

# UŽITÍ PROGRAMU GEOGEBRA (NEJEN) VE VÝUCE MATEMATIKY NA 2. STUPNI ZŠ

## USING OF GEOGEBRA (NOT ONLY) IN TEACHING MATHEMATICS AT THE SECOND GRADE OF ELEMENTARY SCHOOL

Jan Frank, Lukáš Honzík

### Abstrakt

Program dynamické geometrie GeoGebra představuje v současné době pravděpodobně nejčastěji používaný počítačový software ve výuce matematiky na českých základních školách. Jeho hlavními výhodami jsou bezesporu prostředí v češtině (včetně manuálu), intuitivní ovládání a licence typu *open-source*. Aktuálně je k dispozici ke stažení více verzí tohoto softwaru, a to nejen pro počítače, ale též pro mobilní zařízení se systémem Android nebo iOS. Vyučující navíc již nemusí všechny figury do výuky vytvářet sám, ale může využít rozsáhlé databáze výukových materiálů vytvořených uživateli programu z celého světa. V současné době obsahuje tato databáze nejen figury použitelné v hodinách matematiky na základní či střední škole, ale také názorné, dynamické konstrukce demonstrující různé fyzikální a přírodní jevy. Příspěvek je věnován několika možnostem užití programu GeoGebra a databáze výukových materiálů ve výuce na 2. stupni ZŠ, a to nejen v hodinách matematiky.

**Klíčová slova:** *software dynamické geometrie, kognitivní technologie, GeoGebra, matematika, přírodní jevy, výukový materiál.*

### Abstract

The software of dynamic geometry GeoGebra is currently probably the most commonly used computer software in teaching mathematics at Czech elementary schools. Its main advantages are undoubtedly the environment in Czech (including manual), intuitive control and open-source licenses. Currently are multiple versions of this software available for download. Not only for computers, but also for Android and iOS mobile devices. In addition, teachers do not have to create all the models themselves but can use an extensive database of learning materials created by program users from around over the world. Nowadays, this database contains not only models applicable in mathematics lessons at elementary or secondary school but also illustrative and dynamic constructions demonstrating physical and natural phenomena. This paper is devoted to several possibilities of using GeoGebra software and its database of teaching materials at second grade of elementary school and not only in mathematics lessons.

**Key words:** *software of dynamic geometry, cognitive technology, GeoGebra, mathematics, natural phenomena, educational material.*

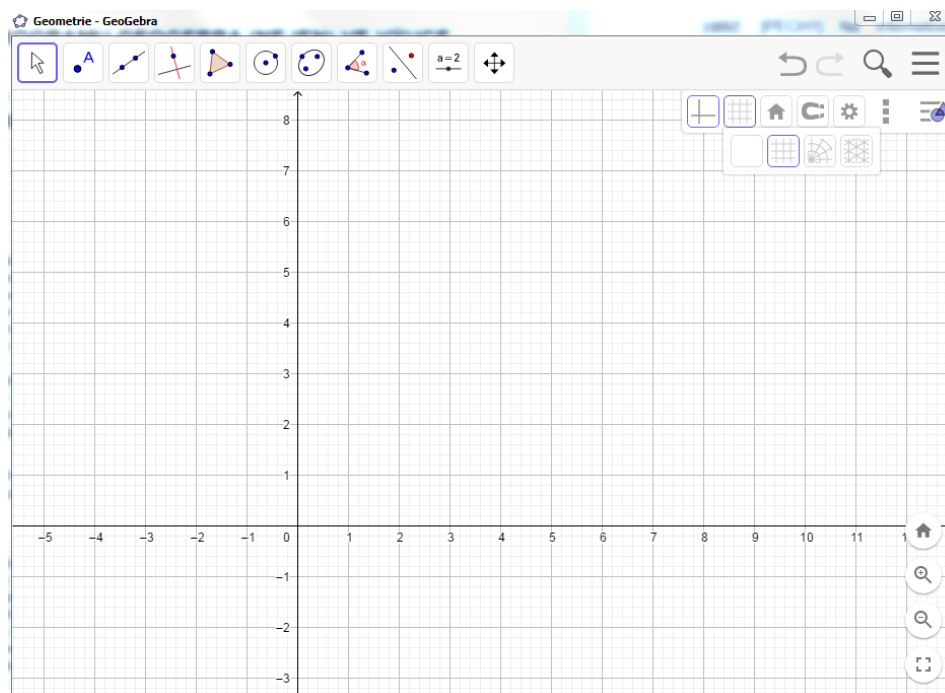
## 1 Úvod a specifika programu GeoGebra

Program dynamické geometrie GeoGebra patří v současné době mezi oblíbený matematický software využívaný učiteli na základních, středních i vysokých školách. Hlavními výhodami programu GeoGebra jsou prostředí v češtině (včetně manuálu), intuitivní ovládání a licence typu *open-source*, díky které jeho zavedení do hodin

matematiky či jiných přírodovědných předmětů nepředstavuje pro školu další finanční zátěž. [6] Na internetových stránkách [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) je aktuálně k dispozici ke stažení více verzí tohoto softwaru, a to nejen pro počítače, ale též pro mobilní zařízení se systémem Android nebo iOS. Učiteli se tak nabízí možnost, v případě velké vytíženosti počítačové učebny, jít cestou tzv. BYOD (zkratka z anglického *Bring Your Own Device*, v překladu *přines si své vlastní zařízení*), kdy žáci pracují na vlastním mobilním zařízení – notebook, tablet, smartphone...aj. [2] Výhodou tohoto přístupu může být, že si žáci úlohy z hodin mohou uložit a vrátit se k nim při domácí přípravě. Nevýhodou či problematickým místem může být odlišnost jednotlivých zařízení donesených žáky – rozdíly v ovládání mezi počítačem a tabletem, případně rozdílná výkonost jednotlivých zařízení. Navíc může nastat situace, kdy některý ze žáků nebude mít k dispozici z nějakého důvodu žádné vlastní zařízení. Učitel se proto musí na tyto situace předem připravit.

### 1.1 Základní možnosti a ovládání programu GeoGebra

Bez ohledu na verzi programu GeoGebra a platformu, na které s ním pracujeme, představuje základní prvek prostředí *nákresna*, která je ekvivalentem k papíru při rýsování klasických geometrických konstrukcí s využitím pravítka, kružítka a tužky. Pomocí jednotlivých nástrojů následně konstruujeme požadované geometrické figury. Zároveň můžeme pro usnadnění práce využít čtvercovou síť či osy pravoúhlé soustavy souřadnic, které lze zapnout na pozadí nákresny (obrázek 1).



Obrázek 1 Nákresna programu GeoGebra. Zdroj: vlastní.

Oproti klasickým konstrukcím na papíře je ovšem nutné upozornit na rozdílné chování jednotlivých prvků konstrukce. Zatímco při klasickém postupu jsou všechny body konstrukce na papíře neměnné a někdy ani nezáleží na pořadí jejich sestavení, v programech dynamické geometrie má pořadí a způsob sestavení jednotlivých prvků geometrické figury přímý vliv na výslednou dynamiku celé konstrukce. Špatná posloupnost kroků má za následek, že v případě užití dynamických nástrojů *manipulace* nebo *animace* se figura nesmyslně „rozhází“. Roli zde hrají odlišné typy vazeb mezi jednotlivými objekty/prvky konstrukce. Podle způsobu vzniku dělíme tyto

objekty na *volné objekty* (vznik přímým vytvořením na nákresně), *objekty na objektu* (vznik nového na stávajícím objektu – např. bod na kružnici) a *vázané objekty* (vznik na základě dříve sestavených objektů – např. průsečík přímek). [9]

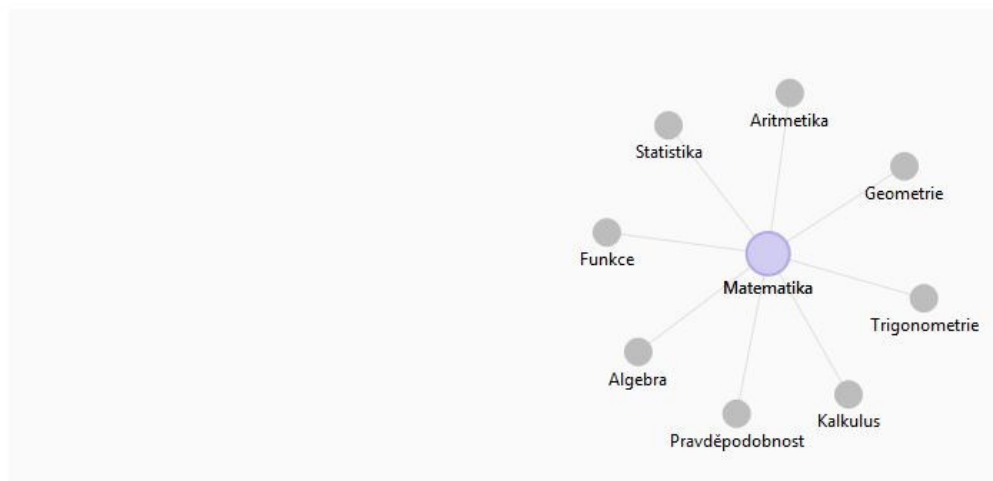
Díky těmto vazbám mezi objekty může vyučující „zahýbáním“ výslednou konstrukcí snadno zjistit, zda žák postupoval v souladu s uvedeným zápisem nebo se snažil postup „ošidit“. Zároveň právě díky vhodnému využití těchto vazeb je možné v programu GeoGebra provádět názorné demonstrace matematických důkazů, případně vytvářet počítačové simulace některých fyzikální či přírodních jevů. Cílem tohoto článku ovšem není podrobně rozebírat jednotlivé funkce a možnosti programů dynamické geometrie, čtenáře můžeme odkázat na literaturu [9], která se využitím kognitivních technologií ve výuce a pozitiviv/negativy jejich nasazení do hodin matematiky zabývá podrobněji. Nyní se zaměříme na konkrétní možnosti, které učitel má v případě, že se rozhodne s programem GeoGebra nejen pracovat, ale též bude využívat databázi výukových materiálů od uživatelů z celého světa.

## 2 Sdílené výukové materiály v programu GeoGebra a jejich využití

Vyhledávání konkrétních výukových materiálů vytvořených jinými uživateli lze dvěma způsoby – přímo v programu GeoGebra (pochopitelně je nutné mít připojení k internetu) nebo na internetových stránkách [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Lze vyhledávat standardně zadáním klíčových slov nebo prostřednictvím grafického vyhledávání pomocí volby konkrétních oborů a podoborů (obrázek 2).

### Matematika

Výukové materiály



Obrázek 2 Filtrování výukových materiálů podle zvoleného oboru. Zdroj: vlastní.

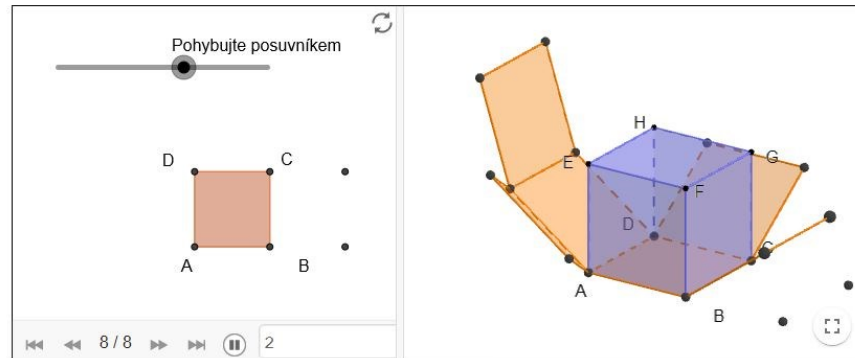
Materiály může vytvářet a sdílet prostřednictvím této „banky“ každý uživatel programu GeoGebra, který si vytvoří uživatelský účet. Nicméně pro prohlížení a stahování vybraných materiálů není tento účet nutný, stejně jako pro práci s programem samotným. Výukové materiály jsou rozděleny na dva typy, *aktivita* a *kniha*. Materiály typu *aktivita* obvykle představují stručné zpracování jednoho konkrétního tématu – např. rozdělování/změna úsečky v daném poměru, konstrukce pravoúhlého trojúhelníku, graf funkce sinus s využitím jednotkové kružnice nebo síť krychle (obrázek 3).

## Sít' krychle

Autor: Šárka Voráčková

Téma: Krychle

Narýsuj sít' krychle o délce hrany 4 cm, vystřihni a krychli slep.



Obrázek 3 Dynamický model konstrukce sítě krychle (zdroj [11])

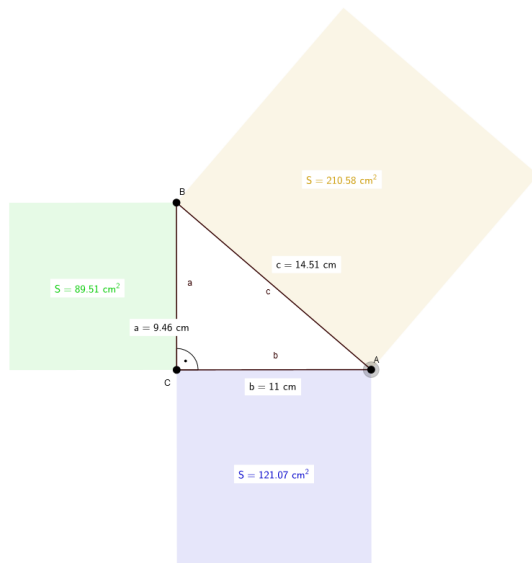
Výukové materiály typu *knih*a jsou obvykle rozsáhlejší materiály zabývající se komplexně jedním nebo více tématy. Strukturou se většinou podobají elektronické, interaktivní učebnici. Dynamické modely jsou doprovázeny textem a „knihu“ lze procházet po kapitolách podle obsahu. Právě mezi materiály tohoto typu nalezneme několik „knih“, které jsou věnovány fyzikálním či přírodovědným jevům. Konkrétně lze kupříkladu uvést výukový materiál *GeoGebra ve výuce zeměpisu na ZŠ* (viz [4]), který umožňuje i jistou mezipředmětovou vazbu mezi matematikou a zeměpisem.

Je zřejmé, že databáze výukových materiálů pro program GeoGebra může být užitečným pomocníkem učitele při přípravě hodin matematiky i jiných přírodovědných předmětů na základní škole. Zaměříme se proto nyní na některé konkrétní existující výukové materiály v databázi.

## 2.1 Důkaz Pythagorovy věty

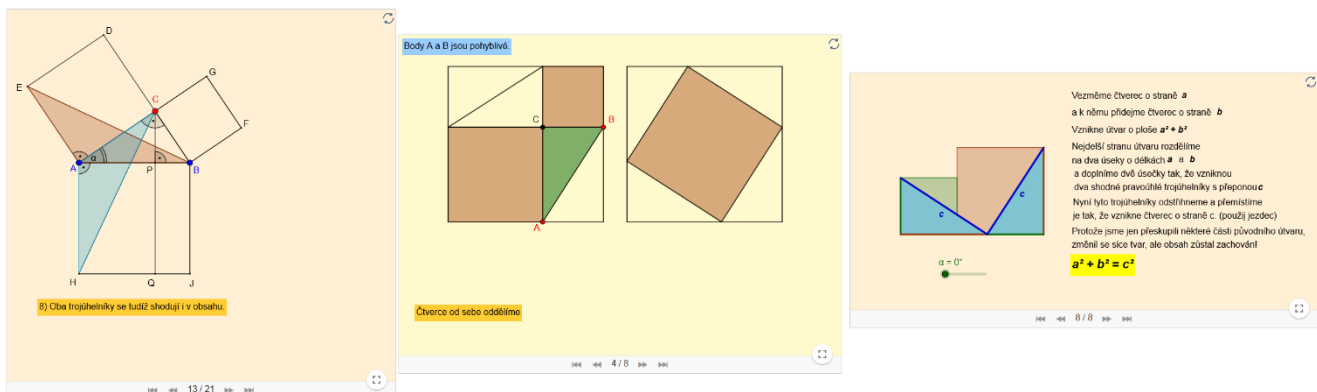
I přes to, že důkazy tvrzení a matematických vět na základní škole zpravidla neuvádíme, často je do výuky na 2. stupni ZŠ zařazován alespoň důkaz Pythagorovy věty, resp. demonstrace platnosti vzorce  $c^2 = a^2 + b^2$ . Program GeoGebra nám v tomto směru nabízí dvě možnosti.

První možností je sestavit pravoúhlý trojúhelník a čtverce nad přeponou i oběma odvěsnami. Následně necháme program změřit a zobrazit délky stran trojúhelníka a necháme též vypočítat obsahy všech sestavených čtverců. Při následné manipulaci s trojúhelníkem – změnách délek stran trojúhelníka (při zachování pravoúhlého trojúhelníka) je evidentní, že součet obsahů menších čtverců se rovná obsahu čtverce většího – sestaveného nad přeponou. Tuto hodnotu můžeme samozřejmě také nechat vypočítat program samotný. Pokud bychom hledali takový dynamický model mezi výukovými materiály, stačí zadat heslo *Pythagorova věta* a vyhledávač nám vrátí celou řadu výsledků v češtině i jiných jazycích. Příkladem takového modelu je materiál uvedený na obrázku 4.



Obrázek 4 Demonstrace platnosti Pythagorovy věty (zdroj [8])

Druhou možností je vytvořit dynamický model vycházející z tradičních grafických důkazů Pythagorovy věty. Těch je několik a může se stát, že každému žákovi bude vyhovovat jiný přístup. Opět lze využít databázi výukových materiálů, konkrétně pak „knihu“ *M – Pythagorova věta, Eukleidovy věty* (viz [10]), která se zabývá formulací Pythagorovy věty a možnými grafickými důkazy (obrázek 5).



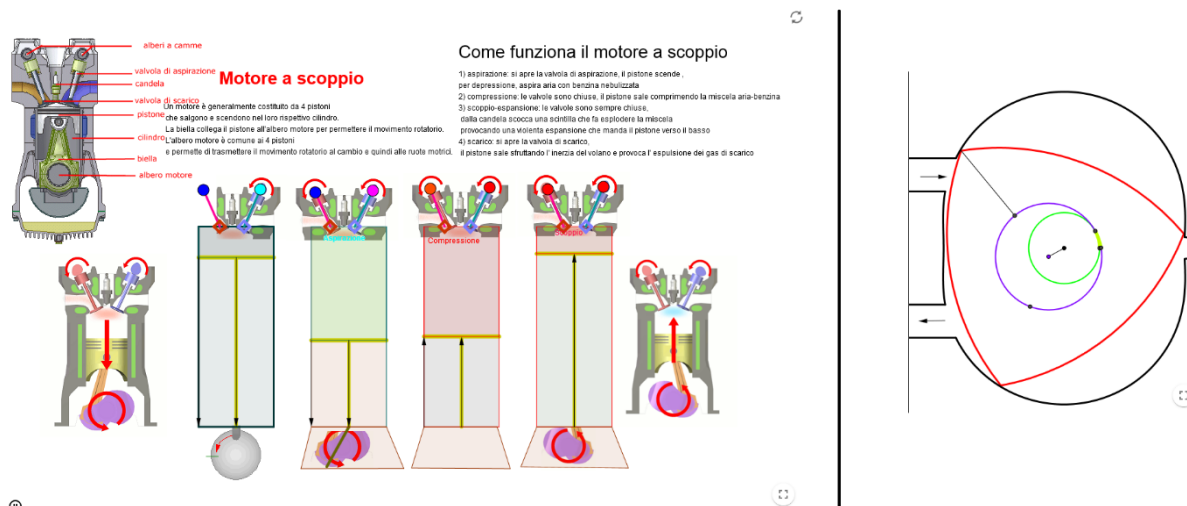
Obrázek 5 Eukleidův, Pythagorův a Indický důkaz Pythagorovy věty (zdroj [10])

Pochopitelně ne vždy lze nalézt výukový materiál ke každému z témat, případně jsou tyto materiály v angličtině, němčině či jiném cizím jazyce. Záleží pak na uvážení učitele a možnostech třídy, zda i přes tuto komplikaci materiál do výuky zařadí, čímž bude opět docházet k určité mezipředmětové vazbě s cizími jazyky, nebo vytvoří vlastní dynamický model.

## 2.2 Využití dynamických modelů ve fyzice – spalovací motory

Již bylo řečeno, že program GeoGebra lze využít nejen v rámci hodin matematiky, ale je též možné vytvářet dynamické modely a provádět počítačovou simulaci i v jiných technicky či přírodovědně orientovaných předmětech jakými jsou například fyzika, technická výchova či zeměpis. Pochopitelně praktická manipulace s předměty a pomůckami simulující chování skutečných kupříkladu strojů je vždy lepší než dvourozměrný model na plátně či interaktivní tabuli. Příslušné pomůcky však škola nemusí mít vždy k dispozici nebo jsou již zastaralé a nefunkční. Konkrétním takovým

příkladem může být v hodinách fyziky látka týkající se spalovacích motorů. V učebnicích sice bývají jednotlivé fáze klasických motorů rozkresleny a popsány, nicméně se stále jedná pouze o statických model – obrázek. Nutno uznat, že tvorba modelů simulující spalovací motor je v programu GeoGebra již náročnější, nicméně není nemožná. Pokud opět využijeme sdílených výukových materiálů, najdeme celou řadu použitelných modelů. Díky nástroji *animace* pak můžeme „motor“ nechat běžet a popisovat žákům jednotlivé fáze (obrázek 6).



Obrázek 6 Dynamický model klasického spalovacího (vlevo) a Wankelova motoru (vpravo) (zdroj [5], [12])

Obdobně lze nalézt/vytvořit modely pro další pasáže fyzikálního učiva. Výhodou je, že nemusíme zůstat pouze u rýsování jednotlivých objektů, ale lze na náčrtu vložit i vlastní fotku či obrázek vytvořený v jiném softwaru. S těmito obrázky pak můžeme dále pracovat a výsledný model se stává ještě názornějším.

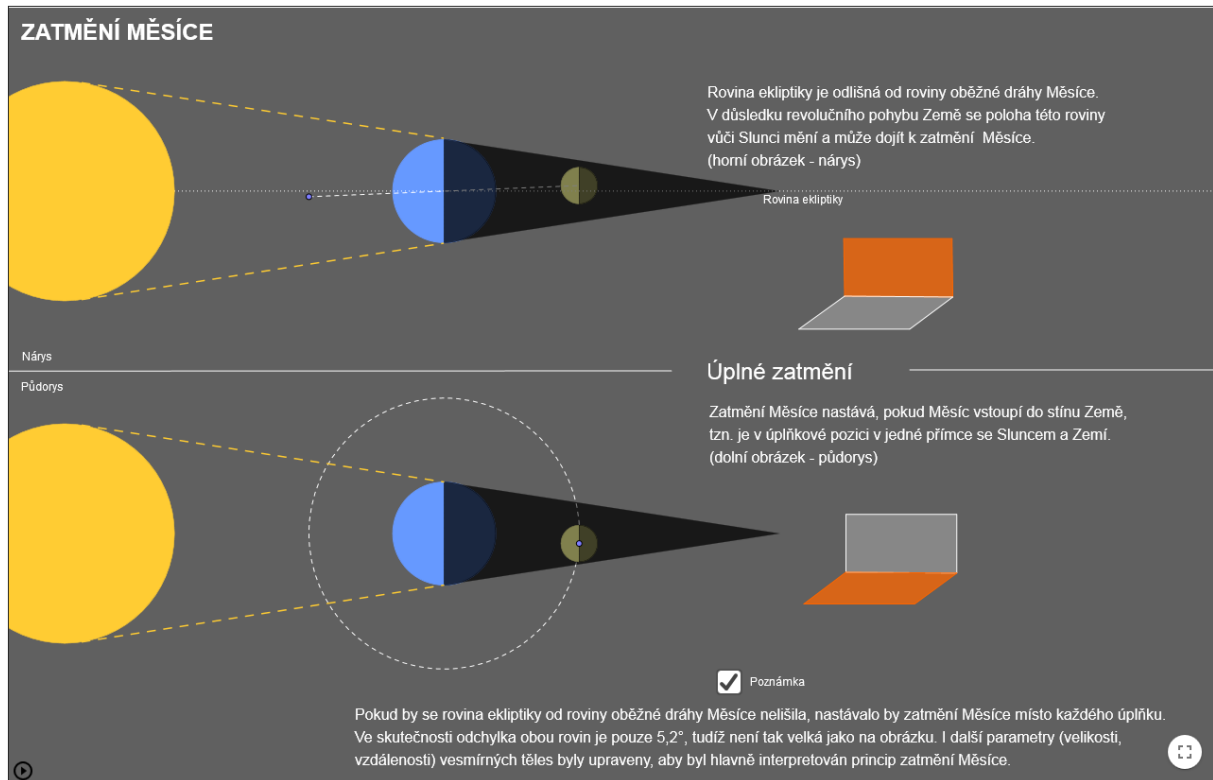
### 2.3 GeoGebra v hodinách zeměpisu – přírodní obraz země a kartografie

Geografie představuje komplexní vědu, která se svým zaměřením pohybuje na rozhraní přírodních, společenských a technických věd. Zatímco fyzická geografie se věnuje právě krajině a přírodním složkám planety Země, humánní (socioekonomická) geografie se věnuje otázkám týkajících se obyvatelstva, sídel nebo ekonomiky. Školská geografie je obvykle označována jako *zeměpis* a jedná se o běžně vyučovaný předmět na základních školách. [1]

Zeměpis je zařazen do výuky od 6. ročníku základní školy, ve kterém se obvykle probírá učivo *Přírodní obraz Země*. Žáci se seznamují s vesmírem a přírodními jevy jako jsou například zaměření Slunce/Měsíce nebo slapové jevy. Některé pasáže učiva tak mohou být pro žáky značně abstraktní, a to i přes fakt, že dnešní školní atlasy obsahují řadu ilustrací, které jsou doprovázeny textem. Opět se ovšem jedná pouze o statické modely – obrázky.

Obdobně jako v předcházející kapitole, i v rámci hodin zeměpisu lze využít program GeoGebra a je možné simulovat některé přírodní jevy. Pochopitelně, opět se jedná o náročnější práci při vytváření věcně správných a zároveň názorných dynamických modelů. Využijeme-li jako dříve databázi výukových materiálů pro program GeoGebra, narazíme na již dříve zmíněnou „knihu“ *GeoGebra ve výuce zeměpisu na ZŠ* (viz [3] a [4]). Tento materiál představuje ideální prostředek pro demonstraci jevů, které mohou být pro žáky těžko pochopitelné. V případě vlastní manipulace s konkrétními modely a změnami poloh jednotlivých prvků (např. planet) mohou žáci lépe pochopit

principy fungování jednotlivých jevů a může tak dojít k hlubšímu pochopení celé problematiky. Na obrázku 7 je uveden jeden z modelů, konkrétně model zatmění Měsíce. Žáci v něm mohou měnit polohu Měsíce vůči Zemi a Slunci. V místech, kdy dochází k zatmění, ať úplnému nebo částečnému, je žák na tento fakt upozorněn společně se stručným zdůvodněním jevu.

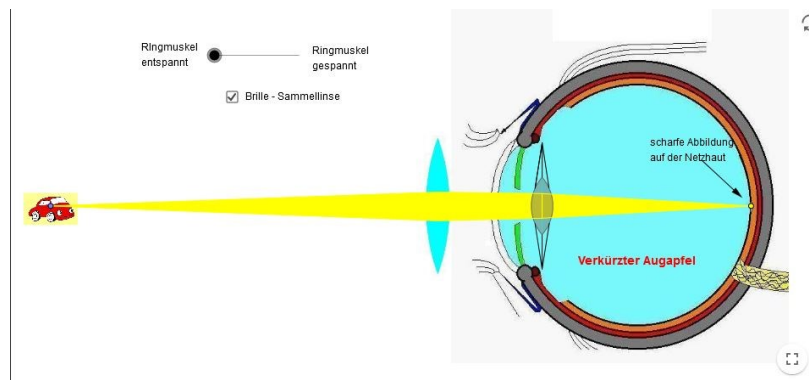


Obrázek 7 Dynamický model zatmění Měsíce (zdroj [4])

„Kniha“ samozřejmě nabízí více možností, a to nejen v rámci učiva *Přírodní obraz Země*, ale též obsahuje dynamické modely pro učivo týkající se kartografie a orientace v mapě.

## 2.4 Dalekozrakost v hodinách biologie

Poslední výukový materiál, který uvedeme, je využitelný ve vyučovacích hodinách biologie, případně fyziky v rámci učiva o optice. Obdobně jako v předchozích případech využívá dynamických nástrojů programu GeoGebra. Jedná se o zajímavý materiál, který je bohužel pouze v německém jazyce, nicméně princip je zřejmý a učitel může opět manipulaci s modelem doprovodit vlastním výkladem.



Obrázek 8 - Simulace korekce oční vady v programu GeoGebra (zdroj [7])

Počítačová simulace korekce oční vady (obrázek 8) využívá posuvníku, kde lze nastavit míru oční vady, zaškrtačací políčko slouží k nasazení/sundání brýlí. Žák vidí místo, kam dopadá obraz. V případě, že je odpovídající oční vadě přiřazena správná čočka, autíčko v levé části je vidět ostře a obraz dopadá přesně na sítnici. V opačném případě je autíčko rozostřené.

### 3 Závěr

Je zřejmé, že program dynamické geometrie GeoGebra může nalézt uplatnění i v rámci dalších vyučovaných předmětů na základních či středních školách, nejen v matematice. Mnohdy navíc záleží pouze na fantazii vyučujícího či tvůrce výukového materiálu, jak využije dynamických nástrojů programu a jaký konkrétní jev pomocí nich bude demonstrovat.

Výhodami programu GeoGebra je česká lokalizace i licence typu *open-source*, díky které mohou učitelé program ve výuce využívat bez dalších finančních nákladů na nákup softwaru. Mezi výhody lze počítat také multiplatformní rozšíření a možnost konstruovat geometrické figury online bez nutnosti software hned instalovat do počítače či jiného (mobilního) zařízení.

Databáze výukových materiálů pro program GeoGebra pak může být užitečným pomocníkem učitele při vytváření příprav do hodin matematiky či jiných technicky a přírodovědně orientovaných předmětů na základní škole. A to nejen z hlediska značné úspory času, který by musel věnovat vytváření vlastních dynamických modelů, ale i z hlediska inspirace pro (začínajícího) učitele.

#### Použitá literatura

1. KARAS, P. a L. HANÁK. *Příprava na státní maturitu: zeměpis*. 3. vydání. Praha: Fragment, 2018. ISBN 978-80-253-3768-4.
2. NEUMAJER, O. *BYOD – přineste si vlastní počítačové zařízení do školy*. Praha: Wolters Kluwer ČR a. s., 2016, roč. 13, č. 12, s. 20-22. ISSN 1214-8679.
3. PÁTEK, J. *GeoGeobra ve výuce zeměpisu na ZŠ*. České Budějovice, 2014. Diplomová práce. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Pedagogická fakulta.
4. PÁTEK, J. *GeoGeobra ve výuce zeměpisu na ZŠ*. [online]. [cit. 27. 8. 2019]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/xXeXssy4>
5. PEDONE, M. *Motore a scoppio*. [online]. [cit. 27. 8. 2019]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/QE9SBxBt>
6. PECH, P.; ČINČUROVÁ, L.; GÜNZEL, M. et al. *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2015. ISBN 978-80-7394-531-2.
7. SCHNEIDER, M. *Weitsichtigkeit des Auges*. [online]. [cit. 27. 8. 2019]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/fPbPexA8>
8. TYR, D. *Pythagorova věta*. [online]. [cit. 27. 8. 2019]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/vSJJxeZm>
9. VANÍČEK, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Univerzita Karlova, 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.
10. VINKLER, M. *M - Pythagorova věta, Eukleidovy věty*. [online]. [cit. 27. 8. 2019]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/PWzD4WKR>



11. VORÁČKOVÁ, Š. *Sít' krychle*. [online]. [cit. 27. 8. 2019]. Dostupné z:  
<https://www.geogebra.org/m/fjyqdgcg>
12. VYSLOUŽIL, T. *Wankelův motor*. [online]. [cit. 27. 8. 2019]. Dostupné z:  
<https://www.geogebra.org/m/HXF9mRVf>

### **Kontaktní údaje**

Mgr. Jan Frank  
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická  
Klatovská tř. 51, 306 19 Plzeň  
E-mail: frankjan@kvd.zcu.cz

PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.  
Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická  
Klatovská tř. 51, 306 14 Plzeň  
E-mail: honziki@kmt.zcu.cz