Trendy v podnikání - Business Trends (2018), 8(3), 24-31.
https://doi.org/10.24132/jbt.2018.8.3.24_31

STACIONÁRNÍ RŮST V OPTIMALIZAČNÍM LEONTĚVOVĚ DYNAMICKÉM MODELU
STEADY STATE GROWTH IN LEONTIEF DYNAMIC OPTIMIZATION MODEL

Jan Kodera[1], Quang Van Tran[2], Miloslav Vošvrda[3]

[1] Prof. RNDr. Ing. Jan Kodera, CSc., Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví, kodera@vse.cz
[2] Ing. Quang Van Tran, PhD., Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví, tran@vse.cz
[3] Prof. Ing. Miloslav Vošvrda, CSc., Akademie věd České republiky, Ústav teorie informace a automatizace, vosvrda@utia.cas.cz

Abstract: Leontief model has been a significant contribution to the economic theory for more than a half of century. Since its inception the model was intensively developed in 1960s and 1970s. Among others there has been a great effort to dynamize it, to which Polish economist Lange was one of the most known contributors with his work on the theory of reproduction and accumulation (Lange, 1966). The paper investigates the existence and properties of stationary growth in the Leontief dynamic optimization model, in which the optimization criterion is a specific utility function. In the model, we focused on the determination of stationary growth. We also set conditions for determining the steady growth rate and for calculating the initial trajectory value, which must be met for their existence. In the last section of the article, we focused on numerical computations. For this purpose we use the input output table for the Czech economy in 2013 which is aggregated in to 19 sectors according to NACE standard. The results depend on the shape of the utility function, which is affected by the values of the discount coefficient and the elasticity parameter. The article can be served as the basis for analyzing the relationship between the two parameters of the utility function, which are very important for the existence as well as for the economic acceptability of the solution. The results we obtain show the dynamized version of Leontief model can be used to solve the structural and endogenous growth problem as well as to determine its stationary trajectories.

Keywords: Dynamic Leontief model, Input Output analysis, Optimization, Steady state growth, Empirical study

JEL Classification: C67, C61, D57

ÚVOD

Leontěvův model byl v letech šedesátých minulého století výraznou součástí ekonomické teorie, která byla intenzivně rozvíjena. V této době byl rozvíjen zejména dynamický Leontěvův model. K tomuto rozvoji výrazně přispěl polský ekonom Lange se svojí prací o teorii reprodukce a akumulace (Lange, 1966). V knize rozvíjí formulaci spojitého dynamického Leontěvova modelu. Spojitý dynamický model formuloval V. Leontěv v roce 1953 (Leontief, 1953). Je třeba připomenout dvě další významné práce týkající se dynamizace Leonťevova input-output modelu od Holleyho (Holley, 1952, 1953). K rozvoji dynamického Leontěvova modelu výrazně přispěly statě, které analyzují Leontěvův diskrétní dynamický model. Problematiku diskrétního Leontěvova modelu zpracovává poměrně rozsáhlá vědecká literatura, (viz Dantzig 1955). Diskrétní dynamické Leontěvovy modely jsou formulovány a studovány ve vědecké literatuře jako optimalizační modely. Jako jeden z prvních se problematikou optimalizace v dynamickém Leontěvově modelu zabýval Dantzig.

Leontěvův statický model má teoretický základ ve Walrasově modelu celkové rovnováhy (Walras, 2003). Výklad Walrasova modelu celkové rovnováhy s konstantními výrobními koeficienty, který je srozumitelný pro současné zájemce o ekonomickou vědu najdeme v knize Allena (1956) nebo v jejím překladu do českého jazyka z roku 1971 (Allen, 1971). Leontěvův model je jistým zobecněním metodologie Walrasova modelu. Komodity v dané ekonomice označíme vektorem $x=(x_1,\dots,x_n)$. Prvních k těchto komodit slouží jako výrobní činitelé a zbývajících n-k jako spotřební předměty. Technické koeficienty ve Walrasově modelu jsou konstantní a jsou definovány jako množství výrobního činitele $i=1,\dots,k$ potřebné na výrobu jedné jednotky spotřebního předmětu $j=k+1,\dots,n$ a značíme je a_{ij}. Technologické rovnice ve Walrasovu modelu mají tvar:

$$\sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} x_i = x_i \,, i = 1, \dots, k$$

Výrobní rovnice modelu vyjadřují distribuci jednotlivých výrobních činitelů do výroby spotřebních předmětů. Dalšími rovnicemi jsou cenové rovnice, které vyjadřují skutečnost, že cena výrobku nemůže být větší než náklady na výrobní činitele.

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i = p_j \,, j = k + 1, \dots, n$$

Leontěvův statický model budeme interpretovat jako zobecnění výrobního sektoru Walrasova modelu v tom smyslu, že každá komodita slouží jako výrobní činitel, tak i jako spotřební předmět. Ve vědecké literatuře se setkáváme i s dynamickou verzí Leontěvova modelu a to jak s diskrétní, tak i spojitou. Dynamický Leontěvův model můžeme díky vlastnostem jeho řešení zařadit mezi moderní modely endogenního ekonomického růstu. V poslední době lze vypozorovat zvýšený zájem odborné veřejnosti o Leontěvův model a jeho využití (Raa, 2005, Miller a Blair, 2009 a Okuyama, 2017). Z těchto důvodů si klademe za cíl formulovat model endogenního ekonomického růstu na základě dynamického Leontěvova modelu. Pro jeho splnění nejdříve bude formulována tabulka náklady-výroba (input-output). Z proměnných tabulky budou odvozeny technologické koeficienty, které hrají důležitou úlohu v Leontěvově modelu, jak v statickém i dynamickém. Pro dynamický Leontěvův model je důležitá matice investičních koeficientů, která bude rovněž definována. Dynamický Leontěvův model sestrojíme za předpokladu rovnosti matice technologických a investičních koeficientů. Potom budeme definovat optimalizační úlohu na tomto modelu. Kritériem optima bude maximalizace násobku vektoru optimálních proporcí konečné spotřeby v nekonečném časovém horizontu. Za tímto účelem odvodíme Kuhnovy-Tuckerovy podmínky pro dynamickou úlohu. Hlavním úkolem je analýza stacionárního růstu. Za tímto účelem zformulujeme úlohu na minimální stacionární růst v Leontěvově dynamickém modelu a najdeme nutné podmínky pro minimum. Teoretické úvahy budeme ilustrovat na numerickém příkladu s daty České ekonomiky.

Při výkladu modelu začneme s tabulkou náklady-výroba (input-output) jednotlivých odvětví, jejichž počet označíme symbolem n. V teoretickém výkladu budeme předpokládat, že v každém odvětví je vyráběn právě jeden druh komodity, ztotožníme tedy v dalším výkladu druh zboží s odvětvím. Množství j-tého zboží ($j=1,\dots,n$), které slouží k výrobě i-tého zboží ($i=1,\dots,n$) označíme x_{ij} a nazveme meziodvětvovým přesunem z j-tého do i-tého odvětví. Množství j-tého zboží, které je spotřebováno označíme y_j. Celkové množství j-tého zboží označíme x_j. Tab. 1 popisuje vstupy jednotlivých komodit do výrob všech komodit a spotřeby. Předpokládá se, že produkce daného odvětví může být užita jako výrobní činitel v témže odvětví, může tedy být $x_{ii}>0$. Políčka.

Tab. 1: Tabulka input-output

x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}
x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}
.	.		.
.	.		.
.	.		.
x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nn}
y_1	y_2	…	y_n
x_1	x_2	…	x_n

Zdroj: Autoři

v jednotlivých sloupcích tabulky představují užití dané komodity při výrobě ostatních komodit a spotřebě. Za předpokladu neexistence ztrát platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + y_j = x_j \ , j = 1, \dots, n \tag{1}$$

Označíme $a_{ij} = x_{ij}/x_i$ a nazveme technologickým koeficientem, který značí množství j-té komodity použité na výrobu jednotky i-té komodity. Pokud j je kapitálové zboží a_{ij} je depreciace na jednotku výrobku. Využijeme-li definici technologického koeficientu, přejde výraz (1) v rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + y_j = x_j \ , j = 1, \dots, n \tag{2}$$

Když položíme $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$, vztah (2) přejde

$$x\boldsymbol{A} + y = x, \tag{3}$$

kde **A** je matice technologických koeficientů a_{ij}.

Výše uvedený statický model reformulujeme jako dynamický model zavedením času, odlišením investic a spotřeby a definováním investičních koeficientů, což umožní časové rozlišení v modelu. Výrobu, spotřebu, a meziodvětvové přesuny rozlišíme v čase a tak píšeme $x_{j,t}, y_{j,t}, x_{ij,t}$. Spotřebu rozdělíme na spotřebu domácností případně vlády a investice případně přírůstek zásob $y_{j,t} = c_{j,t} + \mathbf{I}_{j,t}$, kde $\boldsymbol{I}_{j,t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_{ij,t}$ a $\mathbf{I}_{ij,t}$ značí produkci zboží j užitou pro přírůstek produktu j v čase t. Dynamické znázornění vztahů input output najdeme v Tab. 2. V dynamické tabulce meziodvětvových vztahů najdeme navíc sekci investičních přesunů. Rovnice užití j-tého výrobku bude mít tvar:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij,t} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_{ij,t} + c_{j,t} = x_{j,t} \ , j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

Předpokládejme, podíl $b_{ij} = \boldsymbol{I}_{ij,t}/(x_{j,t+1} - x_{j,t})$ je konstantní a nazvěme ho investičním koeficientem. Ekonomicky ho budeme interpretovat jako množství i-tého produktu nutného jako fixní kapitál nebo jako přírůstek zásob pro rozšíření výroby j-tého produktu o jednotku. Investiční koeficient obecně není rovný technologickému koeficientu. Využijeme-li definice technologického a investičního koeficientu, rovnice (4) přejde v rovnici

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{i,t} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(x_{j,t+1} - x_{j,t}\right) + c_j = x_{j,t}, \ \ j = 1, \dots, n \tag{5}$$

Označíme-li ***B*** matici investičních koeficientů b_ij, potom maticový tvar výše uvedené rovnice je:

$$x_t \boldsymbol{A} + (x_{t+1} - x_t)\boldsymbol{B} + c_t = x_t$$

https://doi.org/10.24132/jbt.2018.8.3.24_31

kde $x_t = (x_{1,t}, \dots , x_{n,t})$, $c_t = (c_{1,t}, \dots , c_{n,t})$. Počáteční hodnotu produkce jednotlivých odvětví označíme $x_I = (x_{1,I}, \dots , x_{n,I})$. Systém rovnic (5) můžeme nahradit systémem nerovností, které připouštějí, že produkce odvětví může být větší než užití.

$$x_t\boldsymbol{A} + (x_{t+1} - x_t)\boldsymbol{B} + c_t \leq x_t,\;\; x_0 \leq x_I$$

Výše uvedený systém nerovnic upravíme na

$$x_t(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) - (x_{t+1} - x_t)\boldsymbol{B} \geq c_t,\;\; x_0 \leq x_I \tag{6}$$

Tab. 2: Dynamická tabulka input-output

$x_{11,t}$	$x_{12,t}$	…	$x_{1n,t}$
$x_{21,t}$	$x_{22,t}$	…	$x_{2n,t}$
.	.		.
.	.		.
.	.		.
$x_{n1,t}$	$x_{n2,t}$	…	$x_{nn,t}$
$\boldsymbol{I}_{11,t}$	$\boldsymbol{I}_{12,t}$	…	$\boldsymbol{I}_{1n,t}$
$\boldsymbol{I}_{21,t}$	$\boldsymbol{I}_{22,t}$	…	$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{2}n,t}$
.	.		.
.	.		.
.	.		.
$\boldsymbol{I}_{n1,t}$	$\boldsymbol{I}_{n2,t}$	…	$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{nn},\boldsymbol{t}}$
$c_{1,t}$	$c_{2,t}$	…	$c_{n,t}$
$x_{1,t}$	$x_{2,t}$	…	$x_{n,t}$

Zdroj: Autoři

1. FORMULACE LEONTĚVOVA MODELU S OPTIMÁLNÍM RŮSTEM

Podle předpokladu jsou koeficienty matic **A** a **B** konstantní. Pro výpočty na tomto modelu, je potřebná znalost obou matic. Výpočet investičních koeficientů přináší jisté problémy na rozdíl od výpočtu technologických koeficientů. Jednou z možností je nepočítat matici investičních koeficientů přímo, ale odvodit ji z matice technologických koeficientů **A**. Jedním z přístupů je zvolit délku období rovnou době životnosti kapitálu. Za tuto dobu je zásoba kapitálu spotřebována celá a tak investiční koeficient je roven koeficientu technologickému, tedy **A**=**B**. V takovém případě rovnice (6) přejde v následující rovnici:

$$x_t \geq x_{t+1}\boldsymbol{A} + c_t,\;\; x_0 \leq x_I \tag{7}$$

Výzkum, který se zabývá Leontěvovými dynamickými modely nepředstavuje hlavní proud, tudíž práce na toto téma nenacházíme v prestižních časopisech, ale spíše v materiálech s konferencí, které se týkají problematiky růstu ve strukturních modelech. Například zajímavou práci o Leontěvově modelu lze najít v článku od Kurze a Salvadoriho (Kurz a Salvadori, 2000). V tomto příspěvku můžeme najít optimalizační Leontěvův model ve kterém je řešen optimální stacionární růst. V tomto článku přejímáme formulaci modelu, ale lišíme se v použité metodě řešení a v tom, že použitá metoda je ilustrována příkladem na datech české ekonomiky.

Účelová funkce v Leontěvově modelu je definována tak, že se zavedou požadované proporce spotřeby, které budou dány, řekněme, vektorem v. Důležité tedy zatím je, v jakém poměru budou jednotlivé komodity spotřebovávány, nikoli velikost spotřeby, proto je vektor normalizován. Velikost normy vektoru může být jedna. Cílem modelu je maximalizace spotřeby proporcionálně neměnným růstem tedy násobením vektoru v kladnou konstantou α v největší přípustné velikosti. Předpokládáme ovšem, že užitek z konstanty α neroste úměrně této konstantě, ale jeho přírůstky klesají. Závislost α je dána funkcí okamžitého užitku $f(\alpha_t)$, $\alpha_t>0$, kde α_t je hodnota konstanty v čase t. Funkce užitku v nekonečném časovém horizontu je dána jako řada diskontovaných okamžitých užitků:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(\alpha_t)$$

kde *β∈(0,1)* je diskontní součinitel. Tvar užitkové funkce volíme v souladu s principy nové keynesovské ekonomie.

$f(\alpha_t) = \frac{\alpha_t^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$ pro $\alpha_t > 0, \sigma \in [0,1) \cup (1,\infty)$ kde $f(\alpha_t) \in \left[-\frac{1}{1-\sigma}, \infty\right)$ pro $\sigma \in [0,1)$, $f(\alpha_t) \in (-\infty, \frac{1}{\sigma-1}]$ pro $\sigma \in (1,\infty)$. Máme na paměti, že

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{\alpha_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} = \log \alpha_t.$$

Nyní jsme dostatečně připraveni presentovat optimalizační problém na Leontěvově dynamickém modelu.

$$\max_{\alpha_t > 0} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{\alpha_t^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \tag{8}$$

Vzhledem k rovnici (7) kde jsme položili $c_t = \alpha_t v$ a tak dostali

$$x_t \geq x_{t+1}\boldsymbol{A} + \alpha_t v, \;\; x_0 \leq x_I \tag{9}$$

Odpovídající Kuhnovy-Tuckerovy pro úlohu (8)-(9) jsou

$$\alpha_t = [\beta^{-t} v z_t]^{-\frac{1}{\sigma}}$$
$$\boldsymbol{E}z_t - \boldsymbol{A}z_{t-1} = 0, \qquad z_t \geq 0$$
$$x_t z_t = [x_{t+1}\boldsymbol{A} + \alpha_t v] z_t,$$

kde ***E*** je jednotková matice a z_t je vektor Lagrangeových multiplikátorů. Řešit tuto úlohu není jednoduché a není to ani cílem tohoto příspěvku. Podstatnou pozornost budeme věnovat stacionárnímu růstu v tomto modelu. Při analýze stacionárního růstu vycházíme ze základní formulace tohoto modelu dané rovnicemi (8) a (9).

2. STACIONÁRNÍ RŮST V LEONTĚVOVĚ DYNAMICKÉM MODELU

Stacionární růst ekonomiky je situace, kdy makroekonomické proměnné rostou stejným konstantním tempem růstu. V našem případě je to vektor produkcí jednotlivých odvětví, jehož souřadnice rostou stejným tempem růstu tedy $x_t = (1+g)^t x_0$, a tak nerovnost (9) nabývá tvaru

$$x_0(1+g)^t \geq x_0(1+g)^{t+1}\boldsymbol{A} + \alpha_t v, \tag{10}$$

Kuhnovy-Tuckerovy podmínky pro úlohu (8) a (10) jsou

$$\alpha_t = [\beta^{-t} v z_t]^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{E}z_t - \boldsymbol{A}z_{t-1} = 0, \;\; z_t \geq 0 \tag{12}$$

$$x_0(1+g)^t z_t = [x_0(1+g)^{t+1}\boldsymbol{A} + \alpha_t v] z_t \tag{13}$$

Řešení rovnic (11) – (12) není tak složité. Matice **A** je nezáporná a nerozložitelná a její norma je menší než jedna. To samé platí o matici ***A´***, kde čárka značí transpozici matice. Maticová diferenční rovnice (12) má obecné řešení $z_t = \lambda^t z$, kde λ≠0 a z≠0. Dosadíme obecné řešení do (12) a po malé úpravě dostaneme

$$(\lambda - \boldsymbol{A})z = 0 \tag{14}$$

Partikulárním řešením rovnice je podle Perronovy-Frobeniovy věty největší pozitivní charakteristické číslo matice $\boldsymbol{A}$ a sdružený pozitivní charakteristický vektor z. Když dosadíme do (11) dostaneme

$$\alpha_t = [\beta^{-t}\lambda^t vz]^{-\frac{1}{\sigma}}$$

Protože vektor z je kladný nerovnice (10) bude splněna jako rovnice

$$x_0(1+g)^t = x_0(1+g)^{t+1}\boldsymbol{A} + \alpha_t v,$$

Rovnici dělíme $(1+g)^t$, a po substituci z (11) a po krátké úpravě obdržíme

$$(1+g)^{-1}x_0 = x_0\boldsymbol{A} + \left[\frac{(\beta/\lambda)^{\frac{1}{\sigma}}}{1+g}\right]^t (1+g)^{-1}(vz)^{-\frac{1}{\sigma}}v$$

Vypočteme x0 a dostaneme

$$x_0 = [(1+g)^{-1}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}]^{-1}\left[\frac{(\beta/\lambda)^{\frac{1}{\sigma}}}{1+g}\right]^{t}(1+g)(vz)^{-\frac{1}{\sigma}}v \tag{15}$$

Protože x0 nezávisí na t, musí být

$$1+g = (\beta/\lambda)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{16}$$

Protože problém musí mít ekonomickou interpretaci, tempo růstu musí být kladné g>0. Protože požadujeme aby x0 bylo kladným vektorem, musí platit

$$(\beta/\lambda)^{\frac{1}{\sigma}} < \lambda^{-1}$$

Výše uvedená podmínka implikuje, že β musí být dostatečně malá.

3. EXPERIMENTÁLNÍ VÝPOČET STACIONÁRNÍHO RŮSTU PRO ČESKOU EKONOMIKU

V této části našeho článku se pokusíme ilustrovat výše uvedené teoretické závěry, které se týkají stacionárního růstu v dynamickém Leontěvově modelu na reálných ekonomických datech. Pro tento experiment využíváme data ze symetrické tabulky input output pro Českou republiku z roku 2013. Data jsou veřejně dostupná na stránce Českého statistického úřadu. Pro výpočty spojené s růstem na dynamickém Leontěvově modelu jsme použili programu Matlab.

Experimentální výpočet jsme zahájili tím, že jsme v symetrické tabulce input-output (SIOT) typu odvětví × odvětví z roku 2013 provedli agregaci podle odvětvové klasifikace ekonomických činností dle standardu NACE, která vedla na tabulku o 19 odvětví. Hodnoty matice input output jsou uvedeny v dodatku. Z údajů vzniklé tabulky jsme vypočítali matici technologických koeficientů A o 19 řádcích a 19 sloupcích, kterou použijeme při výpočtu maximálního charakteristického čísla a sdruženého charakteristického vektoru, viz rovnice (12) a (14).

Vypočetli jsme největší charakteristické číslo matice A λ=0.4817 a sdružený charakteristický vektor značený $\tilde{z}$ je [0,185926 0,338656 0,135423 0,239542 0,203228 0,247918 0,253493 0,266191 0,104594 0,218578 0,362678 0,145936 0,430675 0,348368 0,038018 0,035029 0,009959 0,050999 0,115669]. Připomínáme, že řešením rovnice (14) je k-násobek tohoto vektoru, tedy vektor k$\tilde{z}$, k>0, což bude důležité pro stanovení počáteční hodnoty trajektorie stacionárního růstu produkcí jednotlivých odvětví x_0.

Pro výpočet počáteční hodnoty x_0 použijeme rovnice (15) a (16). Diskontní součinitel β a parametr pružnosti σ jsou parametry užitkové funkce a jsou tedy zadány předem. Jejich hodnoty volíme ve výši β = 0,8 a σ =15. Maximální charakteristické číslo matice máme vypočteno, takže použijeme rovnici (16) a vypočteme stacionární tempo růstu g = 0,0344. Zbývá výpočet počáteční hodnoty x0. Pro tento výpočet použijeme rovnici (15). V tomto vzorci máme vypočteny nebo předem stanoveny všechny veličiny vyjma v, což je vektor optimálních proporcí spotřeby. Budeme předpokládat, že konečná spotřeba probíhá vždy v optimálních proporcích, takže jsme v agregované symetrické tabulce upravili agregovaný vektor konečné spotřeby (Tab. 4 sloupec 20) tak, že každou složku jsme vydělili součtem všech složek vektoru a dostali vektor konečné spotřeby v procentuálním vyjádření, který považujeme za vektor optimálních proporcí *v*. V našem příkladu jsme vypočetli hodnotu v =[0,0253 0,0024 0,1995 0,0562 0,0110 0,0048 0,0806 0,0507 0,0377 0,0289 0,0327 0,1223 0,0061 0,0152 0,1216 0,0682 0,0946 0,0240 0.0181]. Dosadíme do rovnice (15) a dostaneme vektor $\tilde{x}_0$. Vlnovku jsme použili, abychom zdůraznili, že jsme do vztahu (15) dosadili vektor $\tilde{z}$. Vektor x_0 musí splňovat druhou nerovnost v (9), kde za počáteční hodnotu x_I volíme vektor agregované produkce jednotlivých odvětví, který je uveden v Tab. 4 sloupec 22. Je zřejmé, že vektorx_0 musí navíc zachovávat proporce vektoru $\tilde{x}_0$ a co nejvíce se přiblížit zdola vektoru počáteční hodnoty x_I. Snadno zjistíme, že $x_I \geq h\tilde{x}_0$, kde

$$h = \min\left\{\frac{x_{I,i}}{\tilde{x}_{0,i}}\right\}_{i=1}^{n}$$

Hodnota vektoru x_0 v našem příkladu je dána [187890,9 227379,1 307378,2 189178,9 125859,0 73667,88 234330,0 162819,0 75240,96 104237,8 162171,3 179391,2 142387,2 149211,1 136823,7 83653,54 100357,3 45327,23 70434,64]

Výpočet trajektorie stacionárního růstu je jednoduchý, stačí použít vztahu $x_t = (1+g)^t x_0$.

ZÁVĚR

Naším záměrem byla formulace Leontěvova dynamického optimalizačního modelu se specifickou užitkovou funkcí. V modelu jsme se zaměřili na analýzu stacionárního růstu a našli jsme vztahy po určení stacionárního tempa růstu a určení počáteční hodnoty trajektorie, která musí vyhovovat počátečním podmínkám. Teoretické úvahy byly následně ilustrovány výpočtem stacionárního růstu z reálných ekonomických dat. Jedná se o data ze symetrické tabulky input output České ekonomiky z roku 2013. Tento výpočet hraje velmi důležitou roli pro předpověď dlouhodobého potenciálního růstu ekonomiky. Výpočet počáteční hodnoty trajektorie je nezbytný pro určení trajektorie stacionárního růstu. Tento výpočet závisí na tvaru užitkové funkce, který je ovlivněn hodnotami diskontního součinitele a parametru pružnosti. V poslední části článku uvádíme numerický příklad jako ilustraci teoretických výsledků. V budoucím období počítáme s rozšířením výpočtů a analýzou vztahů mezi oběma parametry užitkové funkce, na kterých závisí existence a ekonomická přípustnost řešení.

Poděkování: Autoři děkují za finanční podporu P402/12/G097 GAČR DYME – Dynamické modely v ekonomii, v jehož rámci tento článek vznikl.

LITERATURA

Allen, R. D. G. (1956). *Mathematical Economics.* London: MacMillan.

Allen, R. D. G. (1971). *Matematická ekonomie.* Praha: Academia.

Dantzig, G. B. (1955). Optimal Solution of a Dynamic Leontief Model with Substitution. In *Econometrica*. 23(3), 295-302.

Holley, J. (1952). A Dynamic Model. In *Econometrica*. 20, 616-642.

Holley, J. (1953). A Dynamic Model II: Actual Model Structures and Numerical Results. In *Econometrica*. 21, 298-324.

Kurz H. D., & Salvadori, N. (2000). The Dynamic Leontief Model and the Theory of Endogenous Growth. In *Economic Systems Research*. 12(2), 255-265.

Lange, O. (1966). *Teorie reprodukce a akumulace*. Praha: Nakladatelství politické literatury.

Leontief, W. (1953). *Dynamic Analysis in Studies in the Structure of the American Economy: Theoretical and Empirical Explorations*. New York: Oxford University Press.

Miller, R. E., & Blair, P. D. (2009). *Input Output Analysis: Foundations and Extensions.* Cambridge: Cambridge University Press.

Okuyama, Y. (2017). Dynamic Input Output Analysis. In Raa, T. T. (eds) *Handbook of Input-Output Analysis.* Cheltenham, UK: Edward Elgar.

Raa, T. T. (2005). *The Economics of Input Output Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Walras, L. (2003). *Elements of Pure Economics*. London: Routledge.

DODATEK

Agregovaná tabulka Input – Output, kde sloupce 1-19 jsou odvětví podle OKEČ, v sloupci 20 jsou výdaje na konečnou spotřebu, v sloupci 21 je konečné užití celkem a v sloupci 22 jsou užité zdroje celkem. Všechny údaje jsou v miliónech Kč v běžných cenách.

Tab. 3: Tabulka Input Output – část 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
30766	317	127820	2764	375	512	6702	520	7048	95	55
881	3392	136089	105348	680	5243	877	979	103	101	128
68599	17877	1740281	26640	22045	113082	112069	60834	27495	30488	8332
3175	3155	90220	91778	2357	7392	12053	13422	4420	2658	3688
1205	398	25352	3807	18049	2751	2646	1025	1248	378	252
2844	1410	24396	4905	2455	206613	9742	20391	2618	1208	2084
18333	3779	265755	8307	7261	17643	100041	27343	8232	14860	6639
5154	10083	74255	12074	1641	7587	34279	147502	1227	4991	7124
542	165	4189	636	266	406	5061	4515	2912	838	368
1422	176	25077	2175	644	2102	18193	6647	2327	79297	14409
4348	706	26123	7679	2284	6719	23071	13012	1440	3004	73116
1206	352	18519	2050	3587	19505	50785	7019	12448	9459	7942
5796	1666	69768	4377	5769	83538	47321	6989	3692	9317	9441
1165	1185	24460	1710	2068	8188	17915	9765	3915	5372	5121
1274	508	5130	665	1941	249	2411	8358	387	710	1449
239	19	3258	452	97	214	1411	932	253	722	1187
116	14	2187	83	65	223	696	432	251	147	186
76	4	638	49	224	62	560	115	1118	242	81
135	15	4352	178	102	311	3570	2779	833	665	1555

Zdroj: ČSÚ + Autoři

Tab. 4: Tabulka Input Output – část 2

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
530	780	1205	65	88	512	903	105	65296	126125	307287
916	1977	284	316	191	124	69	60	6159	37061	294819
56950	39409	15061	11661	8229	43194	6876	6142	514884	3460752	5876016
20135	5040	2169	8295	5227	7305	1885	1940	144894	181160	467474
4453	1042	2238	1428	802	1631	255	245	28426	56654	125859
55005	20167	2007	17407	2341	4790	1955	673	12489	326928	709939
12333	26703	13164	4334	2363	8306	2942	2668	208027	319961	870967
2344	4692	14346	7500	886	1530	1009	1128	130798	278072	617424
2960	3805	9013	2114	1310	2654	941	483	97365	147452	190630
4061	15762	2610	9198	3613	1929	2265	2337	74485	216522	410766
44809	12402	5386	4356	2109	2752	2545	4693	84267	102259	342813
35894	14468	3312	5267	6160	4939	5082	1719	315710	408331	618044
24885	115038	6704	11746	3852	3901	2968	1131	15786	113019	530918
14959	6929	35913	10565	1385	2310	3120	850	39226	56336	213231
1305	1036	794	6371	291	676	567	252	313840	320946	355320
1507	2038	931	2465	6055	368	215	208	175995	194355	216926
559	376	296	401	103	6861	320	94	244119	255311	268721
2051	653	313	170	92	313	17896	1720	61914	69707	96084
898	958	507	157	524	2229	871	4002	46725	55683	80324

Zdroj: ČSÚ + Autoři