Posudek oponenta na doktorskou disertační práci Toughness and Hamiltonicity of graphs Adama Kabely

Předkládaná práce shrnuje výsledky uchazeče z hlavní oblasti jeho profesního zájmu: hamiltonovské vlastnosti grafu, zejména existence hamiltonovského cyklu. V předkládané práci se zaměřil na souvislosti hamiltonovských vlastností s tuhostí grafu a také na třídy grafů definované pomocí zakázaných podgrafů. Dlužno podotknout, že ze dle seznamu prací se uchazeč zabýval i jinými tématy, např. barevností grafu, ale ta nejsou předmětem předložené práce.

Existence cyklu či cesty v grafu, která prochází každým vrcholem právě jednou je jednou z hlavních otázek teorie grafů. Tuhost je grafový parametr, definován jako nejmenší možná hodnota podílu velikosti řezu a počtu komponent vzniklých odebráním tohoto řezu. (Úplné grafy mají tuhost dodefinovánu jako nekonečnou.) Hlavním motivem je Chvátalova domněnka, zdali existuje konečná hodnota tuhosti, která by pro každý takto tuhý graf zaručila existenci hamiltonovského cyklu.

Práce zkoumá Chvátalovu domněnku ze tří aspektů - určení tříd grafů, na nichž domněnka platí, případně zesílení předpokladů tak, aby byla existence hamiltonovského cyklu zaručena; a konstrukce dostatečně tuhých grafů, které hamiltonovské nejsou.

Ve všech třech případech autor předkládá podrobný přehled doposud známých výsledků, v mnoha případech s důkazy nebo jejich náznaky a teprve poté doplňuje své vlastní výsledky.

Za jeden z hlavních nových výsledků lze uvést důkaz, že všechny chordální grafy tuhosti 10 jsou hamiltonovské. Zde je nejprve za pomoci zobecnění Hallovy věty od Ahariniho a Haxellové ukázáno, že ve třídě chordálních grafů je existence dostatečně velkého párování postačující pro existenci hamiltonovského cyklu. Již tato část důkazu je zajímavá sama o sobě, neboť dává do netriviální souvislosti různé strukturální vlastnosti grafu. Následně je ukázáno, že grafy bez dostatčně velkých párování nemohou být tuhé. Uvedený výsledek uchazeče a jeho školitele byl již publikován v prestižním časopise Journal of Combinatorial Theory series B. V tomto směru uchazeč dále zkoumal hamiltonovskou souvislost chordálních grafů, jak ukazují výsledky z druhé kapitoly předložené práce.

Třetí kapitola je věnována konstrukcím grafů bez hamiltonovských kružnic. V jejím závěru je představen vlastní výsledek uchazeče o konstrukci třídy 1-tuhých rovinných 3-stromů, kde nejdelší cyklus obsahuje jen sublineární počet vrcholů, přesněji horní mez je n^c, pro $c=log_{30}22$. Autor uvádí, že idea rekurentní konstrukce a metoda odhadu nejdelšího cyklu jsou převzaty z jiných prací, a že jeho hlavní přínos je v konstrukci základních stavebních prvků a v provedení argumentace ohledně délky nejdelšího cyklu.

Rozsah práce i dlouhý seznam referencí dosvědčuje, že se autor velice dobře orientuje v aktuální problematice. Práce by mohla posloužit i jako přehledová studie současné úrovně poznání problému. Občas však se však autor uchyluje k až příliš stručnému popisu, což ztěžuje pochopení pro případné čtenáře. Měl-li by uvedený text posloužit k výuce či jako základ monografie, bylo by dobré tato místa rozvést a náležitě vysvětlit. Jako příklad uvedu zavedení pojmů squeeze, twig a bud na str. 19.

Jak jsem již uvedl, mnohé předložené výsledky se již dočkaly publikace v mezinárodních časopisech, popřípadě jsou zaslány k publikaci, což samo o sobě je obdivuhodné. Práce splňuje požadavky kladené na rozsah i kvalitu provedení doktorské disertace a především naplnila vytýčený cíl – získání nových poznatků v oboru teorie grafů.

Doporučuji předkládanou práci k přijetí za doktorskou disertační práci.

Jiří

V Praze dne 1. června 2018 doc. RNDr. Jiří Fiala, Ph.D.

OPONENTNÍ POSUDEK DISERTAČNÍ PRÁCE

"Toughness and Hamiltonicity of graphs" Mgr. Adama Kabely

Vašek Chvátal
Distinguished Professor Emeritus
Department of Computer Science and Software Engineering
Concordia University, Montreal

As this dissertation is written in English, it seems only natural to write its review in the same language.

This is an impressive work. I recommend unequivocally that it be defended. Mgr. Kabela's dissertation constitutes a significant contribution to progress toward a conjecture that has received much attention over the past forty-five years. Its methods are innovative and the candidate strives for a unified view of disparate subjects. A convincing testimony of the high calibre of its results is the fact that two of them have been published in respectable journals. (In particular, Journal of Combinatorial Theory B, perhaps the best in its field, is notorious for its stringent judgment of manuscripts submitted for publication.) The total of four papers published in such journals is more than usual for a Ph.D. candidate.

Here is a mild criticism: I have been a little annoyed when I had to work out which of the various theorems are the candidate's original results and which of them came from other people. True, an alert reading of the surrounding text reveals the answer in most cases and, when that fails, one can always flip back and forth between the current page and Section 4.1. Nevertheless, it would have been more considerate to the judges of the dissertation to present the two kinds of results in two separate parts of the text rather then intermingling them indiscriminately in one continuous narrative.

A few concluding comments on the presentation follow:

- In Section 1.5, I would have liked to see what some consider the central result on hamiltonicity of squares of graphs, namely, the fact that recognition of graphs whose squares are hamiltonian is an NP-complete problem (P. Underground, On graphs with hamiltonian squares, *Discrete Mathematics* 21(1978), p. 323.).

- Proposition 2.7: $n \geq 3$ is not an integer. It is a proposition. A correct way of saying "Let $n \geq 3$ be an integer" is "Let n be an integer greater than 2". (Sadly, such abominations are in a widespread use. I am raising this issue in the hope of recruiting the candidate to the minority that rejects them. This minority is bound to lose, but at least we will go down fighting.)

- The candidate's motivation for devoting more than two pages to a proof of Proposition 2.21, even though a much stronger result was published twenty-one years ago, seems to be his wish to illustrate the technique of [65].That is fine, but why glorify the weak assertion by calling it Proposition 2.21?

- It took me two puzzled readings of Theorem 2.23 to realize that its statement is a tortuous way of saying

  > *Every 1-tough H-free graph (on at least 3 vertices) is Hamiltonian if and only if H is a proper induced subgraph of $K_1 \cup P_4$.*

- page 61, line 8: The "in sequence" confuses me. Why should the order in which the copies of vertices are added matter? Isn't an H^*-graph just a graph arising from H by substituting independent sets for vertices?

- Three misprints:
  - page 16, line 1: the tight bound $\rightarrow$ a tight bound
  - page 27, line 9: intersecion $\rightarrow$ intersection
  - page 29, line 14 from the bottom: authors [27] $\rightarrow$ authors of [27]