FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI
STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2018

Propagace nejistoty v úloze sledování polohy pohybujících se objektů

Jan Krejčí[1]

1 Úvodní motivace

Reálné dynamické systémy často mají nedeterministické rysy, které mohou být modelovány ve formě stochastických modelů. Pokud uvažujeme stavový model, hledaná veličina která ho reprezentuje v každém časovém okamžiku se nazývá stav (stochastický proces). Stav nebývá přímo měřitelný a často je třeba jej odhadovat ze zašuměných dat (měření). Tato data mohou být k dispozici v rozličných časových rozestupech, mezi kterými může zbývat i velice dlouhá časová proluka, během které je jakoukoliv znalost o stavu systému možné získat pouze na základě matematického modelu. Úloze hledání této znalosti říkáme propagace nejistoty.

Podle Luo a Yang (2017), příklad situace ve které se zmiňovaná úloha vyskytuje, je pohyb vesmírného objektu na oběžné dráze Země. Pokud je objekt snímán senzory, nejistota v jeho stavu (poloze, rychlosti) je dána nepřesností senzorů. Když vesmírný objekt dopluje za obzor a stane se tak pro senzory neviditelným, je potřeba nejistotu stanovovat na základě matematického modelu. Nejistota dána posledním měřením se tak pro propagaci stává počáteční nejistotou. Difuzní vlastnosti prostředí, neznalost přesného modelu aj. jsou v této práci zanedbány.

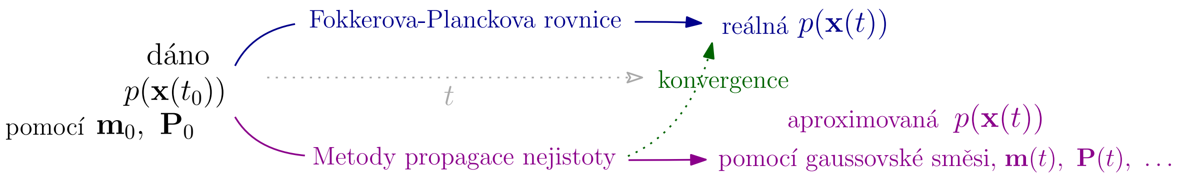
V práci jsou zkonstruovány, analyzovány, testovány a porovnány některé dnes dostupné metody propagace nejistoty uvedené níže v textu.

2 Formalizace problému

Uvažujme nelineární, spojitý stavový model ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)\,, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,, \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ je stav systému v čase t, $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ je dostatečně diferencovatelná funkce a počáteční podmínka $\mathbf{x}_0$ je náhodná proměnná s hustotou pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_0)$, reprezentující nejistotu kterou je potřeba propagovat. Cílem je nalézt $p(\mathbf{x}(t))$, jejíž vývoj je podle Jazwinski (2007) popsán Fokkerovou-Planckovou rovnicí (FPE). Tu je extrémně obtížné řešit numericky, a analyticky jedině ve speciálních případech (lineární systémy).



Obrázek 1: Ilustrace propagace nejistoty

[1] student bakalářského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Kybernetika a řídící technika, e-mail: jkrejci@students.zcu.cz

Otázkou je, jak nejistotu reprezentovat. Počáteční hustota pravděpodobnosti bývá obvykle gaussovská, takže pro její popis postačuje střední hodnota $\mathbf{m}_0$ a kovarianční matice $\mathbf{P}_0$. Různé metody využívají různé popisy, například střední hodnotu $\mathbf{m}(t)$ a kovarianční matici $\mathbf{P}(t)$, ale také gaussovské směsi, nebo množinu bodů ve stavovém prostoru. Úloha je souhrnně popsána na obrázku 1, kde je vlastní propagace rozdělena do dvou větví: přesné řešení podle FPE a aproximativní řešení, které k tomu přesnému může u určitých metod za určitých podmínek konvergovat.

3 Vybrané metody řešení

- Monte Carlo (MC) simulace - výpočetně náročná, nelineární, náhodné generování bodů v prostoru, výsledky je možné brát jako přesné a testovat vůči nim ostatní metody.
- Linear covariance analysis (LinCov) - lokální linearizace, diskrétní propagace.
- First order Taylor expansion (FOTE) based - lokální linearizace, spojitá propagace.
- The covariance analysis describing function technique (CADET) - statistická linearizace.
- Unscentovaná transformace (UT) - nelineární, transformace několika zvolených bodů.
- The adaptive, entropy-based gaussian-mixture information synthesis (AEGIS) - pokročilá, výpočetně náročná, nelineární, popis pomocí adaptující se gaussovské směsi.

Tyto, a další existující metody jsou rozebrány v článku od Luo a Yang (2017).

4 Cíle a výsledky

Práce by měla sloužit jako podklad pro výběr vhodné metody propagace nejistoty v rámci konkrétního problému. Naleznete v ní konkrétní výsledky ze dvou testovacích modelů vytvořených podle DeMars et al. (2013) reprezentující pohyb objektů po oběžné dráze Země. Výsledky jsou porovnány pomocí zvolené míry přesnoti (likelihood agreement measure) a pomocí vizualizace výsledných hustot pravděpodobnosti. Nechybí také přibližná výpočetní náročnost metod.

Literatura

DeMars, K. J., Bishop, R. H. and Jah, M. K. (2013) *Entropy-based approach for uncertainty propagation of nonlinear dynamical systems*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 36, pp. 1047–1057.

Jazwinski, A. H. (2007) *Stochastic processes and filtering theory*. Dover, New York.

Luo, Y. a Yang, Z. (2017) *A review of uncertainty propagation in orbital mechanics*. Progress in Aerospace Sciences, vol. 89, pp. 23–39.