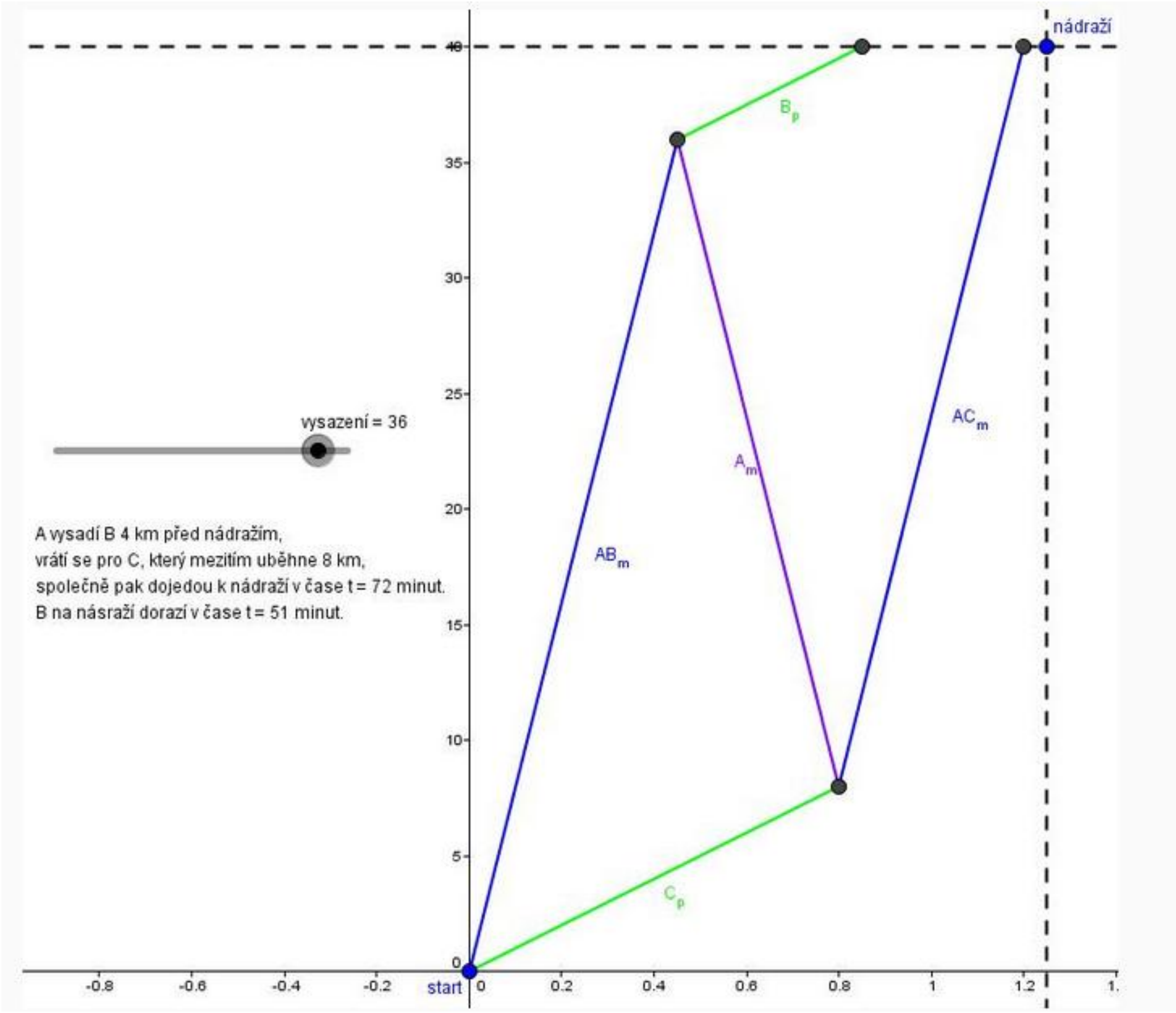
2.1 Náměty aktivit pro popularizaci matematiky

Řešení slovních úloh o pohybu pomocí softwaru dynamické geometrie

Slovní úlohy o pohybu náleží spolu s úlohami o směsích a o společné práci do výuky matematiky základních a středních škol. Při jejich řešení se zpravidla pro lepší orientaci používá nějaký náčrtek ilustrující zadanou situaci, samotné zjištění výsledku je však obyčejně provedeno výpočtem. Grafická metoda řešení by ale neměla být opomíjena, zvláště v případě některých úloh je možné ji vcelku vhodně využít. K tomu je však nutné využít některý z nástrojů dynamické geometrie, kupříkladu program GeoGebra (pro nekomerční užití zdarma dostupná na stránce http://www.geogebra.org), v níž uživatel může nejen konstruovat geometrické objekty, pracovat s geometrickými zobrazeními či například vyšetřovat průběhy funkcí, ale využívat ji i způsoby, které u dalších programů dynamické geometrie nejsou možné. Uživatel tak může vytvořit názorný interaktivní náčrt zadané situace a zkoumat změny, které nastanou při změně vstupních parametrů.

Příklad: Rozhodněte, zda mohou tři cestující stihnout vlak, který odjíždí za 75 minut ze stanice vzdálené 40 kilometrů, dokáže-li každý z nich běžet rychlostí 10 km/h a mají-li k dispozici dvoumístný motocykl, který může jet rychlostí 80 km/h. V případě, že vlak mohou stihnout, jak mají postupovat?

Řešení: Je zřejmé, že pokud má být úloha řešitelná, bude nejvhodnější zvolit následující způsob dopravy. Označme cestující A, B a C. Cestující A a B usednou na motocykl a vyrazí k nádraží rychlostí 80 km/h, zatímco cestující C běží k nádraží rychlostí 10 km/h. V určité vzdálenosti před nádražím sesedne cestující B z motocyklu a pokračuje dále v cestě rychlostí 10 km/h, zatímco cestující A se vrací pro cestujícího C. Toho naloží a následně rychlostí 80 km/h dojedou zbytek cesty k nádraží. Jak tato situace vypadá v grafickém znázornění, je vidět na obrázku.



Grafické znázornění situace (obrázek vlastní tvorby)

Modré úsečky znázorňují jízdu cestujícího A se spolujezdcem, fialová úsečka je cesta cestujícího A vracejícího se pro cestujícího B a zelené úsečky odpovídají pěší dopravě cestujících B a C. Z grafiky lze též vyčíst, že v tomto konkrétním případě vysadil cestující A cestujícího B 4 kilometry před nádražím, vyrazil naproti cestujícímu C, s nímž se setkal 8 kilometrů od startovní pozice a následně se oba bezpečně dostali do 40 kilometrů vzdáleného nádraží 72 minut po vyjetí. Vysazený cestující B mezitím doběhl na nádraží dokonce 51 minut od začátku měření. Všichni tři v tomto případě vlak bez problémů stihli.

Interaktivní figura odpovídající zadání příkladu je k nalezení v sekci Multimédia k badatelské aktivitě. Lze v ní pohybovat posuvníkem s názvem *vysazení*, čímž je měněna vzdálenost, v níž je z motocyklu vysazen cestující B. Experimentováním pak lze nalézt množinu přípustných řešení včetně extrémních případů, kdy motocykl s cestujícími A a C nebo vysazený cestující B dorazí na nádraží na poslední chvíli, případně lze zkoumat i situace, kdy se některý z cestujících opozdí a vlak nestihne.

Pro úplnost uveďme, že oněmi extrémními případy jsou vysazení cestujícího B 8 kilometrů před nádražím, v takovém případě dorazí A s C na nádraží v 68. minutě a cestující B 3 minuty před odjezdem vlaku, a vysazení B 2 kilometry před nádražím, v takové situaci doběhne B do cíle ve 41. minutě a A s C přijedou na motocyklu v 75. minutě, nicméně vlak by ještě stihnout měli. Pokud je cestující B vysazen kdekoliv v tomto rozmezí (8-2 kilometry od nádraží), všichni tři vlak stihnou, je-li cestující B vysazen dříve, vlak nestihne, je-li naopak vysazen později, nedorazí na nádraží včas cestující A a C.

Dodejme ještě, že při zjemnění hodnot dosažitělných posuvníkem (je nastaven na celé kilometry, je však možné nastavit citlivost na desetiny nebo setiny kilometrů) dojde ke zpřesnění výše uvedených hodnot.

Obdobnými způsoby lze samozřejmě řešit i další slovní úlohy o pohybu, pro ilustraci uvádíme některá další zadání podobných příkladů:

Příklad: Za vozidlem s nadměrným nákladem pohybujícím se rychlostí 16km/h vyrazilo za 2,5 hodiny doprovodné vozidlo, které je musí dostihnout nejpozději do 45 minut. Jakou musí (resp. může) jet rychlostí?

Příklad: Železniční trať z Prahy do Olomouce je dlouhá 250 kilometrů. V 6:00 vyjel z Prahy do Olomouce rychlík rychlostí 85 km/h, o čtvrt hodiny později vyrazil opačným směrem z Olomouce do Prahy osobní vlak rychlostí 65 km/h. V kolik hodin a jak daleko od Prahy se oba vlaky potkají?

Příklad: Z města A do města B vzdáleného 60 kilometrů vyrazili tři kamarádi. K dispozici měli dvojmístný motocykl, který jel rychlostí 60 km/h. Pěšky šel každý z nich rychlostí 5 km/h. Kamarádi se rozhodli pro následující způsob přepravy: Dva z nich vyrazí k městu B na motocyklu, třetí půjde pěšky. Několik kilometrů před městem B řidič motocyklu vysadí spolujezdce, který bude do města B pokračovat sám pěšky, a vrátí se k městu A pro třetího kamaráda, kterého pak na motocyklu doveze až do města B. Všichni tři dorazí do města B najednou. Kde má řidič prvního spolujezdce vysadit? Za jak dlouho všichni dorazí do města B?

Příklad: Města K, L a M leží za sebou na téže silnici, vzdálenost K od L je 14 km. Ve 13 hodin vyjel z L směrem k M cyklista rychlostí 12 km/h, nato ve 14 hodin 10 minut vyjelo z K rovněž směrem k M osobní auto rychlostí 68 km/h. Konečně ve 14 hodin 20 minut vyjelo z M směrem k L nákladní auto rychlostí 45 km/h. Všichni tři se na silnici setkali ve stejném okamžiku. Kdy došlo k setkání a v jaké vzdálenosti od L to bylo?

Příklad: V 9 hodin vyjel z Plzně cyklista směrem na Tábor rychlostí 20 km/h. O hodinu později za ním vyrazil jezdec na mopedu a o další hodinu později osobní automobil, který jel dvojnásobnou rychlostí než mopedista. Automobil pak dojel moped v té samé chvíli, kdy míjel cyklistu. Určete, v kolik hodin a jak daleko od Plzně k tomu došlo.

..

Metodický list pro badatelskou aktivitu

Téma	Grafické řešení slovních úloh o pohybu
Tematický celek	Slovní úlohy
Motivační rámec aktivity	Slovní úlohy o pohybu jsou nedílnou součástí školní matematiky, přičemž jejich velké množství lze řešit za přispění grafické metody místo pouhého počítání. Grafický náčrtek nebo nárys je většinou názornější než výpočet, přičemž v případě užití interaktivní dynamické geometrie je možné, aby žáci v závislosti na změně vstupních parametrů sami zjistili, jaký tato změna bude mít vliv na výsledek.
Počet žáků	10-15
Věk žáků	12+
Pomůcky	počítač, příslušné softwarové vybavení
Stručný popis aktivity s využitím přístroje	Experimentální řešení slovních úloh o pohybu pomocí grafické metody v programu dynamické geometrie GeoGebra
Vhodné místo	počítačová učebna
Cíle aktivity	Žáci budou schopni zvládnout jednoduché úkony týkající se práce s programem GeoGebra (potažmo i s jinými programy dynamické geometrie), pochopit souvislost mezi vstupními parametry a měnící se hodnotou výstupu, nalézt alespoň přibližně správné vstupní hodnoty pro daný hledaný výstup, řešit slovní úlohy o pohybu.
Rozvíjené kompetence	kompetence k řešení problémů, komunikativní, pracovní,...
Předchozí znalosti	Aktivita navazuje na řešení slovních úloh, práci s geometrickými objekty.
Mezipředmětové vztahy	informatika, fyzika, člověk a svět

Časový plán	Fáze činnosti s přístrojem	Metody a formy, motivace
0-15	-	frontální: nastínění situace - nutnost nalezení optimálního způsobu dopravy, aby byly splněny zadanépodmínky skupinová: hledání vhodného způsobu dopravy, kdy se ušetří co nejvíce času
15-25	grafické vyjádření zadání	frontální: grafické zpracování zadání úlohy v počítači, interpretace zadaných informací, zavedení posuvníku, jímž se budou měnit vstupní parametry
25-30	nalezení krajních přípustných možností a množiny řešení	frontální s dialogem: nalezení krajních přípustných řešení, interpretace zjištěných skutečností, sestrojení závěru
30-45	samostatná práce s programem	individuální či skupinová (v malých skupinách, ve dvojicích): experimetování žáků s dalším zadaným příkladem slovních úloh o pohybu
Hodnocení	Hodnocení neprováděno, případně je prováděno jen okrajově v závislosti na zapojení žáků do diskuze a s ohledem na zvládnutí práce s programem dynamické geometrie.	
Návaznosti	Další práce s programem dynamické geometrie, například grafické řešení jednoduchých optimalizačních úloh.	

Multimédia k badatelské aktivitě

Interaktivní geometrická figura k příkladu slovní úlohy o pohybu je ke stažení zde. K jejímu spuštění je nutné mít nainstalovanou a aktualizovanou Javu a program GeoGebra.

Ve figuře lze pohybovat posuvníkem a měnit tak vzdálenost od nádraží, ve které má být vysazen cestující B. V závislosti na tom lze experimentálně ověřit, v jakých případech všichni tři cestující vlak stihnou a v jakých ne.Grafické zobrazení je doplněné dynamickým textem s komentářem informujícím uživatele o místě vysazení a době, kterou A, B a C potřebují k cestě do cíle.

Chci, aby mi bylo ... let aneb čísla v různých číselných soustavách (do 45 min)

Přirozená nespokojenost člověka se vším, co právě je a touha po tom, co právě není, zahrnuje mnohdy i nespokojenost s věkem, který je mu spravedlivě a nekompromisně měřen rotacemi Země.
Předvedeme malý trik, jak iluzorně nabýt takového věku, s nímž bychom aspoň nějaký čas byli spokojeni.

1. Motivace problému, jak se učinit starším
Pusťte si video Barbora píše z tábora.

Dejme tomu, že se ocitneš v roli 13leté slečny Barbory prahnoucí po Štefanovi, který už dosáhl plnoletosti, a chceš být „o pár let starší“, resp. být aspoň plnoletá. Jak to zařídit?

Trik bude spočívat v tom, že potřebujeme, aby číslo 13 „vypadalo“ jako číslo 18 nebo o trochu větší.

V našich i vzdálenějších končinách jsou lidé do života povětšinou vybaveni celkem 10 prstíky na obou rukách a dalšími 10 prstíky na nohách. Proto se nám jeví jako zcela samozřejmý a přirozený takový postup zápisu počtu čehokoli, v němž předměty napočítáme na prstech obou rukou a je-li jich víc, rozdělíme je do skupin po deseti. Zapíšeme počet skupin a následně případně připíšeme počet zbylých předmětů, které nezvládly vytvořit desetičlennou skupinu. Například počet let 13leté slečny zhmotněný třeba svíčkami na jejím narozeninovém dortu lze rozdělit na jednu skupinu s deseti svíčkami a zbylé tři svíčky, proto píšeme **13**, ale jde vlastně o zkrácený zápis **1**.10 + **3** (jedenkrát obě ruce a tři prsty).

Aby bylo možno slečnu aspoň imaginárně postaršit, museli bychom jejích 13 svíček rozdělovat do skupin o menším počtu než 10. Zkusme svíčky rozdělovat např. do skupin po 8. V tom případě máme jednu osmičlennou skupinu a pět zbylých svíček, tj. **1**.8 + **5**. Mimozemšťan nebo pohádková bytost z kreslených seriálů, které se z estetických důvodů vejdou na ruku často jen čtyři prsty, by tedy mohla psát, že slečně je právě 15 let (jedenkrát obě čtyřprsté ruce a pět prstů).

Slečna je aspoň zápisem o dva roky starší, ale plnoletá ještě není.

♦ Do jak početných skupin bude potřeba rozdělovat Barbořiny dortové svíčky, aby se plnoletou stala?
*-> Zkusíme-li rozdělovat svíčky po 7, bude Barboře **1**.7 + **6** let, což by se dalo zapsat číslem **16**.*
*-> Teprve při volbě počítání po šestičlenných skupinách, dosáhne Barbora plnoletosti, neboť **2**.6 + **1** lze šikovně zapsat jako **21**.*

♦ Zkus se postaršit podle Barbořina vzoru. Jaký počet ve skupině budeš volit? Menší než 10 nebo větší než 10?
-> Menší než 10.

♦ Při jakém počtu svíček ve skupině jsi nejstarší? Jaký je Tvůj nejvyšší věk?
-> Nejvyššího věku se dosahne, když skupinu bude tvořit co nejmenší počet předmětů, který je však větší než 1. Proto je člověk "nejstarší", bude-li počet jeho svíček rozdělován do skupin po dvou.

2. Trocha matematiky – dohoda o zápisu čísel a některé pojmy

Všimněme si, že Barbora je stále stejně stará. Jen jsme číslo 13 jednou vyjádřili jako 1.10 + 3, pak jako 1.8 + 5, následně součtem 1.7 + 6 a nakonec jako 2.6 + 1. Pak jsme tyto rozvinuté zápisy zkrátili na za zápisy 13, 15, 16, 21. Byl by to z naší strany podvod, kdybychom v posledních třech případech nepřiznali, že počítáme jinak než po desetičlenných skupinách. Aby nedocházelo k nedorozuměním, budeme k číslu připisovat dolní index vyjadřující počet předmětů, které tvoří skupinu, např. 13_{10}, 15_8, 16_7, 21_6. Čísla v dolních indexech 10, 8, 7, 6 jsou tzv. **základy číselných soustav**. Běžně počítáme v číselné soustavě se základem deset (v tzv. desítkové soustavě nebo též dekadické soustavě), číslo 15_8 je zápisem čísla 13_{10} v soustavě se základem osm (v tzv. osmičkové soustavě neboli oktalové soustavě), výrazem 16_7 je zapsáno číslo 13_{10} v soustavě se základem sedm (tj. v tzv. sedmičkové či septilové soustavě), konečně 21_6 představuje číslo 13_{10} v soustavě se základem šest (v tzv. šestkové či sextilové soustavě). Můžeme psát $13_{10} = 15_8 = 16_7 = 21_6$. Součet 1.10 + 3 je **rozvinutý zápis čísla** 13_{10} **v desítkové soustavě**, součet 1.8 + 5 je **rozvinutý zápis** téhož **čísla v osmičkové soustavě** apod. pro 1.7 + 6 a 2.6 + 1. Barboru i sebe jsi tedy postaršil díky změně základu číselné soustavy.

3. Jak se učinit mladším

Pusťte si video When I'm sixty four nebo Už mi lásko není 20 let.

Ač se Tě to ještě netýká, dříve či později dospěješ k tomu, že by bylo lepší být „o pár let mladší".

♦ Uměl bys pomoci zpěvákovi skupiny Beatles v omlazení, až mu bude oněch 64 let?
-> *Věk vylepším změnou číselné soustavy.*

♦ Jaký základ číselné soustavy zvolíš, aby v něm číslo 64 bylo „menší"? Menší než 10 nebo větší než 10?
-> *Větší než 10.*

♦ Jaký věk mu můžeš nabídnout, chce-li zůstat plnoletý?
-> V soustavě se základem 11 je 64_{10} = **5**.11 + **9** = **59**$_{11}$.
-> V soustavě se základem 12 je 64_{10} = **5**.12 + **4** = **54**$_{12}$.
-> V soustavě se základem 13 je 64_{10} = **4**.13 + **12** = **4,12**$_{13}$.
-> V soustavě se základem 14 je 64_{10} = **4**.14 + **8** = **48**$_{14}$.
-> V soustavě se základem 15 je 64_{10} = **4**.15 + **4** = **44**$_{15}$.
-> V soustavě se základem 16 je 64_{10} = **4**.16 + **0** = **40**$_{16}$.
-> V soustavě se základem 17 je 64_{10} = **3**.17 + **13** = **3,13**$_{17}$.
-> V soustavě se základem 18 je 64_{10} = **3**.18 + **10** = **3,10**$_{18}$.
-> V soustavě se základem 19 je 64_{10} = **3**.19 + **7** = **37**$_{19}$.
-> V soustavě se základem 20 je 64_{10} = **3**.20 + **4** = **34**$_{20}$.
-> V soustavě se základem 21 je 64_{10} = **3**.21 + **1** = **31**$_{21}$.
-> V soustavě se základem 22 je 64_{10} = **2**.22 + **20** = **2,20**$_{22}$.
-> V soustavě se základem 23 je 64_{10} = **2**.23 + **18** = **2,18**$_{23}$.
-> V soustavě se základem 24 je 64_{10} = **2**.24 + **16** = **2,16**$_{24}$.
-> V soustavě se základem 25 je 64_{10} = **2**.25 + **14** = **2,14**$_{25}$.
-> V soustavě se základem 26 je 64_{10} = **2**.26 + **12** = **2,12**$_{26}$.
-> V soustavě se základem 27 je 64_{10} = **2**.27 + **10** = **2,10**$_{27}$.
-> V soustavě se základem 28 je 64_{10} = **2**.28 + **8** = **28**$_{28}$.

-> V soustavě se základem 29 je 64_{10} = **2**.29 + **6** = **26**$_{29}$.
-> V soustavě se základem 30 je 64_{10} = **2**.30 + **4** = **24**$_{30}$.
-> V soustavě se základem 31 je 64_{10} = **2**.31 + **2** = **22**$_{31}$.
-> V soustavě se základem 32 je 64_{10} = **2**.32 + **0** = **20**$_{32}$.
-> V soustavě se základem 33 je 64_{10} = **1**.33 + **31** = **1,31**$_{33}$.

♦ Našel jsi nějaké nesmyslné zápisy? Které to jsou?
-> 64_{10} = **4,12**$_{13}$ = **3,13**$_{17}$ = **3,10**$_{18}$ = **2,20**$_{22}$ = **2,18**$_{23}$ = **2,16**$_{24}$ = **2,14**$_{25}$ = **2,12**$_{26}$ = **2,10**$_{27}$.

♦ Proč vyšly nesmyslné zápisy? Kolik cifer je třeba pro zápis čísla v číselné soustavě se základem *n*? Zamysli se nad používanými znaky v příslušné číselné soustavě.
-> V desítkové soustavě máme deset cifer (0, 1, 2, ..., 9), v soustavách se základem menším než 10, tj. v soustavách, v nichž postaršujeme, máme méně cifer než 10. Např. v pětkové soustavě je pět cifer (0, 1, 2, 3, 4). Pokud však "omlazujeme", má číselná soustava základ větší než deset, a proto je v ní i více než deset cifer. Například v šestnáctkové (hexadecimální) soustavě je pro zápis čísla nutných 16 cifer, obvykle se používá 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F místo cifer 0, 1, ..., 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, aby znak pro každou cifru obsadil pouze jednu pozici. V číselné soustavě se základem *n* je potřeba *n* cifer. Zápisům, v nichž by na pozici jednotek bylo dvojciferné číslo nebo nějaký dohodnutý znak, by většina lidí nerozuměla a vnímala by je jako nesmyslné. Například číslo 4,12, případně 4C (při dohodnutých cifrách 0, 1, 2, ..., A, B, C), zapsané v třináctkové soustavě by nebylo chápáno jako číslo vyjadřující věk.

♦ Jaký nejmenší věk může být při "omlazování" dosažen?
-> "Omlazování" provádíme volbou základu většího než je číslo 10. Vždy lze zvolit základ, který je roven věku omlazovaného. Např. můžeme zvolit základ 64 pro omlazování 64letého člověka. Pak je 64_{10} = **1**.64 + **0** = **10**$_{64}$. Volba většího základu vede k nesmyslnému zápisu. Soudíme proto, že nejmenším dosažitelným věkem je 10 let při základu rovném věku před omlazením.

♦ Jak starého člověka nelze omladit? Jak starého člověka nelze postaršit?
-> Z předchozího víme, že člověku starému n let umíme přiřadit věk 10 let. Zkusme proto "omladit" desetiletého žáka. Pro omlazení potřebujeme číselnou soustavu se základem větším než 10, např. 11. Ale v jedenáctkové soustavě je 10_{10} = **0**.11 + **10** = **0,10**$_{11}$ a stejně nesmyslný zápis se získá pro vyšší základy. Z podobných důvodů nelze "snížit" věk dětí mladších deseti let.

♦ Jak starého člověka nelze postaršit?
-> "Postaršení" se provádí volbou číselné soustavy se základem menším než 10. Takovou soustavu lze vybrat pro každé číslo, proto "postaršit" lze vždy nezávisle na věku.

♦ Volbou vhodné číselné soustavy zajisti členům Tvé rodiny takový věk, s nímž by byli spokojeni.
-> Výsledky můžeš zkontrolovat v pdf-tabulce nebo zde.

Metodický list pro badatelskou aktivitu 2

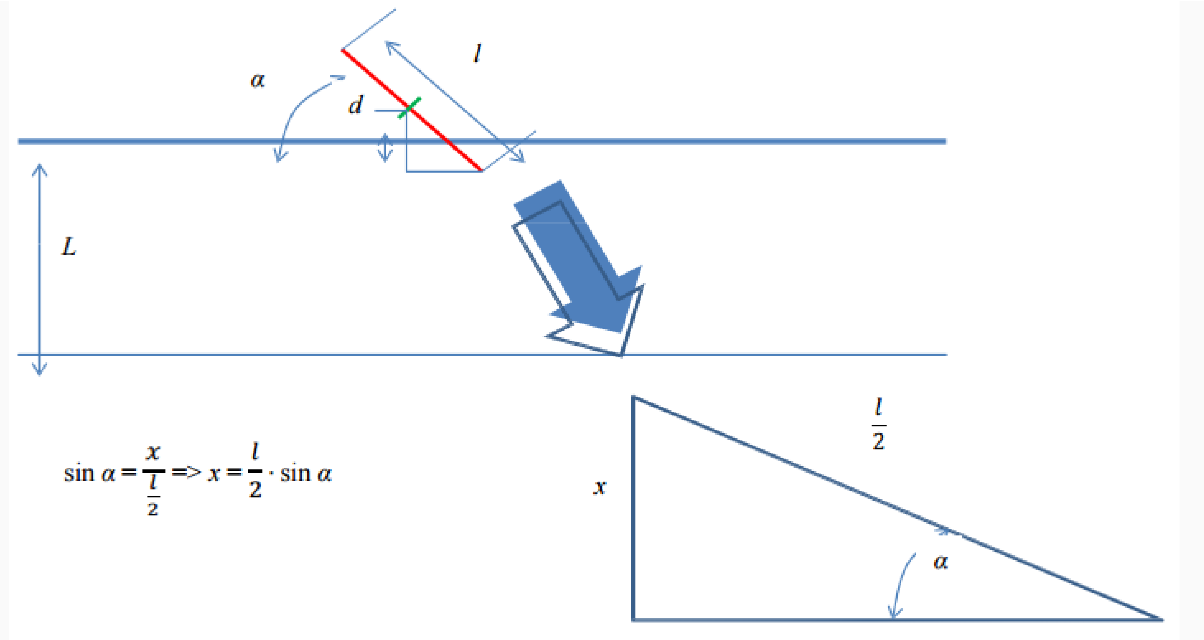
Téma	Číselné soustavy	
Tematický celek	Číslo a proměnná	
Motivační rámec aktivity	Pro řadu lidí je číslo zápis jedné či více cifer vedle sebe. Přitom se automaticky předpokládá, že jde o cifry desítkové soustavy. Změna číselné soustavy vede k abstraktnějšímu vnímání pojmu číslo, totiž, že může být zapsáno různými způsoby.	
Počet žáků	20	
Věk žáků	12 a více	
Pomůcky	tužka, papír, přístup na internet např. prostřednictvím interaktivní tabule výhodou	
Stručný popis aktivity s využitím přístroje	---	
Vhodné místo	*běžná učebna*	
Cíle aktivity	Žáci budou schopni zapsat číslo v různých číselných soustavách. Upraví svůj stávající pohled na číslo jako na zápis.	
Rozvíjené kompetence	kompetence k řešení problému, kompetence komunikativní a personální	
Předchozí znalosti	Aktivita navazuje na znalosti, které by měl mít žák po absolvování 1. st. ZŠ.	
Mezipředmětové vztahy	občanská nauka	
Časový plán	Fáze činnosti s přístrojem	Metody a formy,

		motivace
0-5	motivace problému postaršení	frontální
5-10	úlohy na postaršování	samostatná práce
10-20	zpřesnění a matematické zápisy	frontální
20-30	motivace problému omlazení	frontální
30-40	úlohy na omlazování	samostatná činnost
40-45	závěr a shrnutí, úvahy o možnostech vyjádření zlomků v jiných číselných soustavách (12,5 roku apod.)	
Hodnocení	V průběhu aktivity bude prováděno sebehodnocení.	
Návaznosti	Vyjadřování racionálních čísel v jiných číselných soustavách, zápisy libovolného čísla v jiných číselných soustavách, užití rozvinutého zápisu čísla v různých číselných soustavách pomocí mocnin.	

Historie a popis metody Monte-Carlo

V této části si uvedeme některé zajímavé informace o tom, jak metoda vznikla a k jakým účelům byla využívána.

Historicky prvním příkladem použití principu metody Monte Carlo je tzv. Buffonova úloha, jež je úlohou vztahující se ke geometrické pravděpodobnosti: V rovině jsou narýsovány rovnoběžky, jejichž vzájemná vzdálenost je rovna L. Zajímá nás pravděpodobnost, že náhodně vržená jehla o délce l < L protne některou přímku. Uvažujme, že rovnoběžky jsou rovnoběžné s osou x. Označme d vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a α úhel, který svírá jehla s danou rovnoběžkou (viz obrázek). Poloha jehly je tedy určena bodem o souřadnicích [d; α], kde $0 \le d \le \frac{L}{2}$ a $0 \le \alpha \le \pi$.



$$\sin\alpha = \frac{x}{\frac{l}{2}} \Rightarrow x = \frac{l}{2}\cdot\sin\alpha$$

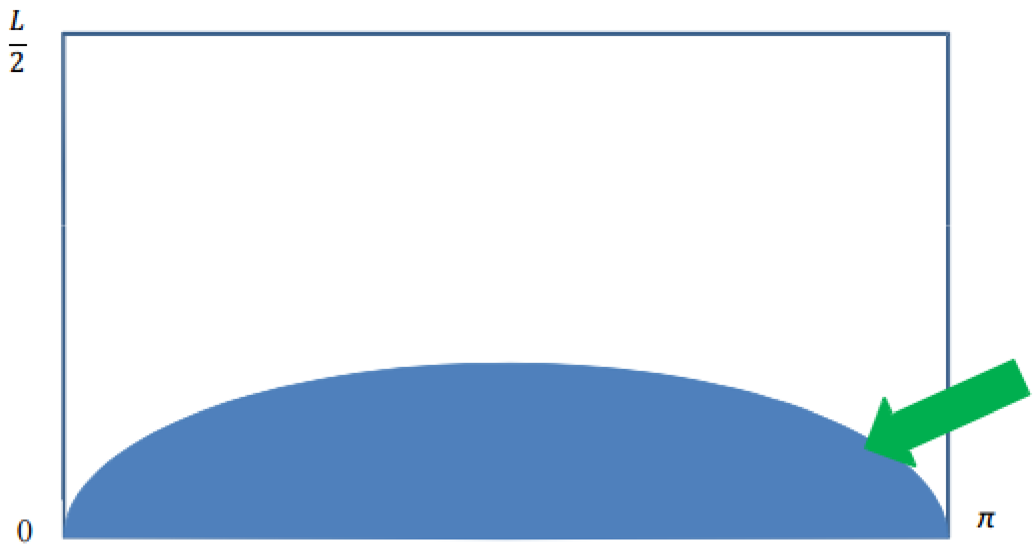
Z obrázku je zřejmé, že jehla protne příslušnou rovnoběžku, pokud bude platit: $d \le \frac{l}{2}\cdot\sin\alpha$

Hozením jehly mohou nastat dva případy:

– Jehla protne příslušnou rovnoběžku – úspěch.

– Jehla neprotne příslušnou rovnoběžku – neúspěch.

Oblast příznivých výsledků vymezená nerovností $d \le \frac{l}{2}\cdot\sin\alpha$



Pravděpodobnost toho, že jehla protne rovnoběžku, stanovíme podle geometrické definice pravděpodobnosti:

$$P = \frac{2l}{L \cdot \pi}$$

Tuto pravděpodobnost můžeme odhadnout na základě znalosti Bernoulliho věty, která nám říká, že relativní četnost nějakého jevu stochasticky konverguje k jeho pravděpodobnosti, můžeme tedy pro odhad pravděpodobnosti psát:

$$P = \frac{m}{n},$$

kde *m* značí počet úspěšných pokusů (jehla protnula rovnoběžku) a n značí počet všech realizovaných pokusů. Můžeme tedy psát:

$$\frac{2l}{L \cdot \pi} \approx \frac{m}{n},$$

z čehož úpravami získáme:

$$\pi \approx \frac{2l \cdot n}{L \cdot m}$$

Realizujeme-li dostatečný počet pokusů, lze výše uvedený vztah využít k experimentálnímu stanovení hodnoty Ludolfova čísla π.

Experimentátor	Rok	Počet realizovaných pokusů	Stanovený odhad hodnoty π
Volf	1850	5000	3,1596
Smith	1855	3204	3,1553
Fox	1894	1120	3,1419
Laccarini	1901	3408	3,1415929

$$\pi \doteq 3{,}1415926539$$

Samotná metoda Monte Carlo byla formulována a prakticky použita J. von Neumannem a S. Ulamem při vývoji atomové bomby během 2. světové války. Při výzkumu chování neutron ů bylo třeba vyřešit problém, jaké procento neutron ů v určité spršce pronikne nějakou překážkou, např.. nádrží vody určitých rozměrů. Při řešení tohoto problému předpovědi života neutronu byla použita technika kola rulety, odtud plyne i název metody. Např.. je známo, že při srážce neutronu a atomu vodíku je neutron pohlcen průměrn ě v jednom ze sta případů. Při stanovení toho, zda bude neutron pohlcen či nikoliv, je možno použít kolo rulety rozdělené na 100 dílků, přičemž 1 označený dílek bude znamenat pohlcení neutronu. V případ ě, že nedojde k zániku neutronu, se pomocí dalšího kola rulety náhodně stanoví trajektorie neutronu do další srážky. Takto se postupuje do té doby, než dojde k zániku neutronu nebo k jeho průchodu překážkou. Je zřejmé, že realizovat tento experiment pomocí skutečných kol rulet by bylo prakticky nerealizovatelné. V té dob ě byl však již k dispozici po čítač, pomocí kterého bylo možno tento experiment realizovat. Metoda Monte Carlo je numerickou metodou založenou na vztahu mezi pravděpodobnostními charakteristikami různých náhodných procesů a veličinami, které jsou řešením studovaných úloh.

Princip metody tedy spočívá v následujících bodech:

1) Formulace nové úlohy mající náhodný charakter, jejíž řešení se shoduje s řešením původní úlohy.

2) Řešení nové úlohy pomocí statistických experimentů.

Metodu Monte Carlo lze použít např.. při řešení určitých integrálů (zejména vícerozměrných) nebo při řešení soustav rovnic.

Existují dva možné přístupy při řešení úloh metodou Monte Carlo:

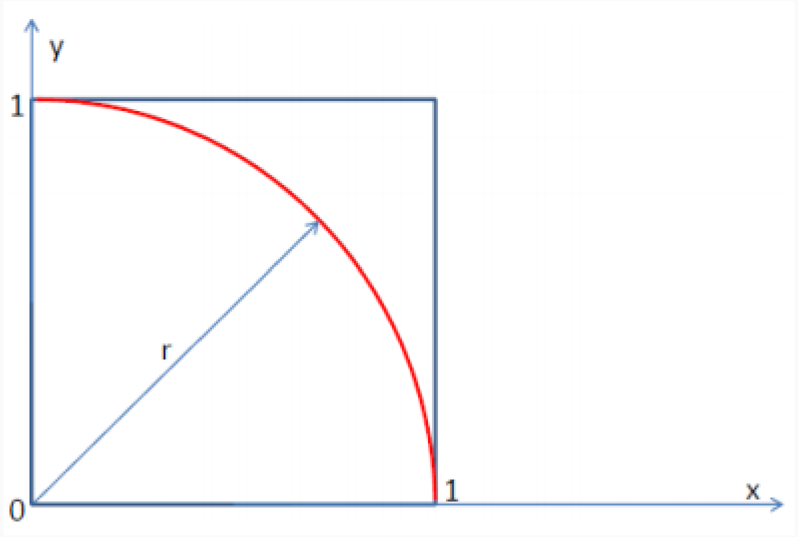
1) Geometrická metoda založená na geometrické pravděpodobnosti.

2) Výpočet založený na odhadu střední hodnoty náhodné proměnné.

ad 1) S geometrický přístupem jsme se již setkali v rámci Buffonovy úlohy. Nyní si na dvou jednoduchých příkladech ukážeme, jakým jiným způsobem lze experimentálně stanovit hodnotu π a jak lze řešit jednoduchý určitý integrál. Při řešení využijeme generátor pseudonáhodných čísel software Microsoft Excel (funkce NÁHČÍSLO).

Příklad

Je dán jednotkový čtverec, ve kterém je vepsána kruhová výseč (viz obrázek). Geometrickým přístupem experimentálně stanovte hodnotu Ludolfova čísla π.



Definujme jev A – náhodně vybraný bod jednotkového čtverce leží v kruhové výseči.

Je zřejmé, že na základě geometrické pravděpodobnosti můžeme pro pravděpodobnost jevu A psát:

$$P(A) = \frac{\frac{\pi \cdot r^2}{4}}{r^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Nyní je třeba provést sérii náhodných pokusů – výběr náhodného bodu X z jednotkového čtverce. Bod X je určen dvěma nezávislými rovnoměrně rozdělenými souřadnicemi x a y, kde $0 \leq x \leq 1$ a $0 \leq y \leq 1$. Konkrétní realizace souřadnic x a y lze získat v Excelu pomocí funkce NÁHČÍSLO, jež generuje rovnoměrně rozdělená náhodná čísla z intervalu ‹0; 1).

Máme-li vygenerovány dvojice souřadnic x a y, můžeme přistoupit k rozhodnutí, zda nastal úspěch (bod leží v kruhové výseči) či neúspěch. Je zřejmé, že pro vzdálenost d bodu X [x; y] od počátku souřadnicového systému platí:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Úspěch tedy nastane tehdy, bude-li pro i-tý bod platit:

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq 1,$$

neboť poloměr výseče je roven 1.

Nastane-li v *n* pokusech *m* úspěchů, kde $m \leq n$, můžeme pro pravděpodobnost jevu A psát:

$$P \approx \frac{m}{n}$$

Dostáváme tedy:

$$\frac{m}{n} \approx \frac{\pi}{4} => \pi \approx 4 \cdot \frac{m}{n}$$

Počet realizovaných pokusů	Počet úspěšných pokusů	Stanovený odhad hodnoty π
100	74	2,96000
1000	782	3,12800
65532	51503	3,14369

$$\pi \doteq 3{,}1415926539$$

Je třeba ovšem pamatovat na to, že ve všech případech se jedná o bodový odhad hodnoty π. Seznámili jsme se se základními principy metody Monte Carlo, nyní nás bude zajímat, jaká je přesnost odhadu metodou Monte Carlo. Uvažujme přístup založený na geometrické pravděpodobnosti. Při tomto přístupu realizujeme náhodný pokus, při kterém může nastat buď úspěch, nebo neúspěch. Jedná se tedy o Bernoulliho pokusy (nezávislé pokusy mající pouze dva možné výsledky – úspěch a neúspěch, pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je konstantní), kdy neznáme pravděpodobnost úspěchu, ale chceme ji na základě experimentu stanovit. Zaveďme proměnnou δi, která v případě úspěchu nabude hodnoty 1 a v případě neúspěchu hodnoty 0.

Definujme proměnnou M:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i},$$

kde *n* je počet realizovaných pokusů. Proměnná M se řídí binomickým rozdělením; pro pravděpodobnost, že v *n* pokusech nastane právě *m* úspěchů, platí:

$$P(M = m) = \binom{n}{m} \cdot p^{m} \cdot (1 - p)^{n-m}$$

kde $0 < p < 1$ je pravděpodobnost úspěchu.

Pro střední hodnotu a rozptyl binomické náhodné proměnné platí:

$$EM = n \cdot p,\ DM = n \cdot p \cdot (1-p).$$

Uvažujeme nyní proměnnou $\frac{M}{n}$. Z vlastností střední hodnoty a rozptylu plyne:

$$E\left(\frac{M}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot EM = \frac{1}{n} \cdot n \cdot p = p,$$

$$D\left(\frac{M}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot DM = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot (1-p) = \frac{p \cdot (1-p)}{n}$$

Při dalším odvozování použijeme Čebyševovu nerovnost: Nechť X je náhodná proměnná s libovolným, obecně neznámým rozdělením, s konečnou střední hodnotou EX a rozptylem DX. Potom pro libovolně malé ε > 0 platí:

$$P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\epsilon^2}.$$

Položme $X = \frac{M}{n}$ a dosaďme do Čebyševovy nerovnosti odvozené vztahy pro $E\left(\frac{M}{n}\right)$ a $D\left(\frac{M}{n}\right)$:

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \epsilon^2},$$

Tato nerovnost je nazývána Bernoulliho nerovnost.

Bernoulliho nerovnost můžeme zjednodušit na základě skutečnosti, že:

$$p \cdot (1-p) \leq \frac{1}{4},$$

potom dostaneme:

$$P\left(\left|\frac{M}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot \epsilon^2}.$$

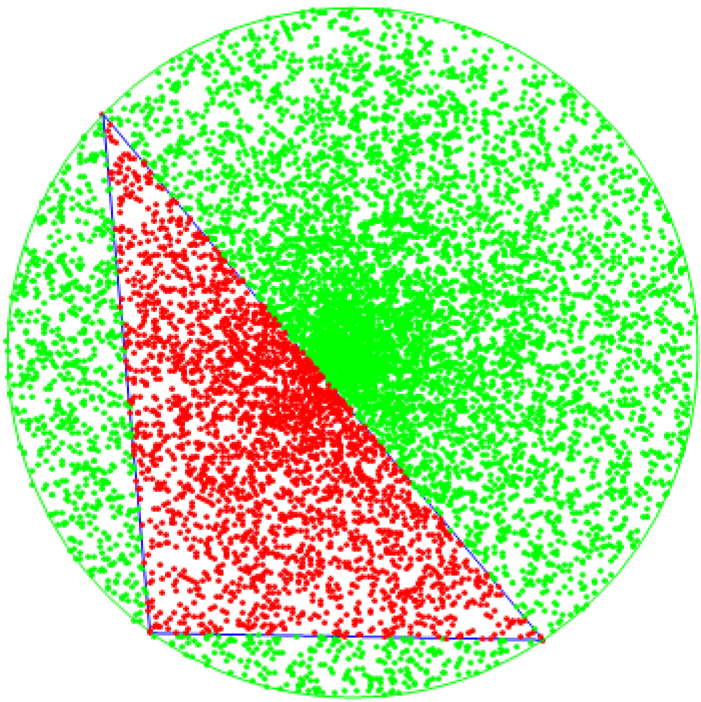
Informace ke stažení ve formátu pdf zde. (viz. on-line kurz)

Příklady na využití metody Monte-Carlo

Zde si uvedeme dva příklady využití metody. první je návod jak zjistit obsah plochy trojúhelníku pomocí dané metody:

Dále uvedeme výpis ze souboru programu Mathematica -

```
pocet = 3;
kolik = 10000;
vrcholy = Sort[Table[{RandomReal[{0, 2 π}], 1}, {i, pocet}]];
vrch = Table[{Cos[vrcholy[[i, 1]]], Sin[vrcholy[[i, 1]]]}, {i, Length[vrcholy]}];
ch = ConvexHullMesh[vrch];
i = 0;
uvnitr = {};
mimo = {};
While[i < kolik,
 r = RandomReal[];
 uhel = RandomReal[{0, 2 π}];
 bod = {r Cos[uhel], r Sin[uhel]};
 If[RegionNearest[ch, bod] == bod, uvnitr = Append[uvnitr, bod],
  mimo = Append[mimo, bod]];
 i++]
Graphics[{Red, Point[vrch], Blue, Line[vrch], Line[{Last[vrch], First[vrch]}],
  Green, Circle[], Black, Point[bod], Green, Point[mimo], Red, Point[uvnitr]}]
"Plocha podle metody Monte - Carlo : " <> ToString[N[π * Length[uvnitr] / kolik]]
"Plocha podle vzorce : " <> ToString[N[RegionMeasure[ch, 2]]]
"Počet bodů uvnitř : " <> ToString[Length[uvnitr]]
"Počet  bodů vně: " <> ToString[Length[mimo]]
"Kontrola " <> ToString[kolik] <> " = " <>
 ToString[Length[uvnitr] + Length[mimo]]
```



Plocha podle metody Monte - Carlo : 0.830323

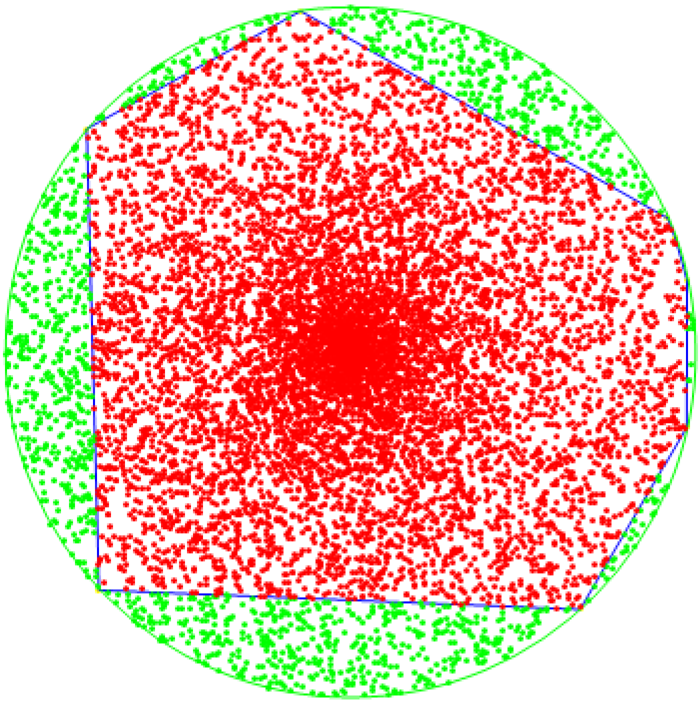
Plocha podle vzorce : 0.85614

Počet bodů uvnitř : 2643

Počet bodů vně: 7357

Podobně bychom mohli zjisti obsah například osmiúhelníku:

```
pocet = 8;
kolik = 10000;
vrcholy = Sort[Table[{RandomReal[{0, 2 π}], 1}, {i, pocet}]];
vrch = Table[{Cos[vrcholy[[i, 1]]], Sin[vrcholy[[i, 1]]]}, {i, Length[vrcholy]}];
ch = ConvexHullMesh[vrch];
i = 0;
uvnitr = {};
mimo = {};
While[i < kolik,
 r = RandomReal[];
 uhel = RandomReal[{0, 2 π}];
 bod = {r Cos[uhel], r Sin[uhel]};
 If[RegionNearest[ch, bod] == bod, uvnitr = Append[uvnitr, bod],
  mimo = Append[mimo, bod]];
 i++]
Graphics[{Yellow, Point[vrch], Blue, Line[vrch], Line[{Last[vrch], First[vrch]}],
  Green, Circle[], Black, Point[bod], Green, Point[mimo], Red, Point[uvnitr]}]
"Plocha podle metody Monte - Carlo : " <> ToString[N[π * Length[uvnitr] / kolik]]
"Plocha podle vzorce : " <> ToString[N[RegionMeasure[ch, 2]]]
"Počet bodů uvnitř : " <> ToString[Length[uvnitr]]
"Počet  bodů vně: " <> ToString[Length[mimo]]
"Kontrola " <> ToString[kolik] <> " = " <>
 ToString[Length[uvnitr] + Length[mimo]]
```



```
Plocha podle metody Monte - Carlo : 2.72062

Plocha podle vzorce : 2.40447

Počet bodů uvnitř : 8660

Počet  bodů vně: 1340

Kontrola 10000 = 10000
```

Oba experimenty je možno také provádět pomocí programu excel a jeho generátoru náhodných čísel - funkce náhčíslo() nebo pomocí modifikovaných hodů kostkami.