

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Matematické modelování turbulentního
proudění**

Plzeň 2012

Helena Mlynaříková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny zdroje a literaturu, ze kterých jsem čerpala.

Plzeň, 13. června 2012

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu své diplomové práce Doc. Ing. Janu Vimmrovi, Ph.D. za mnoho užitečných rad, psychickou podporu, důvěru a čas, který mi věnoval během psaní této práce. Děkuji také Ing. Aleně Jonášové za poskytnuté konzultace.

Velké poděkování patří všem mým blízkým za materiální a morální podporu, která mi umožnila studium na Fakultě aplikovaných věd.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá základy matematického modelování turbulentního proudění. Je uvažován model stlačitelné vazké tekutiny popsáný systémem Navierových-Stokesových rovnic, z něhož je odvozen systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra. Ten se uzavírá modely turbulence, nejpoužívanější z nich jsou popsány v této práci. Pro numerické řešení středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic na strukturované čtyřúhelníkové síti je použita metoda konečných objemů, nevazké numerické toky na stěnách kontrolních objemů jsou aproximovány AUSM schématem. Za účelem zvýšení jeho řádu přesnosti v prostorové proměnné je použita lineární rekonstrukce s *minmod* limiterem. Vazké numerické toky stěnami kontrolních objemů jsou aproximovány centrálně s pomocí duálních buněk. V práci je také detailně popsán způsob aproximace rovnic modelu turbulence $k-\epsilon$. Na zvolené testovací úloze proudění v dvourozměrném úzkém kanálu jsou provedeny numerické simulace turbulentního proudění s pomocí algebraického modelu turbulence Baldwina a Lomaxe a dvourovnicového modelu turbulence $k-\epsilon$.

Klíčová slova: středování podle Favra, systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic, algebraický model turbulence Baldwina a Lomaxe, dvourovnicový model turbulence $k-\epsilon$, metoda konečných objemů, AUSM schéma, lineární rekonstrukce, duální buňka, čtyřstupňová Rungeova-Kuttova metoda

Abstract

This work deals with basics of mathematical modelling of turbulent flows. We consider model of compressible viscous fluid described by the system of Navier-Stokes equations, from which the system of Favre averaged Navier-Stokes equations is derived. The system is closed by turbulence model, some of the most important of them are described in this work. The nonlinear system of averaged Navier-Stokes equations is solved by the finite volume method on a structured grid, inviscid numerical fluxes on the interface of control volumes are computed using AUSM scheme. Linear reconstruction with *minmod* limiter was implemented in order to improve its accuracy in space. Viscid numerical fluxes on the interface of control volumes are approximated using dual cells. Approximation of the equations of turbulence model $k-\epsilon$ is also described in detail. Numerical simulations of turbulent flow through a narrow channel using Baldwin-Lomax algebraic turbulence model and $k-\epsilon$ two-equation turbulence model were performed.

Keywords: Favre averaging, system of averaged Navier-Stokes equations, algebraic Baldwin-Lomax turbulence model, two-equation $k-\epsilon$ turbulence model, finite volume method, AUSM scheme, linear reconstruction, dual cell, four-step Runge-Kutta scheme

Obsah

Úvod	7
1 Matematické modelování turbulentního proudění	9
1.1 Středování systému Navierových-Stokesových rovnic	10
1.1.1 Středování podle Reynoldse	10
1.1.2 Středování podle Favra	12
1.2 Uzavření systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic	16
2 Modely turbulence	18
2.1 Algebraické modely turbulence	18
2.1.1 Model Cebeciho a Smithe	20
2.1.2 Model Baldwina a Lomaxe	21
2.2 Jednorovnicové modely turbulence	22
2.2.1 Model Baldwina a Barthe	22
2.2.2 Model Spalarta a Allmarase	23
2.3 Dvourovnicové modely turbulence	23
2.3.1 Model $k-\epsilon$	26
2.3.2 Model $k-\omega$	28
2.3.3 Kombinovaný model $k-\epsilon/k-\omega$	28
3 Numerické řešení turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny	32
3.1 Matematický model	32
3.2 Metoda konečných objemů	34
3.3 Metoda časové integrace	36
3.4 Aproximace nevazkého numerického toku	37
3.4.1 AUSM schéma	37
3.4.2 Lineární rekonstrukce	39
3.5 Aproximace vazkého numerického toku	40
3.6 Aproximace rovnic modelu turbulence $k-\epsilon$	42
4 Modelování turbulentního proudění v úzkém kanálu	50
4.1 Formulace úlohy	50
4.2 Okrajové podmínky	51
4.3 Implementace modelu turbulence Baldwina a Lomaxe	53
4.4 Implementace modelu turbulence $k-\epsilon$	53
4.5 Numerické výsledky	56

<i>OBSAH</i>	6
Závěr	66
Literatura	67

Úvod

Naprostá většina proudění v technických zařízeních i v přírodě je turbulentní. Přestože se lze v některých případech bez velké chyby omezit na proudění laminární, z hlediska praktického použití je nutné proudění tekutin brát jako turbulentní, umět ho modelovat a využívat tak pro výpočty v technické praxi.

Tato diplomová práce se věnuje základům matematického modelování turbulentního proudění tekutin. Cílem je odvodit systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic, přehledně popsat vybrané modely turbulence, implementovat je do vlastního programu pro numerické řešení turbulentního proudění a provést numerické simulace na zvolené testovací úloze.

Práce je rozdělena do čtyřech kapitol. V první kapitole je uveden nelineární systém Navierových-Stokesových rovnic jako matematický model proudění tekutin, je popsáno středování podle Reynoldse a podle Favra a pomocí něj odvozen systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra, používaný pro modelování turbulentního proudění. V závěru první kapitoly je popsán způsob uzavření systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic.

Druhá kapitola je věnována rešerši modelů turbulence, které se používají pro výpočet turbulentní vazkosti a tedy uzavření systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic. Jsou uvedeny nejčastěji využívané modely turbulence, ze skupiny algebraických model Cebeciho a Smithe a model Baldwina a Lomaxe, jako zástupci jednorovnicových pak model Baldwina a Barthe a model Spalarta a Allmarase. V odstavci týkajícím se nejsložitějších a nejlépe využitelných dvourovnicových modelů turbulence je odvozena transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii a popsány modely $k-\epsilon$, $k-\omega$ a kombinovaný model $k-\epsilon/k-\omega$, včetně některých úprav.

Třetí kapitola uvádí metody použité pro numerickou simulaci turbulentního proudění ve 2D. Vychází ze systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra, popisuje metodu konečných objemů pro prostorovou diskretizaci systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic a metodu jeho časové integrace. Dále je popsáno AUSM schéma založené na metodě štěpení toku, pomocí něhož je aproximován nevazký numerický tok hranicí kontrolního objemu, a také metoda lineární rekonstrukce určená pro zvýšení řádu přesnosti tohoto schématu v prostorové proměnné. V závěru třetí kapitoly je uvedena aproximace vazkého numerického toku hranicí kontrolního objemu pomocí duálních buněk a nakonec detailně popsán způsob aproximace dvourovnicového modelu turbulence $k-\epsilon$.

Čtvrtá kapitola je věnována aplikaci dvou vybraných modelů turbulence na testovací úloze turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny v úzkém dvourozměrném kanálu. Je zmíněno stanovení okrajových podmínek zvolené úlohy a popsány některé detaily implementace vybraných modelů turbulence v rámci vlastního programu pro numerické řešení turbulentního proudění. Ve druhé části čtvrté kapitoly jsou uvedeny dosažené výsledky pro

oba modely turbulence, jejich porovnání s výsledky dostupnými v literatuře a navzájem. Vytvořené programy pro numerickou simulaci turbulentního proudění jsou napsány v systému *Matlab*, klíčové části pro urychlení výpočtu v jazyce C++.

Kapitola 1

Matematické modelování turbulentního proudění

Proudění stlačitelné vazké newtonské tekutiny popisujeme nelineárním systémem Navierových-Stokesových rovnic. Ten je tvořen rovnicemi odvozenými ze zákonů zachování hmotnosti, hybnosti a celkové energie. Konzervativní systém Navierových-Stokesových rovnic v diferenciálním tvaru, popisující proudění v oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, je při zanedbání objemových sil působících na tekutinu vyjádřen vztahy, [18],

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j + p \delta_{ij})}{\partial y_j} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e v_j + p v_j)}{\partial y_j} = \frac{\partial(t_{ij} v_i - q_j)}{\partial y_j}, \quad (1.3)$$

kde y_i , $i = 1, 2, 3$, jsou kartézské složky vektoru prostorových souřadnic, v_i , $i = 1, 2, 3$, jsou kartézské složky vektoru rychlosti, ρ je hustota tekutiny, $t \in (0, \infty)$ je čas, p je tlak a δ_{ij} je Kroneckerovo delta. Pro celkovou měrnou energii e systému platí $e = \epsilon + \frac{1}{2} v_i v_i$, kde ϵ je měrná vnitřní energie. Pro j -tou složku tepelného toku q_j platí podle Fourierova zákona $q_j = -k \frac{\partial T}{\partial y_j}$, kde T je termodynamická teplota a k součinitel tepelné vodivosti tekutiny. Tenzor vazkých napětí t_{ij} je pro newtonskou tekutinu za předpokladu platnosti Stokesova vztahu dán $t_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \delta_{ij}$, kde μ je součinitel dynamické vazkosti tekutiny.

Stlačitelná tekutina představuje termodynamický systém. Soustava rovnic (1.1) - (1.3), která ho popisuje, obsahuje více proměnných než rovnic, proto je potřeba ji doplnit stavovou rovnicí $p = p(\rho, T)$. V této práci uvažujeme ideální plyn, pro který platí stavová rovnice ve tvaru

$$p = \rho r T, \quad (1.4)$$

kde r je měrná plynová konstanta.

Uvedený systém rovnic vychází z fyzikálních zákonů zachování, popisuje proto jak laminární tak i turbulentní proudění vazké stlačitelné tekutiny.

1.1 Středování systému Navierových-Stokesových rovnic

Pokud bychom chtěli numericky řešit přímo systém Navierových-Stokesových rovnic (1.1) - (1.3) doplněný stavovou rovnicí (1.4) v případě turbulentního proudění, museli bychom volit velmi malý časový krok a velmi jemnou výpočetní síť, abychom zachytili i ty nejmenší změny veličin proudového pole, které jsou právě pro turbulentní proudění charakteristické. Tato takzvaná přímá numerická simulace (DNS - Direct Numerical Simulation) je proto velice časově náročná a současná výpočetní technika zatím neumožňuje její běžné využití pro technické aplikace ve 3D. Přímou numerickou simulací se ale zabývají mnozí autoři, například [10], [15], a její výsledky mají velký význam při rozboru struktury turbulentního proudění, protože simulace umožňuje určit i parametry turbulentního proudění, které nelze získat z experimentů. Pro usnadnění řešení systému Navierových-Stokesových rovnic v případě turbulentního proudění je však možné rozložit okamžité hodnoty veličin proudového pole na časovou střední hodnotu a fluktuaci, rovnice středovat v čase a pak je řešit pro střední hodnoty. To vede na metodu využívající soustavu časově středovaných Navierových-Stokesových rovnic (RANS - Reynolds Averaged Navier-Stokes equations nebo FANS - Favre Averaged Navier-Stokes equations). Jistým kompromisem mezi přímou numerickou simulací a metodami založenými na středování systému Navierových-Stokesových rovnic je simulace pohybu velkých vírů (LES - Large Eddy Simulation), například [3], [5]. Tato práce se věnuje modelování turbulentního proudění pomocí systému časově středovaných Navierových-Stokesových rovnic. Používají se dva typy středování, a to středování podle Reynoldse a středování podle Favra.

1.1.1 Středování podle Reynoldse

Uvažujme veličinu proudového pole $f = f(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T \in \Omega$. Při středování podle Reynoldse, [14], rozložíme její okamžitou hodnotu na časovou střední hodnotu \bar{f} a fluktuaci f'

$$f(\mathbf{y}, t) = \bar{f}(\mathbf{y}, t) + f'(\mathbf{y}, t),$$

kde střední hodnota $\bar{f}(\mathbf{y}, t)$ na časovém intervalu Δt je definována vztahem

$$\bar{f}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(\mathbf{y}, t) dt. \quad (1.5)$$

Časový interval Δt musí být podstatně větší než perioda změny fluktuací ΔT_1 a zároveň menší než perioda změny střední hodnoty ΔT_2 , tedy $\Delta T_1 \ll \Delta t \ll \Delta T_2$.

Uvažujme nyní dvě veličiny proudového pole $f(\mathbf{y}, t)$ a $g(\mathbf{y}, t)$. Pokud nebude uvedeno jinak, předpokládáme v následujících vztazích závislost okamžitých hodnot, středních hodnot i fluktuací uvedených veličin na poloze a času. Okamžité hodnoty rozložíme podle Reynoldse

$$\begin{aligned} f &= \bar{f} + f', \\ g &= \bar{g} + g'. \end{aligned}$$

Potom můžeme pomocí definičního vztahu pro střední hodnotu (1.5) odvodit následující pravidla pro počítání

$$\overline{af \pm bg} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (af \pm bg) dt = a \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt \pm b \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g dt = a \bar{f} \pm b \bar{g}, \quad (1.6)$$

$$\bar{\bar{f}} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{f} dt = \bar{f} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt = \bar{f} \frac{1}{\Delta t} (t + \Delta t - t) = \bar{f}, \quad (1.7)$$

$$\bar{f'} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (f - \bar{f}) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt - \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{f} dt = \bar{f} - \bar{f} = 0, \quad (1.8)$$

$$\bar{\bar{f}\bar{g}} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{f}\bar{g} dt = \bar{f}\bar{g} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt = \bar{f}\bar{g} \frac{1}{\Delta t} (t + \Delta t - t) = \bar{f}\bar{g}, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}g'} &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{f}(g - \bar{g}) dt = \bar{f} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g dt - \bar{f}\bar{g} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt = \\ &= \bar{f}\bar{g} - \bar{f}\bar{g} = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\bar{\bar{f}g} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \bar{f}g dt = \bar{f} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g dt = \bar{f}\bar{g}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y_j} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial f}{\partial y_j} dt = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt \right] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y_j}, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{f} + f') dt = \\ &= \frac{1}{\Delta t} [\bar{f}(\mathbf{y}, t + \Delta t) + f'(\mathbf{y}, t + \Delta t) - \bar{f}(\mathbf{y}, t) - f'(\mathbf{y}, t)] = \\ &= \frac{\bar{f}(\mathbf{y}, t + \Delta t) - \bar{f}(\mathbf{y}, t)}{\Delta t} + \frac{f'(\mathbf{y}, t + \Delta t) - f'(\mathbf{y}, t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{f}(\mathbf{y}, t + \Delta t) - \bar{f}(\mathbf{y}, t)}{\Delta t} + \underbrace{\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{f'(\mathbf{y}, t + \Delta t) - f'(\mathbf{y}, t)}{\Delta t}}_{\rightarrow 0} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

kde konstanty $a, b \in \mathbb{R}$. Při odvození bylo využito skutečnosti, že pro $\Delta t \ll \Delta T_2$ jsou střední hodnoty \bar{f} a \bar{g} v časovém intervalu Δt konstantní. Při úpravě prvního zlomku ve vztahu (1.13) obsahujícího rozdíl středních hodnot přejdeme k uvedené limitě, protože pro $\Delta t \ll \Delta T_2$ můžeme uvažovat $\Delta t \rightarrow 0$. Podobně pro druhý zlomek obsahující rozdíl fluktuací lze vzhledem k $\Delta t \gg \Delta T_1$ uvažovat $\Delta t \rightarrow \infty$. S využitím uvedených pravidel můžeme psát

$$\bar{f\bar{g}} = \overline{(\bar{f} + f')(\bar{g} + g')} = \bar{f}\bar{g} + \bar{f}g' + \bar{f}'\bar{g} + \bar{f}'g' = \bar{f}\bar{g} + \bar{f}'g', \quad (1.14)$$

$$\bar{f'g'} = \overline{(\bar{f} + f')g'} = \bar{f}g' + \bar{f}'g' = \bar{f}'g' \neq 0. \quad (1.15)$$

Pomocí středování podle Reynoldse upravíme rovnici zachování hmotnosti (1.1). Nejdříve rozepíšeme okamžité hodnoty veličin na střední hodnoty a fluktuace, tedy $\rho = \bar{\rho} + \rho'$, $v_j =$

$\bar{v}_j + v'_j$, a upravíme

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial y_j}[(\bar{\rho} + \rho')(\bar{v}_j + v'_j)] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\bar{v}_j + \bar{\rho}v'_j + \rho'\bar{v}_j + \rho'v'_j) &= 0.\end{aligned}$$

Středováním celé rovnice podle Reynoldse a využitím pravidel (1.6) - (1.13) dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\bar{v}_j + \bar{\rho}v'_j + \rho'\bar{v}_j + \rho'v'_j) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \rho') + \frac{\partial}{\partial y_j}(\overline{\bar{\rho}\bar{v}_j + \bar{\rho}v'_j + \rho'\bar{v}_j + \rho'v'_j}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \bar{\rho}') + \frac{\partial}{\partial y_j}(\overline{\bar{\rho}\bar{v}_j} + \overline{\bar{\rho}v'_j} + \overline{\rho'\bar{v}_j} + \overline{\rho'v'_j}) &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\bar{v}_j + \overline{\rho'v'_j}) &= 0.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Podobně je možné odvodit i středované rovnice zachování hybnosti a celkové energie ze vztahů (1.2) a (1.3). Jejich připojením k rovnici (1.16) dostaneme systém středovaných Reynoldsových Navierových-Stokesových rovnic (RANS) pro stlačitelné proudění. Tyto rovnice obsahují výrazy tvořené střednými hodnotami, které mají formálně stejný tvar jako odpovídající výrazy v původních nestředovaných pohybových rovnicích, ale také výrazy s korelacemi fluktuací (výrazy typu $\overline{v'_i v'_j}$, $\overline{\rho' v'_j}$), které vyjadřují vliv turbulence na proudění. Řešení tohoto systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Reynoldse nejvíce komplikují výrazy s fluktuacemi hustoty, jako například člen $\overline{\rho' v'_j}$ vystupující v rovnici (1.16), který nemá analogii v laminárním popisu a je obtížné ho vhodně aproximovat.

Středování podle Reynoldse tedy není úplně vhodné pro stlačitelné proudění, je ale možné dobře ho využít pro případ turbulentního proudění nestlačitelné kapaliny, [16], kdy se ve středovaných Navierových-Stokesových rovnicích členy s fluktuacemi hustoty nevyskytují.

1.1.2 Středování podle Favra

Použijeme-li pro úpravu systému Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelné turbulentní proudění hmotnostně podmíněné středování podle Favra, [4], místo konvenčního středování podle Reynoldse, problematické výrazy s fluktuacemi hustoty se ve středovaných rovnicích neobjeví.

Okamžitou hodnotu veličiny $f = f(\mathbf{y}, t)$ proudového pole rozložíme na střední hodnotu \tilde{f} vztáženou na jednotku hmotnosti definovanou vztahem

$$\tilde{f}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{\bar{\rho}(\mathbf{y}, t)} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \rho(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t) dt = \frac{\overline{\rho(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)}}{\bar{\rho}(\mathbf{y}, t)}\tag{1.17}$$

a na fluktuaci f'' , tedy

$$f(\mathbf{y}, t) = \tilde{f}(\mathbf{y}, t) + f''(\mathbf{y}, t),$$

$\bar{\rho}$ je střední hodnota hustoty odpovídající Reynoldsovu středování.

Opět budeme předpokládat v následujících vztazích závislost okamžitých hodnot, středních hodnot i fluktuací uvedených veličin na poloze a času. Definiční vztah (1.17) lze přepsat jako

$$\bar{\rho}\tilde{f} = \overline{\rho f} \quad (1.18)$$

a využitím (1.14) dostaneme

$$\bar{\rho}\tilde{f} = \bar{\rho}\bar{f} + \overline{\rho'f'}. \quad (1.19)$$

Pro středování podle Favra platí $\overline{\rho f''} = 0$, což lze jednoduše ukázat s využitím vztahu (1.18), tedy

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} + f'', \\ \rho f &= \rho\tilde{f} + \rho f'', \\ \overline{\rho f} &= \overline{\rho\tilde{f} + \rho f''} = \overline{\rho\tilde{f}} + \overline{\rho f''} = \bar{\rho}\tilde{f} + \overline{\rho f''}, \\ \overline{\rho f''} &= \overline{\rho f} - \bar{\rho}\tilde{f} = 0. \end{aligned}$$

Dále platí $\overline{f''} \neq 0$, protože s využitím vztahů (1.19) a (1.15) můžeme psát

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} + f'', \\ f'' &= f - \tilde{f} = f - \left(\bar{f} + \frac{\overline{\rho'f'}}{\bar{\rho}} \right), \\ \overline{f''} &= \bar{f} - \bar{\tilde{f}} - \overline{\left(\frac{\rho'f'}{\bar{\rho}} \right)}, \\ \overline{f''} &= -\frac{\overline{\rho'f'}}{\bar{\rho}} \neq 0. \end{aligned}$$

Hlavní rozdíl mezi konvenčním středováním podle Reynoldse a hmotnostně podmíněným středováním podle Favra je tedy v následujících vztazích

$$\begin{aligned} \text{Reynolds : } & \overline{f'} = 0, \quad \overline{\rho'f'} \neq 0, \\ \text{Favre : } & \overline{f''} \neq 0, \quad \overline{\rho f''} = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Hmotnostně podmíněné středování využijeme nyní pro středování konzervativního systému Navierových-Stokesových rovnic pro stlačitelné turbulentní proudění (1.1) - (1.3). Středovanou rovnici zachování hmotnosti získáme ihned dosazením vztahu (1.19) do rovnice kontinuity pro stlačitelné proudění středované podle Reynoldse (1.16), tedy

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0. \quad (1.21)$$

Pro odvození středovaných rovnic zachování hybnosti a celkové energie rozložíme okamžité hodnoty složek rychlosti, celkové energie, termodynamické teploty a tenzoru vazkých napětí podle Favra a okamžité hodnoty tlaku a hustoty podle Reynoldse, tedy

$$\begin{aligned} v_j &= \tilde{v}_j + v_j'', \\ e &= \tilde{e} + e'', \\ T &= \tilde{T} + T'', \\ t_{ij} &= \tilde{t}_{ij} + t_{ij}'', \\ p &= \bar{p} + p', \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho'. \end{aligned}$$

Středovanou rovnici zachování hybnosti potom získáme úpravou (1.2) následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\overline{\rho v_i})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho v_i v_j + p \delta_{ij}})}{\partial y_j} &= \frac{\partial \overline{t_{ij}}}{\partial y_j}, \\
\frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho(\tilde{v}_i + v_i'')}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [\overline{\rho(\tilde{v}_i + v_i'')(\tilde{v}_j + v_j'') + p \delta_{ij}}] &= \frac{\partial}{\partial y_j} (\overline{t_{ij} + t_{ij}''}), \\
\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{v}_i} + \overline{\rho v_i''}) + \frac{\partial}{\partial y_j} (\overline{\rho \tilde{v}_i \tilde{v}_j} + \overline{\rho \tilde{v}_i v_j''} + \overline{\rho v_i'' \tilde{v}_j} + \overline{\rho v_i'' v_j''} + \overline{p \delta_{ij}}) &= \frac{\partial}{\partial y_j} (\tilde{t}_{ij} + \overline{t_{ij}''}), \\
\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{v}_i}) + \frac{\partial}{\partial y_j} (\overline{\rho \tilde{v}_i \tilde{v}_j} + \overline{p \delta_{ij}}) &= \frac{\partial}{\partial y_j} (\tilde{t}_{ij} + \overline{t_{ij}''} - \overline{\rho v_i'' v_j''}).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Stejným způsobem odvodíme i středovanou rovnici zachování celkové energie z výchozí rovnice (1.3), tedy

$$\frac{\partial(\overline{\rho e})}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho e v_j + p v_j})}{\partial y_j} = \frac{\partial(\overline{t_{ij} v_i - q_j})}{\partial y_j}. \tag{1.23}$$

Upravíme postupně jednotlivé členy této rovnice.

$$\begin{aligned}
\overline{\rho e} &= \overline{\rho(\tilde{e} + e'')} = \overline{\rho \tilde{e}} + \overline{\rho e''} = \overline{\rho \tilde{e}}, \\
\overline{\rho e v_j} + \overline{p v_j} &= \overline{\rho(\tilde{e} + e'')(\tilde{v}_j + v_j'')} + \overline{p(\tilde{v}_j + v_j'')} = \overline{\rho \tilde{e} \tilde{v}_j} + \overline{\rho \tilde{e} v_j''} + \overline{\rho e'' \tilde{v}_j} + \overline{\rho e'' v_j''} + \overline{p \tilde{v}_j} + \overline{p v_j''} = \\
&= \overline{\rho \tilde{e} \tilde{v}_j} + \overline{p \tilde{v}_j} + \overline{\rho e'' v_j''} + \overline{p v_j''},
\end{aligned}$$

kde pro úpravu posledního sčítance využijeme stavové rovnice $p = \rho r T$ a vztahu pro celkovou energii $e = \epsilon + \frac{1}{2} v_i v_i$, tedy

$$p = \rho r T = \rho(c_p - c_v)T = \rho c_p T - \rho c_v T = \rho c_p T - \rho \epsilon = \rho c_p T - \rho e + \frac{1}{2} \rho v_i v_i,$$

kde c_p (c_v) je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku (objemu). Dostaneme

$$\begin{aligned}
\overline{\rho e v_j} + \overline{p v_j} &= \overline{\rho \tilde{e} \tilde{v}_j} + \overline{p \tilde{v}_j} + \overline{\rho e'' v_j''} + \overline{\rho c_p T v_j''} - \overline{\rho e v_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho v_i v_i v_j''} = \\
&= \overline{\rho \tilde{e} \tilde{v}_j} + \overline{p \tilde{v}_j} + \overline{\rho e'' v_j''} + \overline{\rho c_p T v_j''} - \overline{\rho(\tilde{e} + e'') v_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho(\tilde{v}_i + v_i'')(\tilde{v}_i + v_i'') v_j''} = \\
&= \overline{\rho \tilde{e} \tilde{v}_j} + \overline{p \tilde{v}_j} + \overline{\rho e'' v_j''} + \overline{\rho c_p T v_j''} - \overline{\rho \tilde{e} v_j''} - \overline{\rho e'' v_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho \tilde{v}_i \tilde{v}_i v_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho \tilde{v}_i v_i'' v_j''} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' \tilde{v}_i v_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''} = \\
&= \overline{\rho \tilde{e} \tilde{v}_j} + \overline{p \tilde{v}_j} + \overline{\rho c_p T v_j''} + \overline{\tilde{v}_i \rho v_i'' v_j''} + \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}.
\end{aligned}$$

Dále upravíme první člen na pravé straně rovnice (1.23)

$$\overline{t_{ij} v_i} = \overline{t_{ij}(\tilde{v}_i + v_i'')} = \overline{t_{ij} \tilde{v}_i} + \overline{t_{ij} v_i''} = \overline{(\tilde{t}_{ij} + t_{ij}'') \tilde{v}_i} + \overline{t_{ij} v_i''} = \tilde{t}_{ij} \tilde{v}_i + \overline{t_{ij}'' \tilde{v}_i} + \overline{t_{ij} v_i''}.$$

Pro úpravu středovaného tepelného toku \bar{q}_j využijeme bezrozměrné Prandtlovo číslo $Pr = \frac{c_p \mu}{k}$ a dostaneme

$$\bar{q}_j = -k \frac{\partial \overline{T}}{\partial y_j} = -\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y_j} (\overline{\tilde{T} + T''}) = -\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} - \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial \overline{T''}}{\partial y_j}.$$

Středovanou rovnici zachování celkové energie (1.23) získáváme po uvedených úpravách ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_j + \bar{p}\tilde{v}_j + c_p\overline{\rho T v_j''} + \tilde{v}_i\overline{\rho v_i'' v_j''} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}) = \\ = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{t}_{ij}\tilde{v}_i + \overline{t_{ij}''}\tilde{v}_i + \overline{t_{ij} v_i''} + \frac{c_p\mu}{Pr} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial y_j} + \frac{c_p\mu}{Pr} \frac{\partial\overline{T''}}{\partial y_j}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Fluktuace měrné tepelné kapacity c_p a součinitele dynamické vazkosti μ neuvažujeme. Dále zanedbáme v rovnicích (1.22) a (1.24) členy obsahující $\overline{t_{ij}''}$ a $\overline{T''}$ a dostaneme tak konzervativní systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra (FANS) pro stlačitelné turbulentní proudění ve tvaru

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j + \bar{p}\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{t}_{ij} - \overline{\rho v_i'' v_j''}), \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_j + \bar{p}\tilde{v}_j) = \quad (1.27)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{t}_{ij}\tilde{v}_i - \tilde{v}_i\overline{\rho v_i'' v_j''} + \frac{c_p\mu}{Pr} \frac{\partial\tilde{T}}{\partial y_j} - c_p\overline{\rho T v_j''} + \overline{t_{ij} v_i''} - \frac{1}{2}\overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}).$$

Tento systém rovnic doplníme středovanou stavovou rovnicí pro ideální plyn

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \overline{\rho r T}, \\ \bar{p} &= r\rho(\tilde{T} + \overline{T''}), \\ \bar{p} &= r\rho\tilde{T} + r\rho\overline{T''}, \\ \bar{p} &= r\rho\tilde{T}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Pro středovanou celkovou měrnou energii \tilde{e} platí

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\rho}e} &= \overline{\rho e} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i v_i}, \\ \overline{\rho(\tilde{e} + e'')} &= \overline{\rho\tilde{e} + \rho e''} + \frac{1}{2}\overline{\rho(\tilde{v}_i + v_i'')(\tilde{v}_i + v_i'')}, \\ \overline{\bar{\rho}e} + \overline{\rho e''} &= \overline{\rho\tilde{e}} + \overline{\rho e''} + \frac{1}{2}\overline{\rho\tilde{v}_i\tilde{v}_i} + \overline{\rho\tilde{v}_i v_i''} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i'' v_i''}, \\ \bar{\rho}\tilde{e} &= \overline{\rho\tilde{e}} + \frac{1}{2}\overline{\rho\tilde{v}_i\tilde{v}_i} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i'' v_i''}. \end{aligned}$$

Definujeme-li turbulentní kinetickou energii vztahem

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho v_i'' v_i''}}{\bar{\rho}}, \quad (1.29)$$

můžeme psát

$$\bar{\rho}\tilde{e} = \bar{\rho}(\tilde{e} + \frac{1}{2}\tilde{v}_i\tilde{v}_i + k). \quad (1.30)$$

1.2 Uzavření systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic

Abychom uzavřeli uvedený systém Navierových-Stokesových rovnic středovaných podle Favra, popisující turbulentní proudění, je potřeba vhodně aproximovat neznámé členy, které se v něm vyskytují.

Porovnáním s výchozími rovnicemi pro okamžité hodnoty veličin proudového pole (1.1) - (1.3) vidíme, že kromě nahrazení okamžitých hodnot středními obsahuje středovaná rovnice zachování hybnosti (1.26) navíc člen $-\overline{\rho v_i'' v_j''}$. Ten vyjadřuje vliv turbulentních fluktuací na přenos hybnosti v tekutině a nazývá se tenzor Reynoldsových turbulentních napětí nebo také tenzor turbulentních smykových napětí, zkráceně Reynoldsovo napětí, [8], [13]. Značí se

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho v_i'' v_j''}.$$

Ve středované rovnici zachování celkové energie (1.27) se navíc vyskytuje opět člen obsahující tenzor Reynoldsových napětí τ_{ij} a dále pak členy $-c_p \overline{\rho T v_j''}$, $\overline{t_{ij} v_i''}$ a $-\frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}$. Výraz $c_p \overline{\rho T v_j''}$ představuje turbulentní přenos tepla a aproximuje se analogicky k molekulárnímu přenosu tepla výrazem, [16],

$$c_p \overline{\rho T v_j''} = -\frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j},$$

kde Pr_t je turbulentní Prandtlovo číslo definované jako $Pr_t = \frac{c_p \mu_t}{k_t}$, kde μ_t je turbulentní dynamická vazkost a k_t je součinitel turbulentní tepelné vodivosti tekutiny. Pro mezní vrstvu se obvykle používá hodnota turbulentního Prandtlova čísla $Pr_t = 0,9$. Výraz $\overline{t_{ij} v_i''} - \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}$ se často zanedbává, lze ale pro něj použít například aproximaci, [16],

$$\overline{t_{ij} v_i''} - \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j},$$

kde k je turbulentní kinetická energie a σ_k je konstanta.

Dosadíme uvedené aproximace do systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra (1.25) - (1.27) a upravíme členy obsahující střední hodnotu teploty pomocí středované stavové rovnice (1.28) a známého vztahu z termodynamiky $c_p = \frac{\kappa r}{\kappa - 1}$, kde κ je Poissonova adiabatická konstanta, pro vzduch $\kappa = 1,4$. Získáme tak systém rovnic ve tvaru

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \bar{p} \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y_j} (\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij}), \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j} (\bar{\rho} \tilde{e} \tilde{v}_j + \bar{p} \tilde{v}_j) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij}) \tilde{v}_i + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \right]. \quad (1.33)$$

Tenzor vazkých napětí určíme pomocí středovaných hodnot rychlostí vztahem

$$t_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij}$$

a analogicky k němu definujeme podle tzv. Bussinesqovy hypotézy, [13], [16], tenzor Reynoldsových turbulentních napětí τ_{ij} , tedy

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}, \quad (1.34)$$

kdy poslední člen na pravé straně se v některých případech zanedbává. Pomineme-li tento člen, zbývá pro uzavření systému středovaných rovnic (1.31) - (1.33) určit pouze turbulentní dynamickou vazkost μ_t . K tomu se využívají modely turbulence, o nichž pojednává následující kapitola.

Kapitola 2

Modely turbulence

Modely turbulence jsou částečně empirické rovnice určující vztahy mezi středními hodnotami veličin proudového pole a korelacemi jejich fluktuací a tedy uzavírající systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic. Obsahují velké množství konstant vyplývajících z experimentů a proto může být jejich využití často limitováno konkrétním typem úlohy, pro kterou byly navrženy a které odpovídají uvedené konstanty.

Modely turbulence dělíme na dvě základní skupiny. První tvoří modely založené na analogii mezi molekulárním a turbulentním přenosem hybnosti, takzvané Bussinesqově hypotéze, [16]. Podle ní se tenzor Reynoldsových turbulentních napětí τ_{ij} vyjádří analogicky k tenzoru vazkých napětí zavedením turbulentní vazkosti μ_t , jak již bylo uvedeno v odstavci 1.4. Problém uzavření systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic se tedy v podstatě převede na otázku určení turbulentní vazkosti μ_t . Pokud pro určení turbulentní vazkosti využíváme pouze algebraické vztahy, jedná se o algebraické nebo nularovnicové modely. Jednorovnicové modely jsou kromě algebraických vztahů tvořeny jednou parciální diferenciální rovnicí a dvourovnicové modely dvěma parciálními diferenciálními rovnicemi, z nichž jedna je zpravidla transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii. Obecně platí, že dvourovnicové modely umožňují přesněji modelovat turbulentní proudění a je možné je aplikovat i na složitější problémy zahrnující jevy jako rázové vlny nebo odtržení proudu. Jednodušší algebraické nebo jednorovnicové modely dávají dobré výsledky pouze v případě jednodušších typů proudění. Na první skupinu modelů, vycházející z Bussinesqovy hypotézy, je zaměřena tato práce.

Druhá skupina je tvořena modely turbulence založenými na řešení transportních rovnic přímo pro složky tenzoru Reynoldsových napětí. Jedná se o modely RSM (Reynolds Stress Models) a jejich zjednodušení ARSM (Algebraic Reynolds Stress Models), využívající algebraické vztahy pro složky tenzoru Reynoldsových napětí.

2.1 Algebraické modely turbulence

Algebraické nebo také nularovnicové modely turbulence určují závislost mezi korelacemi fluktuací a středními hodnotami veličin proudového pole pomocí algebraických vztahů. Na rozdíl od ostatních modelů neobsahují žádnou transportní rovnici a nezohledňují tudíž historii proudění. Jsou ale matematicky jednoduché a lze je poměrně snadno implementovat do programu pro numerický výpočet turbulentního proudění. Nejsou ovšem vhodné pro zachycení složitějších jevů typu rázových vln nebo odtržení proudu.

Algebraické modely turbulence využívají Prandtlovu hypotézu o směšovací délce (mixing length), [8], [13], [16]. Ta vychází z představy zjednodušeného modelu turbulentního proudění, v němž se shluky částic tekutiny pohybují jako celek. V následujícím textu budeme uvažovat dvourozměrné stlačitelné proudění okolo pevné stěny ve směru osy x v kartézském souřadnicovém systému, y bude vzdálenost od stěny v kolmém směru. Směšovací délka l_m pak vyjadřuje vzdálenost ve směru y , kterou shluky částic tekutiny urazí, než díky disipaci zaniknou. Podle Prandtlovy hypotézy je turbulentní vazkost dána vztahem

$$\mu_t = \bar{\rho} l_m^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}, \quad (2.1)$$

kde $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y}$ je gradient střední hodnoty rychlosti.

Prandtl dále předpokládal, že směšovací délka je úměrná vzdálenosti od stěny, tedy

$$l_m = \kappa y,$$

kde $\kappa \approx 0,41$ je Kármánova konstanta. To ale platí pouze ve střední části mezní vrstvy, v logaritmické oblasti. Pro oblast nejbližší u stěny, vazkou podvrstvou, zavedl Van Driest na základě experimentů tlumicí funkci a vztah pro směšovací délku tak upravil do podoby

$$l_m = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}}\right), \quad (2.2)$$

kde konstanta $A^+ = 26$. Bezrozměrná normálová vzdálenost od obtékané stěny y^+ je definovaná jako

$$y^+ = \frac{\tilde{u}_t y}{\nu}, \quad (2.3)$$

kde $\nu = \frac{\mu}{\bar{\rho}}$ je součinitel kinematické vazkosti a $\tilde{u}_t = \sqrt{\frac{\tilde{t}_w}{\bar{\rho}}}$ je takzvaná třecí rychlost, \tilde{t}_w značí smykové napětí na stěně. V uvedených vztazích samozřejmě vystupují středované hodnoty veličin.

Pro vnější oblast mezní vrstvy (defect layer) určil Clauser vztah pro turbulentní vazkost ve tvaru

$$\mu_t = \bar{\rho} \alpha \tilde{u}_e \delta^*, \quad (2.4)$$

kde konstanta $\alpha = 0,0168$, \tilde{u}_e je středovaná rychlost vnějšího proudu, tedy vně mezní vrstvy, a δ^* je kinematická pošinovací nebo také odtlačovací tloušťka (displacement thickness), definovaná pro stlačitelné proudění, [12],

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{\rho} \tilde{u}}{\bar{\rho}_e \tilde{u}_e}\right) dy,$$

kde $\bar{\rho}_e$ je středovaná hustota vnějšího proudu.

Přesnost algebraických modelů ve vnější části mezní vrstvy dále zlepšuje využití Klebanoffovy empirické funkce, [16],

$$F_{Kleb} = \left[1 + 5,5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^6\right]^{-1}, \quad (2.5)$$

kde δ je tloušťka mezní vrstvy. Touto funkcí se násobí turbulentní vazkost daná Clauserovým vztahem (2.4). Důvodem pro zavedení Klebanoffovy funkce je střídavý charakter proudění v oblasti, kde plně turbulentní proudění přechází v laminární.

Mezi nejvýznamnější algebraické modely turbulence patří model Cebeciho a Smithe a model Baldwina a Lomaxe. Oba využívají uvedenou Van Driestovu, Clauserovu a Klebanoffovu modifikaci výchozího Prandtlova vztahu (2.1).

2.1.1 Model Cebeciho a Smithe

Algebraický model Cebeciho a Smithe, [13], [16], určuje turbulentní vazkost odlišně ve dvou vrstvách, a to ve vnitřní vrstvě (μ_{t_i}), zahrnující vazkou podvrstvy a logaritmickou oblast mezní vrstvy, a ve vnější vrstvě (μ_{t_o}), tvořené vnější vrstvou mezní vrstvy a volným proudem. Označíme-li y_m nejmenší kolmou vzdálenost od obtékané stěny, kde $\mu_{t_i} = \mu_{t_o}$, bude turbulentní vazkost dána

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{t_i}, & y \leq y_m, \\ \mu_{t_o}, & y > y_m. \end{cases}$$

Hodnota turbulentní vazkosti μ_{t_i} ve vnitřní vrstvě je určena vztahem odpovídajícím Prandtlově hypotéze o směšovací délce (2.1), tedy

$$\mu_{t_i} = \bar{\rho} l_m^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right)^2},$$

kde směšovací délka je dána vztahem s Van Driestovou tlumicí funkcí (2.2)

$$l_m = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}}\right), \quad \kappa = 0,41, \quad A^+ = 26.$$

Koeficient A^+ může být pro větší přesnost modelu vypočítán pomocí tlakového gradientu podle vzorce

$$A^+ = 26 \left[1 + y \frac{d\bar{p}/dx}{\bar{\rho} \mu_t^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Hodnota turbulentní vazkosti μ_{t_o} ve vnější vrstvě vychází z Clauserova vztahu (2.4) a Klebanoffovy funkce (2.5), tedy

$$\mu_{t_o} = \bar{\rho} \alpha \tilde{u}_e \delta_v^* F_{Kleb},$$

kde $\alpha = 0,0168$. Na rozdíl od původního Clauserova vztahu je zde δ_v^* definováno pro stlačitelné i nestlačitelné proudění

$$\delta_v^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_e}\right) dy$$

a označováno jako velocity thickness. Pro nestlačitelné proudění platí $\delta^* = \delta_v^*$. Model Cebeciho a Smithe je poměrně jednoduchý, ale vyžaduje znalost tloušťky mezní vrstvy δ .

2.1.2 Model Baldwina a Lomaxe

Algebraický model turbulence Baldwina a Lomaxe, [1], je stejně jako model Cebeciho a Smithe formulován odlišně ve dvou vrstvách, tedy

$$\mu_t = \begin{cases} \mu_{t_i}, & y \leq y_m, \\ \mu_{t_o}, & y > y_m, \end{cases}$$

kde y_m je nejmenší hodnota y , pro kterou $\mu_{t_i} = \mu_{t_o}$. Turbulentní vazkost μ_{t_i} ve vnitřní vrstvě je určena na základě Prandtlovy hypotézy vztahem

$$\mu_{t_i} = \bar{\rho} l_m^2 |\omega|,$$

kde $|\omega|$ je velikost vektoru vířivosti ω , pro uvažované dvourozměrné proudění platí $\omega = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$. Směšovací délka je opět určena vztahem (2.2)

$$l_m = \kappa y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right), \quad \kappa = 0,41, \quad A^+ = 26.$$

Turbulentní vazkost ve vnější oblasti je dána složitějšími vztahy než v modelu Cebeciho a Smithe, ale nevyžaduje již znalost parametrů mezní vrstvy. Tedy

$$\begin{aligned} \mu_{t_o} &= \bar{\rho} \alpha C_{cp} F_{wake} F_{Kleb}, \quad \alpha = 0,0186, \quad C_{cp} = 1,6, \\ F_{wake} &= \min \left\{ y_{max} G_{max}, C_{wk} y_{max} \frac{(\Delta U)^2}{G_{max}} \right\}, \quad C_{wk} = 1, \\ G_{max} &= \frac{1}{\kappa} \max_y (l_m |\omega|), \end{aligned}$$

kde ΔU je pro případ obtékání stěny maximální hodnota rychlosti podle y , tedy

$$\Delta U = \left(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2} \right)_{max},$$

a y_{max} je hodnota y , pro kterou výraz $l_m |\omega|$ nabývá svého maxima. Tloušťka mezní vrstvy δ v Klebanoffově funkci (2.5) je nahrazena poměrem y_{max}/C_{Kleb} , kde konstanta $C_{Kleb} = 0,3$. Tedy

$$F_{Kleb} = \left[1 + 5,5 \left(\frac{C_{Kleb} y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}.$$

Možný způsob implementace modelu Baldwina a Lomaxe je podrobně popsán ve třetí kapitole.

Při aplikaci uvedených algebraických modelů na jednoduché úlohy, například proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami, je možné upustit od stanovení rozhraní vnitřní a vnější vrstvy y_m . Díky průběhu μ_{t_i} a μ_{t_o} podle y , [16], lze turbulentní vazkost stanovit jako

$$\mu_t = \min\{\mu_{t_i}, \mu_{t_o}\}.$$

U složitějších úloh by toto zjednodušení mohlo vést k chybě.

2.2 Jednorovnicové modely turbulence

Jednorovnicové modely turbulence jsou tvořeny jednou transportní rovnicí doplněnou algebraickými vztahy. Transportní rovnice je nejčastěji rovnicí pro turbulentní kinetickou energii k , definovanou vztahem (1.29), nebo je z ní odvozena. Obecně je pak turbulentní vazkost dána vztahem, [8],

$$\mu_t = \bar{\rho} \sqrt{kl},$$

kde turbulentní kinetická energie k je určena z transportní rovnice a délkové měřítko l se vypočítá pomocí zmíněných algebraických vztahů.

Jednorovnicové modely jsou díky transportní rovnici přesnější než modely nularovnicové, jejich nevýhodou jsou ale algebraické vztahy pro délkové měřítko l . Je možné je použít v kombinaci s dvourovnicovými modely, kdy v uvažovaném případě obtékání pevné stěny je jednorovnicový model aplikován pouze v úzké oblasti u stěny a dále pak navazuje model dvourovnicový.

Známými jednorovnicovými modely turbulence jsou model Baldwina a Barthe a model Spalarta a Allmarase.

2.2.1 Model Baldwina a Barthe

Jednorovnicový model Baldwina a Barthe, [2], je odvozen z dvourovnicového modelu k - ϵ , který bude uveden v následujících odstavcích. Rovnice modelu k - ϵ jsou zkombinovány tak, že vznikne jedna transportní rovnice pro turbulentní Reynoldsovo číslo $Re_t = \frac{k^2}{\nu\epsilon}$, kde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ je součinitel kinematické vazkosti a ϵ je rychlost disipace turbulentní energie. Pro lepší přesnost modelu v blízkosti obtékané stěny je turbulentní Reynoldsovo číslo rozděleno na dvě části $Re_t = \overline{Re}_t f(\overline{Re}_t)$, kde f je tlumicí funkce, zajišťující, že $Re_t \approx \overline{Re}_t$ pro velké hodnoty Re_t . Transportní rovnice pro turbulentní Reynoldsovo číslo má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial t}(\nu \overline{Re}_t) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\nu \tilde{v}_j \overline{Re}_t) &= \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial^2(\nu \overline{Re}_t)}{\partial y_k \partial y_k} - \frac{1}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \nu_t}{\partial y_k} \frac{\partial(\nu \overline{Re}_t)}{\partial y_k} + \\ &+ (C_{e2} f_2 - C_{e1}) \sqrt{\nu \overline{Re}_t} P, \end{aligned} \quad (2.6)$$

kde člen

$$P = \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \frac{2}{3} \nu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \right)^2$$

se nazývá produkce. Turbulentní kinematická vazkost je dána vztahem

$$\nu_t = C_\mu \nu \overline{Re}_t D_1 D_2, \quad (2.7)$$

kde D_1 a D_2 jsou tlumicí funkce zavedené opět kvůli oblasti v těsné blízkosti obtékané stěny a platí pro ně

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}}, \\ D_2 &= 1 - e^{-\frac{y^+}{A_2^+}}, \end{aligned}$$

kde $A^+ = 26$, $A_2^+ = 10$ a bezrozměrná normálová vzdálenost od stěny y^+ je definována vztahem (2.3). Další konstanty a funkce vyskytující se v rovnicích (2.6) a (2.7) jsou

$$C_{\epsilon 1} = 1, 2, \quad C_{\epsilon 2} = 2, 0, \quad C_{\mu} = 0, 09, \quad \frac{1}{\sigma_{\epsilon}} = (C_{\epsilon 2} - C_{\epsilon 1}) \frac{\sqrt{C_{\mu}}}{\kappa^2}, \quad \kappa = 0, 41,$$

$$f_2 = \frac{C_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 2}} + \left(1 - \frac{C_{\epsilon 1}}{C_{\epsilon 2}}\right) \left(\frac{1}{\kappa y^+} + D_1 D_2\right) \left[\sqrt{D_1 D_2} + \frac{y^+}{\sqrt{D_1 D_2}} \left(\frac{D_2}{A^+} e^{-\frac{y^+}{A^+}} + \frac{D_1}{A_2^+} e^{-\frac{y^+}{A_2^+}} \right) \right].$$

2.2.2 Model Spalarta a Allmarase

Jednorovnicový model turbulence Spalarta a Allmarase, [16], je tvořen transportní rovnicí pro proměnnou $\bar{\nu}$, která souvisí s turbulentní kinematickou vazkostí vztahem

$$\nu_t = \bar{\nu} f_{v1}. \quad (2.8)$$

Transportní rovnice je odvozena ve tvaru

$$\frac{\partial \bar{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j} (\tilde{v}_j \bar{\nu}) = C_{b1} \bar{S} \bar{\nu} - C_{w1} f_w \left(\frac{\bar{\nu}}{d}\right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y_k} \left[(\nu + \bar{\nu}) \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y_k} \right] + \frac{C_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \bar{\nu}}{\partial y_k}\right)^2. \quad (2.9)$$

Konstanty a funkce v rovnicích (2.8) a (2.9) jsou

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3},$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}},$$

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}},$$

$$\chi = \frac{\bar{\nu}}{\nu}, \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\bar{\nu}}{\bar{S} \kappa^2 d^2}, \quad \bar{S} = S = \frac{\bar{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2},$$

$$C_{b1} = 0, 1355, \quad C_{b2} = 0, 622, \quad C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma},$$

$$C_{w2} = 0, 3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{v1} = 7, 1, \quad \sigma = \frac{2}{3}, \quad \kappa = 0, 41,$$

d je vzdálenost od nejbližší stěny a S je velikost vektoru vířivosti, pro uvažované dvourozměrné proudění $S = \left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|$.

2.3 Dvourovnicové modely turbulence

Dvourovnicové modely jsou díky své schopnosti řešit i složitější typy turbulentního proudění nejpoužívanějšími modely turbulence ze skupiny modelů založených na Bussinesqově hypotéze. Jsou tvořeny dvěma transportními rovnicemi, nejčastěji jednou rovnicí pro turbulentní kinetickou energii k a druhou rovnicí pro rychlost disipace turbulentní energie ϵ nebo

pro specifickou rychlost disipace ω . Tyto veličiny jsou definovány pomocí fluktuací rychlostí následujícím způsobem

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho v_i'' v_i''}}{\bar{\rho}}, \quad (2.10)$$

$$\epsilon = \frac{\mu}{\bar{\rho}} \frac{\partial v_i''}{\partial y_j} \frac{\partial v_i''}{\partial y_j}, \quad (2.11)$$

$$\omega = \frac{\epsilon}{k}. \quad (2.12)$$

Díky transportním rovnicím zohledňují tyto modely i historii proudění a umožňují přesnější výpočty než modely algebraické a jednorovnicové.

Naprostým základem dvourovnicových modelů je tedy transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii k , kterou lze odvodit, [8], [13], z rovnic zachování hybnosti (1.2)

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial y_k} = -\frac{\partial p}{\partial y_i} + \frac{\partial t_{ik}}{\partial y_k} \quad (2.13)$$

a středovaných rovnic zachování hybnosti podle Favra (1.26)

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_k)}{\partial y_k} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{t}_{ik} - \overline{\rho v_i'' v_k''}). \quad (2.14)$$

Nejdříve sečteme středovanou rovnici (2.14) pro i vynásobenou \tilde{v}_j se středovanou rovnicí (2.14) pro j vynásobenou \tilde{v}_i

$$\begin{aligned} \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) + \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial y_k} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_k) + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial y_k} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_k) = \\ = -\tilde{v}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} - \tilde{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{t}_{ik} - \overline{\rho v_i'' v_k''}) + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{t}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}) \end{aligned}$$

a členy na levé straně po dvou sečteme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) + \frac{\partial}{\partial y_k} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j \tilde{v}_k) = \\ = -\tilde{v}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} - \tilde{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{t}_{ik} - \overline{\rho v_i'' v_k''}) + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{t}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Totéž provedeme s rovnicemi zachování hybnosti (2.13), tedy rovnicí pro i vynásobenou v_j sečteme s rovnicí pro j vynásobenou v_i

$$v_j \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + v_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + v_j \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial y_k} + v_i \frac{\partial(\rho v_j v_k)}{\partial y_k} = -v_j \frac{\partial p}{\partial y_i} - v_i \frac{\partial p}{\partial y_j} + v_j \frac{\partial t_{ik}}{\partial y_k} + v_i \frac{\partial t_{jk}}{\partial y_k}$$

a levou stranu upravíme

$$\frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j v_k)}{\partial y_k} = -v_j \frac{\partial p}{\partial y_i} - v_i \frac{\partial p}{\partial y_j} + v_j \frac{\partial t_{ik}}{\partial y_k} + v_i \frac{\partial t_{jk}}{\partial y_k}.$$

Tuto rovnici střeďujeme podle Favra úpravami podobnými jako v odstavci 1.1.2, tedy

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} [\overline{\rho(\tilde{v}_i + v_i'')(\tilde{v}_j + v_j'')}] + \frac{\partial}{\partial y_k} [\overline{\rho(\tilde{v}_i + v_i'')(\tilde{v}_j + v_j'')(\tilde{v}_k + v_k'')}] = \\
& \quad = -\overline{(\tilde{v}_j + v_j'') \frac{\partial p}{\partial y_i}} - \overline{(\tilde{v}_i + v_i'') \frac{\partial p}{\partial y_j}} + \overline{(\tilde{v}_j + v_j'') \frac{\partial t_{ik}}{\partial y_k}} + \overline{(\tilde{v}_i + v_i'') \frac{\partial t_{jk}}{\partial y_k}}, \\
& \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho \tilde{v}_i \tilde{v}_j} + \overline{\rho v_i'' v_j''}) + \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho \tilde{v}_i \tilde{v}_j \tilde{v}_k} + \tilde{v}_i \overline{\rho v_j'' v_k''} + \tilde{v}_j \overline{\rho v_i'' v_k''} + \tilde{v}_k \overline{\rho v_i'' v_j''} + \overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) = \\
& \quad = -\tilde{v}_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} - v_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} - \tilde{v}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_j} - v_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_j} + \\
& \quad \quad + \tilde{v}_j \frac{\partial \bar{t}_{ik}}{\partial y_k} + v_j'' \frac{\partial \bar{t}_{ik}}{\partial y_k} + \tilde{v}_i \frac{\partial \bar{t}_{jk}}{\partial y_k} + v_i'' \frac{\partial \bar{t}_{jk}}{\partial y_k}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Odečteme-li nyní rovnici (2.15) od rovnice (2.16), dostaneme

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_i'' v_j''}) + \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{v}_i \overline{\rho v_j'' v_k''} + \tilde{v}_j \overline{\rho v_i'' v_k''} + \tilde{v}_k \overline{\rho v_i'' v_j''} + \overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) = \\
& \quad = -v_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} - v_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_j} + v_j'' \frac{\partial \bar{t}_{ik}}{\partial y_k} + v_i'' \frac{\partial \bar{t}_{jk}}{\partial y_k} + \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho v_i'' v_k''}) + \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho v_j'' v_k''}).
\end{aligned}$$

Členy přeskupíme a provedeme několik úprav. Sečteme následující dvojice

$$\begin{aligned}
& \tilde{v}_j \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho v_i'' v_k''}) - \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{v}_j \overline{\rho v_i'' v_k''}) = -\overline{\rho v_i'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_k}, \\
& \tilde{v}_i \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho v_j'' v_k''}) - \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{v}_i \overline{\rho v_j'' v_k''}) = -\overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_k},
\end{aligned}$$

upravíme součet členů obsahujících tlak, [13],

$$-v_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} - v_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial y_k} [p' (\delta_{jk} v_i'' + \delta_{jk} v_j'')] + p' \left(\frac{\partial v_i''}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j''}{\partial y_i} \right)$$

a součet členů obsahujících tenzor vazkových napětí upravíme dosazením za t_{ik} , t_{jk} a zanedbáním některých členů, [13], tedy

$$v_j'' \frac{\partial \bar{t}_{ik}}{\partial y_k} + v_i'' \frac{\partial \bar{t}_{jk}}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\mu}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho v_i'' v_j''}) \right) - 2\mu \frac{\partial v_i''}{\partial y_k} \frac{\partial v_j''}{\partial y_k}.$$

Tím dostáváme transportní rovnici pro tenzor Reynoldsových napětí τ_{ij} ve tvaru

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho v_i'' v_j''}) + \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{v}_k \overline{\rho v_i'' v_j''}) = \\
& \quad = -\overline{\rho v_i'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_k} - \overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) - \frac{\partial}{\partial y_k} [p' (\delta_{jk} v_i'' + \delta_{jk} v_j'')] + \\
& \quad \quad + p' \left(\frac{\partial v_i''}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j''}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\mu}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y_k} (\overline{\rho v_i'' v_j''}) \right) - 2\mu \frac{\partial v_i''}{\partial y_k} \frac{\partial v_j''}{\partial y_k}.
\end{aligned}$$

Transportní rovnici pro turbulentní kinetickou energii z ní získáme položením $i = j$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho v_i'' v_i''}) + \frac{\partial}{\partial y_k}(\tilde{v}_k \overline{\rho v_i'' v_i''}) &= \\ &= -\overline{\rho v_i'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_k} - \overline{\rho v_i'' v_k''} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial y_k}(\overline{\rho v_i'' v_i'' v_k''}) - \frac{\partial}{\partial y_k}[p'(\delta_{ik} v_i'' + \delta_{ik} v_i'')] + \\ &+ p' \left(\frac{\partial v_i''}{\partial y_i} + \frac{\partial v_i''}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{\mu}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y_k}(\overline{\rho v_i'' v_i''}) \right) - 2\mu \frac{\partial v_i''}{\partial y_k} \frac{\partial v_i''}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

Sčítací index k přeznačíme na j , sečteme stejné členy a celou rovnici vydělíme dvěma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} (\tilde{v}_j \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''}) &= \\ &= -\overline{\rho v_i'' v_j''} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(v_j'' \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''} \right) - \frac{\partial}{\partial y_j} (\delta_{ij} \overline{p' v_i''}) + \\ &+ p' \frac{\partial v_i''}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{\mu}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''} \right) \right] - \mu \frac{\partial v_i''}{\partial y_j} \frac{\partial v_i''}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Člen $p' \frac{\partial v_i''}{\partial y_i}$ dále zanedbáme, protože nepřispívá k bilanci turbulentní energie, [13]. Dosazením definičních vztahů pro k (2.10) a ϵ (2.11) dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(v_j'' \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''} + \delta_{ij} \overline{p' v_i''} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial y_j} \right) - \bar{\rho}\epsilon,$$

kde člen $P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j}$ je produkce turbulentní energie, člen $-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(v_j'' \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''} + \delta_{ij} \overline{p' v_i''} \right)$ představuje turbulentní difuzi, tedy transport turbulentní energie vlivem fluktuací rychlosti a tlaku, a člen $\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial y_j} \right)$ vyjadřuje vazkou difuzi, tedy transport turbulentní energie vlivem vazkosti. Turbulentní difuze se aproximuje analogicky k vazké difuzi

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(v_j'' \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i''} + \delta_{ij} \overline{p' v_i''} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y_j} \right),$$

kde μ_t je turbulentní vazkost a σ_k konstanta specifikovaná v konkrétním modelu. Výsledný tvar transportní rovnice pro turbulentní kinetickou energii po zavedení aproximace turbulentní difuze, používaný ve dvourovnicových modelech, je

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \bar{\rho}\epsilon. \quad (2.17)$$

Nejpoužívanějšími dvourovnicovými modely jsou k - ϵ , k - ω a kombinovaný k - ϵ/k - ω .

2.3.1 Model k - ϵ

Základní verze

Dvourovnicový model k - ϵ , [8], [16], je v základní podobě tvořen modelovou transportní rovnicí pro turbulentní kinetickou energii k (2.17)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \bar{\rho}\epsilon \quad (2.18)$$

a transportní rovnicí pro rychlost disipace turbulentní energie ϵ . Tu je možné přesně odvodit podobně jako rovnici pro turbulentní energii. Protože ale obsahuje mnoho neznámých korelací fluktuací, které je obtížné aproximovat, používá se místo ní modelová transportní rovnice navržená analogicky k rovnici pro turbulentní energii, tedy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j\epsilon) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y_j} \right] + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k}, \quad (2.19)$$

kde $P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j}$ je již zmíněná produkce turbulentní energie. Turbulentní vazkost je dána vztahem

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.20)$$

Konstanty vyskytující se v rovnicích (2.18) - (2.20) jsou určeny empiricky na základě jednoduchých případů proudění a převážně se používají hodnoty $\sigma_k = 1, 0$, $\sigma_\epsilon = 1, 3$, $C_{\epsilon 1} = 1, 44$, $C_{\epsilon 2} = 1, 92$ a $C_\mu = 0, 09$.

Základní verze modelu k - ϵ není vhodná k výpočtu turbulentního proudění v těsné blízkosti obtékané stěny, protože modelové rovnice nerespektují dostatečně vliv stěny na proudění, [8]. Tento problém lze řešit několika způsoby. Jednou možností je použít tzv. stěnové funkce, to ale není vhodné například pro proudění s odtržením, [8]. Druhou možností je aplikovat na oblast v těsné blízkosti stěny včetně logaritmické oblasti model k - ω a ve vnějších oblastech model k - ϵ . To vede na kombinovaný model k - ϵ/k - ω , který je uveden dále. Třetí možností je využít tzv. modifikaci modelu pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla, což umožní provést výpočet pomocí modelu k - ϵ v celé výpočtové oblasti až k obtékané stěně.

Úprava pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla

Do transportních rovnic pro turbulentní energii k a rychlost disipace ϵ a do vztahu pro turbulentní vazkost μ_t se zavedou tlumivé funkce, jejichž funkční hodnota se s rostoucí vzdáleností od stěny blíží k jedné, a přídavné členy, jejichž hodnota se s rostoucí vzdáleností od stěny blíží k nule. Tím je dosaženo potřebné úpravy modelu blízko obtékané stěny, jinde zůstává model v základní podobě. V úpravě pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla tedy bude mít model k - ϵ tvar, [8],

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \bar{\rho}\epsilon + L_k, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y_j} \right] + C_{\epsilon 1} f_1 P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_2 \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} + L_\epsilon, \quad (2.22)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (2.23)$$

Existuje několik takových úprav, které se liší definicí funkcí f_1 , f_2 , f_μ a členů L_k a L_ϵ . Jednou z možností je úprava podle Jonese a Laundera, [8], [16], kteří stanovili

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, 0, \\ f_2 &= 1 - 0, 3 e^{-Re_t^2}, \\ f_\mu &= e^{\frac{-2,5}{1+0,02 Re_t}}, \end{aligned}$$

$$L_k = -2 \frac{\mu}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y_j} \right)^2, \quad j = 1, 2,$$

$$L_\epsilon = 2 \frac{\mu \mu_t}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)^2,$$

kde $Re_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon}$ je turbulentní Reynoldsovo číslo a $\nu = \frac{\mu}{\bar{\rho}}$ je součinitel kinematické vazkosti. Protože $\mu_t \sim \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon}$, $\nu_t = \frac{\mu_t}{\bar{\rho}} \sim \frac{k^2}{\epsilon}$, udává turbulentní Reynoldsovo číslo v podstatě poměr vazkostí $Re_t \sim \frac{\mu_t}{\mu}$.

2.3.2 Model k - ω

Základní verze

Základní verze dvourovnicového modelu k - ω , [8], je tvořena opět transportní rovnicí pro turbulentní kinetickou energii k (2.17), ale v upraveném tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \beta^* \bar{\rho} k \omega, \quad (2.24)$$

a transportní rovnicí pro specifickou rychlost disipace ω , navrženou na základě podstaty fyzikální dějů v proudění a rozměrové analýzy ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j \omega) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \alpha P_k \frac{\omega}{k} - \beta \bar{\rho} \omega^2, \quad (2.25)$$

kde $P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j}$ je produkce turbulentní energie. Turbulentní vazkost je určena vztahem

$$\mu_t = \gamma^* \bar{\rho} \frac{k}{\omega}. \quad (2.26)$$

Empirické konstanty v rovnicích (2.24) - (2.26) se nejčastěji používají s hodnotami $\sigma^* = \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$, $\beta^* = \frac{9}{100}$, $\alpha = \frac{5}{9}$, $\beta = \frac{3}{40}$ a $\gamma^* = 1$. Tato základní verze může být narozdíl od základní podoby modelu k - ϵ bez potíží aplikována až ke stěně.

Model k - ω v uvedené podobě je lepší než model k - ϵ v těsné blízkosti obtékané stěny, tedy ve vazké podvrstvě a logaritmické oblasti mezní vrstvy. Naopak ve vnější vrstvě se lépe chová model k - ϵ . Na základě této skutečnosti je tedy výhodné vytvořit kombinovaný model k - ϵ/k - ω , abychom při použití dvourovnicových modelů turbulence dosáhli co nejlepších výsledků.

2.3.3 Kombinovaný model k - ϵ/k - ω

Kombinovaný dvourovnicový model k - ϵ/k - ω je dvouvrstvý model, [8], který používá ve vazké podvrstvě a logaritmické oblasti mezní vrstvy model k - ω . Vně této oblasti na něj pak navazuje model k - ϵ v uvedené základní podobě, tedy bez úpravy pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla. Pro jednodušší zápis i implementaci v programu je transportní rovnice pro ϵ přepsána v proměnné ω . Oba modely jsou pak sloučeny do jednoho pomocí spojovací funkce F_1 , která je definována tak, aby nabývala hodnoty 1 ve vnitřní vrstvě (uplatní se model k - ω) a hodnoty 0 ve vnější vrstvě (uplatní se model k - ϵ).

Přepis transportní rovnice pro ϵ do proměnné ω se provede pomocí vztahu

$$\epsilon = \beta^* \omega k, \quad (2.27)$$

kde $\beta^* = 0,09$ je již uvedená konstanta z odstavce 2.3.2. Vyjdeme z rovnice (2.19)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j\epsilon) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y_j} \right] + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k},$$

do které dosadíme transformační vztah (2.27) a dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\beta^*\omega k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j\beta^*\omega k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial(\beta^*\omega k)}{\partial y_j} \right] + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\beta^*\omega k}{k} - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \frac{(\beta^*\omega k)^2}{k}.$$

Přeznačíme $\frac{1}{\sigma_\epsilon} = \sigma_{\omega 2}$, rovnici vydělíme konstantou β^* a částečně upravíme derivace

$$\begin{aligned} \omega \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + k \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \omega \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) + k \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j \omega) &= \\ &= \omega \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + k \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \\ &+ 2(\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j} + C_{\epsilon 1} P_k \omega - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \beta^* \omega^2 k. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dále potřebujeme upravit transportní rovnici pro k (2.18) modelu k - ϵ . Přeznačíme $\frac{1}{\sigma_k} = \sigma_{k 2}$ a do posledního členu dosadíme transformační vztah (2.27), tedy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{k 2} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \bar{\rho} \beta^* \omega k. \quad (2.29)$$

Celou rovnici vynásobíme ω

$$\omega \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \omega \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \omega \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{k 2} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k \omega - \bar{\rho} \beta^* \omega^2 k. \quad (2.30)$$

Nyní od rovnice (2.28) odečteme rovnici (2.30) a získáme

$$\begin{aligned} k \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + k \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j \omega) &= k \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + (C_{\epsilon 1} - 1) P_k \omega - \\ &- (C_{\epsilon 2} - 1) \bar{\rho} \beta^* \omega^2 k + 2(\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Předpokládali jsme, že $\sigma_{\omega 2} \approx \sigma_{k 2}$, jinak by v rovnici (2.31) zůstal ještě jeden člen navíc. Ten je ale velmi malý a neovlivňuje příliš řešení, takže ho můžeme zanedbat, [8]. Dále v rovnici (2.31) přeznačíme $C_{\epsilon 1} - 1 = \alpha_2$, $\beta^*(C_{\epsilon 2} - 1) = \beta_2$ a v posledním členu na pravé straně rovnice upravíme závorku pomocí vztahu pro turbulentní vazkost (2.26) následujícím způsobem, [8],

$$\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t = \mu + \sigma_{\omega 2} \bar{\rho} \frac{k}{\omega} \approx \sigma_{\omega 2} \bar{\rho} \frac{k}{\omega}.$$

Nakonec celou rovnici (2.31) vydělíme k a dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j\omega) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2}\mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \alpha_2 P_k \frac{\omega}{k} - \beta_2 \bar{\rho}\omega^2 + \\ &+ 2\sigma_{\omega 2}\bar{\rho} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Rovnice (2.29) a (2.32) představují model k - ϵ formulovaný v podobě modelu k - ω .

Nyní tedy máme dvouvrstvý model zapsaný pomocí k a ω , pro oblast v těsné blízkosti obtékané stěny rovnicemi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{k1}\mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \beta^* \bar{\rho}k\omega, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j\omega) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 1}\mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \alpha_1 P_k \frac{\omega}{k} - \beta_1 \bar{\rho}\omega^2, \quad (2.34)$$

kde jsou oproti rovnicím modelu k - ω (2.24) a (2.25) pouze přeznačeny konstanty $\sigma^* = \sigma_{k1}$, $\sigma = \sigma_{\omega 1}$, $\alpha = \alpha_1$ a $\beta = \beta_1$. Pro vnější oblast platí rovnice přeformulovaného modelu k - ϵ (2.29) a (2.32)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{k2}\mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \bar{\rho}\beta^* \omega k, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j\omega) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2}\mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \alpha_2 P_k \frac{\omega}{k} - \beta_2 \bar{\rho}\omega^2 + 2\sigma_{\omega 2}\bar{\rho} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Turbulentní vazkost je pro obě vrstvy modelu dána vztahem

$$\mu_t = \bar{\rho} \frac{k}{\omega},$$

který je totožný s (2.26), kde $\gamma^* = 1$. Dosazením (2.27) do (2.20) je ihned vidět, že je splněn i tento vztah, protože $C_\mu = \beta^* = 0,09$.

Rovnice pro obě vrstvy modelu sloučíme pomocí spojovací funkce F_1 navržené tak, aby se limitně blížila k jedné v těsné blízkosti stěny a k nule ve větší vzdálenosti od stěny. Kombinovaný model k - ϵ/k - ω tedy zapíšeme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \beta^* \bar{\rho}k\omega, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j\omega) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \alpha P_k \frac{\omega}{k} - \beta \bar{\rho}\omega^2 + \\ &+ 2(1 - F_1)\sigma_{\omega 2}\bar{\rho} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j}, \end{aligned}$$

kde konstanta $\sigma_k = F_1\sigma_{k1} + (1 - F_1)\sigma_{k2}$, takže se opět podle hodnoty funkce F_1 uplatní hodnota σ_{k1} , σ_{k2} nebo jejich kombinace. Pro konstanty σ_ω , α a β platí analogické vztahy jako pro σ_k .

Transformací modelu k - ϵ do podoby modelu k - ω vznikl na pravé straně rovnice (2.36) významný člen závisející na gradientu k i ω , který se nazývá příčná difuze (cross diffusion). Někdy je přidáván i do samotného modelu k - ω , [16], což se ukazuje vhodné pro obtékání stěny, méně už pro volné smykové vrstvy. Vliv příčné difuze na schopnost dvourovnicových modelů dobře zachycovat turbulentní proudění je zkoumán mnohými autory, [16].

Používají se dvě varianty kombinovaného modelu k - ϵ/k - ω , a to tzv. BSL model a SST model, [8], [13], které se od sebe liší definicí turbulentní vazkosti μ_t a určením konstant.

BSL model (Baseline model)

Turbulentní vazkost je pro BSL model dána již uvedeným vztahem

$$\mu_t = \bar{\rho} \frac{k}{\omega}.$$

Konstanty příslušné modelu k - ω jsou $\sigma_{k1} = 0,5$, $\sigma_{\omega1} = 0,5$, $\alpha_1 = 0,56$, $\beta_1 = 0,075$, $\beta^* = 0,09$ a konstanty příslušné modelu k - ϵ jsou $\sigma_{k2} = 1$, $\sigma_{\omega2} = 0,856$, $\alpha_2 = 0,44$, $\beta_2 = 0,0828$ a $\beta^* = 0,09$.

Spojovací funkce F_1 zajišťující hladký přechod mezi modely je definována následujícím způsobem

$$F_1 = \operatorname{tgh}(\arg_1^4),$$

kde

$$\arg_1 = \min \left\{ \max \left(\frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right); \frac{4\bar{\rho}\sigma_{\omega2}k}{C_{k\omega}y^2} \right\},$$

kde y je opět kolmá vzdálenost od obtékané stěny a hodnota $C_{k\omega}$ se určí z tzv. příčné difuze, tedy z posledního členu v rovnici (2.36).

$$C_{k\omega} = 2\sigma_{\omega2}\bar{\rho} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j},$$

pokud je tento výraz kladný, jinak $C_{k\omega} = 0$.

SST model (Shear-stress transport model)

Název modelu je odvozen ze skutečnosti, že díky upravené definici turbulentní vazkosti μ_t bere na rozdíl od BSL modelu v úvahu vliv transportu turbulentního napětí, [13]. Vychází totiž z tzv. Bradshawovy hypotézy, která je založena na experimentech a říká, že Reynoldsovo turbulentní napětí je v převážné části mezní vrstvy zhruba úměrné turbulentní kinetické energii. Na základě toho je pak turbulentní vazkost dána vztahem, [8], [13],

$$\mu_t = \min \left\{ \frac{\bar{\rho}k}{\omega}; \frac{a_1\bar{\rho}k}{F_2|\Omega|} \right\},$$

kde konstanta $a_1 = 0,31$, $|\Omega|$ je absolutní hodnota vířivosti, pro dvourozměrné proudění platí $\left| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|$, a funkce

$$F_2 = \operatorname{tgh}(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left\{ 2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right\}.$$

S výjimkou $\sigma_{k1} = 0,85$ jsou všechny konstanty a předpis spojovací funkce F_1 stejné jako v BSL modelu.

Kapitola 3

Numerické řešení turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny

3.1 Matematický model

Pro modelování turbulentního proudění stlačitelné vazké newtonské tekutiny je v této práci využit systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra, jak je uvedeno v první kapitole. Po zavedení tenzoru Reynoldsových turbulentních napětí a aproximaci členu představujícího turbulentní přenos tepla byl odvozen systém rovnic (1.31) - (1.33) ve tvaru

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j + \bar{p}\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij}), \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_j + \bar{p}\tilde{v}_j) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij})\tilde{v}_i + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \right], \quad (3.3)$$

kde tenzor vazkých napětí je dán vztahem

$$\tilde{t}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij} \quad (3.4)$$

a tenzor Reynoldsových turbulentních napětí

$$\tau_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij}. \quad (3.5)$$

Poslední člen ve vztahu pro Reynoldsovo napětí (1.34) neuvažujeme. Označení všech veličin vystupujících v rovnicích (3.1) - (3.5) odpovídá značení zavedenému v první kapitole. Uvedený systém rovnic, uzavřený konkrétním modelem turbulence, bude výchozí pro další úvahy.

Pro uvažované dvourozměrné proudění rozepíšeme soustavu rovnic (3.1) - (3.3) v kartézském souřadnicovém systému do tvaru

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v})}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \bar{p}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{t}_{xx} + \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{t}_{xy} + \tau_{xy}), \\
\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + \bar{p}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{t}_{yx} + \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{t}_{yy} + \tau_{yy}), \\
\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{u} + \bar{p}\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v} + \bar{p}\tilde{v}) &= \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\tilde{t}_{xx} + \tau_{xx})\tilde{u} + (\tilde{t}_{xy} + \tau_{xy})\tilde{v} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\tilde{t}_{xy} + \tau_{xy})\tilde{u} + (\tilde{t}_{yy} + \tau_{yy})\tilde{v} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \right],
\end{aligned}$$

kde pro součet složek tenzoru vazkých a turbulentních napětí platí

$$\begin{aligned}
\tilde{t}_{xx} + \tau_{xx} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right), \\
\tilde{t}_{xy} + \tau_{xy} &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) = \tilde{t}_{yx} + \tau_{yx}, \\
\tilde{t}_{yy} + \tau_{yy} &= (\mu + \mu_t) \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right),
\end{aligned}$$

$\mathbf{y} = [x, y]^T \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, u a v jsou kartézské složky vektoru rychlosti ve směrech souřadnicových os x a y . Vyjádříme-li tento systém rovnic v kompaktní vektorové formě, dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}^I(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^I(\mathbf{w})}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{f}^V(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^V(\mathbf{w})}{\partial y}, \quad (3.6)$$

kde $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$, je vektor konzervativních proměnných, $\mathbf{f}^I(\mathbf{w})$ a $\mathbf{g}^I(\mathbf{w})$ jsou složky ne vazkého konzervativního toku a $\mathbf{f}^V(\mathbf{w})$ a $\mathbf{g}^V(\mathbf{w})$ složky vazkého konzervativního toku, definované jako

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{e} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^I(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{u} \\ \bar{\rho}\tilde{u}^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ (\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p})\tilde{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^I(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \bar{\rho}\tilde{v}^2 + \bar{p} \\ (\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p})\tilde{v} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}^V(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{t}_{xx} + \tau_{xx} \\ \tilde{t}_{xy} + \tau_{xy} \\ (\tilde{t}_{xx} + \tau_{xx})\tilde{u} + (\tilde{t}_{xy} + \tau_{xy})\tilde{v} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{g}^V(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{t}_{xy} + \tau_{xy} \\ \tilde{t}_{yy} + \tau_{yy} \\ (\tilde{t}_{xy} + \tau_{xy})\tilde{u} + (\tilde{t}_{yy} + \tau_{yy})\tilde{v} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Systém rovnic (3.6) řešíme numericky metodou konečných objemů na strukturované čtyřúhelníkové síti a turbulentní vazkost určujeme podle konkrétního modelu turbulence.

3.2 Metoda konečných objemů

Pro prostorovou diskretizaci systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic (3.6) použijeme metodu konečných objemů aplikovanou na strukturovanou čtyřúhelníkovou síť, [18].

Výpočtovou oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ rozdělíme na konečný počet malých navzájem disjunktních podoblastí $\Omega_q \subset \Omega$, $q = 1, 2, \dots, N$ takových, že $\Omega_h = \bigcup_{q=1}^N \Omega_q$, kde Ω_h je aproximace výpočtové oblasti Ω pomocí uzavřených konvexních čtyřúhelníků. To znamená, že hranice $\partial\Omega_h$ je tvořena konečným počtem úseček.

V případě strukturované sítě lze zavést dvě množiny indexů $I = 1, 2, \dots, N_I$ a $J = 1, 2, \dots, N_J$ tak, že při označení $\Omega_q \equiv \Omega_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$ platí $N = N_I \times N_J$. Čtyřúhelníkový element Ω_{ij} se nazývá kontrolní objem nebo také buňka sítě. N udává tedy celkový počet buněk strukturované čtyřúhelníkové sítě na Ω_h , jejíž výřez je znázorněn na obr. 3.1.

Řešení systému rovnic (3.6) hledáme na kontrolním objemu Ω_{ij} ve tvaru konstantní funkce \mathbf{w}_{ij} , která je aproximací přesného řešení \mathbf{w} na Ω_{ij} . Pro kontrolní objem Ω_{ij} je tedy \mathbf{w}_{ij} integrálním průměrem vektoru konzervativních proměnných \mathbf{w}

$$\mathbf{w}_{ij}(t) = \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{w}(\mathbf{y}, t) dS \quad (3.9)$$

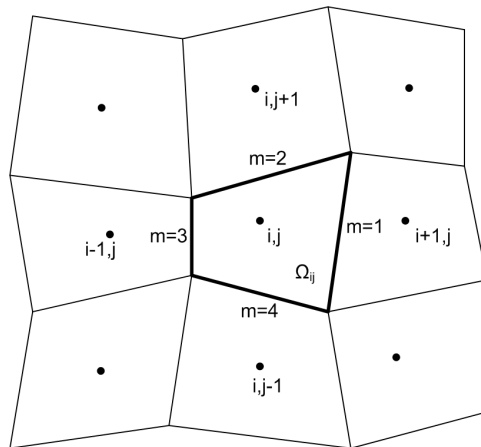
a je tudíž na něm konstantní. $|\Omega_{ij}|$ značí obsah čtyřúhelníkové buňky Ω_{ij} , obr 3.1.

Rovnici (3.6) integrujeme přes každý kontrolní objem Ω_{ij} a dostáváme

$$\int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} dS + \int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^I(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^I(\mathbf{w})}{\partial y} \right) dS = \int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^V(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^V(\mathbf{w})}{\partial y} \right) dS = \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Pomocí vztahu (3.9) pro integrální průměr upravíme první integrál na levé straně rovnice (3.10) do tvaru

$$\int_{\Omega_{ij}} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{w} dS = \frac{d\mathbf{w}_{ij}}{dt} |\Omega_{ij}|.$$



Obrázek 3.1: Strukturovaná čtyřúhelníková síť

Použitím Greenovy věty převedeme plošné integrály v rovnici (3.10) na křivkové

$$\int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^I(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^I(\mathbf{w})}{\partial y} \right) dS = \oint_{\partial\Omega_{ij}} (x n_{ij} \mathbf{f}^I(\mathbf{w}) + y n_{ij} \mathbf{g}^I(\mathbf{w})) dl,$$

$$\int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}^V(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}^V(\mathbf{w})}{\partial y} \right) dS = \oint_{\partial\Omega_{ij}} (x n_{ij} \mathbf{f}^V(\mathbf{w}) + y n_{ij} \mathbf{g}^V(\mathbf{w})) dl,$$

takže z rovnice (3.10) dostaneme

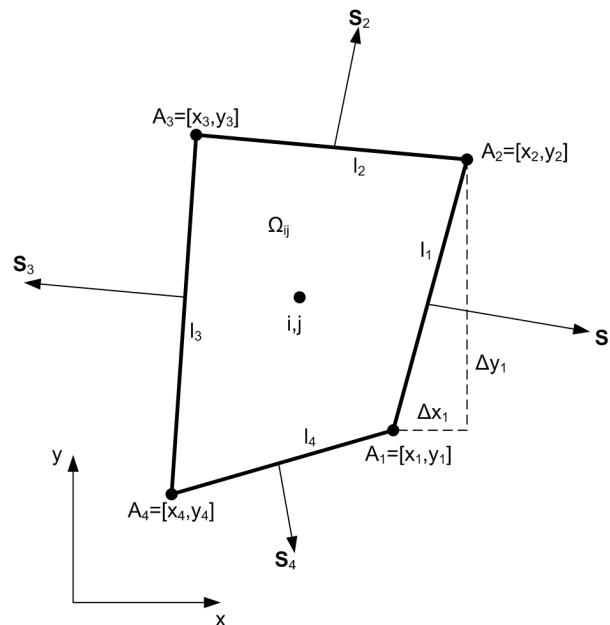
$$\frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} |\Omega_{ij}| + \oint_{\partial\Omega_{ij}} (x n_{ij} \mathbf{f}^I(\mathbf{w}) + y n_{ij} \mathbf{g}^I(\mathbf{w})) dl = \oint_{\partial\Omega_{ij}} (x n_{ij} \mathbf{f}^V(\mathbf{w}) + y n_{ij} \mathbf{g}^V(\mathbf{w})) dl, \quad (3.11)$$

kde $\partial\Omega_{ij}$ je hranice kontrolního objemu Ω_{ij} a $\mathbf{n}_{ij} = [x n_{ij}, y n_{ij}]^T$ je jednotkový vektor vnější normály k hranici $\partial\Omega_{ij}$ kontrolního objemu Ω_{ij} . Numerické řešení hledáme ve středech kontrolních objemů Ω_{ij} .

Křivkové integrály v rovnici (3.11) vyjadřují celkový vazký a nevazký tok veličiny \mathbf{w} hranicí $\partial\Omega_{ij}$ kontrolního objemu Ω_{ij} v čase t . Tento integrál aproximujeme součtem vazkých a nevazkých numerických toků jednotlivými stranami l_m , $m = 1, \dots, 4$, tvořícími hranici $\partial\Omega_{ij}$ kontrolního objemu Ω_{ij} , obr. 3.2,

$$\frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} = -\frac{1}{|\Omega_{ij}|} \sum_{m=1}^4 (\mathbf{F}_m^I - \mathbf{F}_m^V) |l_m|, \quad (3.12)$$

kde \mathbf{F}_m^I (\mathbf{F}_m^V) je nevazký (vazký) numerický tok stranou l_m kontrolního objemu Ω_{ij} ve směru \mathbf{n}_{ij}^m a $|l_m|$ je délka m -té strany kontrolního objemu Ω_{ij} . Pro každou stranu nejdříve vypočítáme



Obrázek 3.2: Kontrolní objem Ω_{ij}

její rozměry

$$\begin{aligned}\Delta x_m &= x_{m+1} - x_m, \\ \Delta y_m &= y_{m+1} - y_m,\end{aligned}$$

$m = 1, 2, 3, 4$ a pro $m = 4$ je $x_{m+1} = x_1$, $y_{m+1} = y_1$. Pro normálový vektor $\mathbf{S}_m = [S_m^x, S_m^y]^T$ a velikost m -té strany l_m platí

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_m &= \mathbf{n}_{ij}^m |l_m| = [\Delta y_m, -\Delta x_m]^T, \\ l_m &= \sqrt{\Delta x_m^2 + \Delta y_m^2}.\end{aligned}$$

Jednotkový vektor vnější normály k m -té straně l_m kontrolního objemu Ω_{ij} je pak

$$\mathbf{n}_{ij}^m = [n_{ij}^m, n_{ij}^m]^T = \left[\frac{\Delta y_m}{|l_m|}, -\frac{\Delta x_m}{|l_m|} \right]^T. \quad (3.13)$$

3.3 Metoda časové integrace

Označíme-li pravou stranu rovnice (3.12) funkcí $\mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}(t))$, kde \mathcal{R} je operátor prostorové diskretizace, zapíšeme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{w}_{ij}(t)}{dt} = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}(t)), \quad (3.14)$$

kteřou vyřešíme při dané počáteční podmínce $\mathbf{w}_{ij}^0 \equiv \mathbf{w}_{ij}(0) = \frac{1}{|\Omega_{ij}|} \int_{\Omega_{ij}} \mathbf{w}(\mathbf{y}, 0) dS$ pomocí explicitní čtyřstupňové Rungeovy-Kuttovy metody, [20]. Necht' $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < \mathcal{T}$ je dělení časového intervalu $(0, \mathcal{T})$ a $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ je časový krok mezi časovými hladinami t_n a t_{n+1} . Označme \mathbf{w}_{ij}^n jako aproximaci funkce $\mathbf{w}_{ij}(t_n)$ v čase t_n . Nejdříve vypočítáme hodnotu pravé strany rovnice (3.14) v čase t_n

$$\mathbf{k}_1 = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n)$$

a dále hodnoty pravé strany s upravenými argumenty

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_2 &= \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n + \Delta t \mathbf{k}_3).\end{aligned}$$

V čase t_{n+1} potom dostaneme hodnotu numerického řešení na kontrolním objemu Ω_{ij} jako

$$\mathbf{w}_{ij}^{n+1} = \mathbf{w}_{ij}^n + \frac{1}{6} \Delta t (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

kde časový krok Δt je určen nutnou CFL podmínkou stability ve tvaru, [17],

$$\Delta t \leq \min_{i,j} \left(\frac{CFL}{\frac{|\lambda(\mathbf{A}_{ij})|_{max}}{\Delta x_{ij}} + \frac{|\lambda(\mathbf{B}_{ij})|_{max}}{\Delta y_{ij}}} \right),$$

kde $|\lambda(\mathbf{A}_{ij})|_{max} = |\tilde{u}_{ij}| + \bar{a}_{ij}$ a $|\lambda(\mathbf{B}_{ij})|_{max} = |\tilde{v}_{ij}| + \bar{a}_{ij}$ jsou maximální absolutní hodnoty vlastních čísel Jacobiových matic nevazkých konzervativních toků $\mathbf{f}^I(\mathbf{w})$ a $\mathbf{g}^I(\mathbf{w})$, \tilde{u}_{ij} a \tilde{v}_{ij} jsou střední hodnoty rychlosti proudu ve směrech i a j , \bar{a}_{ij} je střední hodnota lokální rychlosti zvuku, CFL = 0.7 a Δx_{ij} a Δy_{ij} jsou aproximace délek kontrolního objemu Ω_{ij} ve směrech i a j .

3.4 Aproximace nevazkého numerického toku

Pro aproximaci nevazkého numerického toku \mathbf{F}_m^I m -tou stranou kontrolního objemu Ω_{ij} vystupujícího v rovnici (3.12) použijeme AUSM schéma (Advection Upstream Splitting Method), [11], založené na štěpení toku. To je zobecněním takzvaných *upwind* schémat, [7].

3.4.1 AUSM schéma

Vyjdeme z toho, že nevazký numerický tok \mathbf{F}^I libovolnou stranou kontrolního objemu Ω_{ij} lze rozdělit na dvě fyzikálně odlišné části, a to na konvektivní část $\mathbf{F}^{I(c)}$ numerického toku a tlakovou část $\mathbf{F}^{I(p)}$ numerického toku, [11],

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^I = {}^x n_{ij} \cdot \mathbf{f}^I + {}^y n_{ij} \cdot \mathbf{g}^I &\equiv \frac{\tilde{V}}{\bar{a}} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{a} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \bar{a} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \bar{a} \\ \bar{\rho} \tilde{h}_0 \bar{a} \end{bmatrix} + \bar{p} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^x n_{ij} \\ {}^y n_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \bar{M}_n \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{a} \\ \bar{\rho} \tilde{u} \bar{a} \\ \bar{\rho} \tilde{v} \bar{a} \\ \bar{\rho} \tilde{h}_0 \bar{a} \end{bmatrix} + \bar{p} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^x n_{ij} \\ {}^y n_{ij} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{I(c)} + \mathbf{F}^{I(p)}, \end{aligned}$$

kde $\tilde{V} = \tilde{u} \cdot {}^x n_{ij} + \tilde{v} \cdot {}^y n_{ij}$ je střední hodnota konvektivní normálové rychlosti mající směr jednotkového vektoru vnější normály $\mathbf{n}_{ij} = [{}^x n_{ij}, {}^y n_{ij}]^T$ k odpovídající straně l kontrolního objemu Ω_{ij} , \bar{a} je střední hodnota lokální rychlosti zvuku definovaná jako

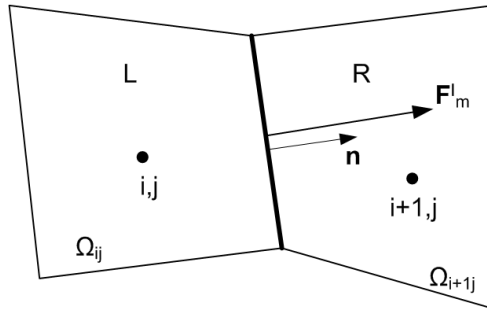
$$\bar{a} = \sqrt{\kappa \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}}, \quad (3.15)$$

\bar{M}_n je střední hodnota normálového Machova čísla a $\tilde{h}_0 = \tilde{h} + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) + k = \tilde{\epsilon} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) + k = \tilde{\epsilon} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$ je střední hodnota měrné stagnační (klidové) enthalpie, k je turbulentní energie (1.29) a pro střední hodnoty celkové měrné a měrné vnitřní energie platí vztah (1.30). Měrná enthalpie h je definovaná podle [9] vztahem $h = \epsilon + \frac{p}{\rho}$, kde ϵ je měrná vnitřní energie, analogický vztah platí pro střední hodnoty uvedených veličin, tedy $\tilde{h} = \tilde{\epsilon} + \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}$. Pro případ ideálního plynu platí

$$\tilde{\epsilon} = c_V \tilde{T},$$

kde c_V je měrná tepelná kapacita při konstantním objemu a \tilde{T} je střední hodnota termodynamické teploty tekutiny (ideálního plynu). κ je Poissonova adiabatická konstanta.

Uvažujme dva sousední kontrolní objemy strukturované čtyřúhelníkové sítě, obr. 3.3. Hodnoty vektoru konzervativních proměnných v levé a pravé buňce označíme jako \mathbf{w}_L a \mathbf{w}_R .



Obrázek 3.3: Nevazký numerický tok společnou stranou dvou sousedních kontrolních objemů

Chceme určit nevazký numerický tok jejich společnou stranou. Nejdříve vypočítáme střední hodnotu normálového Machova čísla pro levou a pravou buňku

$$\bar{M}_{nL} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_L^T \cdot \mathbf{n}}{\bar{a}_L} \equiv \frac{\tilde{V}_L}{\bar{a}_L}, \quad \bar{M}_{nR} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_R^T \cdot \mathbf{n}}{\bar{a}_R} \equiv \frac{\tilde{V}_R}{\bar{a}_R},$$

kde \tilde{V}_L a \tilde{V}_R jsou střední hodnoty konvektivních normálových rychlostí v levé a pravé buňce, \bar{a}_L a \bar{a}_R jsou střední hodnoty lokální rychlosti zvuku dané vztahem (3.15) v levé a pravé buňce a \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor k jejich společné straně, obr. 3.3. Machovo číslo na společné straně dvou sousedních kontrolních objemů určíme jako

$$\bar{M}_{LR} = \mathcal{M}^+(\bar{M}_{nL}) + \mathcal{M}^-(\bar{M}_{nR}),$$

kde \mathcal{M}^+ a \mathcal{M}^- jsou tzv. rozkládající (*splitting*) funkce. Existují různé tvary těchto funkcí, zde použijeme funkce ve tvaru, [6],

$$\mathcal{M}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|) & \text{pro } |M| > 1, \\ \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2 \pm \frac{1}{8}(M^2 - 1)^2 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tlak na společném rozhraní dvou sousedních buněk je určen vztahem

$$\bar{p}_{LR} = \mathcal{P}^+(\bar{M}_{nL}) \cdot \bar{p}_L + \mathcal{P}^-(\bar{M}_{nR}) \cdot \bar{p}_R,$$

kde \bar{p}_L , \bar{p}_R jsou střední hodnoty tlaku v levé a pravé buňce a *splitting* funkce pro tlak jsou definovány podle [11] jako

$$\mathcal{P}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(M \pm |M|)/M & \text{pro } |M| > 1, \\ \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Celkový nevazký numerický tok společnou stranou l_m dvou sousedních kontrolních objemů L (levého) a R (pravého), obr. 3.3, je potom dán vztahem, [11],

$$\mathbf{F}_m^I = \mathbf{F}_m^I(\mathbf{w}_{ij}^L, \mathbf{w}_{i+1j}^R, \mathbf{n}_{ij}^m) = \mathbf{F}_{LR}^{I(c)} + \bar{p}_{LR} \begin{bmatrix} 0 \\ x n_{ij}^m \\ y n_{ij}^m \\ 0 \end{bmatrix},$$

který z důvodu snazší algoritmizace lze přepsat do tvaru

$$\mathbf{F}_m^I = \mathbf{F}_m^I(\mathbf{w}_{ij}^L, \mathbf{w}_{i+1j}^R, \mathbf{n}_{ij}^m) = \frac{1}{2}\bar{M}_{LR}(\mathbf{F}_L^{I(c)} + \mathbf{F}_R^{I(c)}) - \frac{1}{2}|\bar{M}_{LR}|(\mathbf{F}_R^{I(c)} - \mathbf{F}_L^{I(c)}) + \bar{p}_{LR} \begin{bmatrix} 0 \\ x n_{ij}^m \\ y n_{ij}^m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

kde

$$\mathbf{F}_{L(R)}^{I(c)} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\bar{a} \\ \bar{\rho}\tilde{u}\bar{a} \\ \bar{\rho}\tilde{v}\bar{a} \\ \bar{\rho}\tilde{h}_0\bar{a} \end{bmatrix}_{L(R)}.$$

3.4.2 Lineární rekonstrukce

AUSM schéma je pouze prvního řádu přesnosti v prostorové proměnné. Pro výpočet nevazkého numerického toku hranic kontrolních objemů jsme použili hodnoty vektoru konzervativních proměnných ze středů buněk. Lineární rekonstrukcí těchto hodnot, založenou na Taylorově rozvoji, ale můžeme řád přesnosti AUSM schématu zvýšit na druhý. Rekonstrukci provádíme zvlášť v obou směrech x a y nezávisle na sobě. Abychom zabránili nežádoucím oscilacím v řešení, použijeme navíc ještě takzvaný *minmod* limiter. Ten ze dvou hodnot b a c vybere tu menší z nich, pokud jsou stejného znaménka, nebo nulu, pokud mají znaménko opačné. Tím je zajištěno, že nebudou vznikat nové extrémy. Následující vztah definuje *minmod* limiter pro libovolné dvě skalární hodnoty b a c (v případě vektorů se počítá po složkách)

$$\text{minmod}(b, c) = \begin{cases} b, & \text{pokud } |b| < |c| \text{ a } b \cdot c > 0, \\ c, & \text{pokud } |b| > |c| \text{ a } b \cdot c > 0, \\ 0, & \text{pokud } b \cdot c \leq 0. \end{cases}$$

Pro každou složku w_s , $s = 1, \dots, 4$ vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^4$ vypočítáme v každém směru následující diferencní podíly, [19],

$$\begin{aligned} (\sigma_s)_x^{\text{upwind}} &= \frac{(w_s)_{ij} - (w_s)_{i-1j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}j}}, \\ (\sigma_s)_x^{\text{downwind}} &= \frac{(w_s)_{i+1j} - (w_s)_{ij}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}j}}, \\ (\sigma_s)_y^{\text{upwind}} &= \frac{(w_s)_{ij} - (w_s)_{ij-1}}{\Delta y_{ij-\frac{1}{2}}}, \\ (\sigma_s)_y^{\text{downwind}} &= \frac{(w_s)_{ij+1} - (w_s)_{ij}}{\Delta y_{ij+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Použitím *minmod* limiteru určíme veličiny

$$\begin{aligned} (\sigma_s)_x^{\text{minmod}} &= \text{minmod}((\sigma_s)_x^{\text{upwind}}, (\sigma_s)_x^{\text{downwind}}), \\ (\sigma_s)_y^{\text{minmod}} &= \text{minmod}((\sigma_s)_y^{\text{upwind}}, (\sigma_s)_y^{\text{downwind}}), \quad s = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

pomocí nichž rekonstruujeme hodnoty numerického řešení \mathbf{w}_{ij} na stranách kontrolního objemu Ω_{ij} následujícím způsobem

$$\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j} = \mathbf{w}_{ij} + \frac{\Delta x_{i+\frac{1}{2}j}}{2} \boldsymbol{\sigma}_x^{\text{minmod}},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{i-\frac{1}{2}j} &= \mathbf{w}_{ij} - \frac{\Delta x_{i-\frac{1}{2}j}}{2} \boldsymbol{\sigma}_x^{\text{minmod}}, \\ \mathbf{w}_{ij+\frac{1}{2}} &= \mathbf{w}_{ij} + \frac{\Delta y_{ij+\frac{1}{2}}}{2} \boldsymbol{\sigma}_y^{\text{minmod}}, \\ \mathbf{w}_{ij-\frac{1}{2}} &= \mathbf{w}_{ij} - \frac{\Delta y_{ij-\frac{1}{2}}}{2} \boldsymbol{\sigma}_y^{\text{minmod}}.\end{aligned}$$

Poznamenejme, že $(\sigma_s)_x^{\text{minmod}}$ a $(\sigma_s)_y^{\text{minmod}}$, $s = 1, \dots, 4$ jsou složky vektoru $\boldsymbol{\sigma}_x^{\text{minmod}}$ a $\boldsymbol{\sigma}_y^{\text{minmod}}$. Potom pro výpočet celkového nevazkého numerického toku stranou l_m společnou pro levý kontrolní objem Ω_{ij} a pravý kontrolní objem Ω_{i+1j} , obr. 3.3, použijeme ve vztahu (3.16) hodnoty $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^L$ z buňky Ω_{ij} a $\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^R$ z buňky Ω_{i+1j} , tedy

$$\mathbf{F}_m^I = \mathbf{F}_m^I(\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^L, \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}j}^R, \mathbf{n}_{ij}^m).$$

3.5 Aproximace vazkého numerického toku

Vazký numerický tok \mathbf{F}_m^V m -tou stranou kontrolního objemu Ω_{ij} , vystupující ve schématu pro metodu konečných objemů (3.12), budeme aproximovat centrálně s pomocí takzvaných duálních buněk, [17], [18].

Uvažujme kontrolní objem Ω_{ij} , tvořený čtyřúhelníkem $P_1P_2P_3P_4$, obr. 3.4. Chceme-li aproximovat složky vazkého numerického toku $\mathbf{f}^V(\mathbf{w})$ a $\mathbf{g}^V(\mathbf{w})$ stěnou P_1P_2 kontrolního objemu Ω_{ij} , potřebujeme určit na této stěně, tedy v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$, derivace $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right)$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right)$ a složky rychlosti \tilde{u} a \tilde{v} .

Pro výpočet derivací v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$, který se nachází uvnitř výpočtové oblasti, zavedeme duální čtyřúhelníkovou buňku $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$, tvořenou čtyřúhelníkem $D_1D_2D_3D_4$, obr. 3.4, pro který $D_2 = P_1$, $D_4 = P_2$ a vrcholy D_1 a D_3 odpovídají středům kontrolních objemů Ω_{ij} a Ω_{i+1j} .

Složky rychlosti \tilde{u} a \tilde{v} v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$ stanovíme jako průměr ze složek rychlosti v buňkách přilehlých ke stěně P_1P_2 , tedy

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}j} &= \frac{\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i+1j}}{2}, \\ \tilde{v}_{i+\frac{1}{2}j} &= \frac{\tilde{v}_{ij} + \tilde{v}_{i+1j}}{2}.\end{aligned}$$

Derivace $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ a $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$ v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$ aproximujeme vztahy, [17],

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}j} \approx \frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \sum_{k=1}^4 \tilde{u}_k \Delta y_k, \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2}j} \approx -\frac{1}{|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|} \sum_{k=1}^4 \tilde{u}_k \Delta x_k, \quad (3.18)$$

kde $|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}|$ značí obsah duální buňky $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$, který určíme podle vztahu

$$|\Omega_{i+\frac{1}{2}j}| = \frac{1}{2} |(x_{i+1j} - x_{ij})(y_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}) - (y_{i+1j} - y_{ij})(x_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}})|.$$

Rozměry stěn duální buňky vypočítáme podobně jako pro buňku primární, tedy

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k,$$

$k = 1, 2, 3, 4$ a pro $k = 4$ je $x_{k+1} = x_1$, $y_{k+1} = y_1$, x_k a y_k jsou souřadnice vrcholů duální buňky D_k , $k = 1, 2, 3, 4$. Rychlosti \tilde{u}_k , $k = 1, 2, 3, 4$ na stěnách duální buňky určíme následujícím způsobem

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_{ij} + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} \right),$$

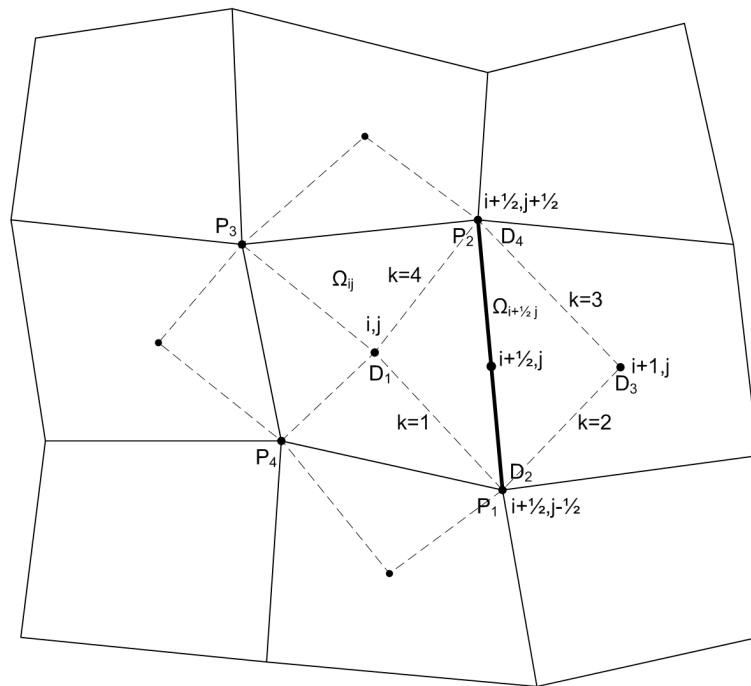
$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} + \tilde{u}_{i+1j} \right),$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_{i+1j} + \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \right),$$

$$\tilde{u}_4 = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + \tilde{u}_{ij} \right),$$

kde rychlosti $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}$ a $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}$ vypočítáme jako průměr z hodnot \tilde{u} ve středech okolních čtyřech primárních kontrolních objemů.

Pro výpočet derivací v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$, který leží na hranici výpočtové oblasti, použijeme pouze polovinu duální buňky, danou trojúhelníkem $D_1D_2D_4$, obr. 3.4. Sumy ve vztazích (3.17) a (3.18) tedy obsahují pouze tři sčítance a hodnoty \tilde{u}_k , Δx_k , Δy_k , $k = 1, 2, 3$ určujeme na stěnách D_1D_2 , D_2D_4 a D_4D_1 . Derivace \tilde{v} a $\frac{\tilde{p}}{\rho}$ v bodě $(i + \frac{1}{2}, j)$ vypočítáme analogicky k uvedeným derivacím \tilde{u} .



Obrázek 3.4: Primární čtyřúhelníková buňka Ω_{ij} a duální čtyřúhelníková buňka $\Omega_{i+\frac{1}{2}j}$

Využitím uvedených vztahů vypočítáme hodnoty složek vazkého numerického toku $\mathbf{f}^V(\mathbf{w})$ a $\mathbf{g}^V(\mathbf{w})$ stěnou P_1P_2 kontrolního objemu Ω_{ij} podle (3.7) a (3.8), přičemž předpokládáme, že turbulentní vazkost již máme vypočtenou pomocí zvoleného modelu turbulence. Složky vazkých numerických toků ostatními stěnami kontrolního objemu Ω_{ij} , tedy v bodech $(i - \frac{1}{2}, j)$, $(i, j + \frac{1}{2})$ a $(i, j - \frac{1}{2})$, určíme podobným způsobem.

Normálový vazký numerický tok \mathbf{F}_m^V m -tou stranou kontrolního objemu Ω_{ij} , vystupující ve vztahu (3.12), nakonec určíme pomocí normály k m -té straně kontrolního objemu $\mathbf{n}_{ij}^m = [x_{ij}^m, y_{ij}^m]^T$, (3.13), jako

$$\mathbf{F}_m^V = \mathbf{f}^V(\mathbf{w}) x_{ij}^m + \mathbf{g}^V(\mathbf{w}) y_{ij}^m. \quad (3.19)$$

3.6 Aproximace rovnic modelu turbulence k - ϵ

Dvourovnicový model turbulence k - ϵ s úpravou pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla podle Jonese a Laundera je tvořen dvěma parciálními diferenciálními rovnicemi a řadou dalších vztahů, jak je popsáno v odstavci 2.3.1, tedy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \bar{\rho}\epsilon + L_k, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\epsilon) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y_j} \right] + C_{\epsilon 1} f_1 P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} f_2 \bar{\rho} \frac{\epsilon^2}{k} + L_\epsilon, \quad (3.21)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \bar{\rho} \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (3.22)$$

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j}, \quad (3.23)$$

$$f_1 = 1, 0, \quad (3.24)$$

$$f_2 = 1 - 0, 3 e^{-Re_t^2}, \quad (3.25)$$

$$Re_t = \frac{\bar{\rho}k^2}{\mu\epsilon}, \quad (3.26)$$

$$f_\mu = e^{\frac{-2,5}{1+0,02 Re_t}}, \quad (3.27)$$

$$L_k = -2 \frac{\mu}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y_j} \right)^2, \quad j = 1, 2, \quad (3.28)$$

$$L_\epsilon = 2 \frac{\mu \mu_t}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)^2, \quad (3.29)$$

konstanty v nich obsažené jsou uvedeny v odstavci 2.3.1. Pro řešení těchto rovnic na dané výpočtové oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ diskretizované strukturovanou čtyřúhelníkovou sítí odvodíme explicitní diferenční schéma, [8]. Ve zbývající části tohoto odstavce vynecháme pro přehlednější zápis značení středovaných veličin vlnkou a pruhem, máme ale samozřejmě stále na mysli střední hodnoty příslušných veličin.

Pro odvození explicitního schématu pro transportní rovnici (3.20) pro turbulentní kinetickou energii k tuto rovnici nejprve upravíme částečnou derivací členů na levé straně, tedy

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial k}{\partial y_j} + k \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \rho\epsilon + L_k.$$

Odečteme od ní středovanou rovnici kontinuity (3.1) vynásobenou k

$$k \frac{\partial \rho}{\partial t} + k \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial y_j} = 0$$

a dostaneme

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial k}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \rho \epsilon + L_k.$$

Výraz v kulaté závorce na pravé straně pro přehlednější zápis označíme $A_k = \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}$, tedy

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial k}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(A_k \frac{\partial k}{\partial y_j} \right) + P_k - \rho \epsilon + L_k.$$

Tuto rovnici rozepíšeme v kartézském souřadnicovém systému pro $j = 1, 2$ do tvaru

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \frac{\partial k}{\partial x} + \rho v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(A_k \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_k \frac{\partial k}{\partial y} \right) + P_k - \rho \epsilon + L_k, \quad (3.30)$$

kde

$$L_k = -2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2, \quad (3.31)$$

$$P_k = \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} = \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3.32)$$

Složky symetrického tenzoru Reynoldsových turbulentních napětí τ_{ij} (1.34) v kartézském souřadnicovém systému jsou

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3} \mu_t \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \rho k, \quad (3.33)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} + \mu_t \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (3.34)$$

$$\tau_{yy} = -\frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \mu_t \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \rho k. \quad (3.35)$$

Rovnice (3.30) - (3.35) je potřeba transformovat tak, abychom je mohli řešit v souřadnicovém systému $\xi\eta$, na čtverci o délce strany jedna s rovnoměrným dělením os. To provedeme pomocí vztahů, [8],

$$\begin{aligned} \xi_x &= J y_\eta, \\ \xi_y &= -J x_\eta, \\ \eta_x &= -J y_\xi, \\ \eta_y &= J x_\xi, \end{aligned}$$

kde $J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi}$ je Jacobián uvedeného zobrazení $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Parciální derivace potom transformujeme podle

$$\frac{\partial}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (3.37)$$

Touto transformací se tedy daná čtyřúhelníková síť převede na ortogonální síť s ekvidistantním dělením os, ve směru osy x s krokem $\Delta\xi = \frac{1}{N_I}$ a ve směru osy y s krokem $\Delta\eta = \frac{1}{N_J}$, kde N_I, N_J jsou počty kontrolních objemů sítě ve směrech x, y . Na této síti pak provedeme prostorovou diskretizaci rovnic modelu turbulence $k-\epsilon$ (3.30) - (3.35).

Konvektivní členy $\rho u \frac{\partial k}{\partial x}$ a $\rho v \frac{\partial k}{\partial y}$ aproximujeme upwind schématem prvního řádu přesnosti a ostatní členy centrálními diferenčními formulemi druhého řádu přesnosti, [8]. Aproximaci je možné provést buď ve středech kontrolních objemů nebo v uzlech sítě, v této práci byla zvolena druhá možnost. S využitím vztahů (3.36) a (3.37) přepíšeme rovnici (3.30) do tvaru

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) + \rho v \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) = \\ = \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left[A_k \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left[A_k \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] + \\ + \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left[A_k \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left[A_k \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right] + P_k - \rho\epsilon + L_k. \end{aligned}$$

Aproximaci členů P_k a L_k zatím ponecháme stranou. Konvektivní členy upravíme zavedením vztahů, [8],

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v, \\ V &= \eta_x u + \eta_y v \end{aligned}$$

a převedeme je na pravou stranu rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial k}{\partial t} = -\rho \underbrace{U \frac{\partial k}{\partial \xi}}_I - \rho \underbrace{V \frac{\partial k}{\partial \eta}}_{II} + \\ + \xi_x \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} \left[A_k \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]}_{III} + \eta_x \underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta} \left[A_k \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]}_{IV} + \\ + \xi_y \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} \left[A_k \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]}_V + \eta_y \underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta} \left[A_k \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]}_{VI} + P_k - \rho\epsilon + L_k. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Nyní aproximujeme označené členy pomocí upwind schématu (členy I a II) a centrálních diferenčních formulí (členy III-VI). Diskretizaci provedeme v uzlu sítě (i, j) .

$$\begin{aligned} I : \quad U \frac{\partial k}{\partial \xi} \Big|_{ij} &= \frac{1}{2}(U_{ij} + |U_{ij}|) \frac{k_{ij} - k_{i-1j}}{\Delta\xi} + \frac{1}{2}(U_{ij} - |U_{ij}|) \frac{k_{i+1j} - k_{ij}}{\Delta\xi}, \\ II : \quad V \frac{\partial k}{\partial \eta} \Big|_{ij} &= \frac{1}{2}(V_{ij} + |V_{ij}|) \frac{k_{ij} - k_{ij-1}}{\Delta\eta} + \frac{1}{2}(V_{ij} - |V_{ij}|) \frac{k_{ij+1} - k_{ij}}{\Delta\eta}, \end{aligned}$$

$$III : \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[A_k \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]_{ij} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_{k\,i+\frac{1}{2}j} \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{i+\frac{1}{2}j} - A_{k\,i-\frac{1}{2}j} \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{i-\frac{1}{2}j}}{\Delta \xi} = \\
&= \frac{A_{k\,i+\frac{1}{2}j}}{\Delta \xi} \left(\xi_{x\,i+\frac{1}{2}j} \frac{k_{i+1j} - k_{ij}}{\Delta \xi} + \eta_{x\,i+\frac{1}{2}j} \frac{k_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \right) - \\
&- \frac{A_{k\,i-\frac{1}{2}j}}{\Delta \xi} \left(\xi_{x\,i-\frac{1}{2}j} \frac{k_{ij} - k_{i-1j}}{\Delta \xi} + \eta_{x\,i-\frac{1}{2}j} \frac{k_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \right), \\
IV : \frac{\partial}{\partial \xi} \left[A_k \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]_{ij} &= \\
&= \frac{A_{k\,i+\frac{1}{2}j} \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{i+\frac{1}{2}j} - A_{k\,i-\frac{1}{2}j} \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{i-\frac{1}{2}j}}{\Delta \xi} = \\
&= \frac{A_{k\,i+\frac{1}{2}j}}{\Delta \xi} \left(\xi_{y\,i+\frac{1}{2}j} \frac{k_{i+1j} - k_{ij}}{\Delta \xi} + \eta_{y\,i+\frac{1}{2}j} \frac{k_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \right) - \\
&- \frac{A_{k\,i-\frac{1}{2}j}}{\Delta \xi} \left(\xi_{y\,i-\frac{1}{2}j} \frac{k_{ij} - k_{i-1j}}{\Delta \xi} + \eta_{y\,i-\frac{1}{2}j} \frac{k_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \right), \\
V : \frac{\partial}{\partial \eta} \left[A_k \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]_{ij} &= \\
&= \frac{A_{k\,ij+\frac{1}{2}} \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{ij+\frac{1}{2}} - A_{k\,ij-\frac{1}{2}} \left(\xi_x \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{ij-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} = \\
&= \frac{A_{k\,ij+\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \left(\xi_{x\,ij+\frac{1}{2}} \frac{k_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + \eta_{x\,ij+\frac{1}{2}} \frac{k_{ij+1} - k_{ij}}{\Delta \eta} \right) - \\
&- \frac{A_{k\,ij-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \left(\xi_{x\,ij-\frac{1}{2}} \frac{k_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + \eta_{x\,ij-\frac{1}{2}} \frac{k_{ij} - k_{ij-1}}{\Delta \eta} \right), \\
VI : \frac{\partial}{\partial \eta} \left[A_k \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \right]_{ij} &= \\
&= \frac{A_{k\,ij+\frac{1}{2}} \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{ij+\frac{1}{2}} - A_{k\,ij-\frac{1}{2}} \left(\xi_y \frac{\partial k}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial k}{\partial \eta} \right)_{ij-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} = \\
&= \frac{A_{k\,ij+\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \left(\xi_{y\,ij+\frac{1}{2}} \frac{k_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + \eta_{y\,ij+\frac{1}{2}} \frac{k_{ij+1} - k_{ij}}{\Delta \eta} \right) - \\
&- \frac{A_{k\,ij-\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \left(\xi_{y\,ij-\frac{1}{2}} \frac{k_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + \eta_{y\,ij-\frac{1}{2}} \frac{k_{ij} - k_{ij-1}}{\Delta \eta} \right).
\end{aligned}$$

Dosazením uvedených aproximací do (3.38) a vydělením celé rovnice hustotou ρ získáme

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial k}{\partial t} \right|_{ij} &= -\frac{1}{2}(U_{ij} + |U_{ij}|) \frac{k_{ij} - k_{i-1j}}{\Delta \xi} - \frac{1}{2}(U_{ij} - |U_{ij}|) \frac{k_{i+1j} - k_{ij}}{\Delta \xi} - \\
&- \frac{1}{2}(V_{ij} + |V_{ij}|) \frac{k_{ij} - k_{ij-1}}{\Delta \eta} - \frac{1}{2}(V_{ij} - |V_{ij}|) \frac{k_{ij+1} - k_{ij}}{\Delta \eta} + \\
&+ \frac{1}{\rho_{ij}} \left\{ \frac{A_{k\,i+\frac{1}{2}j}}{(\Delta \xi)^2} (k_{i+1j} - k_{ij}) (\xi_{x\,ij} \xi_{x\,i+\frac{1}{2}j} + \xi_{y\,ij} \xi_{y\,i+\frac{1}{2}j}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A_{k_{i+\frac{1}{2}j}}}{\Delta\xi\Delta\eta} (k_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}) (\xi_{xij}\eta_{x_{i+\frac{1}{2}j}} + \xi_{yij}\eta_{y_{i+\frac{1}{2}j}}) - \\
& - \frac{A_{k_{i-\frac{1}{2}j}}}{(\Delta\xi)^2} (k_{ij} - k_{i-1j}) (\xi_{xij}\xi_{x_{i-\frac{1}{2}j}} + \xi_{yij}\xi_{y_{i-\frac{1}{2}j}}) - \\
& - \frac{A_{k_{i-\frac{1}{2}j}}}{\Delta\xi\Delta\eta} (k_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}) (\xi_{xij}\eta_{x_{i-\frac{1}{2}j}} + \xi_{yij}\eta_{y_{i-\frac{1}{2}j}}) + \\
& + \frac{A_{k_{ij+\frac{1}{2}}}}{\Delta\xi\Delta\eta} (k_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}) (\eta_{xij}\xi_{x_{ij+\frac{1}{2}}} + \eta_{yij}\xi_{y_{ij+\frac{1}{2}}}) + \\
& + \frac{A_{k_{ij+\frac{1}{2}}}}{(\Delta\eta)^2} (k_{ij+1} - k_{ij}) (\eta_{xij}\eta_{x_{ij+\frac{1}{2}}} + \eta_{yij}\eta_{y_{ij+\frac{1}{2}}}) - \\
& - \frac{A_{k_{ij-\frac{1}{2}}}}{\Delta\xi\Delta\eta} (k_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}) (\eta_{xij}\xi_{x_{ij-\frac{1}{2}}} + \eta_{yij}\xi_{y_{ij-\frac{1}{2}}}) - \\
& - \frac{A_{k_{ij-\frac{1}{2}}}}{(\Delta\eta)^2} (k_{ij} - k_{ij-1}) (\eta_{xij}\eta_{x_{ij-\frac{1}{2}}} + \eta_{yij}\eta_{y_{ij-\frac{1}{2}}}) \} + \frac{P_k|_{ij}}{\rho_{ij}} - \epsilon_{ij} + \frac{L_k|_{ij}}{\rho_{ij}}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Člen produkce P_k v uzlu (i, j) aproximujeme s využitím vztahů (3.36) a (3.37) následujícím způsobem

$$\begin{aligned}
P_k|_{ij} & = \tau_{xx}|_{ij} \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{ij} + \tau_{xy}|_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{ij} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{ij} \right) + \tau_{yy}|_{ij} \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{ij} = \\
& = \tau_{xx}|_{ij} \left(\xi_{xij} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{xij} \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) + \\
& + \tau_{xy}|_{ij} \left(\xi_{yij} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{yij} \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{ij} + \xi_{xij} \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{xij} \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) + \\
& + \tau_{yy}|_{ij} \left(\xi_{yij} \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{yij} \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) = \\
& = \left(\tau_{xx}|_{ij} \xi_{xij} + \tau_{xy}|_{ij} \xi_{yij} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \left(\tau_{xx}|_{ij} \eta_{xij} + \tau_{xy}|_{ij} \eta_{yij} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{ij} + \\
& + \left(\tau_{xy}|_{ij} \xi_{xij} + \tau_{yy}|_{ij} \xi_{yij} \right) \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \left(\tau_{xy}|_{ij} \eta_{xij} + \tau_{yy}|_{ij} \eta_{yij} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big|_{ij},
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\tau_{xx}|_{ij} & = \frac{4}{3}\mu_{tij} \left(\xi_{xij} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{xij} \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) - \frac{2}{3}\mu_{tij} \left(\xi_{yij} \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{yij} \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) - \frac{2}{3}\rho_{ij}k_{ij}, \\
\tau_{xy}|_{ij} & = \tau_{yx} = \mu_{tij} \left(\xi_{yij} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{yij} \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) + \mu_{tij} \left(\xi_{xij} \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{xij} \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right), \\
\tau_{yy}|_{ij} & = -\frac{2}{3}\mu_{tij} \left(\xi_{xij} \frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{xij} \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) + \frac{4}{3}\mu_{tij} \left(\xi_{yij} \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{ij} + \eta_{yij} \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big|_{ij} \right) - \frac{2}{3}\rho_{ij}k_{ij}
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big|_{ij} &= \frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2\Delta\xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_{ij} &= \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta\eta}, \\ \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{ij} &= \frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta\xi}, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta}\Big|_{ij} &= \frac{v_{ij+1} - v_{ij-1}}{2\Delta\eta}.\end{aligned}$$

Člen L_k týkající se úpravy pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla v uzlu (i, j) aproximujeme

$$\begin{aligned}L_k|_{ij} &= -2\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}} \left(\xi_{xij} \frac{\partial \sqrt{k_{ij}}}{\partial \xi} + \eta_{xij} \frac{\partial \sqrt{k_{ij}}}{\partial \eta} + \xi_{yij} \frac{\partial \sqrt{k_{ij}}}{\partial \xi} + \eta_{yij} \frac{\partial \sqrt{k_{ij}}}{\partial \eta} \right)^2 = \\ &= -2\frac{\mu_{ij}}{\rho_{ij}} \left[(\xi_{xij} + \xi_{yij}) \frac{\sqrt{k_{i+\frac{1}{2}j}} - \sqrt{k_{i-\frac{1}{2}j}}}{\Delta\xi} + (\eta_{xij} + \eta_{yij}) \frac{\sqrt{k_{ij+\frac{1}{2}}} - \sqrt{k_{ij-\frac{1}{2}}}}{\Delta\eta} \right]^2.\end{aligned}$$

Pravou stranu rovnice (3.39) označíme RHS_k a derivaci k podle času na levé straně aproximujeme dopřednou diferenční formulí prvního řádu přesnosti, [8]. Dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t}\Big|_{ij} &= RHS_k, \\ \frac{k_{ij}^{n+1} - k_{ij}^n}{\Delta t_{\text{lok}}} &= RHS_k, \\ k_{ij}^{n+1} &= k_{ij}^n + \Delta t_{\text{lok}} \cdot RHS_k,\end{aligned}\tag{3.40}$$

kde hodnoty všech veličin vystupujících ve výrazu RHS_k uvažujeme v n -té časové hladině.

Explicitní schéma pro transportní rovnici pro rychlost disipace ϵ (3.21) je možné odvodit analogickým způsobem jako schéma pro transportní rovnici pro turbulentní energii k . Člen L_ϵ týkající se úpravy pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla v uzlu (i, j) aproximujeme

$$\begin{aligned}L_\epsilon &= 2\frac{\mu \mu_t}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2, \\ L_\epsilon|_{ij} &= 2\frac{\mu_{ij} \mu_{t\,ij}}{\rho_{ij}^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right]_{ij}^2 = \\ &= 2\frac{\mu_{ij} \mu_{t\,ij}}{\rho_{ij}^2} \left[\xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)}_Z + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \underbrace{\left(\xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)}_Z \right]_{ij}^2 = \\ &= 2\frac{\mu_{ij} \mu_{t\,ij}}{\rho_{ij}^2} \left[\xi_{yij} \frac{Z_{i+\frac{1}{2}j} - Z_{i-\frac{1}{2}j}}{\Delta\xi} + \eta_{yij} \frac{Z_{ij+\frac{1}{2}} - Z_{ij-\frac{1}{2}}}{\Delta\eta} \right]^2,\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
Z_{i+\frac{1}{2}j} &= \xi_{y\ i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{\Delta\xi} + \eta_{y\ i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta\eta}, \\
Z_{i-\frac{1}{2}j} &= \xi_{y\ i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{\Delta\xi} + \eta_{y\ i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta\eta}, \\
Z_{ij+\frac{1}{2}} &= \xi_{y\ ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} + \eta_{y\ ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{\Delta\eta}, \\
Z_{ij-\frac{1}{2}} &= \xi_{y\ ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} + \eta_{y\ ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{\Delta\eta}.
\end{aligned}$$

Analogicky k rovnici (3.39) tedy můžeme pro ϵ psát

$$\begin{aligned}
RHS_\epsilon &= -\frac{1}{2}(U_{ij} + |U_{ij}|) \frac{\epsilon_{ij} - \epsilon_{i-1j}}{\Delta\xi} - \frac{1}{2}(U_{ij} - |U_{ij}|) \frac{\epsilon_{i+1j} - \epsilon_{ij}}{\Delta\xi} - \\
&\quad -\frac{1}{2}(V_{ij} + |V_{ij}|) \frac{\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij-1}}{\Delta\eta} - \frac{1}{2}(V_{ij} - |V_{ij}|) \frac{\epsilon_{ij+1} - \epsilon_{ij}}{\Delta\eta} + \\
&\quad + \frac{1}{\rho_{ij}} \left\{ \frac{A_{e\ i+\frac{1}{2}j}}{(\Delta\xi)^2} (\epsilon_{i+1j} - \epsilon_{ij}) (\xi_{x\ ij} \xi_{x\ i+\frac{1}{2}j} + \xi_{y\ ij} \xi_{y\ i+\frac{1}{2}j}) + \right. \\
&\quad + \frac{A_{e\ i+\frac{1}{2}j}}{\Delta\xi \Delta\eta} (\epsilon_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - \epsilon_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}) (\xi_{x\ ij} \eta_{x\ i+\frac{1}{2}j} + \xi_{y\ ij} \eta_{y\ i+\frac{1}{2}j}) - \\
&\quad - \frac{A_{e\ i-\frac{1}{2}j}}{(\Delta\xi)^2} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{i-1j}) (\xi_{x\ ij} \xi_{x\ i-\frac{1}{2}j} + \xi_{y\ ij} \xi_{y\ i-\frac{1}{2}j}) - \\
&\quad - \frac{A_{e\ i-\frac{1}{2}j}}{\Delta\xi \Delta\eta} (\epsilon_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - \epsilon_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}) (\xi_{x\ ij} \eta_{x\ i-\frac{1}{2}j} + \xi_{y\ ij} \eta_{y\ i-\frac{1}{2}j}) + \\
&\quad + \frac{A_{e\ ij+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi \Delta\eta} (\epsilon_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - \epsilon_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}) (\eta_{x\ ij} \xi_{x\ ij+\frac{1}{2}} + \eta_{y\ ij} \xi_{y\ ij+\frac{1}{2}}) + \\
&\quad + \frac{A_{e\ ij+\frac{1}{2}}}{(\Delta\eta)^2} (\epsilon_{ij+1} - \epsilon_{ij}) (\eta_{x\ ij} \eta_{x\ ij+\frac{1}{2}} + \eta_{y\ ij} \eta_{y\ ij+\frac{1}{2}}) - \\
&\quad - \frac{A_{e\ ij-\frac{1}{2}}}{\Delta\xi \Delta\eta} (\epsilon_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} - \epsilon_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}) (\eta_{x\ ij} \xi_{x\ ij-\frac{1}{2}} + \eta_{y\ ij} \xi_{y\ ij-\frac{1}{2}}) - \\
&\quad - \left. \frac{A_{e\ ij-\frac{1}{2}}}{(\Delta\eta)^2} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij-1}) (\eta_{x\ ij} \eta_{x\ ij-\frac{1}{2}} + \eta_{y\ ij} \eta_{y\ ij-\frac{1}{2}}) \right\} + \\
&\quad + C_{\epsilon 1} f_{1\ ij} P_k|_{ij} \frac{\epsilon_{ij}}{\rho_{ij} k_{ij}} - C_{\epsilon 2} f_{2\ ij} \frac{\epsilon_{ij}^2}{k_{ij}} + \frac{L_\epsilon|_{ij}}{\rho_{ij}},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

kde

$$\begin{aligned}
A_e &= \mu + \frac{\mu t}{\sigma_\epsilon}, \\
Re_t|_{ij} &= \frac{\rho_{ij} k_{ij}^2}{\mu_{ij} \epsilon_{ij}}, \\
f_{1\ ij} &= 1, 0, \\
f_{2\ ij} &= 1 - 0, 3 e^{-Re_t^2|_{ij}}.
\end{aligned}$$

Analogicky ke vztahu (3.40) platí pro ϵ

$$\epsilon_{ij}^{n+1} = \epsilon_{ij}^n + \Delta t_{\text{lok}} \cdot RHS_{\epsilon}, \quad (3.42)$$

kde hodnoty všech veličin vystupujících ve výrazu RHS_{ϵ} uvažujeme v n -té časové hladině.

Hodnotu turbulentní vazkosti μ_t v časové hladině $n + 1$ v uzlu (i, j) potom vypočítáme podle (3.22) jako

$$\mu_{tij}^{n+1} = C_{\mu} f_{\mu ij}^{n+1} \rho_{ij}^n \frac{(k_{ij}^{n+1})^2}{\epsilon_{ij}^{n+1}}, \quad (3.43)$$

kde

$$f_{\mu ij}^{n+1} = e^{\frac{-2,5}{1+0,02Re_{tij}^{n+1}}}.$$

Je zřejmé, že abychom mohli uvedeným způsobem řešit rovnice modelu turbulence $k-\epsilon$, potřebujeme předepsat počáteční a okrajové podmínky pro turbulentní kinetickou energii k , rychlost disipace ϵ a turbulentní vazkost μ_t . Hodnoty použité v této práci a jejich stanovení je uvedeno v následující kapitole.

Kapitola 4

Modelování turbulentního proudění v úzkém kanálu

Součástí této práce je algoritmizace dvou vybraných modelů turbulence v rámci vlastního programu pro numerický výpočet proudění, a to modelu Baldwina a Lomaxe a modelu $k-\epsilon$ s úpravou pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla. Model Baldwina a Lomaxe byl zvolen jako zástupce skupiny algebraických modelů turbulence. Při jeho použití není nutné řešit žádné parciální diferenciální rovnice a lze poměrně snadno počítat turbulentní vazkost μ_t přímo ze vztahů uvedených v odstavci 2.1.2. Model $k-\epsilon$ byl vybrán jako zástupce dvourovnicových modelů turbulence s využitím i pro složitější typy proudění. Implementace dvourovnicového modelu v programu pro numerický výpočet turbulentního proudění je podstatně náročnější než implementace modelu algebraického, některé detaily jsou uvedeny v této kapitole.

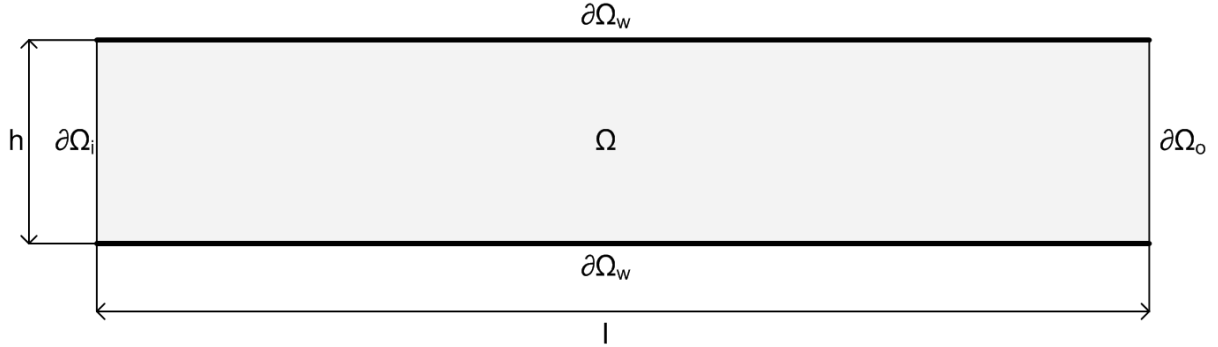
Oba modely turbulence jsou aplikovány na úloze ustáleného dvourozměrného turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny v úzkém obdélníkovém kanálu určeném dvěma rovnoběžnými pevnými nepropustnými stěnami. Volba této úlohy vyplývá ze skutečnosti, že na katedře mechaniky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni je proudění tekutin v těsnících mezerách různého typu a minikanálech dlouhodobě řešeno a díky úzké spolupráci s Ústavem termomechaniky Akademie věd České republiky je možné některé výsledky vlastních numerických simulací porovnat s experimentálními výsledky získanými v Aerodynamické laboratoři ÚT AV ČR v Novém Kníně a také s výsledky vypočtenými v profesionálním výpočtovém systému ANSYS Fluent.

4.1 Formulace úlohy

Zabýváme se turbulentním prouděním tekutiny v úzkém dvourozměrném kanálu, který představuje výpočtovou oblast $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, obr. 4.1, určenou hranicí $\partial\Omega = \partial\Omega_w \cup \partial\Omega_i \cup \partial\Omega_o$. Část hranice $\partial\Omega_w$ představuje pevnou nepropustnou stěnu, $\partial\Omega_i$ je část hranice, kterou tekutina vstupuje do výpočtové oblasti a $\partial\Omega_o$ je část hranice, kterou tekutina výpočtovou oblast opouští. Výška kanálu je $h = 2$ mm a délka $l = 100$ mm.

Dvourozměrné turbulentní proudění stlačitelné vazké tekutiny na uvedené výpočtové oblasti Ω popisujeme systémem středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra (3.1) - (3.5) doplněným buď algebraickým modelem turbulence Baldwina a Lomaxe nebo dvourovnicovým modelem turbulence $k-\epsilon$, a to s úpravou pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla podle Jonese a Laundera, neboť se jedná o obtékání stěny. Dále předpokládáme, že dyna-

mická vazkost tekutiny μ a Prandtlovo číslo Pr je konstantní. Uvažujeme proudění vzduchu při běžných teplotách, s dynamickou vazkostí $\mu = 1,879 \cdot 10^{-5} Pa \cdot s$ a Prandtlovým číslem $Pr = 0,72$. Pro obtékání stěny se standardně používá turbulentní Prandtlovo číslo $Pr_t = 0,9$. Úlohu řešíme v rozměrovém tvaru.



Obrázek 4.1: Geometrie výpočtové oblasti $\Omega \subset \mathbf{R}^2$

4.2 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou zadány tak, aby co nejvíce odpovídaly úloze, která byla experimentálně měřena v Aerodynamické laboratoři ÚT AV ČR v Novém Kníně a modelována ve výpočtovém systému ANSYS Fluent, což umožňuje srovnání dosažených výsledků. Při zadávání okrajových podmínek máme samozřejmě stále na mysli střední hodnoty veličin proudového pole, nikoliv jejich okamžité hodnoty.

Na vstupu do výpočtové oblasti, tedy na části hranice $\partial\Omega_i$, předepíšeme následující okrajové podmínky:

- stagnační tlak: $\bar{p}_{stag} = 101325 Pa$,
- stagnační teplotu: $\tilde{T}_{stag} = 294,15 K$,
- úhel náběhu proudu: $\alpha = 0^\circ$,
- derivaci termodynamické teploty ve směru jednotkového vektoru vnější normály k hranici $\partial\Omega_i$: $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 0$,
- okrajovou podmínku typu $(\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$.

Nejdříve extrapolujeme hodnotu statického tlaku \bar{p}_{inl} z proudového pole, tedy z vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$ v příslušném kontrolním objemu sousedícím s hranicí $\partial\Omega_i$, podle vztahu

$$\bar{p}_{inl} = (\kappa - 1) \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right), \quad \kappa = 1, 4,$$

s využitím předepsaného stagnačního tlaku \bar{p}_{stag} vypočítáme Machovo číslo na vstupu

$$\bar{M}_{inl} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{\bar{p}_{stag}}{\bar{p}_{inl}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]},$$

dále pomocí předepsané stagnační teploty \tilde{T}_{stag} určíme teplotu na vstupu

$$\tilde{T}_{inl} = \tilde{T}_{stag} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \bar{M}_{inl}^2 \right)^{-1}$$

a hodnotu hustoty ze stavové rovnice

$$\bar{\rho}_{inl} = \frac{\bar{p}_{inl}}{r \tilde{T}_{inl}}, \quad r = 287.$$

Stanovíme velikost rychlosti $|\tilde{v}_{inl}|$

$$|\tilde{v}_{inl}| = \bar{M}_{inl} \sqrt{\kappa \frac{\bar{p}_{inl}}{\bar{\rho}_{inl}}}$$

a celkovou měrnou energií na vstupu

$$\tilde{e}_{inl} = \frac{\bar{p}_{inl}}{\bar{\rho}_{inl} (\kappa - 1)} + \frac{1}{2} |\tilde{v}_{inl}|^2.$$

Vektor konzervativních proměnných na vstupu potom bude s ohledem na nulový úhel náběhu proudu dán

$$\mathbf{w}_{inl} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_{inl} \\ \bar{\rho}_{inl} |\tilde{v}_{inl}| \\ 0 \\ \bar{\rho}_{inl} \tilde{e}_{inl} \end{bmatrix}.$$

Okrajové podmínky $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 0$ a $(\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$, vedou na nulový normálový vazký numerický tok příslušnou stranou kontrolního objemu, která leží na vstupní hranici $\partial\Omega_i$, [17]. Numerické vazké toky (3.19) na vstupu tedy není vůbec potřeba počítat.

Na výstupu z výpočtové oblasti, tedy na části hranice $\partial\Omega_o$, předepisujeme

- statický tlak: $\bar{p}_{out} = 37693 Pa$,
- derivaci termodynamické teploty ve směru jednotkového vektoru vnější normály k hranici $\partial\Omega_o$: $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 0$,
- okrajovou podmínku typu $(\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$.

Z vektoru konzervativních proměnných $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3, w_4]^T$ v kontrolním objemu sousedícím s hranicí $\partial\Omega_o$ extrapolujeme hodnotu hustoty $\bar{\rho}_{out}$ a složky vektoru rychlosti \tilde{u}_{out} a \tilde{v}_{out} , tedy

$$\bar{\rho}_{out} = w_1, \quad \tilde{u}_{out} = \frac{w_2}{w_1}, \quad \tilde{v}_{out} = \frac{w_3}{w_1},$$

a pomocí předepsaného statického tlaku určíme celkovou měrnou energii na výstupu

$$\tilde{e}_{out} = \frac{\bar{p}_{out}}{\bar{\rho}_{out}(\kappa - 1)} + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{out}^2 + \tilde{v}_{out}^2).$$

Vektor konzervativních proměnných na výstupu pak bude dán

$$\mathbf{w}_{out} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_{out} \\ \bar{\rho}_{out} \tilde{u}_{out} \\ \bar{\rho}_{out} \tilde{v}_{out} \\ \bar{\rho}_{inl} \tilde{e}_{out} \end{bmatrix}.$$

Okrajové podmínky $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 0$ a $(\tilde{t}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$, stejně jako na vstupu opět vedou na nulový normálový vazký numerický tok tou stranou příslušného kontrolního objemu, která leží na výstupní hranici $\partial\Omega_o$.

Na pevné nepropustné stěně, tedy na části hranice $\partial\Omega_w$, předepíšeme

- nulové složky rychlosti: $\tilde{u} = 0$, $\tilde{v} = 0$.

Jako počáteční podmínky můžeme v celé výpočtové oblasti Ω použít hodnoty vektoru konzervativních proměnných na vstupu \mathbf{w}_{inl} . Dále je potřeba předepsat okrajové a počáteční podmínky týkající se použitých modelů turbulence. Jejich konkrétní podoba je popsána v následujících odstavcích.

4.3 Implementace modelu turbulence Baldwina a Lomaxe

Aplikace algebraického modelu turbulence Baldwina a Lomaxe nevyžaduje žádné další úpravy, použijeme přímo vztahy uvedené v odstavci 2.1.2, pomocí kterých vypočítáme ve střezech všech kontrolních objemů turbulentní vazkost μ_{t_i} a μ_{t_o} a určíme μ_t jako minimum z těchto dvou hodnot. Pouze je potřeba si uvědomit, že v dolní polovině kanálu představuje proměnná y kolmou vzdálenost od dolní stěny a v horní polovině kanálu kolmou vzdálenost od horní stěny, tedy že y neodpovídá druhé kartézské souřadnici středů kontrolních objemů. Turbulentní vazkost na stěně předpokládáme nulovou.

4.4 Implementace modelu turbulence k - ϵ

Obecně existují dva způsoby, jak zahrnout dvourovnicový model turbulence do kódu pro numerické řešení systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic. Jednou možností je řešit systém Navierových-Stokesových rovnic a rovnice modelu turbulence odděleně, v podstatě jako v laminárním případě, kdy se k vazkosti μ , respektive podílu $\frac{\mu}{Pr_t}$, pouze přičítá turbulentní vazkost μ_t , respektive podíl $\frac{\mu_t}{Pr_t}$, jak je vidět ze vztahů v odstavci 3.1. Hodnoty turbulentní vazkosti μ_t se používají vždy z předchozí časové hladiny. Tento způsob je popsán a aplikován v této práci. Druhou možností je řešit systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic a rovnice modelu turbulence současně.

Při praktické implementaci dvourovnicového modelu $k-\epsilon$ je potřeba vyřešit několik problematických otázek, které nemusí být na první pohled zřejmé. Jedná se především o stanovení okrajových a počátečních podmínek pro k , ϵ a μ_t , dále o volbu časového kroku pro řešení transportních rovnic pro k a ϵ , vystupujícího ve vztazích (3.40) a (3.42), a také o celkovou strukturu programu pro výpočet turbulentního proudění, především začlenění modelu turbulence.

Počáteční a okrajové podmínky

Model turbulence $k-\epsilon$ je tvořen dvěma parciálními diferenciálními rovnicemi, pro jejichž řešení je nutné znát počáteční a okrajové podmínky pro k a ϵ . To je obecně problém, protože na rozdíl od klasických okrajových podmínek jako je tlak nebo teplota, o kterých máme jasnou fyzikální představu a můžeme je v reálné technické aplikaci přímo změřit nebo nastavit, určit okrajové podmínky pro turbulentní veličiny k , ϵ a μ_t je obtížné.

Určitý návod, jak tyto okrajové podmínky nastavit, dává [8]. Hodnotu turbulentní kinetické energie k_0 na vstupu do výpočtové oblasti $\partial\Omega_i$ určíme pomocí vztahu

$$k_0 = 1,5 (T_i U_0)^2,$$

kde T_i je intenzita turbulence a volí se v rozmezí $T_i = 0,0001 \rightarrow 0,1$, v této práci $T_i = 0,0001$. U_0 je zvoleno jako střední rychlost proudu v kanálu. Hodnotu rychlosti disipace ϵ_0 na vstupu $\partial\Omega_i$ vypočítáme podle

$$\epsilon_0 = \bar{\rho} C_\mu \frac{k_0^2}{\mu_{t_0}}$$

kde $\bar{\rho}$ je hustota tekutiny na vstupu, konstanta $C_\mu = 0,09$ a μ_{t_0} se volí v rozmezí $\mu_{t_0} = (0,1 \rightarrow 100) \mu$, zde byla s ohledem na hodnoty turbulentní vazkosti vypočtené modelem Baldwin a Lomax stanovená hodnota $\mu_{t_0} = 0,1 \mu = 1,879 \cdot 10^{-4} Pa \cdot s$. Pomocí uvedených vztahů byly tedy stanoveny následující okrajové podmínky na vstupu: $k_0 = 12,52 m^2 s^{-2}$, $\epsilon_0 = 8,848 \cdot 10^4 m^2 s^{-3}$. Tyto hodnoty jsou zároveň využity jako počáteční pro celou výpočtovou oblast.

Okrajové hodnoty v uzlech na výstupní hranici $\partial\Omega_o$ extrapolujeme s prvním řádem přesnosti, tedy kopírujeme hodnoty z uzlů sousedících s výstupní hranicí.

Na pevné stěně $\partial\Omega_w$ předepíšeme nulové derivace k a ϵ ve směru normály k obtékané stěně, tedy

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0.$$

Jinou možností je použít nulové hodnoty k i ϵ , nebo nulovou hodnotu k a zvolenou nenulovou hodnotu ϵ , [8].

Výpočet je realizován tak, že pomocí vztahů (3.40) a (3.42) počítáme hodnoty k a ϵ pouze ve vnitřních uzlech sítě, na vstupu předepisujeme stanovené hodnoty k_0 a ϵ_0 a na stěnách a výstupu extrapolujeme s prvním řádem přesnosti. Ve všech uzlech sítě kromě uzlů na stěně pak počítáme μ_t podle vztahu (3.43) a na stěně předepisujeme $\mu_t = 0$.

Časový krok a struktura programu

Systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic řešíme pomocí čtyřstupňové Rungeovy-Kuttovy metody s časovým krokem Δt stanoveným nutnou CFL podmínkou stability, jak je popsáno v odstavci 3.3. Nastává otázka, s jakým časovým krokem řešit rovnice

modelu k - ϵ a jak je vhodně provázat se čtyřstupňovou Rungeovou-Kuttovou metodou časové integrace. V této práci byla vyzkoušena následující možnost.

Předpokládejme, že se nacházíme v n -té časové hladině výpočtu. Známe vektor konzervativních proměnných \mathbf{w}^n a hodnoty turbulentních veličin k^n , ϵ^n a μ_t^n v každé buňce (uzlu) sítě. (Důsledkem toho, že diskretizaci systému Navierových-Stokesových rovnic provádíme ve středech kontrolních objemů a diskretizaci rovnic modelu k - ϵ v uzlech sítě, je samozřejmě nutnost podle potřeby přepočítávat hodnoty z uzlů do středů buněk a naopak.) Podle odstavce 3.3 realizujeme první, druhý a třetí krok Rungeovy-Kuttovy metody, přičemž používáme stále hodnoty μ_t^n z n -té časové hladiny. Po třetím kroku Rungeovy-Kuttovy metody uplatníme model turbulence k - ϵ tak, že stanovíme lokální časový krok $\Delta t_{\text{lok}} = \frac{\Delta t}{NT}$, například $NT = 15$, a s tímto krokem NT -krát řešíme rovnice (3.40), (3.42) a (3.43), přičemž jako počáteční hodnoty použijeme k^n , ϵ^n a μ_t^n . Po NT krocích tak získáme nové hodnoty k^{n+1} , ϵ^{n+1} a μ_t^{n+1} , které využijeme ve čtvrtém kroku Rungeovy-Kuttovy metody. Situaci schématicky znázorníme:

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\mathbf{w}^n, k^n, \epsilon^n, \mu_t^n}_{\downarrow} \\
 \\
 \text{nutná CFL podmínka stability} \Rightarrow \Delta t \\
 \mathbf{k}_1 = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n, \mu_t^n) \\
 \mathbf{k}_2 = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_1, \mu_t^n) \\
 \mathbf{k}_3 = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n + \frac{1}{2}\Delta t \mathbf{k}_2, \mu_t^n) \\
 \Delta t_{\text{lok}} = \frac{\Delta t}{NT} \\
 k^s = k^n, \epsilon^s = \epsilon^n, \mu_t^s = \mu_t^n \\
 \text{pro } i \text{ od } 1 \text{ do } NT \\
 k^{s+1} = k^s + \Delta t_{\text{lok}} \cdot RHS_k^s \\
 \epsilon^{s+1} = \epsilon^s + \Delta t_{\text{lok}} \cdot RHS_\epsilon^s \\
 \mu_t^{s+1} = C_\mu f_\mu^{s+1} \rho^n \frac{(k^{s+1})^2}{\epsilon^{s+1}} \\
 k^s = k^{s+1}, \epsilon^s = \epsilon^{s+1}, \mu_t^s = \mu_t^{s+1} \\
 i = i + 1 \\
 k^{n+1} = k^s, \epsilon^{n+1} = \epsilon^s, \mu_t^{n+1} = \mu_t^s \\
 \mathbf{k}_4 = \mathcal{R}(\mathbf{w}_{ij}^n + \Delta t \mathbf{k}_3, \mu_t^{n+1}) \\
 \mathbf{w}_{ij}^{n+1} = \mathbf{w}_{ij}^n + \frac{1}{6} \Delta t (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\
 \\
 \underbrace{\mathbf{w}^{n+1}, k^{n+1}, \epsilon^{n+1}, \mu_t^{n+1}}_{\downarrow}
 \end{array}$$

4.5 Numerické výsledky

V tomto odstavci jsou prezentovány numerické výsledky získané výpočtem turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny v úzkém kanálu, jehož geometrie je podrobně popsána v sekci 4.1. Všechny uvedené výpočty jsou provedeny pomocí metod popsanych v této práci a s okrajovými podmínkami uvedenými v odstavci 4.2. Výpočty jsou realizovány na velmi jemné strukturované síti o počtu kontrolních objemů 40×222 se zahuštěním v blízkosti stěn. Při simulacích turbulentního proudění je vyžadováno, aby pro první uzel sítě u stěny platilo přibližně $y^+ \leq 1$ (2.3).

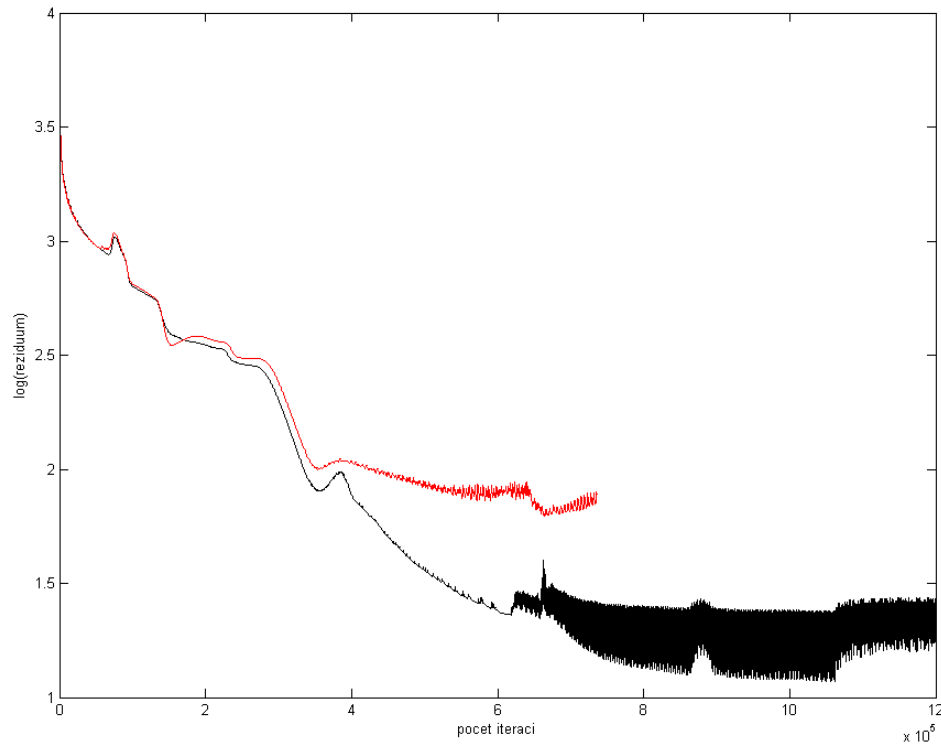
Je potřeba si uvědomit, že získané výsledky jsou pouze středními hodnotami veličin proudového pole, nikoliv hodnotami okamžitými. To je důsledkem použité metody pro modelování turbulentního proudění, tedy středování systému Navierových-Stokesových rovnic.

Jsou prezentovány jednak výsledky při použití algebraického modelu turbulence Baldwina a Lomaxe a jednak výsledky při použití dvourovnicového modelu turbulence $k-\epsilon$ s úpravou pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla podle Jonese a Laundera.

Konvergenci numerických metod v této práci měříme hodnotou rezidua, definovaného vztahem

$$\text{reziduum} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} |\Omega_{ij}| \left(\frac{\bar{\rho}_{ij}^{n+1} - \bar{\rho}_{ij}^n}{\Delta t} \right)^2}{\sum_{i,j} |\Omega_{ij}|}},$$

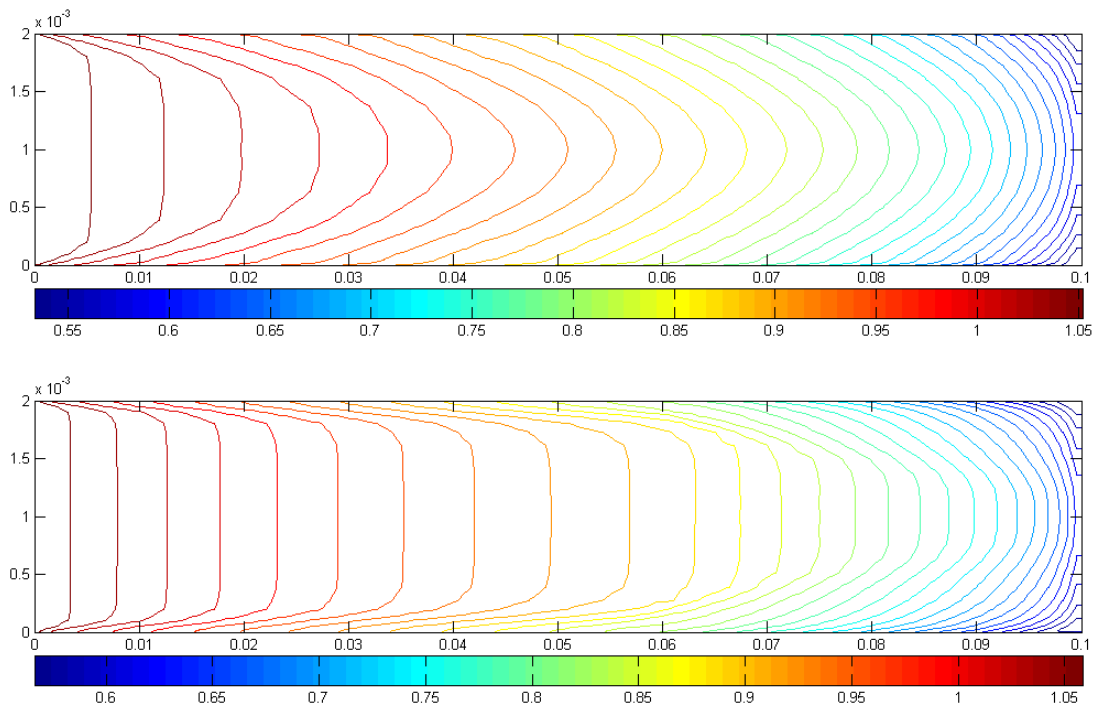
kde $|\Omega_{ij}|$ je velikost kontrolního objemu Ω_{ij} , $\bar{\rho}_{ij}^n$ a $\bar{\rho}_{ij}^{n+1}$ je střední hodnota hustoty ve středu



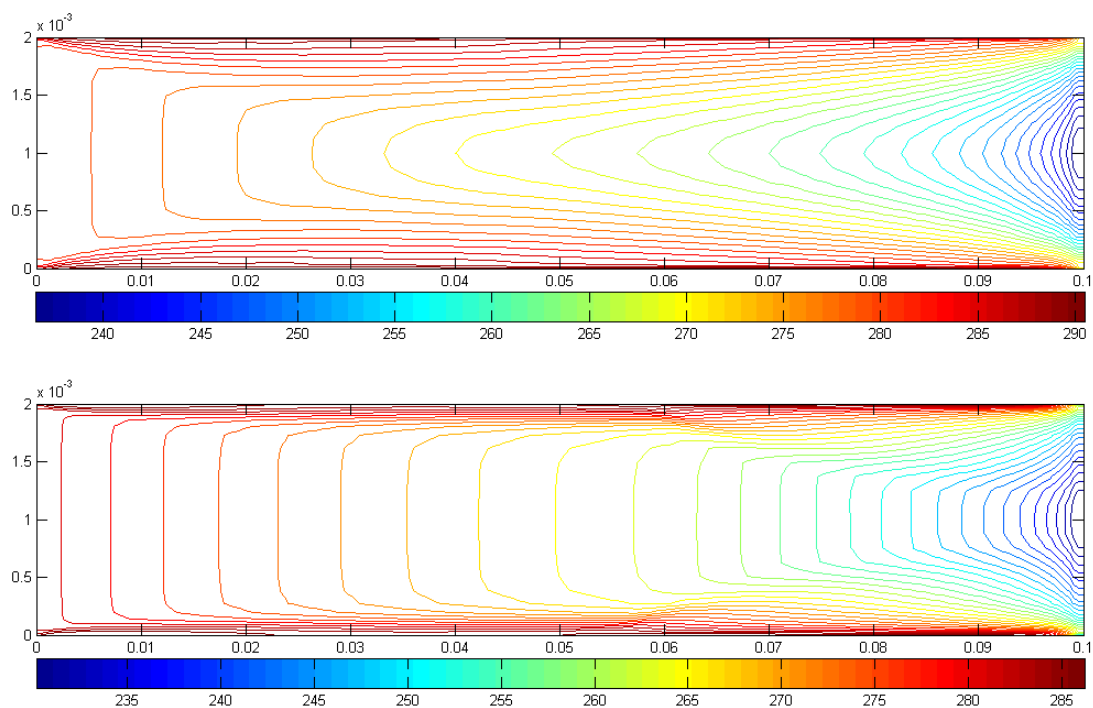
Obrázek 4.2: Konvergence numerické metody při využití modelu Baldwina a Lomaxe (černě) a $k-\epsilon$ (červeně)

kontrolního objemu Ω_{ij} v časech t^n a t^{n+1} . Výpočet zastavíme, když hodnota rezidua splní podmínku $\text{reziduum} < \varepsilon$, kde ε je malá, předem zvolená hodnota. Při praktických výpočtech považujeme řešení za ustálené, pokud reziduum dosáhlo určité hodnoty a dále se již nemění, obr. 4.2. Průběh konvergence zobrazujeme jako závislost logaritmu rezidua na počtu iterací numerického výpočtu. Na obrázku 4.2 je znázorněn průběh konvergence pro výpočty s oběma modely turbulence. Při srovnání výsledků jsou vždy hodnoty týkající se modelu Baldwina a Lomaxe zobrazeny černě a hodnoty týkající se modelu $k-\epsilon$ červeně. Výpočty jsou díky modelům turbulence a hustotě sítě časově velmi náročné, zvláště v případě využití složitějšího modelu turbulence $k-\epsilon$. Z časových důvodů bylo nutné výpočet pomocí modelu $k-\epsilon$ ukončit po $7 \cdot 10^5$ provedených iterací. Důsledkem toho je, že zde uvedené výsledky nejsou ještě zcela dokonvergované. To je vidět především u profilu střední hodnoty složky rychlosti \tilde{u} , obr. 4.8. Předpokládáme, že při pokračování výpočtu dojde k vyhlazení profilu rychlosti a dosažení přibližně stejné maximální hodnoty rychlosti ve středu kanálu jako v případě výpočtu pomocí modelu turbulence Baldwina a Lomaxe, obr. 4.8.

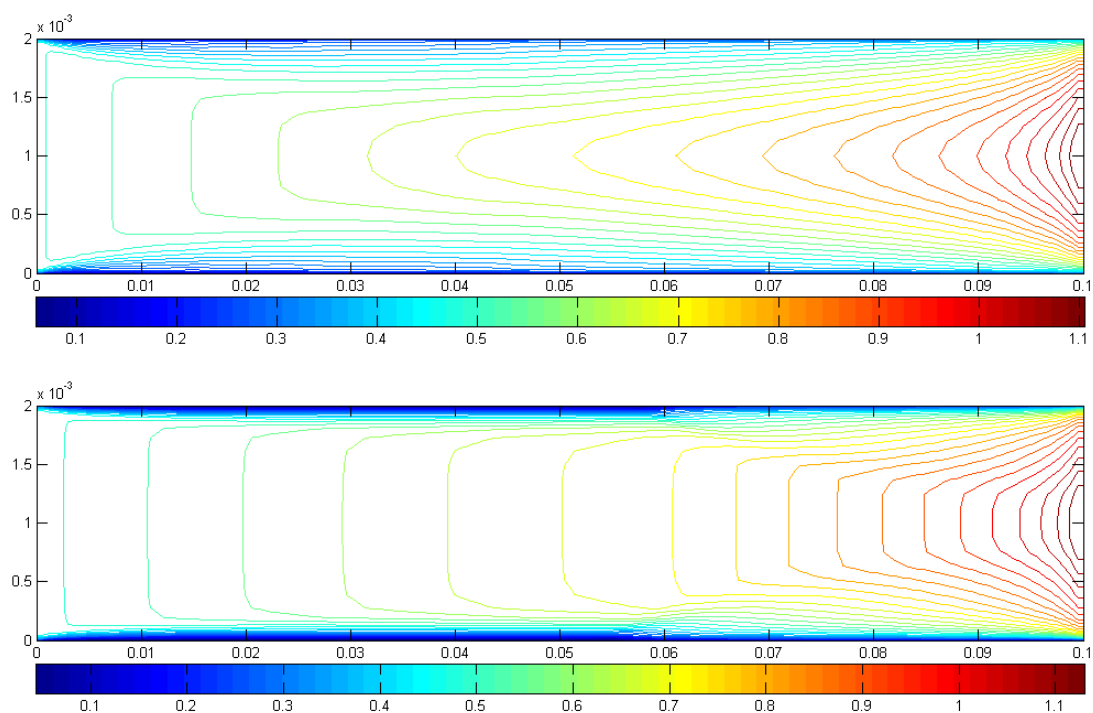
Obrázky 4.3, 4.4 a 4.5 ukazují izočáry střední hodnoty hustoty $\bar{\rho}$, termodynamické teploty \tilde{T} a Machova čísla $\overline{Ma} = \frac{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{\bar{a}}$, kde střední hodnota rychlosti zvuku $\bar{a} = \sqrt{\kappa \frac{\tilde{p}}{\bar{\rho}}}$, pro oba modely turbulence.



Obrázek 4.3: Izočáry střední hodnoty hustoty při využití modelu Baldwina a Lomaxe (nahore) a $k-\epsilon$ (dole)



Obrázek 4.4: Izočáry střední hodnoty teploty při využití modelu Baldwina a Lomaxe (nahore) a $k-\epsilon$ (dole)

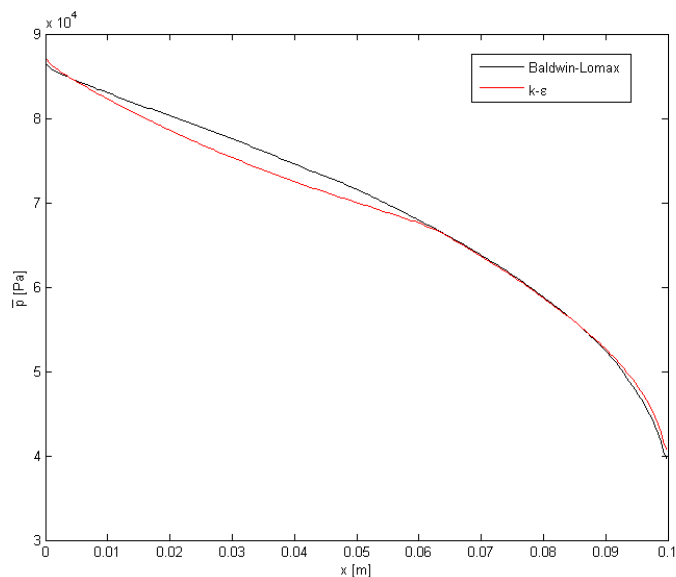


Obrázek 4.5: Izočáry střední hodnoty Machova čísla při využití modelu Baldwina a Lomaxe (nahore) a $k-\epsilon$ (dole)

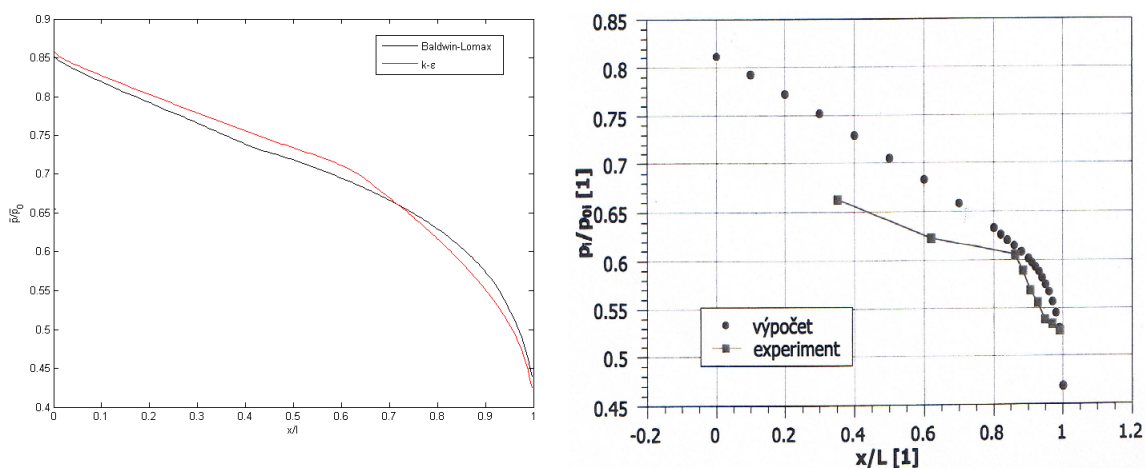
Na obrázku 4.6 je znázorněn průběh střední hodnoty statického tlaku podél osy kanálu pouze s malým rozdílem mezi výsledky obou modelů. Dále zobrazíme poměr střední hodnoty statického a stagnačního tlaku podle vztahu

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$$

podél osy kanálu, vztaženo na délku kanálu l , obr. 4.7 vlevo.



Obrázek 4.6: Průběh střední hodnoty statického tlaku podél osy kanálu při využití modelu Baldwina a Lomaxe (černě) a $k-\epsilon$ (červeně)



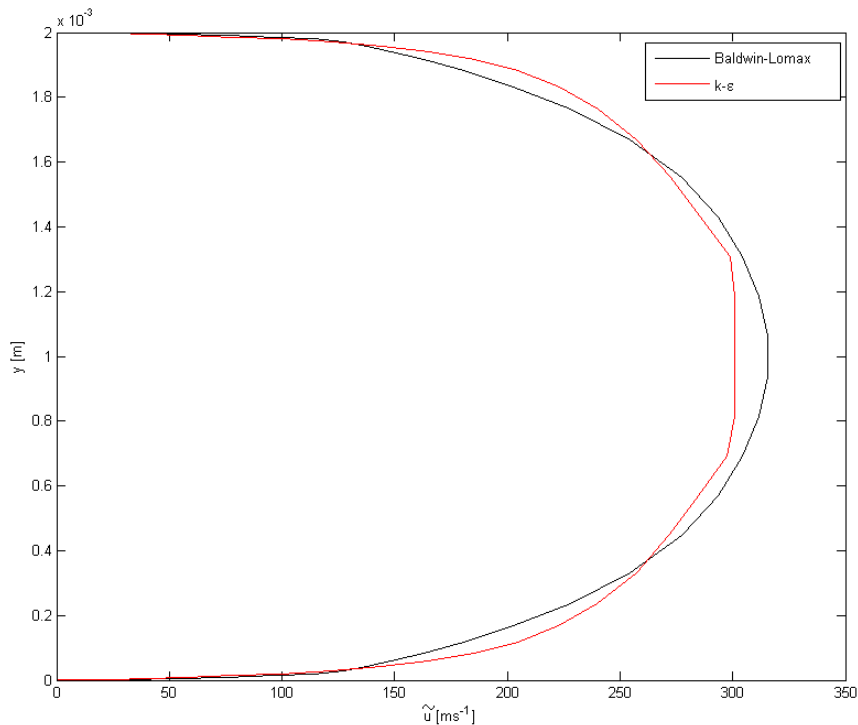
Obrázek 4.7: Vlevo průběh poměru střední hodnoty statického a stagnačního tlaku podél osy kanálu při využití modelu Baldwina a Lomaxe (černě) a $k-\epsilon$ (červeně), vpravo výsledky poskytnuté Ústavem termomechaniky AV ČR

To umožňuje srovnání získaných výsledků s daty poskytnutými Ústavem termomechaniky AV ČR. Na obrázku 4.7 vlevo jsou zobrazeny vlastní výsledky a vpravo výsledky poskytnuté ÚT AV ČR. Těmi jsou experimentálně naměřené hodnoty a také výsledky z výpočtu v systému ANSYS Fluent pomocí jednorovnicového modelu turbulence Spalarta a Allmarase. Z obrázků je vidět dobrá shoda výsledků získaných vlastní simulací a výpočtem v softwaru ANSYS Fluent.

Obrázek 4.8 porovnává profily střední hodnoty složky rychlosti \tilde{u} získané výpočtem pomocí obou modelů turbulence podél výšky kanálu, a to v řezu $x = 90$ mm, tedy téměř na konci kanálu. Ve stejném řezu je vykreslen průběh závislosti bezrozměrné rychlosti u^+ na bezrozměrné kolmé vzdálenosti od stěny y^+ v dolní polovině kanálu. Bezrozměrná rychlost je definovaná jako

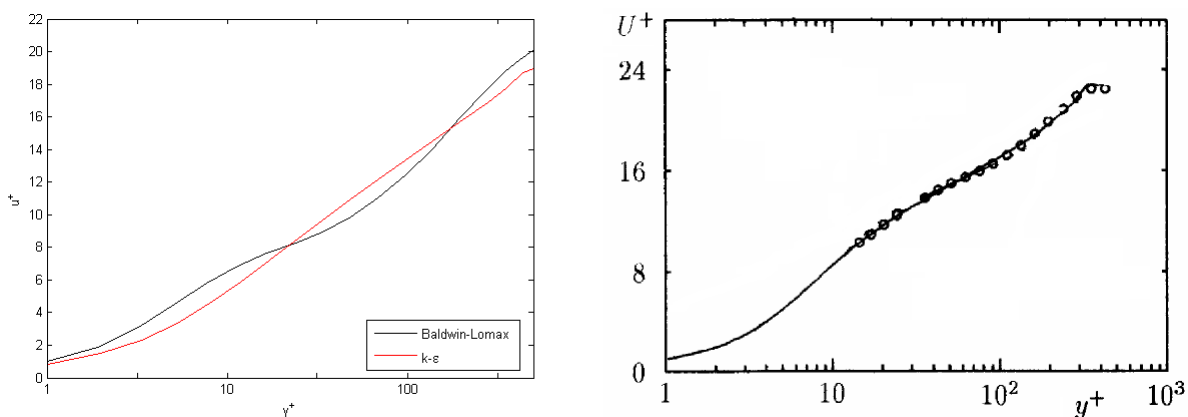
$$u^+ = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_t},$$

kde \tilde{u}_t je třetí rychlost stejně jako v definičním vztahu pro y^+ (2.3). Závislost $u^+(y^+)$ pro oba modely turbulence je znázorněna na obr. 4.9 vlevo, obrázek 4.9 vpravo ukazuje výsledky uvedené v literatuře, [16], a to pro úlohu obtékání rovny desky. Výsledky tedy můžeme porovnat pouze kvalitativně. V případě vlastního výpočtu pomocí modelu Baldwina a Lomaxe je vidět velmi podobný charakter křivky $u^+(y^+)$ jako v literatuře.



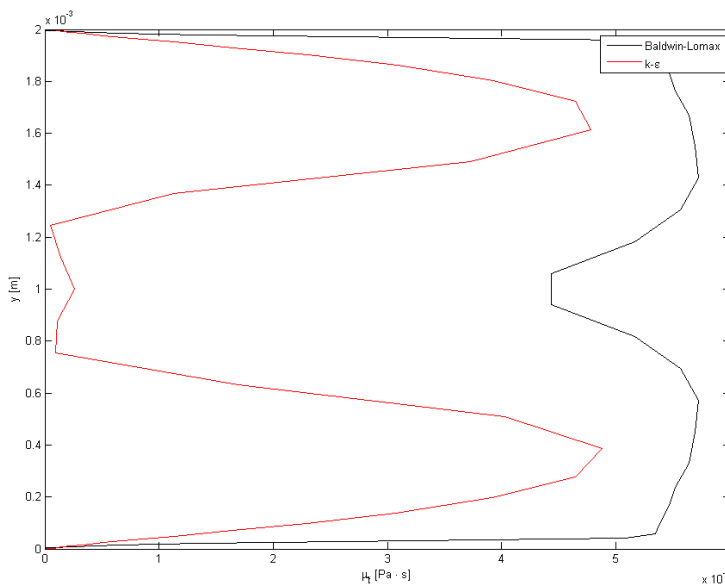
Obrázek 4.8: Profil střední hodnoty rychlosti \tilde{u} v řezu $x = 90$ mm při využití modelu Baldwina a Lomaxe (černě) a $k-\epsilon$ (červeně)

Velkou vypovídající hodnotou o modelech turbulence má průběh turbulentních veličin, tedy turbulentní kinetické energie k , rychlosti disipace ϵ a především turbulentní vazkosti μ_t . Maximální hodnoty turbulentní vazkosti se pro oba modely pohybují v řádu 10^{-4} . Uvědomíme-li si, že tuto hodnotu přičítáme k součiniteli dynamické vazkosti μ , který je řádu 10^{-5} , je zřejmé,



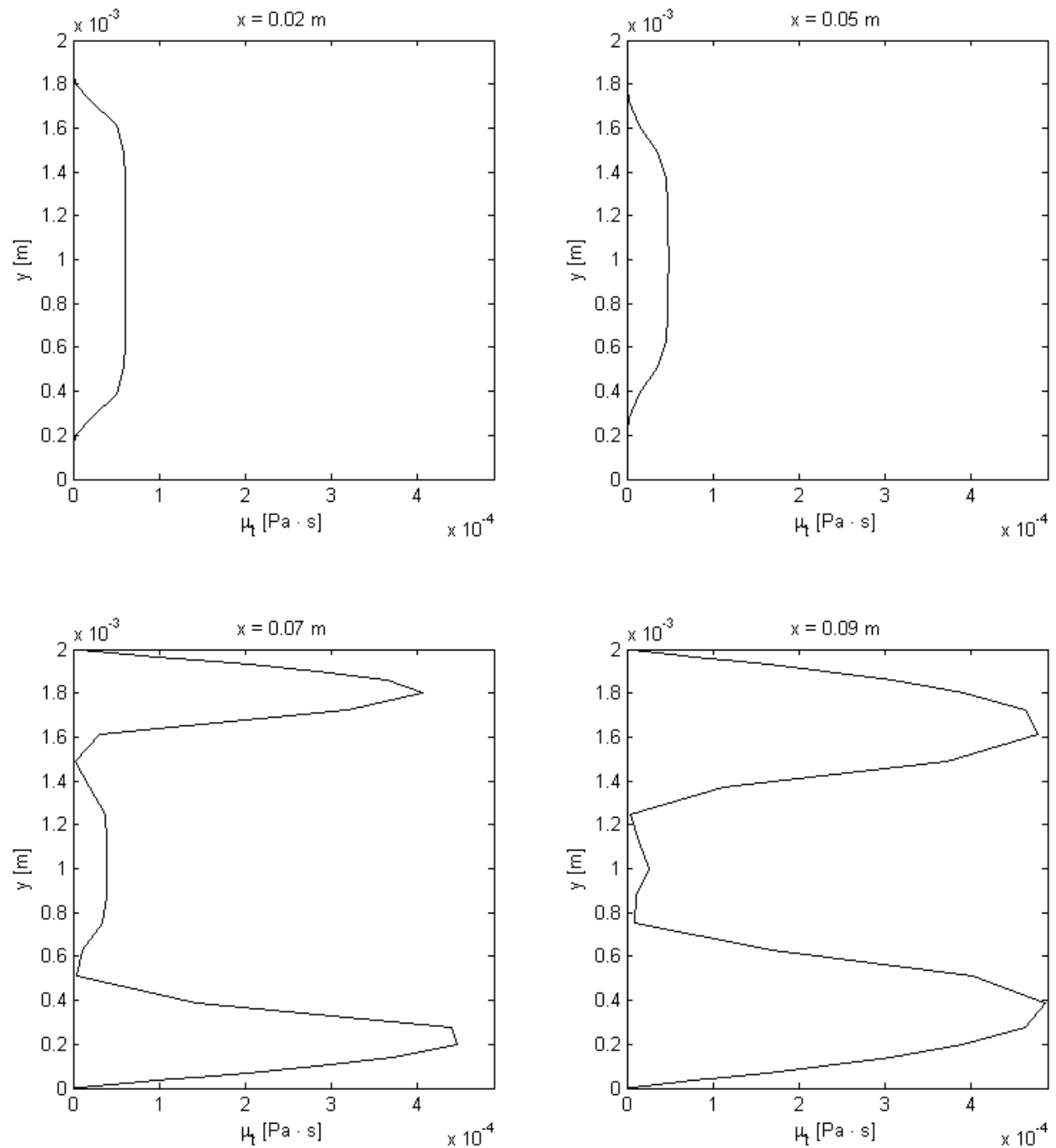
Obrázek 4.9: Vlevo závislost bezrozměrné rychlosti u^+ na bezrozměrné vzdálenosti od stěny y^+ v řezu $x = 90$ mm v dolní polovině kanálu při využití modelu Baldwina a Lomaxe (černě) a $k-\epsilon$ (červeně), vpravo výsledky uvedené v literatuře, [16]

že model turbulence proudění značně ovlivní. Na stěně je turbulentní vazkost nulová, směrem od stěny velmi rychle roste a ve středu kanálu opět klesá. Na obrázku 4.10 je znázorněno rozložení turbulentní vazkosti podél výšky kanálu vypočtené pomocí modelu Baldwina a Lomaxe a modelu $k-\epsilon$, opět v řezu $x = 90$ mm. Pokud bychom počítali turbulentní proudění v širším kanálu, turbulentní vazkost by i v případě využití modelu Baldwina a Lomaxe klesala ve středu kanálu až k nule. To bylo ověřeno výpočtem v kanálu o výšce $h = 5$ mm, výsledky zde nejsou z důvodu velkého rozsahu práce již uvedeny. Vysoké hodnoty turbulentní vazkosti ve středu kanálu vypočtené pomocí modelu turbulence Baldwina a Lomaxe přičítáme tedy právě velmi malé výšce kanálu.



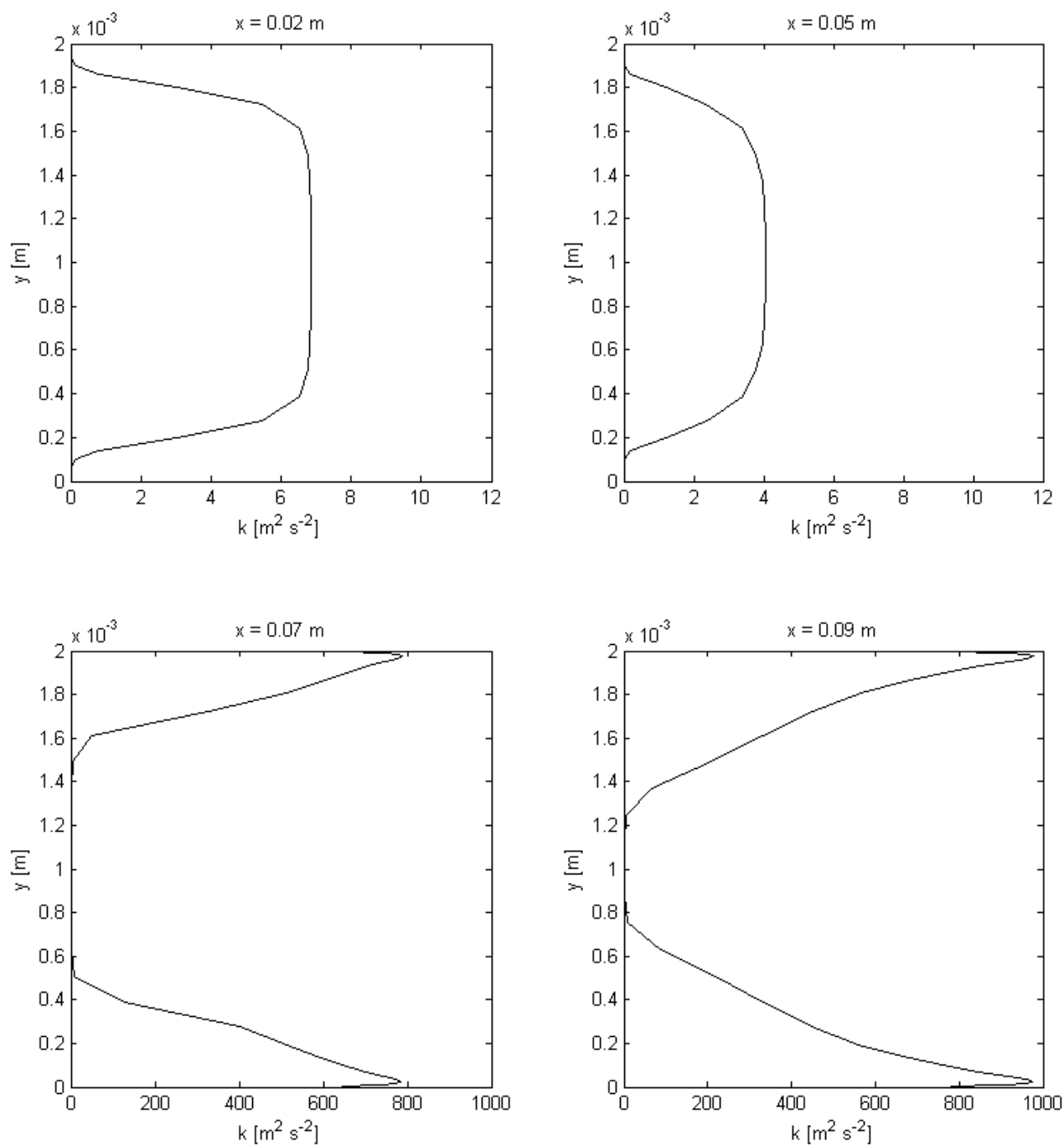
Obrázek 4.10: Průběh turbulentní vazkosti při využití modelu Baldwina a Lomaxe (černě) a $k-\epsilon$ (červeně) v řezu $x = 90$ mm

Model Baldwina a Lomaxe vypočítává po celé délce kanálu kvalitativně stejný průběh turbulentní vazkosti, mírně se mění pouze její velikost. V případě modelu turbulence k - ϵ je situace ale složitější. Průběh turbulentní vazkosti μ_t , turbulentní kinetické energie k a rychlosti disipace ϵ se v jednotlivých řezech podél kanálu značně liší. Obrázky 4.11, 4.12 a 4.13 ukazují průběhy těchto turbulentních veličin v řezech $x = 20$ mm, $x = 50$ mm, $x = 70$ mm a $x = 90$ mm.

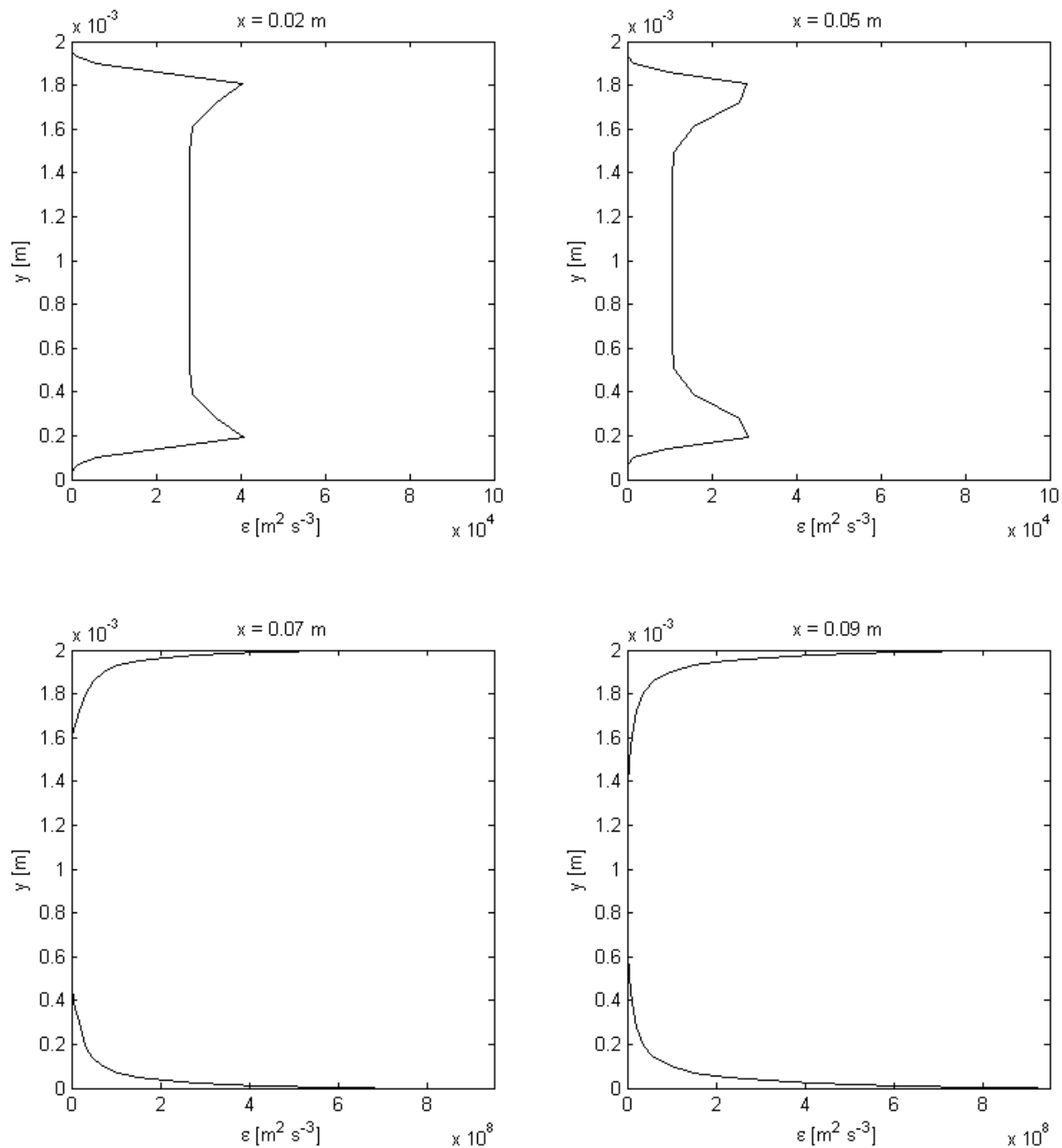


Obrázek 4.11: Průběh turbulentní vazkosti vypočtené modelem k - ϵ ve svislých řezech

Na obr. 4.12 a 4.13 je pro větší názornost použito odlišné měřítko pro horní a dolní dva grafy.

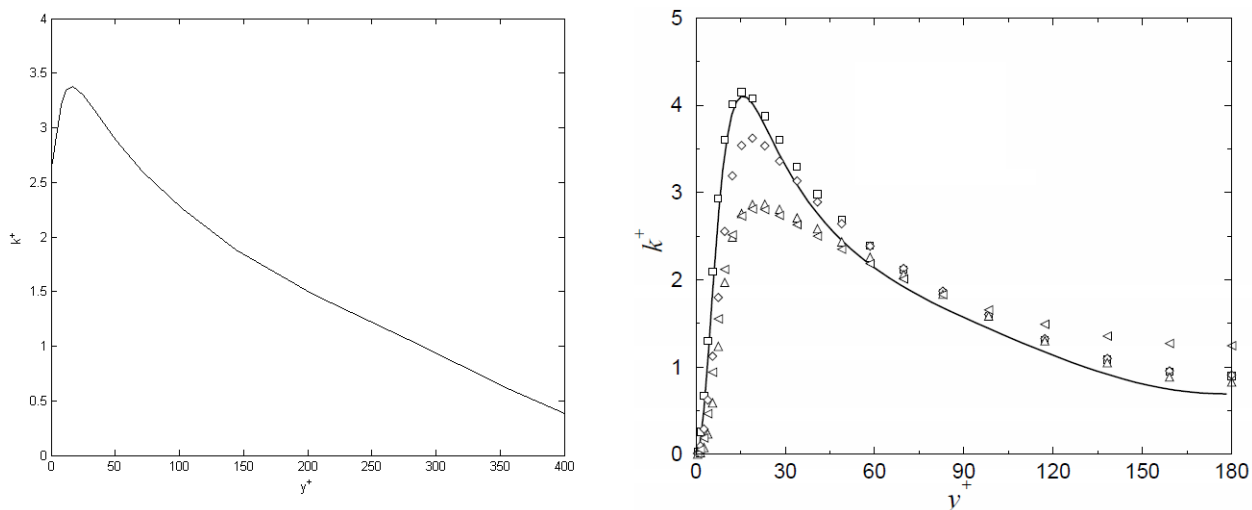


Obrázek 4.12: Průběh turbulentní kinetické energie vypočtené modelem k - ϵ ve svislých řezech

Obrázek 4.13: Průběh rychlosti disipace vypočtené modelem k - ε ve svislých řezech

Velká změna ve velikosti i průběhu turbulentních veličin podél kanálu vypočtených modelem turbulence $k-\epsilon$ je pravděpodobně dána tím, že k vyvinutí turbulentního proudění nedochází hned na začátku kanálu, ale až v jeho druhé polovině, kde se charakter průběhu turbulentních veličin právě začíná značně měnit.

Můžeme také zobrazit závislost bezrozměrné turbulentní kinetické energie $k^+ = \frac{k}{\bar{u}_t^2}$ na bezrozměrné kolmé vzdálenosti od stěny y^+ . Na obrázku 4.14 vlevo je znázorněna závislost $k^+(y^+)$ vypočítaná pomocí modelu turbulence $k-\epsilon$ na řešené úloze a vpravo jsou výsledky uvedené v literatuře, [13], pro dvourozměrné proudění rovným kanálem, ale s odlišnými rozměry a okrajovými podmínkami. Kvalitativní srovnání charakteru zobrazených křivek je za daných podmínek uspokojivé.



Obrázek 4.14: Porovnání charakteru závislosti $k^+(y^+)$ v řezu $x = 90$ mm, vlastní výpočet (vlevo) a výsledky uvedené v literatuře, [13], (vpravo)

Z obrázku 4.10 je zřejmé, že průběh turbulentní vazkosti μ_t vypočítané modelem turbulence Baldwina a Lomaxe a modelem turbulence $k-\epsilon$ se liší, a to především ve středu kanálu. Důsledkem toho jsou samozřejmě i odlišnosti ve vypočtených středních hodnotách ostatních veličin proudového pole, jako například hustoty, teploty nebo složky rychlosti \tilde{u} , jak je vidět na obrázcích 4.3 - 4.8. Princip a implementace obou porovnávaných modelů turbulence jsou natolik odlišné, že ani nelze očekávat shodné výsledky.

Závěr

Předkládaná diplomová práce přináší vhled do základů matematického modelování turbulentního proudění. Systematicky postupuje od popisu základních vztahů přes odvození systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic, přehled významných modelů turbulence a způsob jejich algoritmizace až k praktické implementaci dvou vybraných modelů turbulence v programu pro numerický výpočet turbulentního proudění.

Cílem této práce není přinést nové poznatky v oboru, ale položit základy matematického modelování turbulentního proudění na katedře mechaniky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni, protože na uvedeném pracovišti nebyla tato problematika dosud systematicky řešena a rozvíjena. Přínosem této práce je i usnadnění studia turbulentního proudění dalším studentům, a to především díky detailnímu popisu algoritmizace vybraných modelů turbulence, která není v dostupné literatuře vždy uvedena.

V systému *Matlab* a částečně v programovacím jazyce C++ byl vytvořen vlastní numerický řešič pro turbulentní proudění stlačitelné vazké tekutiny ve 2D, do něhož byl implementován algebraický model turbulence Baldwina a Lomaxe a dvourovnicový model turbulence $k-\epsilon$ s úpravou pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla podle Jonese a Laundera. Jako testovací úloha bylo zvoleno turbulentní proudění v úzkém dvourozměrném kanálu. Na této úloze byly provedeny numerické výpočty pomocí obou vybraných modelů turbulence a výsledky byly porovnány vzájemně i s výsledky dostupnými v literatuře.

Závěrem je možné konstatovat, že cíle zadané diplomové práce byly splněny. Tato práce je kvůli obtížnosti a rozsahu problematiky pouze úvodem do matematického modelování turbulentního proudění a předpokládá se navázání dalším studiem a prohloubením znalostí o modelování turbulentního proudění tak, aby ho bylo možné využívat pro reálné aplikace.

Literatura

- [1] Baldwin B. S., Lomax H.: *Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows*. AIAA Paper 78-257, 1978.
- [2] Baldwin B. S., Barth T. J.: *A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows*. NASA-TM-102847, 1990.
- [3] Deardorff J.: *A Numerical Study of Three Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 41, pp. 453-480, 1970.
- [4] Favre A.: *Équations des gaz turbulents compressibles*. Jour. de Mécanique, Vol. 4, 361-390, 1965.
- [5] Fröhlich J, Rodi W.: *Introduction to Large Eddy Simulation of Turbulent Flows*. In Launder B., Sandham N., Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows, Cambridge University Press, pp. 267-298, 2000.
- [6] Hajžman M., Bublík O., Vimmr J.: *On the modelling of compressible inviscid flow problems using AUSM schemes*. Applied and Computational Mechanics, vol. 1(2), pp. 469-478, 2007.
- [7] Hirsch Ch.: *Numerical Computation of Internal and External Flows*, vol. 1,2. John Wiley & Sons, Chichester 1990.
- [8] Hoffmann K. A., Chiang S. T.: *Computational Fluid Dynamics*, Vol. I, II, III. A Publication of Engineering Education System, Wichita, Kansas, USA, 2000.
- [9] Kalčík J.: *Technická termodynamika*. Nakladatelství československé akademie věd, Praha, 1963.
- [10] Kim J., Moin P., Moser R.: *Turbulence Statistics in Fully Developed Channel Flow at Low Reynolds Number*. Journal of Fluid Mechanics, 177, pp. 133-166, 1987.
- [11] Liou M. S., Steffen Ch. J.: *A New Flux Splitting Scheme*. Journal of Computational Physics 107, 23-39, 1993.
- [12] Noskievič J.: *Mechanika tekutin*. SNTL, Praha, 1987.
- [13] Příhoda J., Louda P.: *Matematické modelování turbulentního proudění*. Skriptum ČVUT v Praze, 2006.

-
- [14] Reynolds O.: *On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion*. Philosophical Transactions of the Royal society of London, Vol. 186, 123-164, 1894.
- [15] Spalart P. R.: *Direct Simulation of a Turbulent Boundary Layer up to $R = 1410$* . Journal of Fluid Mechanics, 187, pp. 61-98, 1988.
- [16] Wilcox D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Canada, California, 2006.
- [17] Vimmr J.: *Matematické modelování proudění stlačitelné tekutiny ve vnitřní aerodynamice*. Disertační práce, ZČU v Plzni, 2002.
- [18] Vimmr J.: *Modelování proudění tekutin s aplikacemi v biomechanice a ve vnitřní aerodynamice*. Habilitační práce, ZČU v Plzni, 2008.
- [19] Vimmr J. , Bublík O., Luxa M., Dvořák R., Šimurda D.: *Numerical and experimental investigation of transonic flow through 2-D model of clearance gap*. In: Proceedings of the conference Engineering Mechanics 2008, pp. 258-259.
- [20] Vitásek E.: *Numerické metody*. SNTL, Praha, 1987.