

**Západočeská univerzita v Plzni**

**Fakulta aplikovaných věd**

**Katedra mechaniky**

# **DIZERTAČNÍ PRÁCE**

**Plzeň, 2018**

**Luboš Smolík**

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

# **MODELOVÁNÍ KMITÁNÍ A DYNAMICKÁ ANALÝZA ROTORŮ TURBODMYCHADEL**

**Ing. Luboš Smolík**

**dizertační práce  
k získání akademického titulu doktor  
v oboru Aplikovaná mechanika**

**Školitel: Ing. Michal Hajžman, Ph.D  
Katedra mechaniky**

**Plzeň, 2018**



**University of West Bohemia**

**Faculty of Applied Sciences**

**SIMULATION OF VIBRATIONS AND  
ANALYSIS OF DYNAMICS IN  
TURBOCHARGERS**

**Ing. Luboš Smolík**

**a dissertation thesis submitted in candidacy  
for the degree of Ph.D. in the field  
of Applied Mechanics**

**Supervisor: Ing. Michal Hajžman, Ph.D  
Department of Mechanics**

**Plzeň, 2018**

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou dizertační práci vypracoval samostatně na základě konzultací se školitelem a s využitím pramenů uvedených v kapitole Literatura.

V Plzni, 21. prosince 2018

Luboš Smolík

# Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli, Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph.D, za neutuchající zájem o tuto práci, inspirativní výměny myšlenek a čas věnovaný konzultacím. Dále bych rád poděkoval Ing. Oldřichu Havelkovi a Ing. Romanu Kroftovi za neocenitelnou pomoc s realizací experimentů a Ing. Janu Rendlovi a Ing. Štěpánu Dykovi, Ph.D. za energii věnovanou přípravě společných publikací.

Velký dík patří také mé rodině a mým blízkým za trpělivost a podporu v posledních letech, kdy vznikla největší část této práce.

# Abstrakt

Dizertační práce se zabývá modelováním ohybového kmitání rotorů turbodmychadel uložených v kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry, návrhem efektivních radiálních ložisek a provedením experimentu pro verifikaci simulací. Pro účely simulace jsou využity geometrické a provozní parametry sériově vyráběného turbodmychadla a experimenty byly provedeny v součinnosti s výrobcem.

Ve **druhé kapitole** práce jsou odvozeny pohybové rovnice popisující ohybové kmitání rotoru. Využito je metody konečných prvků a přístupu, kdy jsou součásti turbodmychadla považovány za vázaný mechanický systém. **Třetí kapitola** se zabývá modelováním hydrodynamického mazání v radiálních kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry, odvozením modelu pro průtok oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech a stanovením provozních vůlí radiálních ložisek. **Čtvrtá kapitola** je zaměřena na výpočet hydrodynamického tlaku metodami konečných diferencí a konečných prvků a na stanovení hydrodynamických sil působících v ložisku.

V **páté kapitole** je představena metodika pro hodnocení vibrací točivých strojů a jsou charakterizovány typické vibrační projevy rotorů turbodmychadel. Dále je zhodnocen vliv použitého modelu hydrodynamických sil na výsledky simulace: je ukázáno, že aproximativní analytické metody jsou vhodné pouze pro přibližné analýzy a časově náročné úlohy, např. optimalizaci.

V **šesté kapitole** je formulována úloha dynamické analýzy rotoru turbodmychadla a jsou uvedeny všechny relevantní parametry a podmínky. S využitím vytvořeného výpočtového modelu je zkoumán vliv nevyváženosti, ložiskových vůlí a modelu proudění mazacími otvory v plovoucích pouzdrech na ohybové kmitání rotoru a hydrodynamické ztráty v ložiskách. Pozornost je věnována i různým možnostem vizualizace odezvy nelineárních kmitavých systémů. Dále je posouzen vliv konstrukčního řešení rozváděcích drážek ve vnějším olejovém filmu ložisek a je ukázáno, že konstrukční řešení rozváděcích mazacích drážek může mít zásadní vliv na provoz ložiska. V závěru kapitoly je ukázán způsob snížení hydrodynamických ztrát ve vnitřním olejovém filmu pomocí podélných drážek. Snížení ztrát v ložiskách turbodmychadel má potenciálně velký společenský dopad, protože znamená zvýšení účinnosti spalovacích motorů a tedy další snížení emisí v automobilové dopravě.

V **sedmé kapitole** jsou popsány zkoušky provedené na zkušebním zařízení a metody použité při měření. Je představena levná metoda měření úhlové rychlosti plovoucích s využitím indukčních snímačů a je hodnocen vliv nevyváženosti, typu provozu a teplotě vzduchu v turbínovém stupni na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla. Také je popsána havárie rotoru způsobená nevhodně instalovanými snímači rotorových vibrací.

# Abstract

This dissertation thesis deals with methods for computational modelling and testing of lateral vibrations of turbocharger rotors supported in journal bearings with fully floating rings. Furthermore, design for an effective radial journal bearing is proposed. Parameters of an investigated turbocharger were prepared in cooperation with a turbocharger manufacturer and all described tests took place in testing laboratories owned by this manufacturer.

Equations of motion governing lateral vibrations of the rotor are described in **the second chapter** of the thesis. Both finite element method and multi-body formulation are used in order to derive the equations of motion. **The third chapter** deals with hydrodynamic lubrication in the radial journal bearings with the floating rings, with oil flow through feeding holes which are located in the floating rings, and with estimation of the operating clearance of the radial bearings. **The fourth chapter** focuses on the evaluation of hydrodynamic pressure employing the finite difference method and the finite element method. Hydrodynamic forces acting in the bearing can be computed only if the pressure is known.

The methodology for the evaluation of vibrations of rotating machines is introduced in **the fifth chapter**. Furthermore, characteristic vibration patterns of the turbocharger rotors are described and effects of various descriptions of the hydrodynamic forces on dynamics of the turbocharger rotors are discussed. It is shown that approximate analytical methods for the evaluation of the hydrodynamic forces are only appropriate for simulations with crude error tolerances and for time-consuming tasks, such as optimization.

Analysis of dynamics of the turbocharger rotor is performed in **the sixth chapter**. All relevant parameters and conditions are presented so the results can be reproduced. The influence of rotor unbalance, bearing clearances and the oil flow through the feeding holes on the rotor dynamics and on hydrodynamic losses in the bearings is evaluated. Attention is paid to various possibilities of the visualisation of the response of non-linear oscillating systems. The influence of geometry of oil grooves located in an outer oil film is also evaluated. It is shown that the geometry has a major effect on bearing operation. A technique for reduction of the hydrodynamic losses in the bearing is proposed at the end of the chapter. If the losses were truly reduced, the proposed technique would have a solid impact on improving the effectivity of modern combustion engines and thus reducing their emission.

Experiments performed with a test rig and methods used for testing are described in **the seventh chapter**. A method for measurement of floating ring speed, which employs cheap inductive sensors, is proposed. Experimental data showing the influence of the rotor unbalance and operating conditions on relative shaft vibrations and the floating ring speed are presented. Moreover, there is a note on destructive stall-induced vibrations of blades of a compressor impeller, which can be caused by proximity sensors mounted in a compressor housing.

# Obsah

<b>Seznam použitých symbolů a zkratk</b>	<b>8</b>
<b>1 Úvod</b>	<b>10</b>
1.1 Přepíňovaný motor . . . . .	10
1.2 Stručný popis turbodmychadla . . . . .	11
1.3 Současný stav rotordynamiky turbodmychadel . . . . .	13
1.4 Cíle a členění dizertační práce . . . . .	15
<b>2 Ohybové kmitání rotoru turbodmychadla</b>	<b>16</b>
2.1 Sestavení pohybové rovnice s využitím metody konečných prvků . . . . .	16
2.1.1 Modelování hřídelů . . . . .	16
2.1.2 Modelování lopatkových kol . . . . .	22
2.1.3 Modelování plovoucích pouzder . . . . .	25
2.1.4 Modelování radiálních kluzných ložisek . . . . .	26
2.1.5 Modelování aerodynamických sil v turbínovém stupni . . . . .	28
2.1.6 Modelování aerodynamických sil v kompresorovém stupni . . . . .	29
2.1.7 Sestavení matematického modelu rotorové soustavy . . . . .	30
2.2 Pohybová rovnice vázaného mechanického systému . . . . .	32
<b>3 Hydrodynamické mazání v radiálních kluzných ložiskách s plovoucím pouzdem</b>	<b>35</b>
3.1 Geometrické parametry ložiska s plovoucím pouzdem . . . . .	35
3.2 Odvození Reynoldsovy rovnice . . . . .	36
3.2.1 Zjednodušující předpoklady . . . . .	37
3.2.2 Silová podmínka rovnováhy . . . . .	39
3.2.3 Zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity toku) . . . . .	41
3.2.4 Reynoldsova rovnice pro film kluzného ložiska . . . . .	43
3.3 Tribologické parametry kluzného ložiska . . . . .	44
3.4 Další tvary Reynoldsovy rovnice . . . . .	46
3.4.1 Reynoldsova rovnice v bezrozměrném tvaru . . . . .	46
3.4.2 Reynoldsova rovnice respektující setrvačné síly v olejovém filmu . . . . .	49
3.4.3 Modelování olejového filmu s kavitací . . . . .	50
3.4.4 Reynoldsova rovnice pro ložiska s drsnými kluznými povrchy . . . . .	52
3.5 Vliv plovoucího pouzdra na hydrodynamické mazání . . . . .	53
3.5.1 Proudění oleje mazacím otvorem . . . . .	53
3.5.2 Úhlová rychlost plovoucího pouzdra . . . . .	57
3.6 Stanovení provozních vůlí radiálních ložisek . . . . .	57
<b>4 Výpočet hydrodynamické síly</b>	<b>59</b>
4.1 Řešení Reynoldsovy rovnice . . . . .	59
4.1.1 Aproximativní analytické řešení pro krátká ložiska . . . . .	59
4.1.2 Numerické řešení s využitím metody konečných diferencí . . . . .	61
4.1.3 Numerické řešení s využitím metody konečných prvků . . . . .	67

---

4.2	Výpočet hydrodynamické síly . . . . .	68
4.2.1	Výpočet síly ze známého tlakového pole . . . . .	68
4.2.2	Výpočet síly z aproximativního analytického řešení Reynoldsovy rovnice . . . . .	70
4.3	Stanovení dynamických koeficientů ložiska . . . . .	72
4.3.1	Stanovení dynamických koeficientů ložiska ze zatížení ložiska . . . . .	72
4.3.2	Stanovení tuhosti ložiska z odezvy čepu hřídele na změnu statického zatížení . . . . .	73
4.3.3	Stanovení dynamických koeficientů ložiska z odezvy v časové oblasti . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Charakteristiky ohybového kmitání rotorů turbodmychadel</b>	<b>76</b>
5.1	Základní metody pro analýzu vibrací točivých strojů . . . . .	76
5.1.1	Analýza vibrací v časové oblasti . . . . .	76
5.1.2	Analýza vibrací ve frekvenční oblasti . . . . .	79
5.2	Charakteristiky ohybového kmitání rotorů turbodmychadel . . . . .	81
5.3	Vliv modelu hydrodynamických sil . . . . .	84
5.3.1	Parametry modelu . . . . .	84
5.3.2	Parametry simulace . . . . .	85
5.3.3	Výsledky . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Analýza kmitání sériově vyráběného rotoru</b>	<b>88</b>
6.1	Popis modelu . . . . .	88
6.1.1	Parametry modelu . . . . .	88
6.1.2	Provozní vůle radiálních ložisek . . . . .	91
6.1.3	Provozní viskozita oleje . . . . .	91
6.1.4	Provozní stavy, počáteční podmínky a další parametry . . . . .	92
6.2	Odhad vlastních frekvencí rotoru turbodmychadla . . . . .	93
6.3	Vliv nevývahy na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla . . . . .	94
6.4	Vliv ložiskové vůle na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla . . . . .	98
6.5	Proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech . . . . .	102
6.6	Návrh efektivního uložení rotoru turbodmychadla . . . . .	104
6.7	Doporučení vyplývající z provedených analýz . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Měření ohybového kmitání rotoru</b>	<b>109</b>
7.1	Popis zkoušky . . . . .	109
7.1.1	Popis zkušebního zařízení . . . . .	109
7.1.2	Popis metody měření rotorových vibrací . . . . .	111
7.1.3	Měření otáček rotujících plovoucích pouzder . . . . .	112
7.1.4	Seznam zkoušených provozních stavů . . . . .	114
7.2	Vliv snímačů v kompresorové skříni na provoz turbodmychadla . . . . .	114
7.3	Výsledky zkoušky . . . . .	118
7.3.1	Poměrná rychlost rotujících plovoucích pouzder . . . . .	118
7.3.2	Relativní rotorové vibrace . . . . .	118
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>125</b>
8.1	Doporučení pro další směry výzkumu . . . . .	128
8.2	Hlavní přínosy práce . . . . .	128
	<b>Literatura</b>	<b>129</b>
	<b>Příloha A: Program jourmesh</b>	<b>i</b>

## Seznam použitých symbolů a zkratek

$\mathbf{B}, b_{ij}$	matice tlumení, tlumení
$c_r$	radiální ložisková vůle
$e$	excentricita
$\mathbf{f}, F$	vektor síly, síla
$f$	frekvence
$f_r$	frekvence otáčení rotoru turbodmyhadla
$\mathbf{G}$	matice gyroskopických účinků
$\mathbf{K}, k_{ij}$	matice tuhosti, tuhost
$l$	délka ložiska
$h$	ložisková mezera
$\mathbf{I}, I_{ij}$	tenzor setrvačnosti, moment setrvačnosti
$I_0$	moment setrvačnosti k ose rotace
$J_i$	kvadratický moment průřezu k ose $i$
$\mathbf{M}, m$	matice hmotnosti, hmotnost
$P$	výkon, ztrátový výkon
$p$	hydrodynamický tlak
$p_a, p_c, p_s$	tlak okolí, saturační (kavitační) tlak, mazací tlak
$\mathbf{q}$	vektor zobecněných souřadnic
$r$	poloměr ložiska
$Re, Re^*$	Reynoldsovo číslo, redukované Reynoldsovo číslo
$\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}$	matice pootočení
$So$	Sommerfeldovo číslo
$t$	čas
$T$	termodynamické teplota
$Ta$	Taylorovo číslo
$U, \Delta U$	statická nevyváženost, přidaná statická nevyváženost
$u, v$	rychlost proudění ve směru $x'$ a $y'$
$u_i$	obvodová rychlost tělesa $i$
$v_i$	rychlost proudění ve směru $i$ -té souřadnice
$\mathbf{x}$	vektor posunutí
$\alpha$	středový úhel kluzné plochy ložiska
$\alpha_i$	teplotní koeficient roztažnosti materiálu tělesa $i$
$\alpha_m, \beta_k$	koeficienty proporcionálního tlumení

$\varepsilon$	relativní excentricita čepu hřídele
$\theta$	poměrné zaplavení ložiskové mezery
$\kappa$	Poissonova konstanta
$\mu$	dynamická viskozita
$\nu$	Poissonovo číslo
$\pi_k$	kompresní poměr
$\rho$	hustota
$\tau$	bezrozměrný čas
$\tau_{ij}$	složka smykového napětí působící ve směru $i$ v rovině s normálou $j$
$\Phi$	Vogelpohlův parametr
$\phi$	úhel k excentricitě
$\varphi$	vektor natočení
$\omega$	vektor úhlové rychlosti
$\dot{\omega}$	okamžitá úhlová rychlost rotoru
$\omega_0$	konstantní úhlová rychlost rotoru

### Souřadnicové systémy

$s, x, H$	souřadnicový systém olejového filmu: obvodový, podélný a radiální směr
$u, v, w$	uzlové výchylky v axiálním, vertikálním a horizontálním směru
$x, y, z$	kartézský souřadnicový systém: axiální, vertikální a horizontální směr
$x', y', z'$	posunutý kartézský souřadnicový systém: axiální, vertikální a horizontální směr
$X, Y$	relativní rotorové vibrace
$\alpha, \beta, \gamma$	směrové úhly
$\varphi, \vartheta, \psi$	Eulerovy úhly: vlastní rotace, nutace, precese

### Indexy a další znaky

$\square_i, \square_o$	týkající se vnitřního a vnějšího olejového filmu v ložisku s plovoucím pouzdrům
$\square_j, \square_p, \square_s$	týkající čepu hřídele, plovoucího pouzdra a ložiskové pánve
$\square_k, \square_t$	kompresorový a turbínový
$\square_l$	ložiskový
$\square_r$	týkající se tuhého kotouče

### Doplňující symboly

$\dot{\square}$	derivace podle času
$\square'$	derivace podle prostorové proměnné
$\bar{\square}$	bezrozměrná veličina
$\tilde{\square}$	proměnná v prostoru uzlových souřadnic
$\langle \square \rangle$	střední hodnota



# 1 Úvod

Zhruba pětina všech emisí oxidu uhličitého (CO<sub>2</sub>) vyprodukovaných v Evropské unii pochází z automobilové a nákladní dopravy. Mezi roky 1990 a 2008 objem emisí automobilové dopravy vzrostl o čtvrtinu. V roce 2014 činily průměrné emise automobilu prodaného v Evropské unii 123,4 g/km, v roce 2017 se snížily na 118,5 g/km. Závazek na rok 2021 je ale 95 g/km, což přibližně odpovídá spotřebě 4,1 l/100 km u benzínových motorů a 3,6 l/100 km u naftových motorů (European Commission, 2018).

Plán na rok 2021 je natolik ambiciózní, že jeho splnění je podmíněno zvýšením podílu hybridních a elektrických vozidel na trhu. U automobilů poháněných fosilními palivy se počítá s plným využitím potenciálu *downsizingu*, tedy technologických inovací, které zajišťují, že motory nové generace s daným výkonem mají nižší objem válců než motory generací předchozích. Jednou z technologických inovací využívaných v rámci downsizingu je přeplňování motoru pomocí turbodmychadla, které zatím nedosáhlo plného potenciálu (Mock, 2017). Praxe ukazuje, že při procesu zvyšování účinnosti turbodmychadel je nutné řešit i problémy týkající se rotorové dynamiky.

V následujících oddílech je popsána konstrukce turbodmychadel a je shrnut současný stav oboru rotorové dynamiky turbodmychadel. Na základě toho jsou definovány cíle práce.

## 1.1 Přeplňovaný motor

Myšlenka přeplňování motoru je poměrně stará. Už v roce 1885 si Daimler<sup>1</sup> uvědomil, že když vzduch přiváděný do spalovacího cyklu motoru stlačí kompresorem, který bude mechanicky poháněn motorem, dosáhne vyšší účinnosti spalování. S myšlenkou využít výfukové plyny k pohonu kompresoru přišel Büchi<sup>2</sup> v roce 1905, ale téměř dalších 20 let trvalo, než byl Büchiho patent použit ve velkých lodních a leteckých motorech. Prodleva v nasazení technologie byla způsobena především nevyhovujícími vlastnostmi materiálů používaných v průmyslu před 1. světovou válkou. Širokého uplatnění se turbodmychadlům dostalo v leteckých motorech za 2. světové války, protože turbodmychadlo částečně eliminovalo problémy tehdejších motorů s chodem ve vyšších letových hladinách, kde jsou hustota i tlak vzduchu nízké. S nástupem proudových motorů po 2. světové válce význam turbodmychadel v leteckém průmyslu upadá.

V roce 1962 uvedl koncern General Motors první dva osobní automobily s motory přeplňovanými turbodmychadlem: Chevrolet Corvair Monza Spyder a Oldsmobile F-82 Turbo Jetfire. Jejich nízká spolehlivost ale zapříčinila nevalné prodejní úspěchy a rychlé opuštění trhu.

K novému životu se technologie nadechla při ropné krizi v roce 1973 a to díky segmentu nákladních vozidel, kde se na ušetřeném palivu nejrychleji vrátily vyšší pořizovací náklady.

---

<sup>1</sup> **Gottlieb Daimler** (1834 – 1900) byl významný německý inženýr, konstruktér a průmyslník. Byl průkopníkem v konstrukci čtyřdobých motorů s vnitřním spalováním a stál u zrodu automobilového průmyslu v Evropě. Daimler AG, v roce 2017 13. největší výrobce automobilů na světě, je pokračovatelem původní Daimlerovy firmy DMG (Daimler Motoren Gesellschaft AG).

<sup>2</sup> **Alfred Büchi** (1879 – 1959) byl švýcarský inženýr a vynálezce. Jeho nejvýznamnějším patentem je *přeplňovaný sdružený motor* podaný v roce 1905.

Nařízení omezující emise nákladních vozidel vydaná v 80. letech pak způsobila, že v podstatě každý dnes vyrobený motor určený pro užitkové vozidlo je přeplňovaný turbodmychadlem.

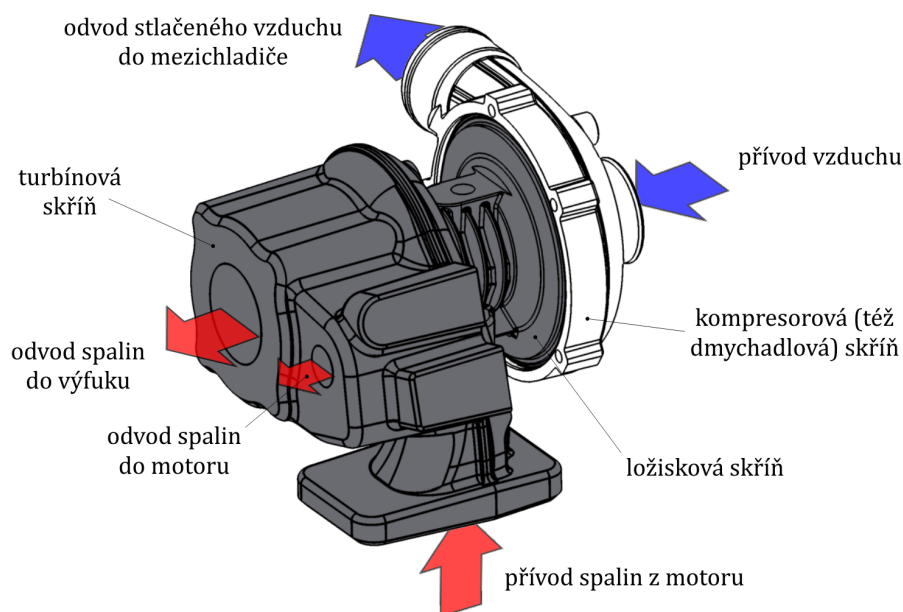
Na přelomu 70. a 80. let se i díky sérii Formule 1 staly turbodmychadlem přeplňované motory populární ve sportovních a luxusních vozech. Pro segment osobních automobilů byly průlomové roky 1978 a 1981, kdy se začal vyrábět Mercedes-Benz 300 SD a Volkswagen Golf Turbodiesel, tedy osobní automobily s dieslovým motorem, který byl přeplňován turbodmychadlem (BorgWarner, 2002-2016; Wikimedia, 2001–).

## 1.2 Stručný popis turbodmychadla

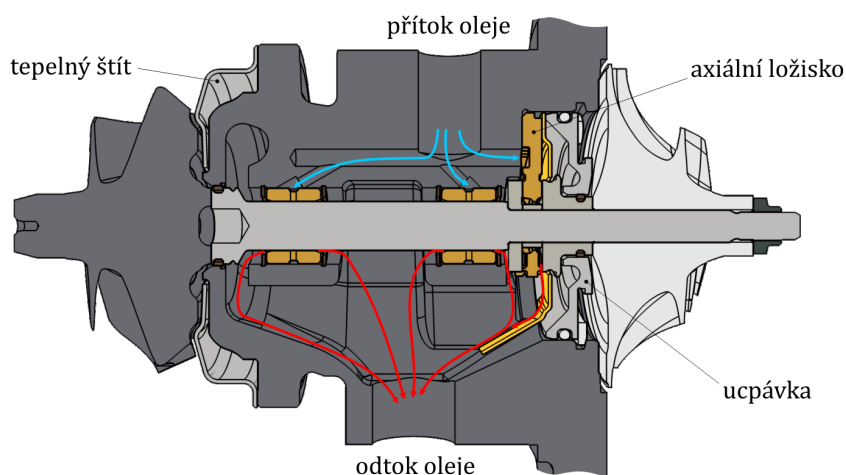
Turbodmychadlo se skládá ze tří skříní (obr. 1.1) a rotoru. Do turbínové skříně, nejčastěji vyrobené z litiny, která má vysokou teplotní odolnost, jsou radiálním kanálem přivedeny výfukové plyny z motoru. Ty roztáčejí turbínové oběžné kolo a jsou následně z turbínové skříně odvedeny axiálním kanálem do výfukového potrubí. Množství přicházejících plynů je obvykle regulováno obtokovým ventilem, aby nedošlo k zahlcení turbíny. Určitou část spalin vystupujících z turbínové skříně je možné ochladit a přivést spolu se stlačeným plnicím vzduchem zpět do motoru. Tohoto postupu se ale využívá především v užitkových motorech, protože další chladič a kanály vyžadují více místa v motorovém prostoru (Nguyen-Schäfer, 2012).

Do hliníkové kompresorové skříně je vzduch vháněn axiálně. Zde je vzduch stlačen kompresorovým oběžným kolem a radiálním kanálem odveden do mezichladiče plnicího vzduchu, kde se snižuje jeho teplota. Díky ochlazení se hustota plnicího vzduchu zvýší a do válců motoru je přivedeno více kyslíku ve stejném objemu plnicího vzduchu. To umožňuje spálit zvýšené množství paliva a tedy navýšit výkon motoru při zachování zdvihového objemu, případně použít motor nižší kubatury a tedy s nižší spotřebou, ale se stejným výkonem (Wikimedia, 2001–).

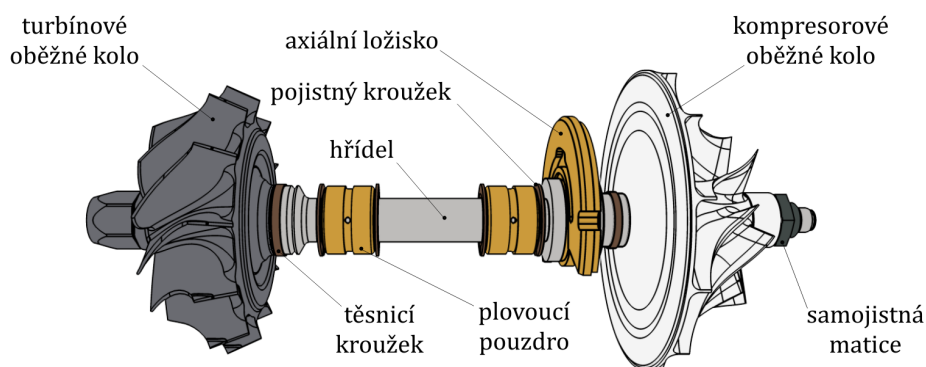
Ložisková skříň je obdobně jako turbínová skříň tepelně namáhána, a proto se obvykle odlévá z litiny. Skříň slouží k uložení ložisek podpírajících rotor turbodmychadla a nacházejí se



Obrázek 1.1: Základní konfigurace turbodmychadla.



**Obrázek 1.2:** Řez ložiskovou skříní turbodmychadla se znázorněním průtoku motorového oleje.



**Obrázek 1.3:** Popis rotoru turbodmychadla.

v ní dvě radiální a jedno axiální ložisko a kanály pro přítok a odtok ložiskového oleje (obr. 1.2).

Turbínový i kompresorový stupeň se nejčastěji nachází na společném hřídeli (obr. 1.3), ale existují i *hybridní turbodmychadla*, u kterých rotor s turbínou produkuje elektrický proud, který napájí elektrický pohon kompresoru (Wikimedia, 2001–). Turbínová oběžná kola se vyrábí z inconelu, austenitické superoceli na bázi niklu a chromu, která odolává korozi, tlaku a zachovává si mechanické vlastnosti i za vysokých teplot. Některé druhy inconelů jsou dokonce schopny pracovat za teplot vyšších než 1000 °C (Nguyen-Schäfer, 2012). K inconelovému oběžnému kolu je přivařen ocelový hřídel, na který se nasazuje vícedílná vložka s axiálním ložiskem a kompresorové oběžné kolo ze slitin hliníku. Součásti jsou na volném konci zajištěny maticí.

Sestavený rotor je obvykle uložen v kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry, která jsou od rotoru i ložiskové skříně oddělena dvojicí olejových filmů, které se označují jako vnější a vnitřní film. Filmy jsou propojeny mazacími otvory vyvrtanými v pouzdře. Existují tři základní konfigurace ložiskového systému (Šimek, 2008):

- i) dvě oddělená rotující pouzdra, viz obr. 1.3,
- ii) dvě oddělená rotující pouzdra, mezi která je umístěno nerotující (zastavené) pouzdro,
- iii) jednodílné nerotující pouzdro (někdy též nazývané *monovtulka*<sup>3</sup>).

<sup>3</sup>Výraz monovtulka vznikl spojením řeckého *mono* (jediný) a ruského *втулка* (pouzdro).

Valivá ložiska jsou používána v případech, kdy je požadováno rychlejší najetí turbodmychadla a méně citelný vliv *turboefektu*, tedy prodlevy mezi sešlápnutím plynového pedálu a dopravením vzduchu stlačeného kompresorem do válců motoru. Nevýhody valivých ložisek tkví v omezené životnosti a horších akustických projevech (Šimek, 2008; Nguyen-Schäfer, 2012).

### 1.3 Současný stav rotordynamiky turbodmychadel

Rotory turbodmychadel jsou specifické tím, že jejich radiální ložiska jsou umístěna relativně blízko sebe a na obou koncích rotoru se nacházejí hmotná oběžná kola. Dynamika rotoru je tedy silně ovlivněna gyroskopickými účinky, které způsobují rozštěpení ohybových tvarů kmitu na větve se souběžnou a protiběžnou precesí. Proto je nutné považovat hřídel jako poddajný. Poddajný hřídel se nejčastěji modeluje s využitím metody konečných prvků (Šimek, 2008; Tian et al., 2012) nebo jako těleso s hmotou soustředěnou do uzlů, které jsou spojeny nehmotnými nosníkovými prvky (Li, 1982; Schweizer, 2009; Tian et al., 2011).

U dobře navržených rotorů turbodmychadel nedochází k rezonanci od provozu v blízkosti kritických otáček, protože první ohybový tvar kmitu s dopřednou precesí nemusí mít díky gyroskopickým efektům kritické otáčky v intervalu provozních otáček rotoru a korespondující tvar kmitu s protiběžnou precesí je málo citlivý na buzení rotující silou od nevyváženosti (Šimek, 2008). Odezva rotorů je tak dána především nestabilitou v kluzných ložiskách a v menší míře také aerodynamickými silami působícími v turbínovém a kompresorovém stupni (Nguyen-Schäfer, 2012).

Rotory automobilových turbodmychadel dosahují rychlostí až  $250\,000\text{ ot min}^{-1}$  (Chasalevris, 2016). Kluzná ložiska ztrácí při vysokých obvodových rychlostech čepu hřídele stabilitu, k čemuž běžně dochází i v ložiskách turbodmychadel. Projevy nestability se potlačují aplikací ložisek se dvěma olejovými filmy, která mají tu vlastnost, že v případě, kdy jeden z filmů ztratí stabilitu, druhý funguje jako tlumicí prvek a rotor je možné provozovat i při rozvinuté nestabilitě olejového filmu (Schweizer, 2010). Čep hřídele v nestabilním ložisku ani při konstantních otáčkách nekmitá v blízkém okolí statické rovnovážné polohy a hydrodynamické síly v takovém ložisku jsou nelineární (Tian et al., 2012). Kmitání čepu hřídele a pouzdra v nestabilním ložisku je subharmonické – probíhá na frekvenci nižší než je frekvence otáčení rotoru. Schweizer (2009; 2010) identifikoval a popsal pět charakteristických projevů subharmonického kmitání, které je zapříčiněno nestabilitou kluzného ložiska s rotujícím plovoucím pouzdrům. Tyto projevy a jejich příčiny jsou detailně popsány v podkapitole 5.2. Eling et al. (2015) úspěšně dokázal, že subharmonické kmitání lze potlačit úpravou geometrie ložiskové mezery. Zhang et al. (2018) navíc dodává, že vznik některých subharmonických složek souvisí s konstrukčním řešením obvodové drážky sloužící k rozvádění oleje ve vnějším filmu.

Hydrodynamické síly působící v ložiskách turbodmychadel se počítají různými přístupy. Dříve oblíbené aproximativní analytické metody se nyní využívají především ve výpočtově náročných aplikacích jako jsou optimalizační úlohy. Nejčastěji se hydrodynamický tlak stanovuje pomocí Reynoldsovy rovnice pro idealizované krátké ložisko (Nguyen-Schäfer, 2012; Tian et al., 2012). Historicky se pro stanovení hydrodynamických sil v ložiskách turbodmychadel využívaly také impedanční metoda (Li a Rohde, 1981) a perturbační metoda (Trippett a Li, 1984). V roce 2016 odvodil Chasalevris analytické vztahy pro síly působící v systému skládajícího se z dvou olejových filmů konečné délky, mezi kterými se nachází plovoucí pouzdro.

Analytické metody jsou sice efektivní z hlediska výpočtového času, ale často nepostihují vliv mazacích drážek a mazacích otvorů a je problematické je aplikovat ložiska jiných průřezů než

kruhových. Zhang et al. (2011) použil pro výpočet hydrodynamického tlaku v kluzných ložiskách turbodmychadel metodu konečných diferencí, San Andrés a Kerth (2004) metodu konečných prvků a (Novotný et al., 2018) metodu konečných objemů. (Novotný et al., 2018) zároveň navrhl způsob, jak pomocí metody konečných objemů modelovat průtok oleje mazacími otvory v pouzdru. Ve speciálních aplikacích souvisejících především s posouzením stability systému se kombinují numerické metody s analytickými (Tian et al., 2018). Pokud je stabilita posuzována parametricky, hydrodynamické síly se linearizují (Tian et al., 2011).

Při modelování kluzných ložisek s plovoucími pouzdry se využívá poznatků získaných analýzou běžných kluzných ložisek. Při nestabilním kmitání dochází ke *kavitaci*, tedy vzniku dutin vyplněných plynem, který je rozpuštěný v oleji. Model olejového filmu s kavitami, který respektuje zákon zachování hmotnosti, představili Brewe (1986); Sawicki a Rao (2004). Reinhardt a Lund (1975) se zabývají účinky setrvačných sil působících na olej, které ovlivňují vlastnosti vnitřních filmů s nízkou viskozitou. Při poruchách a v některých mezních stavech je olejový film natolik tenký, že jeho vlastnosti ovlivňuje drsnost kluzných povrchů (Patir a Cheng, 1979; Prat et al., 2002). Při studiu stability linearizovaných ložisek se využívá teorie založená na Routhovu-Hurwitzovu kritériu stability (Okazaki a Hori, 1955). Stabilitu systému s nelineárními ložisky lze posuzovat i analýzou odezvy nelineárního modelu Smolík a Rendl et al. (2019) nebo numerickou kontinuací (Wang a Khonsari, 2006; Dyk a Smolík et al., 2019). Numerické metody uvedené v předchozím odstavci jsou představeny následujícími autory: Stachowiak a Batchelor (2013); Rendl (2017) rozebírají metodu konečných diferencí, Smolík a Rendl et al. (2018) zkoumají omezení této metody vyplývající z nahrazení parciálních derivací v Reynoldsově rovnici konečnými diferencemi, Chandra a Sinhasan (1987); Larsen a Santos (2015) představují řešení Reynoldsovy rovnice pomocí metody konečných prvků a Prata et al. (1988); Profito et al. (2015) pomocí metody konečných objemů.

Poměrně zajímavou oblastí rotordynamiky turbodmychadel je chování rotujících plovoucích pouzder. Přestože jedna z prvních experimentálních studií pochází již z roku 1984 (Trippett a Li), není daná problematika dosud plně popsána. Chybí především dostatek experimentálních dat, pomocí kterých by bylo možné verifikovat vztahy popisující úhlovou rychlost rotujících pouzder. Existuje několik přístupů, na jejichž základě lze úhlovou rychlost pouzdra vypočítat. Nguyen-Schäfer (2012) navrhl explicitní vztah pro výpočet úhlové rychlosti pouzder aplikací podmínky rovnováhy třecích momentů působících na vnějším a vnitřním povrchu pouzdra. Nelineární podmínku rovnováhy založenou na stejné myšlence ukázali Rohde a Ezzat (1980) a totožnou podmínku rovnováhy použil i Tian et al. (2011; 2012). Trippett a Li (1984) odvodili soustavu pěti nelineárních rovnic, které zahrnují jevy jako přestup tepla z vnitřního do vnějšího filmu materiálem pouzdra a změnu vůlí ložiska v závislosti na teplotách jeho součástí. Ložisko je v této práci považováno za adiabatické, teplo z něj tedy nepřechází do čepu hřídele ani ložiskové skříně. Trippett a Li ověřili své výpočty experimentálně a ukázali, že po překročení určitých mezních otáček rotoru turbodmychadla není úhlová rychlost pouzdra predikována přesně. Novější články se zpřesněním vztahů pro určení úhlové rychlosti pouzder příliš nezabývají, protože experimentální data (San Andrés et al., 2007; Schweizer a Sievert, 2009) ukazují na to, že vliv úhlové rychlosti pouzder na amplitudy kmitání rotoru není významný.

Experimentální rotorová dynamika a diagnostika rotorů automobilových turbodmychadel se rozvinuly teprve nedávno a to přesto, že v oblasti stacionárních točivých strojů jde o obory s tradicí sahající do 20. let, resp. na přelom 50. a 60. let. Rychlejšímu rozvoji však bránily malé rozměry a vysoké otáčky rotorů a také vysoká pořizovací cena a značné provozní náklady zkušebních zařízení. Výrobci turbodmychadel typicky měří absolutní vibrace ložiskové skříně a rotorové vibrace matice na kompresorové straně. San Andrés et al. (2007) a Schweizer a

Sievert (2009) použili pro měření rotorových vibrací snímače pracující na principu vířivých proudů a ověřili charakteristiky subharmonického kmitání rotoru. San Andrés a Kerth (2004) měřili úhlovou rychlost plovoucích pouzder optickými vlákny ve snaze kvantifikovat vliv teploty mazacího oleje na kmitání rotoru a úhlovou rychlost pouzder. Optické metody využil také Pastor et al. (2012) na měření amplitud kmitání rotoru, Janicki et al. (2014) na měření vibrací lopatek a Köhl et al. (2014) na pozorování dějů v olejových filmech ložisek. V České republice se diagnostikou a vyvažováním rotorů turbodmychadel dlouhodobě zabývá Šimek (2008).

### 1.4 Cíle a členění dizertační práce

Na základě analýzy současného stavu oboru jsou definovány cíle dizertační práce:

- i) Navrhnout komplexní metodiku modelování rotorů turbodmychadel s respektováním všech důležitých jevů s ohledem na analýzu ohybového kmitání.
- ii) Implementovat výpočtový model reálného turbodmychadla.
- iii) Formulovat úlohu dynamické analýzy rotoru turbodmychadla zahrnující reálné provozní podmínky a navrhnout vhodné řešení.
- iv) Analyzovat vliv vybraných parametrů na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla.
- v) Navrhnout a otestovat metodiku měření ohybového kmitání turbodmychadel s ohledem na verifikaci výpočtového modelu.
- vi) Formulovat doporučení pro zlepšení dynamického chování rotorů turbodmychadel.

Práce je členěna následovně: ve **druhé kapitole** práce jsou odvozeny pohybové rovnice popisující ohybové kmitání rotoru turbodmychadla. **Třetí kapitola** se zabývá modelováním hydrodynamického mazání v radiálních kluzných ložiskách s plovoucími pouzdry, modelováním průtoku oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech a stanovením provozních vůlí radiálních ložisek. Ve **čtvrté kapitole** jsou představeny numerické a analytické metody nejčastěji používané při řešení rovnic popisujících hydrodynamické mazání a jsou zde diskutovány různé přístupy stanovení hydrodynamických sil působících v kluzném ložisku. V **páté kapitole** jsou charakterizovány typické projevy ohybového kmitání rotorů turbodmychadel a je diskutován vliv modelu hydrodynamických sil na ohybové kmitání rotoru. V **šesté kapitole** je detailně analyzováno ohybové kmitání sériově vyráběného rotoru turbodmychadla a jsou navrženy postupy a metody použitelné při návrhu efektivního uložení. V **sedmé kapitole** jsou nastíněny možnosti experimentálního vyšetřování ohybového kmitání rotorů turbodmychadel. V **závěrečné části** jsou stručně shrnuty nejdůležitější získané poznatky.



## 2 Ohybové kmitání rotoru turbodmychadla

V předchozí kapitole byly popsány jednotlivé části rotoru turbodmychadla a uložení rotoru na radiálních ložiskách s plovoucími pouzdry. Matematický model popisující ohybové kmitání rotoru turbodmychadla, který respektuje vlastnosti všech částí rotoru a uložení rotoru, musí popisovat následující skutečnosti:

- deformace hřídele a gyroskopické účinky od lopatkových kol,
- vliv plovoucích pouzder v radiálních ložiskách,
- hydrodynamické síly v radiálních ložiskách,
- aerodynamické síly v turbínovém a kompresorovém stupni.

V této kapitole budou představeny dvě metody, které umožňují odvození matematického modelu ohybového kmitání rotoru turbodmychadla s respektováním výše uvedených skutečností. Nejprve bude stručně odvozen model využívající metodu konečných prvků, jejíž výhodou je respektování spojitě rozložené hmotnosti hřídele rotoru. Dále bude rozebrán popis rotoru turbodmychadla jako vázané mechanické soustavy.

### 2.1 Sestavení pohybové rovnice s využitím metody konečných prvků

#### 2.1.1 Modelování hřídelů

Typickou vlastností hřídelů je, že jejich podélný rozměr převažuje nad příčným. Takové hřídele lze uvažovat jako jednorozměrná příčně nestlačitelná kontinua (Byrtus et al., 2010), která se vyznačují tím, že jejich deformační stav závisí pouze na podélné prostorové souřadnici  $x$ .

Pokud je z hřídele kruhového průřezu vyjmuta část o délce  $l$  a s konstantním průměrem  $d$ , hovoříme o *konečném hřídelovém prvku*  $e$ , ukázaném na (obr. 2.1). Ohybové kmity libovolného průřezu konečného prvku jsou popsány příčnými výchylkami  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  těžiště průřezu  $S$  ve směru pevných os  $y$  a  $z$  a Eulerovými úhly  $\psi(x, t)$ ,  $\vartheta(x, t)$ , které popisují natočení průřezu. Dále uvažujme, že konečný prvek splňuje následující předpoklady:

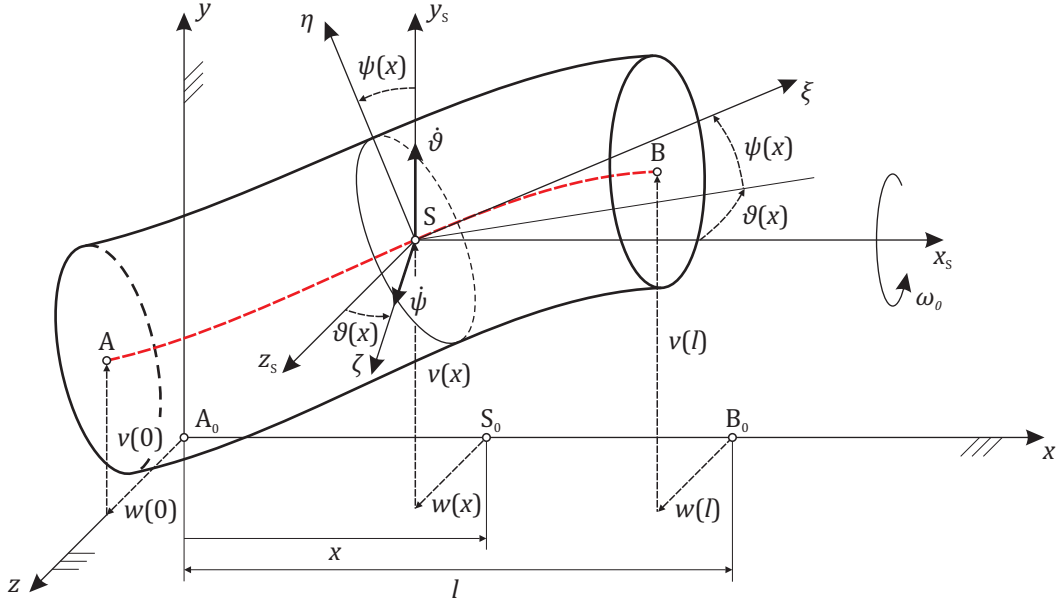
- i) prvek rotuje konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$  kolem podélné osy,
- ii) průřezy zůstávají dle Mindlinovy teorie při deformaci prvku rovinné,
- iii) příčné výchylky jsou v podélném směru aproximovány kubickými polynomy,
- iv) Eulerovy úhly lze v souladu s Rayleighovou teorií vyjádřit výrazy

$$\psi(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \quad \vartheta(x, t) = -\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (2.1)$$

- v) materiál konečného prvku je lineární, pro vektor napětí  $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$  tedy platí Hookeův zákon

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t) = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(x, t), \quad (2.2)$$

kde  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$  je vektor přetvoření a  $\mathbf{D}$  je symetrická matice tuhosti materiálu.



**Obrázek 2.1:** Deformovaný konečný hřídelový prvek respektující pouze ohybové kmity (argumenty  $t$  jsou pro přehlednost vypuštěny).

### Aproximace příčných výchylek a Eulerových úhlů

V souladu s předpokladem iii) lze příčné výchylky  $v(x, t)$  a  $w(x, t)$  aproximovat pomocí řádkového vektoru násadových funkcí  $\Theta(x)$  a čtyřprvkových sloupcových vektorů lineární kombinace  $\mathbf{c}_1(t)$  a  $\mathbf{c}_2(t)$

$$v(x, t) = \Theta(x) \mathbf{c}_1(t), \quad w(x, t) = \Theta(x) \mathbf{c}_2(t), \quad \text{kde } \Theta(x) = [1, x, x^2, x^3]. \quad (2.3)$$

Eulerovy úhly  $\psi(x, t)$  a  $\vartheta(x, t)$  lze vyjádřit přímým dosazením (2.3) do (2.1):

$$\psi(x, t) = \Theta'(x) \mathbf{c}_1(t), \quad \vartheta(x, t) = -\Theta'(x) \mathbf{c}_2(t), \quad \text{kde } \Theta'(x) = [0, 1, 2x, 3x^2]. \quad (2.4)$$

Neznámé vektory lineární kombinace  $\mathbf{c}_1(t)$  a  $\mathbf{c}_2(t)$  získáme z geometrických okrajových podmínek hřídelového prvku. Pokud jsou posuvy a natočení v uzlech konečného prvku A a B libovolné, lze okrajové podmínky vyjádřit s využitím Rayleighových vztahů (2.1) následovně:

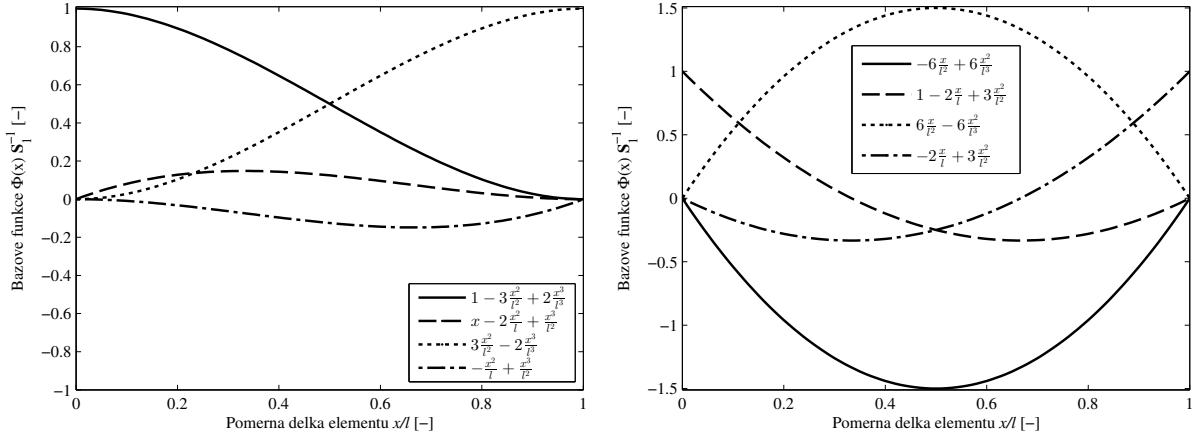
$$\left. \begin{array}{l} v(0, t) = c_1(t) \\ \psi(0, t) = c_2(t) \\ v(l, t) = c_1(t) + c_2(t)l + c_3(t)l^2 + c_4(t)l^3 \\ \psi(l, t) = c_2(t) + 2c_3(t)l + 3c_4(t)l^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} v(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(l, t) \\ \psi(l, t) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \\ c_4(t) \end{array} \right], \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} w(0, t) = c_5(t) \\ \vartheta(0, t) = -c_6(t) \\ w(l, t) = c_5(t) + c_6(t)l + c_7(t)l^2 + c_8(t)l^3 \\ \vartheta(l, t) = -c_6(t) - 2c_7(t)l - 3c_8(t)l^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ w(l, t) \\ \vartheta(l, t) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} c_5(t) \\ c_6(t) \\ c_7(t) \\ c_8(t) \end{array} \right], \end{array}$$

což lze kompaktně zapsat

$$\mathbf{q}_1(t) = \mathbf{S}_1 \mathbf{c}_1(t), \quad \mathbf{q}_2(t) = \mathbf{S}_2 \mathbf{c}_2(t), \quad (2.5)$$





**Obrázek 2.2:** Bázové funkce pro aproximace příčných výchylek těžiště a úhlů natočení průřezů.

kde  $\mathbf{q}_1(t)$  a  $\mathbf{q}_2(t)$  jsou vektory uzlových souřadnic, popisující příčné výchylky a Eulerovy úhly v uzlech A a B a  $\mathbf{S}_1$  a  $\mathbf{S}_2$  jsou matice násadových koeficientů. Neznámé vektory lineární kombinace  $\mathbf{c}_1(t)$  a  $\mathbf{c}_2(t)$  lze vyjádřit z (2.5) pomocí inverzních matic násadových koeficientů  $\mathbf{S}_1^{-1}$  a  $\mathbf{S}_2^{-1}$

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t), \quad \mathbf{c}_2(t) = \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2(t). \quad (2.6)$$

Po dosazení (2.6) do (2.3) a (2.4)

$$v(x, t) = \Theta(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t), \quad (2.7a)$$

$$w(x, t) = \Theta(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2(t), \quad (2.7b)$$

$$\psi(x, t) = \Theta'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1(t), \quad (2.7c)$$

$$\vartheta(x, t) = -\Theta'(x) \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2(t) \quad (2.7d)$$

jsou příčné výchylky  $v(x, t)$  a  $w(x, t)$  a Eulerovy úhly  $\psi(x, t)$  a  $\vartheta(x, t)$  vyjádřeny pomocí vektorů uzlových souřadnic  $\mathbf{q}_1(t)$  a  $\mathbf{q}_2(t)$  a součinnů  $\Theta(x) \mathbf{S}_1^{-1}$  a  $\Theta'(x) \mathbf{S}_1^{-1}$ , které generují bázové funkce (obr. 2.2), jejichž lineární kombinace aproximují průběh deformací po délce hřídelového prvku.

### Kinetická energie hřídelového prvku

*Kinetická energie* hřídelového prvku  $e$  je dána součtem energií od unášivého posuvného a relativního sférického pohybu (Byrtus et al., 2010)

$$E_k^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ A(x) \mathbf{v}_S^T(x, t) \mathbf{v}_S(x, t) + \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}^T(x, t) \mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(x, t) \right] \rho dx, \quad (2.8)$$

ve kterém  $\mathbf{v}_S(x, t)$  a  $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(x, t)$  jsou vektory rychlosti posuvného pohybu těžiště S hmotného elementu hřídelového prvku o délce  $dx$  a úhlové rychlosti relativního sférického pohybu hmotného elementu,  $A(x)$  je plocha průřezu,  $\rho$  je hustota konečného prvku a  $\mathbf{J}(x)$  je matice kvadratických

a deviačních momentů průřezu hřídele, pro kterou vzhledem k předpokladu kruhovitosti průřezu hřídele platí

$$\mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} J_y(x) + J_z(x) & 0 & 0 \\ 0 & J_y(x) & 0 \\ 0 & 0 & J_z(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2J(x) & 0 & 0 \\ 0 & J(x) & 0 \\ 0 & 0 & J(x) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Vektor unášivé rychlosti  $\mathbf{v}_S(x, t)$  vyjádříme v pevném souřadnicovém systému  $xyz$

$$\mathbf{v}_S(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{v}(x, t) \\ \dot{w}(x, t) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Vektor relativní úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(x, t)$  vyjádříme v souřadnicovém systému  $\xi\eta\zeta$ , který je pevně spojen s hmotným elementem a jehož orientace je patrná z obr. 2.1. Za předpokladu malých natočení lze vektor  $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(x, t)$  zavést následujícím způsobem (Byrtus et al., 2010):

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(x, t) = \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\vartheta}(x, t) \sin \psi(x, t) \\ \dot{\vartheta}(x, t) \cos \psi(x, t) \\ \dot{\psi}(x, t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \omega_0 + \dot{\vartheta}(x, t) \psi(x, t) \\ \dot{\vartheta}(x, t) \\ \dot{\psi}(x, t) \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Po dosazení vztahů (2.10) a (2.11) pro vektory rychlostí do (2.8) dostaneme (argumenty  $x$  a  $t$  jsou pro přehlednost vypuštěny)

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ A (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J (2\omega_0^2 + 4\omega_0 \dot{\vartheta} \psi + 2\dot{\vartheta}^2 \psi^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2) \right] \rho dx, \quad (2.12)$$

kde je možné zanedbat člen  $\dot{\vartheta}^2 \psi^2$ , který je za předpokladu malých natočení oproti ostatním členům malý. Po dosazení (2.7a) – (2.7d) za deformace a rychlosti deformací vyjádříme kinetickou energii konečného hřídelového prvku  $E_k^{(e)}(t)$  pomocí vektorů uzlových souřadnic, bázových funkcí a geometrie prvku následovně (argumenty  $x$  a  $t$  jsou pro přehlednost vypuštěny)

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ A \left( \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{S}_2^{-T} \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta} \mathbf{S}_2^{-1} \dot{\mathbf{q}}_2 \right) + J \left( 2\omega_0^2 - 4\omega_0 \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{S}_2^{-T} \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{S}_1^{-T} \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{S}_2^{-T} \boldsymbol{\Theta}^T \boldsymbol{\Theta}' \mathbf{S}_2^{-1} \dot{\mathbf{q}}_2 \right) \right] \rho dx. \quad (2.13)$$

### Potenciální energie hřídelového prvku

Potenciální energie hřídelového prvku  $e$  je dána výrazem (Byrtus et al., 2010)

$$E_p^{(e)}(t) = \frac{1}{2} \int_{(V)} \lambda(x, t) dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \boldsymbol{\sigma}^T(x, t) \boldsymbol{\varepsilon}(x, t) dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} \boldsymbol{\varepsilon}^T(x, t) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(x, t) dV, \quad (2.14)$$

kde  $\lambda(x, t)$  je hustota deformační energie a vektor napětí  $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$  byl vyjádřen s využitím vztahu (2.2). Vektor přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$  lze vyjádřit pomocí posuvů libovolného bodu  $L$  konečného hřídelového prvku. Předpokládejme, že v nezdeformované konfiguraci jsou souřadnice tohoto

bodů  $x, y, z$ . Za předpokladu, že natočení  $\psi(x, t)$  a  $\vartheta(x, t)$  jsou malá, lze posuvy bodu L z počáteční polohy vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= -y\psi(x, t) + z\vartheta(x, t), \\ u_y(x, t) &= v(x, t), \\ u_z(x, t) &= w(x, t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Vektor přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$  lze pak formulovat následovně

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x, t) \\ \varepsilon_y(x, t) \\ \varepsilon_z(x, t) \\ \gamma_{yz}(x, t) \\ \gamma_{zx}(x, t) \\ \gamma_{xy}(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial z} + \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, t)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y\psi'(x, t) + z\vartheta'(x, t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w'(x, t) + \vartheta(x, t) \\ -\psi(x, t) + v'(x, t) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

kde díky platnosti Rayleighových vztahů (2.1) jsou členy  $w'(x, t) + \vartheta(x, t)$  a  $-\psi(x, t) + v'(x, t)$  nulové. S využitím takto vyjádřeného vektoru přetvoření  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$  můžeme argument integrálu ze vztahu (2.14) přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\top(x, t) \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \varepsilon_x(x, t) d_{11} \varepsilon_x(x, t) = E^* [-y\psi'(x, t) + z\vartheta'(x, t)]^2, \quad (2.17)$$

kde  $E^* = [E(1 - \nu)] / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ ,  $E$  je Youngův modul pružnosti v tahu a  $\nu$  je Poissonovo číslo. Po dosazení (2.17) do vztahu (2.14) a s využitím vztahů (2.7a) – (2.7d) lze potenciální energii konečného hřídelového prvku  $E_p^{(e)}(t)$  vyjádřit pomocí vektorů uzlových souřadnic, bázevých funkcí a geometrie prvku následovně (argumenty  $x$  a  $t$  jsou vypuštěny)

$$\begin{aligned} E_p^{(e)} &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A)} E^* \left( y^2 \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Theta}''^\top \boldsymbol{\Theta}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - yz \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Theta}''^\top \boldsymbol{\Theta}'' \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2 - \right. \\ &\quad \left. - yz \mathbf{q}_2^\top \mathbf{S}_2^{-\top} \boldsymbol{\Theta}''^\top \boldsymbol{\Theta}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 + z^2 \mathbf{q}_2^\top \mathbf{S}_2^{-\top} \boldsymbol{\Theta}''^\top \boldsymbol{\Theta}'' \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2 \right) dA dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vzhledem k tomu, že pro hřídel kruhového průřezu platí

$$J_y = \int_{(A)} z^2 dA = J, \quad J_z = \int_{(A)} y^2 dA = J, \quad D_{yz} = D_{zy} = \int_{(A)} yz dA = 0, \quad (2.19)$$

je možné vztah (2.18) zjednodušit do tvaru (argumenty  $x$  a  $t$  jsou pro přehlednost vypuštěny)

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E^* J \left( \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Theta}''^\top \boldsymbol{\Theta}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2^\top \mathbf{S}_2^{-\top} \boldsymbol{\Theta}''^\top \boldsymbol{\Theta}'' \mathbf{S}_2^{-1} \mathbf{q}_2 \right) \right] dA dx. \quad (2.20)$$

### Matice konečného hřídelového prvku

Matice konečného hřídelového prvku  $e$  odvodíme z podmínky ekvivalence levé strany Lagranžových rovnic s klasickou pohybovou rovnicí rotující struktury v maticové formulaci (Byrtus et al., 2010)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k^{(e)}(t)}{\partial \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e(t)} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}(t)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_e(t)} + \frac{\partial E_p^{(e)}(t)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}_e(t)} = \tilde{\mathbf{M}}_e \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_e(t) + \omega_0 \tilde{\mathbf{G}}_e \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e(t) + \tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\mathbf{q}}_e(t), \quad (2.21)$$

kam za  $E_k^{(e)}(t)$  a  $E_p^{(e)}(t)$  dosadíme výrazy (2.13) a (2.20). Jednotlivé koeficientové matice konečného hřídelového prvku  $e$  a vektor jeho uzlových souřadnic  $\tilde{\mathbf{q}}_e(t)$  pak nabývají tvaru

$$\tilde{\mathbf{M}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-\top} (A \rho \mathbf{I}_{00}^{33} + J \rho \mathbf{I}_{11}^{33}) \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-\top} (A \rho \mathbf{I}_{00}^{33} + J \rho \mathbf{I}_{11}^{33}) \mathbf{S}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.22a)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2 \rho J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_2^{-1} \\ 2 \rho J \mathbf{S}_2^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.22b)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} E^* J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^* J \mathbf{S}_2^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.22c)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1(t) \\ \mathbf{q}_2(t) \end{bmatrix}, \quad (2.22d)$$

kde  $\tilde{\mathbf{M}}_e$  je symetrická matice hmotnosti,  $\omega_0 \tilde{\mathbf{G}}_e$  je antisymetrická matice gyroskopických účinků,  $\tilde{\mathbf{K}}_e$  je symetrická matice tuhosti a  $\mathbf{I}_{ij}^{mn}$  jsou konstantní integrální matice definované vztahem

$$\mathbf{I}_{ij}^{mn} = \int_0^l \frac{\partial^i [1, x, \dots, x^m]^\top}{\partial x^i} \frac{\partial^j [1, x, \dots, x^n]}{\partial x^j} dx. \quad (2.23)$$

Koeficienty v maticích (2.22a) – (2.22c) jsou uspořádány v souladu s pořadím uzlových souřadnic ve vektoru  $\tilde{\mathbf{q}}_e(t)$ :

$$\tilde{\mathbf{q}}_e(t)^\top = [v(0, t), \psi(0, t), v(l, t), \psi(l, t), w(0, t), \vartheta(0, t), w(l, t), \vartheta(l, t)].$$

Souřadnice ve vektoru  $\tilde{\mathbf{q}}_e(t)$  je ale účelné seřadit tak, aby se na prvních čtyřech pozicích nacházely souřadnice náležející levému řídicímu uzlu konečného hřídelového prvku a na zbývajících čtyřech pozicích souřadnice náležející pravému řídicímu uzlu. Toho lze dosáhnout zavedením transformačního vztahu

$$\begin{bmatrix} v(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(l, t) \\ \psi(l, t) \\ w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ w(l, t) \\ \vartheta(l, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(0, t) \\ w(0, t) \\ \vartheta(0, t) \\ \psi(0, t) \\ v(l, t) \\ w(l, t) \\ \vartheta(l, t) \\ \psi(l, t) \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

který je možné kompaktně zapsat ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{q}}_e(t) = \mathbf{T}_e \mathbf{q}_e(t). \quad (2.25)$$

Na transformační matici  $\mathbf{T}_e$  ze vztahu (2.25) lze pohlížet také jako na matici přechodu, která převádí koeficientové matice konečného hřídelového prvku do nové báze dané přeuspořádaným vektorem uzlových souřadnic konečného hřídelového prvku  $\mathbf{q}_e$ . Pro koeficientové matice v této nové bázi platí

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{T}_e^T \tilde{\mathbf{X}}_e \mathbf{T}_e, \quad (2.26)$$

přičemž  $\mathbf{X}_e$  je libovolná koeficientová matice konečného hřídelového prvku  $e$  v bázi  $\mathbf{q}_e$  a  $\tilde{\mathbf{X}}_e$  libovolná koeficientová matice v bázi  $\tilde{\mathbf{q}}_e$ . Platnost transformačního vztahu (2.26) lze ověřit např. vyjádřením potenciální energie konečného hřídelového prvku pomocí koeficientové matice  $\mathbf{K}_e$  ze vztahu (2.22c). Pak platí

$$E_p^e(t) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}_e^T(t) \tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\mathbf{q}}_e(t) = \mathbf{q}_e^T(t) \mathbf{T}_e^T \tilde{\mathbf{K}}_e \mathbf{T}_e \mathbf{q}_e(t) = \mathbf{q}_e^T(t) \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e(t). \quad (2.27)$$

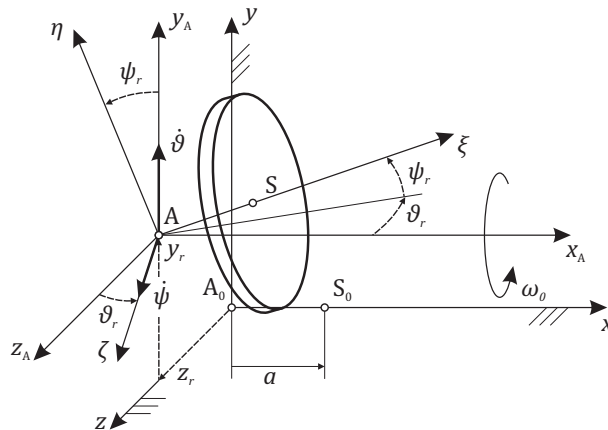
### 2.1.2 Modelování lopatkových kol

Lopatková kola na převislých koncích rotoru turbodmychadla obvykle tvoří kolem tří čtvrtin hmotnosti rotoru a působí na ně značné gyroskopické účinky. V případech, kdy cílem simulací je analýza ohybového kmitání rotoru, se často obě kola považují za idealizované tuhé kotouče, jejichž koeficientové matice jsou odvozeny v první části oddílu.

Idealizované tuhé kotouče nepřispívají do matice tuhosti rotoru (Byrtus et al., 2010). U rotorů turbodmychadla byl nicméně experimentálně prokázán (Smolík, 2013) vliv kompresorového kola na ohybovou tuhost hřídele. Tento vliv lze respektovat zavedením náhradních konečných hřídelových prvků o větším průměru, které se nacházejí pod kompresorovým kolem. Tento přístup je diskutován ve druhé části oddílu.

#### Matice tuhého kotouče

Uvažujme rotačně symetrický tuhý kotouč  $r$  ukázaný na obr. 2.3, který není zatížen vnějšími silovými účinky, otáčí se konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$  kolem své osy symetrie a jeho středisko



**Obrázek 2.3:** Tenký tuhý kotouč pevně spojený s hřídelem v jednom uzlovém bodě (argumenty  $t$  jsou pro přehlednost vypuštěny).

hmotnosti S je od nejbližšího uzlu A konečného hřídelového prvku posunuto o vzdálenost  $a$  ve směru osy  $x$ .

Celková okamžitá energie tuhého kotouče je rovna jeho okamžité kinetické energii  $E_k^{(r)}(t)$ , která je dána součtem kinetické energie unášivého posuvného a relativního sférického pohybu (Rosenberg, 2010)

$$E_k^{(r)}(t) = E_{k,\text{un}}^{(r)}(t) + E_{k,\text{rel}}^{(r)}(t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^\top(t) \mathbf{v}_S(t) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}^\top(t) \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(t), \quad (2.28)$$

kde  $m$  je hmotnost tuhého kotouče,  $\mathbf{I}_S = \text{diag}(I_0, I, I)$  je matice setrvačnosti vztažená ke středisku hmotnosti S a  $\mathbf{v}_{\text{un}}(t)$  a  $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(t)$  jsou vektory rychlosti unášivého posuvného pohybu a úhlové rychlosti relativního rotačního pohybu. V případě diskutovaného tuhého kotouče lze linearizované vektory  $\mathbf{v}_S(t)$  a  $\boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}(t)$  vyjádřit analogicky k případu hmotného elementu hřídelového prvku. V souladu s (2.10) a (2.11) tedy platí (argument  $t$  je pro přehlednost v následujících vztazích vypuštěn)

$$\mathbf{v}_S^\top = [0, \dot{y}_r + a \dot{\psi}_r, \dot{z}_r + a \dot{\vartheta}_r], \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{rel}}^\top = [\omega_0 + \dot{\vartheta}_r \psi_r, \dot{\vartheta}_r, \dot{\psi}_r]. \quad (2.29)$$

Dosazením (2.29) do (2.28) je vyjádřena kinetická energie unášivého posuvného pohybu

$$E_{k,\text{un}}^{(r)} = \frac{1}{2} m \left( \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2 + 2a \dot{y}_r \dot{\psi}_r + a^2 \dot{\psi}_r^2 - 2a \dot{z}_r \dot{\vartheta}_r + a^2 \dot{\vartheta}_r^2 \right) \quad (2.30)$$

a kinetická energie relativního rotačního pohybu

$$E_{k,\text{rel}}^{(r)} = \frac{1}{2} \left[ I_0 (\omega_0 + \dot{\vartheta}_r \psi)^2 + I (\dot{\vartheta}_r^2 + \dot{\psi}_r^2) \right] \approx \frac{1}{2} \left[ I_0 (\omega^2 + 2\omega_0 \dot{\vartheta}_r \psi_r) + I (\dot{\vartheta}_r^2 + \dot{\psi}_r^2) \right], \quad (2.31)$$

kteřá je linearizována zanedbáním malých členů, tedy součinů, ve kterých se vyskytují více než dva činitele představující natočení  $\psi_r$  a  $\vartheta_r$  nebo jejich derivace podle času.

Koeficientové matice tuhého kotouče  $r$  získáme přímým dosazením vztahů (2.30) a (2.31) do Lagrangeových rovnic II. druhu (Rosenberg, 2010) a porovnáním výsledné soustavy čtyř lineárních rovnic s pohybovou rovnicí Stodolova-Greenova rotoru v maticové formulaci

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_k(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_r(t)} \right] - \frac{\partial E_k(t)}{\partial \mathbf{q}_r(t)} = \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{q}}_r(t) + \omega_0 \mathbf{G}_r \dot{\mathbf{q}}_r(t). \quad (2.32)$$

Matice hmotnosti  $\mathbf{M}_r$ , matice gyroskopických účinků  $\mathbf{G}_r$  a vektor zobecněných souřadnic  $\mathbf{q}_r(t)$  mají následující tvar:

$$\mathbf{M}_r = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & m a \\ 0 & m & -m a & 0 \\ 0 & -m a & I + m a^2 & 0 \\ m a & 0 & 0 & I + m a^2 \end{bmatrix}, \quad (2.33a)$$

$$\mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_0 \\ 0 & 0 & -I_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.33b)$$

$$\mathbf{q}_r(t) = \begin{bmatrix} y_r(t) \\ z_r(t) \\ \vartheta_r(t) \\ \psi_r(t) \end{bmatrix}. \quad (2.33c)$$

### Zvýšení ohybové tuhosti hřídele od nasazeného kompresorového kola

Průměr hřídele pod kompresorovým kolem je až o třetinu menší v porovnání s průměrem čepu v radiálním ložisku. Na hřídeli menšího průměru jsou kromě kola nasazeny rozpěrka s axiálním ložiskem, nákrůžky dosedající na rozpěrku a na samém konci hřídele samojistná matice. Po nasazení matice dosedne kompresorové kolo čelně na plochu rozpěrky, ta dosedne na nákrůžky a plochu hřídele většího průměru. Dotažením matice vznikne v nasazených součástech axiální předpětí, díky němuž jsou tyto součásti schopny přenést ohybový moment.

Do výpočtového modelu je zvýšenou ohybovou tuhost možno zahrnout zavedením náhradních hřídelových prvků s větším průměrem, které se nacházejí pod nasazenými součástmi. Uvažujme nyní kompresorové kolo z obr. 2.4 o hmotnosti  $m_k$  a s momenty setrvačnosti k ose rotace a k příčné ose  $I_{0,k}$  a  $I_k$ , které je nasazené na hřídele o průměru  $D$ . Průměr náhradního hřídele  $D^*$  je dán koeficientem vyztužení  $\delta$

$$\delta = \frac{D^*}{D}. \quad (2.34)$$

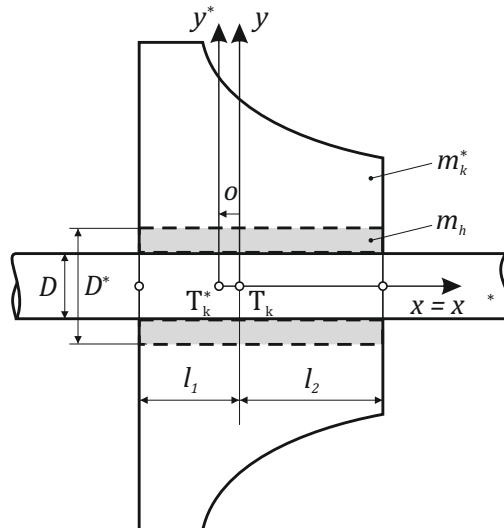
Koeficient vyztužení  $\delta$  je možné určit experimentálně a jeho velikost je obvykle  $1,25 \leq \delta \leq 1,4$  (Smolík, 2013).

Zvětší-li se průměr konečných prvků, zvýší se součet jejich hmotností o hmotnost dutého válce  $m_h$ , jehož rozměry jsou patrné z obr. 2.4. Aby byla zachována celková hmotnost rotoru, je třeba o  $m_h$  snížit hmotnost náhradního kompresorového kola

$$m_k^* = m_k - m_h = m_k - \frac{1}{4} \rho \pi (l_1 + l_2) D^2 (\delta^2 - 1), \quad (2.35)$$

kde  $m_k^*$  je hmotnost náhradního kompresorového kola,  $\rho$  je hustota materiálu konečných hřídelových prvků a  $l_1$  a  $l_2$  jsou délky původních konečných hřídelových prvků. Obdobně se sníží i moment setrvačnosti k ose rotace

$$I_{0,k}^* = I_{0,k} - I_{0,h} = I_{0,k} - \frac{1}{32} \rho \pi (l_1 + l_2) D^4 (\delta^4 - 1), \quad (2.36)$$



**Obrázek 2.4:** Zvýšení ohybové tuhosti hřídele pod kompresorovým kolem zvětšením průměru konečných hřídelových prvků.

kde  $I_{0,k}^*$  je moment setrvačnosti náhradního kompresorového kola k ose rotace a  $I_{0,h}$  je moment setrvačnosti dutého válce, který je odebrán z kompresorového kola.

Odebráním materiálu se těžiště náhradního kompresorového kola přesune z bodu  $T_k$  do nové polohy  $T_k^*$  po orientované úsečce, jejíž délku  $o$  lze vyjádřit z rovnice statické rovnováhy

$$m_k^* o = m_h \left( l_2 - \frac{l_1 + l_2}{2} \right) \quad \Rightarrow \quad o = \frac{m_h (l_2 - l_1)}{2(m_k - m_h)}. \quad (2.37)$$

Moment setrvačnosti náhradního kompresorového kola k příčné ose  $I_k^*$  je možné s využitím Steinerovy věty vyjádřit následujícím způsobem

$$I_k^* = I_k - I_h - m_h \left( l_2 - \frac{l_1 + l_2}{2} \right)^2 - m_k^* o^2, \quad (2.38)$$

přičemž  $I_h$  je příčný momenty dutého válce, který je odebrán z kompresorového kola.

### 2.1.3 Modelování plovoucích pouzder

Dělená plovoucí pouzdra jsou obvykle řádově kratší v podélném směru v porovnání s rotorem turbodmychadla a jejich první vlastní frekvence je řádově vyšší než je maximální frekvence otáčení rotoru turbodmychadla. Tato pouzdra tedy za provozu dominantně kmitají jako tuhá tělesa. Matematický model tuhého plovoucího pouzdra je odvozen v první části oddílu.

U některých rotorů turbodmychadel jsou nicméně použita nedělená pouzdra (tj. v obou radiálních ložiskách je použito společné pouzdro), jejichž délka je zhruba čtvrtinová v porovnání s rotorem. Takto dlouhá pouzdra mohou mít první vlastní frekvenci stejného řádu jako je maximální frekvence otáčení rotoru turbodmychadla a může být vhodné je považovat za poddajná tělesa. Model poddajných pouzder je diskutován ve druhé části oddílu.

#### Model tuhého plovoucího pouzdra

Tuhé těleso má v prostoru šest stupňů volnosti. Podélné a torzní kmity lze vypustit vzhledem k tomu, že je respektováno pouze ohybové kmitání rotorové soustavy. Často se zanedbává i natáčení pouzder kolem příčných os a to díky následujícím skutečnostem:

- Gyroskopické účinky jsou díky malým momentům setrvačnosti pouzdra zanedbatelné.
- Ložiskové vůle umožňují jen malé natáčení pouzdra kolem příčných os.
- Radiální ložiska s řádově nižší délkou v porovnání s rotorem jsou často modelována jako bodová, tj. uvažuje se, že ohybový moment přenesený ložiskem je zanedbatelný.

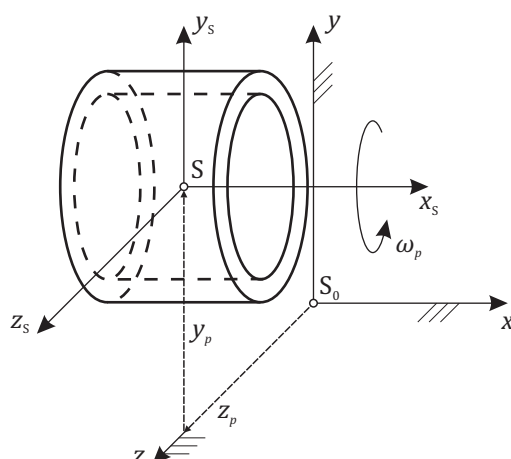
Poloha tuhého plovoucího pouzdra  $p$  je pak dána pouze dvěma zobecněnými souřadnicemi  $y_p(t)$  a  $z_p(t)$ , které jsou ukázány na obr. 2.5. Okamžitá energie tuhého plovoucího pouzdra  $p$  je rovna jeho okamžitá *kinetická energie*, kterou lze vyjádřit následovně

$$E_k^{(p)}(t) = \frac{1}{2} m [\dot{y}_p^2(t) + \dot{z}_p^2(t)] + \frac{1}{2} I_0 \omega_p^2, \quad (2.39)$$

kde  $m$  je hmotnost pouzdra,  $I_0$  je moment setrvačnosti k ose rotace a  $\omega_p$  je úhlová rychlost pouzdra, jejíž stanovení je rozebráno v oddíle 3.5.2. Dosazením (2.39) do Lagrangeových rovnic II. druhu (Rosenberg, 2010) dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_k(t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_p(t)} \right] - \frac{\partial E_k(t)}{\partial \mathbf{q}_p(t)} = \mathbf{M}_p \ddot{\mathbf{q}}_p(t), \quad (2.40)$$





**Obrázek 2.5:** Tuhé plovoucí pouzdro v bodovém radiálním ložisku (argumenty  $t$  jsou pro přehlednost vypuštěny).

kde  $\mathbf{M}_p$  a  $\mathbf{q}_p(t)$  jsou matice hmotnosti a vektor zobecněných výchylek pouzdra ve tvaru

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad (2.41a)$$

$$\mathbf{q}_p(t) = \begin{bmatrix} y_p(t) \\ z_p(t) \end{bmatrix}. \quad (2.41b)$$

### Model poddajného plovoucího pouzdra

Poddajné plovoucí pouzdro je možné modelovat pomocí konečných hřídelových prvků, jejichž matice byly odvozeny v oddíle 2.1.1. Ložiskové vazby mezi poddajným plovoucím pouzdrům a čepem hřídele, respektive ložiskovou skříní turbodmychadla nelze považovat za bodové, protože poddajné plovoucí pouzdro má nejméně dva uzly. Hydrodynamické síly v mazacích filmech se tedy modelují v souladu s druhou částí oddílu 2.1.4.

### 2.1.4 Modelování radiálních kluzných ložisek

Radiální ložiska slouží k podepření otáčivé části stroje v radiálním směru a zároveň mohou sloužit ke snížení tření mezi rotující a nerotující částí stroje. V případě kluzných ložisek jsou zmíněné části stroje odděleny mazacím filmem, kde mazivo je obvykle ložiskový olej. Používá se ale i voda, vzduch a další tekutiny.

### Modelování linearizovaných sil v bodovém ložisku

Silové účinky, které jsou ložiskem přenášeny, nejsou obecně lineární a závisí na poloze, rychlosti kmitání a úhlové rychlosti čepu hřídele. V úlohách rotordynamiky se nicméně ložisková vazba obvykle idealizuje vyslovením následujících předpokladů (Gasch a Pfützner, 1975):

- Čep hřídele se otáčí konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$ .

- Nedochozí ke kontaktu mezi ložiskovou pánví a čepem hřídele a čep kmitá v blízkém okolí pracovního bodu  $(y_{0,j}, z_{0,j})$ . Pracovním bodem se rozumí taková poloha čepu při úhlové rychlosti  $\omega_0$ , ve které jsou síly v mazacím filmu a objemové síly od rotoru v rovnováze.
- Ložisko se považuje za bodové a nepřenáší moment.

Za těchto předpokladů jsou síly  $F_{l,y} = F_{l,y}(t)$  a  $F_{l,z} = F_{l,z}(t)$  působící na čep ve vertikálním a horizontálním směru přímo úměrné výchylkám čepu hřídele  $y_j = y_j(t)$  a  $z_j = z_j(t)$  a jejich derivacím. Platí tedy (Gasch a Pfützner, 1975; Muszyńska, 2005)

$$\begin{bmatrix} F_{l,y}(t) \\ F_{l,z}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_l & 0 \\ 0 & m_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_j(t) \\ \ddot{z}_j(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{l,yy} & b_{l,yz} \\ b_{l,zy} & b_{l,zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_j(t) \\ \dot{z}_j(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{l,yy} & k_{l,yz} \\ k_{l,zy} & k_{l,zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j(t) \\ z_j(t) \end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

kde  $m_l$  je hmotnostní parametr mazacího filmu a  $b_{l,ij}$  a  $k_{l,ij}$  jsou koeficienty tlumení a tuhosti mazacího filmu, jejichž výpočet je ukázán v podkapitole 4.3. Vzhledem k tomu, že setrvačné síly v mazivu jsou většinou řádově menší než tlumicí a elastické síly, první součin v rovnici (2.42) se obvykle zanedbává (Muszyńska, 2005). Vztah (2.42) pak lze zapsat v kompaktním tvaru

$$\mathbf{f}_l(t) \approx -\mathbf{B}_l \dot{\mathbf{q}}_j(t) - \mathbf{K}_l \mathbf{q}_j(t) = -(\mathbf{B}_l^s + \mathbf{B}_l^a) \dot{\mathbf{q}}_j(t) - (\mathbf{K}_l^s + \mathbf{K}_l^a) \mathbf{q}_l(t), \quad (2.43)$$

kde  $\mathbf{K}_l^s$  a  $\mathbf{K}_l^a$  jsou symetrická a antisymetrická část matice tuhosti mazacího filmu  $\mathbf{K}_l$  a obdobně  $\mathbf{B}_l^s$  a  $\mathbf{B}_l^a$  jsou symetrická a antisymetrická část matice tlumení mazacího filmu  $\mathbf{B}_l$ .

### Modelování linearizovaných sil v ložisku konečné délky

V případech, kdy nelze zanedbat momenty přenášené ložiskem, nelze zanedbat deformace čepu hřídele či ložiskové pánve, nebo je podélná délka ložiska srovnatelná s délkou rotoru, nelze ložisko považovat za bodové. V prvním uvedeném případě lze ložisko obvykle modelovat jako vazbu mezi dvojicí uzlů, v dalších případech je vhodnější vazbu definovat mezi dvěma skupinami uzlů. Protože se od sebe uvedené přístupy liší, jsou dále vysvětleny oba.

#### Jednouzlová ložisková vazba

Jednouzlová ložisková vazba je vazba mezi čepem hřídele, jehož zobecněné souřadnice jsou sledovány v jednom uzlu, a rámem nebo ložiskovou pánví tvořenou jedním uzlem. Stejně jako v případě bodového ložiska lze linearizované síly v mazacím filmu zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{f}_l(t) \approx - \begin{bmatrix} b_{l,yy} & b_{l,yz} & b_{l,y\vartheta} & b_{l,y\psi} \\ b_{l,zy} & b_{l,zz} & b_{l,z\vartheta} & b_{l,z\psi} \\ b_{l,\vartheta y} & b_{l,\vartheta z} & b_{l,\vartheta\vartheta} & b_{l,\vartheta\psi} \\ b_{l,\psi y} & b_{l,\psi z} & b_{l,\psi\vartheta} & b_{l,\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_j(t) \\ \dot{z}_j(t) \\ \dot{\vartheta}_j(t) \\ \dot{\psi}_j(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{l,yy} & k_{l,yz} & k_{l,y\vartheta} & k_{l,y\psi} \\ k_{l,zy} & k_{l,zz} & k_{l,z\vartheta} & k_{l,z\psi} \\ k_{l,\vartheta y} & k_{l,\vartheta z} & k_{l,\vartheta\vartheta} & k_{l,\vartheta\psi} \\ k_{l,\psi y} & k_{l,\psi z} & k_{l,\psi\vartheta} & k_{l,\psi\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j(t) \\ z_j(t) \\ \vartheta_j(t) \\ \psi_j(t) \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

kde jsou zanedbány setrvačné síly v mazivu. Matice tlumení a tuhosti mazacího filmu  $\mathbf{B}_l$  a  $\mathbf{K}_l$  obsahují šestnáct obecně nezávislých koeficientů  $b_{ij}$  a  $k_{ij}$ , které je možné vypočítat podobně jako v případě bodového ložiska.

Vzhledem k tomu, že ve vztahu (2.44) figurují natočení čepu  $\vartheta_j = \vartheta_j(t)$  a  $\psi_j = \psi_j(t)$ , nelze uvedenou vazbu použít ke spojení čepu hřídele a tuhého plovoucího pouzdra se dvěma stupni volnosti z oddílu 2.1.3.

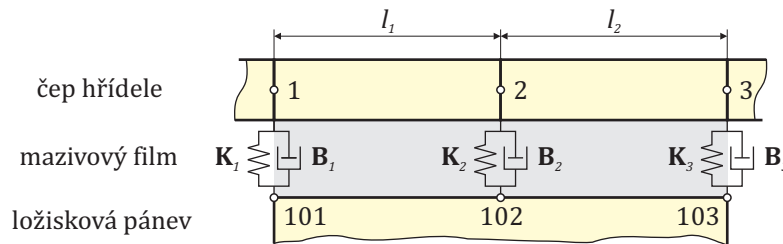
### Víceuzlová ložisková vazba

Víceuzlová vazba může být zavedena v několika konfiguracích:

- *typ střednice-střednice* – čep hřídele i pánev jsou jednorozměrná tělesa,
- *typ střednice-povrch* – obvykle je čep hřídele jednorozměrné těleso a pánev těleso s trojrozměrnou geometrií,
- *typ povrch-povrch* – čep hřídele i pánev jsou tělesa s trojrozměrnou geometrií.

Zavedení prvních dvou typů vazeb do matematického modelu je analogické, proto dále bude vysvětleno na příkladu vazby typu střednice-střednice. Uvažujme situaci z obr. 2.6, kdy je čep hřídele s uzly 1, 2 a 3 podepřen radiálním ložiskem, jehož pánev je tvořena uzly 101, 102 a 103, jejichž podélné souřadnice jsou totožné s uzly čepu. Koeficienty matic tlumení a tuhosti jsou vypočítány jedním z postupů z podkapitoly 4.3 s tím, že pro vazbu 1-101 je bráno v úvahu zatížení ložiska na ploše  $\langle 0, l_1/2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ , pro vazbu 2-102 na ploše  $\langle l_1/2, l_1 + l_2/2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$  a pro vazbu 3-103 na ploše  $\langle l_1 + l_1/2, l_1 + l_2 \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ . Pro vazbu typu střednice-povrch se obdobným způsobem rozdělí plocha ložiska v obvodovém směru.

V případech, kdy dvojice vázaných uzlů nemají shodnou podélnou souřadnici nebo je ložisková vazba modelována jako typ povrch-povrch, je vhodnější zahrnout účinky sil v ložisku do vektoru budících sil a vazbu nelinearizovat. V takovém případě je totiž možné integrovat na straně čepu a na straně pánve přes různé plochy.



Obrázek 2.6: Ukázka linearizované víceuzlové ložiskové vazby typu střednice-střednice.

### 2.1.5 Modelování aerodynamických sil v turbínovém stupni

V roce 1965 Alford studoval síly, které mohou způsobit nestabilní chování turbínových a kompresorových stupňů leteckých tryskových motorů. Tyto aerodynamické síly, označované někdy jako Alfordovy síly, jsou elastické a vyznačují se tím, že přímé vazební tuhosti mají oproti křížovým zanedbatelné. Pokud v pevném souřadnicovém systému  $xyz$  z obr. 2.3 zavedeme vertikální a horizontální výchylku turbínového kola  $y_t(t)$  a  $z_t(t)$ , lze Alfordovy síly formulovat následovně:

$$\begin{bmatrix} F_{t,y}(t) \\ F_{t,z}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{t,yy} & k_{t,yz} \\ k_{t,zy} & k_{t,zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t(t) \\ z_t(t) \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} 0 & -k_t \\ k_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t(t) \\ z_t(t) \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Aproximace v rovnosti (2.45) vznikne zanedbáním přímých vazebních tuhostí a křížovou vazební tuhost  $k_t$  Alford (1965) definuje vztahem

$$k_t = \frac{\beta M_t}{D_t L_t}, \quad (2.46)$$

ve kterém je  $\beta$  opravný koeficient,  $M_t$  točivý moment turbínového stupně,  $D_t$  vnější průměr turbínového kola a  $L_t$  radiální délka turbínových lopatek. Na základě zkušeností s turbínami tryskových motorů [Alford \(1965\)](#) doporučuje volit opravný koeficient  $1,0 \leq \beta \leq 1,5$ .

Točivý moment  $M_t$  ze vztahu (2.46) je účelné vyjádřit jako funkci výkonu turbínového stupně  $P_t$ . Uvažujme, že  $M_t$  je konstantní a turbínové kolo se otáčí konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Mechanická práce točivého momentu  $W_t$  je v takovém případě

$$W_t = M_t \varphi, \quad (2.47)$$

kde  $\varphi$  je úhel natočení. Derivací (2.47) podle času  $t$  lze přímo vyjádřit výkon  $P_t$

$$P_t = \frac{dW_t}{dt} = M_t \frac{d\varphi}{dt} = M_t \omega_0. \quad (2.48)$$

Po vyjádření  $M_t$  z (2.48) a dosazení do (2.46) dostáváme

$$k_t = \frac{\beta P_t}{D_t L_t \omega_0}. \quad (2.49)$$

### 2.1.6 Modelování aerodynamických sil v kompresorovém stupni

V kompresorovém stupni působí především dva silové účinky: elastické aerodynamické síly od stlačovaného vzduchu a elasticko-viskózní aerodynamické síly v ucpávkách kompresoru ([Alford, 1965](#)). Podobně jako v případě turbínových stupňů jsou přímé vazební tuhosti elastických aerodynamických sil oproti křížovým zanedbatelné. Disipativní síly v ucpávkách rovněž bývají velmi malé a proto se často uvažuje pouze destabilizující vliv aerodynamických sil

$$\begin{bmatrix} F_{k,y}(t) \\ F_{k,z}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_{k,yy} & b_{k,yz} \\ b_{k,zy} & b_{k,zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_k(t) \\ \dot{z}_k(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{k,yy} & k_{k,yz} \\ k_{k,zy} & k_{k,zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k(t) \\ z_k(t) \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} 0 & -k_k \\ k_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k(t) \\ z_k(t) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Přibližný vztah pro výpočet koeficientu tuhosti  $k_k$  navrhl ([Alford, 1965](#)). Platnost tohoto vztahu se omezuje na axiální kompresory. Odstředivé kompresory zkoumali [Wachel a von Nimitz \(1981\)](#), kteří formulovali empirickou Wachelovu rovnici

$$k_k = \frac{B M_r P_k \rho_v}{D_k c_k \omega_0 \rho_s}, \quad (2.51)$$

kde  $B$  je opravný koeficient,  $M_r$  je relativní molekulová hmotnost plynu (pro vzduch platí  $M_r = 28,97$ ),  $P_k$  je výkon kompresorového stupně,  $D_k$  je vnější průměr kompresorového kola,  $c_k$  je nejmenší rozměr proudového kanálu,  $\omega_0$  je úhlová rychlost kompresorového kola a  $\rho_v$  a  $\rho_s$  jsou hustoty vytlačovaného a nasávaného plynu. Opravný koeficient  $B$  je závislý na jednotkách použitých ve vztahu (2.51); pro jednotky SI platí  $B = 100$ .

Podíl  $\rho_v/\rho_s$  ve Wachelově rovnici (2.51) nemusí být vždy zřejmý z návrhových parametrů kompresoru a je vhodnější vyjádřit ho s využitím kompresního poměru  $\pi_k$ . Vzhledem k tomu, že v kompresoru teoreticky dochází k adiabatickému stlačování ([Nguyen-Schäfer, 2012](#); [Wikimedia, 2001–](#)), platí pro idealizovaný stlačovaný plyn stavová rovnice

$$p_v V_v^\kappa = p_s V_s^\kappa, \quad (2.52)$$

kde  $p_v$  a  $p_s$  jsou tlaky vytlačovaného a nasávaného plynu,  $V_v$  a  $V_s$  jsou objemy vytlačovaného a nasávaného plynu a  $\kappa$  je Poissonova konstanta. Je-li vytlačovaným plynem vzduch, platí pro Poissonovu konstantu  $\kappa = 1,4$  v rozsahu teplot  $0 - 200$  °C.

Upravme nyní rovnici (2.52) do podílového tvaru a uvažujme, že hmotnosti nasávaného vzduchu  $m_s$  a vytlačovaného vzduchu  $m_v$  jsou totožné. Platí tedy

$$\frac{\rho_v}{\rho_s} = \left(\frac{V_s}{V_v}\right)^\kappa = \left(\frac{m_s}{\rho_s} \frac{\rho_v}{m_v}\right)^\kappa = \left(\frac{\rho_v}{\rho_s}\right)^\kappa. \quad (2.53)$$

Protože stavová rovnice (2.52) nepopisuje stav vakua, jsou tlak i hustota plynu kladné. Díky tomu lze rovnost (2.53) ekvivalentně umocnit výrazem  $1/\kappa$ . Po dosazení výsledného vztahu

$$\pi_k^{1/\kappa} = \frac{\rho_v}{\rho_s} \quad (2.54)$$

do Wachelovy rovnice (2.51) dostáváme

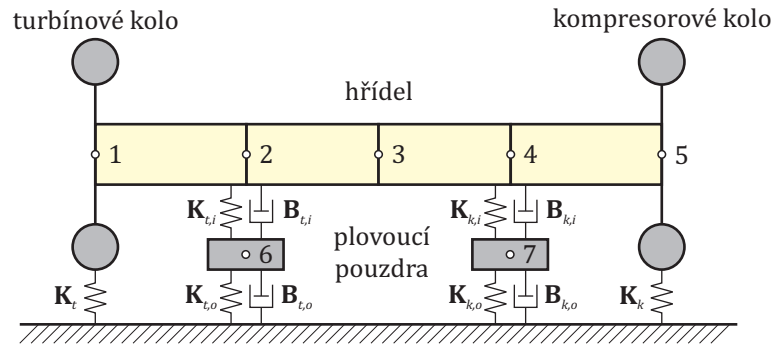
$$k_k = \frac{B M_r P_k}{D_k c_k \omega_0} \pi_k^{1/\kappa}. \quad (2.55)$$

### 2.1.7 Sestavení matematického modelu rotorové soustavy

Sestavení matematického modelu rotorové soustavy bude demonstrováno na příkladu jednoduchého rotoru turbodmyhadla z obr. 2.7. Tento rotor má lopatková kola na obou převislých koncích a je podepřen dvěma ložisky s plovoucími pouzdry. Hřídel rotoru je rozdělen na čtyři konečné hřídelové prvky, jejichž uzly se nacházejí pod lopatkovými koly, ve středech radiálních ložisek a mezi ložisky. Plovoucí pouzdra v ložiskách jsou uvažována jako tuhá tělesa. Kromě hydrodynamických sil v ložiskách jsou v modelu respektovány rovněž aerodynamické síly v turbínovém a kompresorovém stupni. Pohybová rovnice popisující ohybové kmitání demonstrační rotorové soustavy má tvar

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}_l(\omega_0)] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_l(\omega_0) + \mathbf{K}_a(\omega_0^{-1})] \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\omega_0, t), \quad (2.56)$$

kde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{K}$  jsou blokově diagonální symetrické matice hmotnosti, tlumení a tuhosti rotorové soustavy,  $\mathbf{G}$  je blokově diagonální antisymetrická matice gyroskopických účinků,  $\mathbf{K}_l(\omega_0)$  a  $\mathbf{B}_l(\omega_0)$  jsou matice koeficientů tuhosti a tlumení ložiskových vazeb,  $\mathbf{K}_a(\omega_0^{-1})$  je antisymetrická matice elastických aerodynamických účinků v turbínovém a kompresorovém stupni a  $\mathbf{q}(t)$  a  $\mathbf{f}(\omega_0, t)$  jsou vektory zobecněných souřadnic a budících sil. Jednotlivé matice a vektory mají



**Obrázek 2.7:** Jednoduchý rotor turbodmyhadla pro demonstraci sestavení matematického modelu. Světle žluté části rotoru jsou poddajné, tmavě šedé tuhé.

následující strukturu (argumenty  $t$  a  $\omega_0$  jsou pro přehlednost vypuštěny):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_r^{(20,20)} & \mathbf{0}^{(20,2)} & \mathbf{0}^{(20,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{M}_p^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{M}_p^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.57a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_m \mathbf{M}_r^{(20,20)} + \beta_k \mathbf{K}_r^{(20,20)} & \mathbf{0}^{(20,2)} & \mathbf{0}^{(20,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.57b)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_r^{(20,20)} & \mathbf{0}^{(20,2)} & \mathbf{0}^{(20,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.57c)$$

$$\mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(4,4)} & \mathbf{0}^{(4,2)} & \mathbf{0}^{(4,6)} & \mathbf{0}^{(4,2)} & \mathbf{0}^{(4,6)} & \mathbf{0}^{(4,2)} & \mathbf{0}^{(4,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & \mathbf{B}_{t,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & -\mathbf{B}_{t,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(6,4)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{B}_{k,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & -\mathbf{B}_{k,i}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(6,4)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & -\mathbf{B}_{t,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{B}_{t,i}^{(2,2)} + \mathbf{B}_{t,o}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & -\mathbf{B}_{k,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{B}_{k,i}^{(2,2)} + \mathbf{B}_{k,o}^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.57d)$$

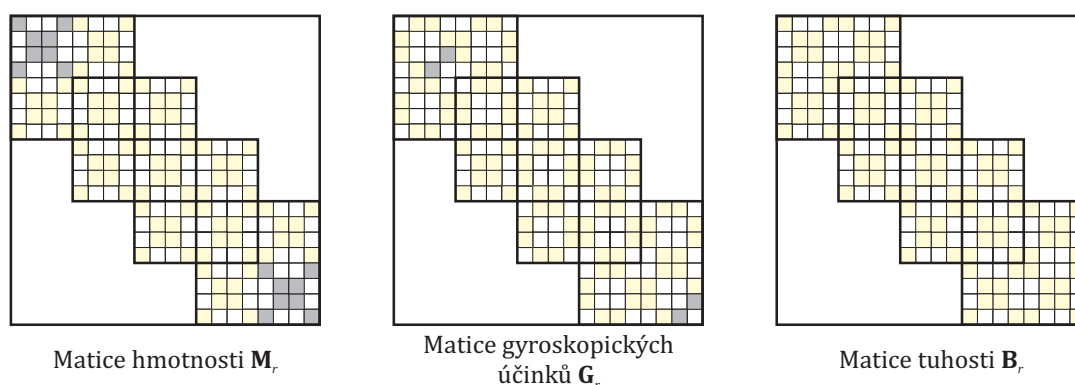
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_r^{(20,20)} & \mathbf{0}^{(20,2)} & \mathbf{0}^{(20,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,20)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.57e)$$

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(4,4)} & \mathbf{0}^{(4,2)} & \mathbf{0}^{(4,6)} & \mathbf{0}^{(4,2)} & \mathbf{0}^{(4,6)} & \mathbf{0}^{(4,2)} & \mathbf{0}^{(4,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & \mathbf{K}_{t,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & -\mathbf{K}_{t,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(6,4)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{K}_{k,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & -\mathbf{K}_{k,i}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(6,4)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,6)} & \mathbf{0}^{(6,2)} & \mathbf{0}^{(6,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & -\mathbf{K}_{t,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{K}_{t,i}^{(2,2)} + \mathbf{K}_{t,o}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,4)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & -\mathbf{K}_{k,i}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,6)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{K}_{k,i}^{(2,2)} + \mathbf{K}_{k,o}^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.57f)$$

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(14,2)} & \mathbf{0}^{(14,14)} & \mathbf{0}^{(14,2)} & \mathbf{0}^{(14,2)} & \mathbf{0}^{(14,2)} & \mathbf{0}^{(14,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,14)} & \mathbf{K}_k^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,14)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,14)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \\ \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,14)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} & \mathbf{0}^{(2,2)} \end{bmatrix}, \quad (2.57g)$$

$$\mathbf{q}^\top = \left[ (\mathbf{q}_1^\top)^{(1,4)} \quad (\mathbf{q}_2^\top)^{(1,4)} \quad (\mathbf{q}_3^\top)^{(1,4)} \quad (\mathbf{q}_4^\top)^{(1,4)} \quad (\mathbf{q}_5^\top)^{(1,4)} \quad (\mathbf{q}_6^\top)^{(1,2)} \quad (\mathbf{q}_7^\top)^{(1,2)} \right], \quad (2.57h)$$

kde pravý horní index u symbolů matic udává počet řádků a sloupců dané matice. Struktura matic  $\mathbf{M}_r$ ,  $\mathbf{G}_r$  a  $\mathbf{K}_r$  je ukázána na obr. 2.7. Matice hmotnosti tuhých plovoucích pouzder  $\mathbf{M}_p$  jsou odvozeny v oddíle 2.1.3, matice tuhosti a tlumení ložiskových vazeb jsou popsány v oddíle 2.1.4 a konečně matice  $\mathbf{K}_t$  a  $\mathbf{K}_k$  jsou rozebrány v oddílech 2.1.5 a 2.1.6.  $\mathbf{q}_i$  jsou vektory zobecněných souřadnic popisujících kmitání  $i$ -tého uzlu.



**Obrázek 2.8:** Matice  $\mathbf{M}_r$ ,  $\mathbf{G}_r$  a  $\mathbf{K}_r$  jsou sestaveny z koeficientových matic hřídelových prvků (nenulové prvky jsou vykresleny světle žlutě) a tuhých kotoučů odvozených (tmavě šedá) v oddílech 2.1.1 a 2.1.2. Dílčí matice jsou přidávány aditivně a jsou umístěny v závislosti na pořadových číslech uzlů, jimž náleží.

Koeficienty  $\alpha_m$  a  $\beta_k$  v matici tlumení  $\mathbf{B}$  jsou nazývány koeficienty proporcionálního tlumení nebo také koeficienty Rayleighova tlumení. Koeficienty udávají velikost poměrného útlumu  $\zeta$  poddajného tělesa v závislosti na úhlové rychlosti budící síly  $\omega$ :

$$\zeta(\omega) = \frac{\alpha_m}{2\omega} + \frac{\beta_k \omega}{2}. \quad (2.58)$$

Pokud jsou známy poměrné modální útlumy  $\zeta_i$  a  $\zeta_j$  pro  $i$ -tou a  $j$ -tou vlastní frekvenci  $\Omega_i$  a  $\Omega_j$ , lze koeficienty  $\alpha_m$  a  $\beta_k$  jednoznačně určit přímým dosazením do (2.1). V případě, že je uvažováno  $n$  dvojic  $(\zeta_i, \Omega_i)$ , jsou koeficienty hledány jako řešení přeurtčené soustavy  $n$  rovnic  $2\Omega_i \zeta_i = \alpha_m + \beta_k \Omega_i^2$ .

Byrtus et al. (2010) uvádí, že Rayleighův model tlumení není vhodný pro modelování rychle se otáčejících rotorových soustav a navrhuje užití Kelvinova-Voigtova materiálu, pro jehož napětí při jednoosé napjatosti platí vztah

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta_{kv} \dot{\varepsilon}(t), \quad (2.59)$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti a  $\eta_{kv}$  je viskózní koeficient.

## 2.2 Pohybová rovnice vázaného mechanického systému

Pohybová rovnice (2.56) se zaměřuje na popis chování linearizovaného rotorového systému při konstantní úhlové rychlosti  $\omega_0$ . Pro modelování přechodových stavů s proměnnou úhlovou rychlostí je ovšem nedostačující. V těchto případech se může využít formulace, kdy je modelovaný systém považován za systém vázaných tuhých nebo poddajných těles<sup>1</sup>. Tělesa v tomto systému mohou konat dva typy pohybu:

- i) velké (globální) pohyby,
- ii) malé pohyby (vibrace či elastické deformace).

<sup>1</sup>Anglicky *multi-body system*.

V případě turbodmychadla se velkými pohyby rozumí otáčení rotoru a plovoucích pouzder, protože při takovém pohybu se úhel vyjadřující natočení uvedených subsystémů neustále zvětšuje. Za malý pohyb mohou být považovány kmity rotoru kolem jeho rovnovážné pohyby a kmity plovoucích pouzder, tedy pohyby popsané rovnicí (2.56). Pohybová rovnice multi-body systému může být odvozena různými přístupy. Tradičně se využívá lagrangeovské nebo newton-eulerovské formulace, zde bude představena druhá jmenovaná (Offner et al., 2018).

Rozdělíme-li poddajné těleso na systém dílčích tuhých těles spojených elastickými vazbami, lze pohyb  $i$ -tého dílčího tělesa popsat dvojicí rovnic

$$m_i \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i^{\text{abs}}}{\partial t^2} = \mathbf{f}_{i,F}^{\text{abs}}, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{I}_i^{\text{abs}} \boldsymbol{\omega}_i^{\text{abs}})}{\partial t} = \mathbf{f}_{i,M}^{\text{abs}}, \quad (2.61)$$

kde  $m_i$  a  $\mathbf{I}_i^{\text{abs}}$  je hmotnost a tenzor setrvačnosti  $i$ -tého tělesa,  $\mathbf{x}_i^{\text{abs}}$  je vektor posunutí těžiště tělesa,  $\boldsymbol{\omega}_i^{\text{abs}}$  je vektor rotace tělesa kolem těžiště a  $\mathbf{f}_{i,F}^{\text{abs}}$  a  $\mathbf{f}_{i,M}^{\text{abs}}$  jsou vektory vnějších sil. Index <sup>abs</sup> označuje, že je daný vektor či tenzor vyjádřen v prostoru základního rámu. Pokud  $i$ -té těleso rotuje, tenzor setrvačnosti  $\mathbf{I}_i^{\text{abs}}$  není konstantní. Kdyby ale byl vyjádřen v referenčním souřadnicovém systému, který je pevně spojený s rotujícím tuhým tělesem, byl by konstantní.

Za předpokladu, že je referenční souřadnicový systém potočený vůči základnímu rámu o vektor směrových úhlů  $[\alpha, \beta, \gamma]^\top$ , je možné formulovat závislost mezi vektory, resp. tenzory vyjádřenými pomocí složek základního a referenčního systému následujícími vztahy

$$\mathbf{a}^{\text{abs}} = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{a}^{\text{ref}}, \quad \mathbf{A}^{\text{abs}} = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{A}^{\text{ref}} \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^\top, \quad (2.62)$$

kde  $\mathbf{a}$  označuje obecný vektor,  $\mathbf{A}$  obecný tenzor, index <sup>ref</sup> určuje, že je daný vektor či tenzor vyjádřen ve složkách referenčního systému, a konečně  $\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}$  je transformační matice. Lze dokázat, že transformační matice je ortogonální, tj. platí pro ni

$$\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^\top = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^{-1}. \quad (2.63)$$

Matici úhlové rychlosti referenčního systému vůči základnímu systému  $\boldsymbol{\Omega}$  je možné vyjádřit ve složkách referenčního systému následovně:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^\top \dot{\mathbf{S}}_{\alpha\beta\gamma}, \quad (2.64)$$

přičemž  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  jsou úhlové rychlosti otáčení referenčního systému vůči základnímu systému. Newtonovu pohybovou rovnici lze při použití vztahů (2.62) přepsat do tvaru

$$m_i \frac{\partial^2 (\mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{x}_i^{\text{ref}})}{\partial t^2} = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{f}_{i,F}^{\text{ref}}. \quad (2.65)$$

Dále budeme uvažovat, že polohový vektor  $\mathbf{x}_i^{\text{ref}}$  lze rozdělit na tři části

$$\mathbf{x}_i^{\text{ref}} = \mathbf{x}_i + \mathbf{u}_{0,i} + \mathbf{u}_i, \quad (2.66)$$

kde  $\mathbf{x}_i$  je poloha počátku referenčního systému vůči počátku základního systému vyjádřená ve složkách referenčního systému,  $\mathbf{u}_{0,i}$  je počáteční poloha  $i$ -tého tělesa vůči počátku referenčního



systému a  $\mathbf{u}_i$  je pohybový vektor  $i$ -tého tělesa ve složkách referenčního systému. Po dosazení (2.66) do (2.65) získáme vztah

$$m_i \left[ \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} (\ddot{\mathbf{x}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i) + 2 \dot{\mathbf{S}}_{\alpha\beta\gamma} (\dot{\mathbf{x}}_i + \dot{\mathbf{u}}_i) + \ddot{\mathbf{S}}_{\alpha\beta\gamma} (\mathbf{x}_b + \mathbf{u}_{0,i} + \mathbf{u}_i) \right] = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{f}_{i,F}^{\text{ref}}, \quad (2.67)$$

kteřý lze s využitím (2.63) a (2.64) dále upravit do tvaru

$$m_i \left[ \ddot{\mathbf{x}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i + 2 \boldsymbol{\Omega} (\dot{\mathbf{x}}_b + \dot{\mathbf{u}}_i) + \left( \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \right) (\mathbf{x}_i + \mathbf{u}_{0,i} + \mathbf{u}_i) \right] = \mathbf{f}_{i,F}^{\text{ref}}. \quad (2.68)$$

S využitím vztahů (2.62) je možné modifikovat i Eulerovu rovnici (2.61):

$$\frac{\partial \left( \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{I}_i^{\text{ref}} \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma}^{\top} \mathbf{S}_{ab} \boldsymbol{\omega}_i^{\text{ref}} \right)}{\partial t} = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{f}_{i,M}^{\text{ref}}. \quad (2.69)$$

Vektor úhlové rychlosti ve složkách referenčního systému  $\boldsymbol{\omega}_i^{\text{ref}}$  poté rozdělíme na vektor úhlové rychlosti referenčního systému vůči základnímu systému  $\boldsymbol{\omega}_i$  a vektor úhlové rychlosti  $i$ -tého tělesa vůči referenčnímu systému  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i$ . Pro  $\boldsymbol{\omega}_i^{\text{ref}}$  tedy platí

$$\boldsymbol{\omega}_i^{\text{ref}} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i. \quad (2.70)$$

Po dosazení (2.70) do (2.69) obdržíme

$$\dot{\mathbf{S}}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{I}_i^{\text{ref}} (\boldsymbol{\omega}_i + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i) + \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \dot{\mathbf{I}}_i^{\text{ref}} (\boldsymbol{\omega}_i + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i) + \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{I}_i^{\text{ref}} \frac{\partial (\boldsymbol{\omega}_i + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i)}{\partial t} = \mathbf{S}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{f}_{i,M}^{\text{ref}}, \quad (2.71)$$

což lze upravit do tvaru

$$\left( \boldsymbol{\Omega} \mathbf{I}_i^{\text{ref}} + \dot{\mathbf{I}}_i^{\text{ref}} \right) (\boldsymbol{\omega}_i + \dot{\boldsymbol{\varphi}}_i) + \mathbf{I}_i^{\text{ref}} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \ddot{\boldsymbol{\varphi}}_i) = \mathbf{f}_{i,M}^{\text{ref}}, \quad (2.72)$$

kteřý obsahuje člen  $\dot{\mathbf{I}}_i^{\text{ref}}$ , jenž je časově invariantní vůči referenčnímu systému, který je pevně spojený s  $i$ -tým tělesem. Toho se využívá při dalších úpravách této rovnice, například při linearizaci, kterou ukazuje [Offner et al. \(2018\)](#).

Pohybové rovnice jednotlivých tuhých těles lze zapsat v kompaktním tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (2.73)$$

kde  $\mathbf{M} = \text{diag} [\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n]$  je blokově diagonální matice hmotnosti, přičemž dílčí matice  $\mathbf{M}_i$  jsou opět blokově diagonální se strukturou

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_i^{\text{ref}} \end{bmatrix},$$

kde  $\mathbf{E}_3$  je jednotková matice řádu 3.

Součástí nelineárního vektoru  $\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$  na pravé straně rovnice (2.73) jsou vazební síly, externí síly, gyroskopické síly a také elastické a disipativní síly  $\mathbf{f}^{\text{ed}}$ . Za předpokladu, že platí lineární teorie pružnosti a materiálové tlumení je popsáno Rayleighovou disipativní funkcí, lze tyto síly vyjádřit vztahem

$$\mathbf{f}^{\text{ed}} = -\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{K} \mathbf{q}(t). \quad (2.74)$$

## 3 Hydrodynamické mazání v radiálních kluzných ložiskách s plovoucím pouzdrém

Jak již bylo uvedeno v úvodu, rotory turbodmychadel jsou v radiálním směru nejčastěji podepřeny kluznými ložisky s plovoucími pouzdry, kterými proudí motorový olej přiváděný pod tlakem do ložisek. Tento olej odděluje jednotlivé části ložiska a díky relativnímu pohybu částí ložiska vůči sobě je olej schopen přenášet statické zatížení od tíhy rotoru a dynamické zatížení od nevyváženosti rotoru a dalších jevů.

Oddělení kluzných povrchů olejovým filmem, který přenáší zatížení díky vzájemnému pohybu kluzných povrchů vůči sobě, se říká *hydrodynamické mazání* (Stachowiak a Batchelor, 2013). Při hydrodynamickém mazání je v olejovém filmu generován hydrodynamický tlak, který může dosahovat hodnot až desítek MPa. Obdobně jako v jiných úlohách hydrodynamiky je možné hydrodynamický tlak vypočítat pomocí Navierových-Stokesových rovnic, nicméně pro oblast kluzných ložisek se častěji využívá tzv. *Reynoldsova rovnice*, kterou je možné odvodit právě z Navierových-Stokesových rovnic a která má výrazně jednodušší tvar než tyto rovnice.

V kapitole je popsáno hydrodynamické mazání v radiálních kluzných ložiskách s plovoucím pouzdrém. V první části je představena geometrie kluzných ložisek, dále je odvozena Reynoldsova rovnice a jsou definovány základní tribologické parametry ložiska. V další části kapitoly jsou uvedeny zobecněné tvary Reynoldsovy rovnice, které mohou najít uplatnění při analýze ložisek turbodmychadel a v závěru kapitoly jsou odvozeny vztahy popisující úhlovou rychlost plovoucího pouzdra, proudění maziva skrz otvory v pouzdře a provozní vůli ložiska.

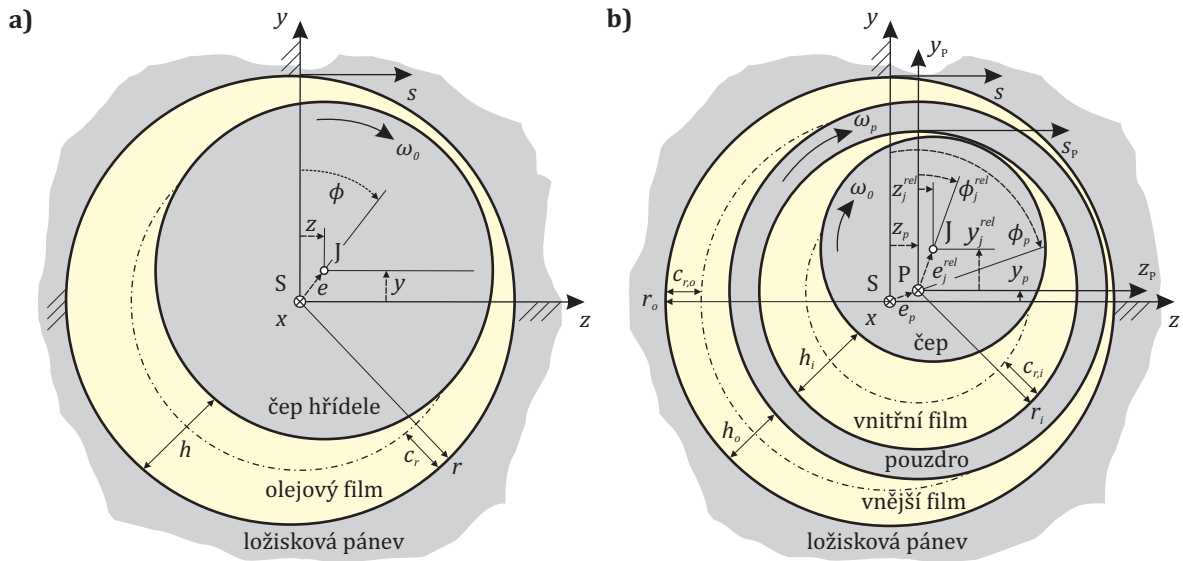
### 3.1 Geometrické parametry ložiska s plovoucím pouzdrém

Základní geometrické parametry radiálních kluzných ložisek s plovoucím pouzdrém jsou analogické k parametrům cylindrického ložiska zakresleného na schématu v obr. 3.1a. Poloha čepu hřídele v ložisku je dána vertikální a horizontální výchylkou  $y = y(t)$  a  $z = z(t)$  mezi geometrickým středem ložiskové pánve S a geometrickým středem čepu hřídele J. Výchylky mohou být doplněny o natočení čepu kolem příčných os  $y$  a  $z$ . Pro některé aplikace není použití kartézských souřadnic výhodné, a proto se zavádí excentricita čepu  $e = e(t)$  a úhel k excentricitě  $\phi = \phi(t)$ , které lze pomocí výchylek  $y$  a  $z$  definovat následovně:

$$e = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{z}{y}\right) & \forall (y > 0 \wedge z \geq 0), \\ \arctan\left(\frac{z}{y}\right) + \pi & \forall (y < 0 \wedge z \in \mathbb{R}), \\ \arctan\left(\frac{z}{y}\right) + 2\pi & \forall (y > 0 \wedge z < 0), \end{cases} \quad (3.1)$$

kde  $\mathbb{R}$  označuje množinu reálných čísel. Časové derivace excentricity a úhlu k excentricitě lze odvodit v následujícím tvaru:

$$\dot{e} = \frac{y\dot{y} + z\dot{z}}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \dot{\phi} = \frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{y^2 + z^2}. \quad (3.2)$$



**Obrázek 3.1:** Mezi nejvýznamnější geometrické parametry radiálního kluzného ložiska a) patří poloměr ložiska  $r$ , délka ložiska  $l$ , radiální vůle ložiska  $c_r$  a ložisková mezera  $h$ , která je dána tvarem pánve a čepu a polohou čepu. V případě ložiska s plovoucím pouzdrém b) jsou parametry obdobné. Parametry vnitřního filmu se obvykle označují indexem  $i$  a parametry vnějšího filmu indexem  $o$ .

V případě, že čep hřídele i ložisková pánev mají dokonale kruhový průřez, je ložisková mezera  $h$  dána analytickou funkcí

$$h = c_r - e \cos\left(\frac{s}{r} - \phi\right) = c_r \left[1 - \varepsilon \cos\left(\frac{s}{r} - \phi\right)\right], \quad (3.3)$$

kde  $s$  je obvodová souřadnice ukázaná na obr. 3.1a a  $\varepsilon = e/c_r$  je relativní excentricita.

V ložisku s plovoucím pouzdrém znázorněném na obr. 3.1b jsou zavedeny souřadnice:

- absolutní výchylky  $y_p = y_p(t)$  a  $z_p = z_p(t)$  udávají polohu středu pouzdra P vůči středu ložiskové pánve S,
- relativní výchylky  $y_j^{rel} = y_j^{rel}(t)$  a  $z_j^{rel} = z_j^{rel}(t)$  udávají polohu středu čepu J vůči středu pouzdra P,
- navíc se mohou zavést absolutní výchylky  $y_j = y_p + y_j^{rel}$  a  $z_j = z_p + z_j^{rel}$  udávající polohu středu čepu J vůči středu pánve S.

Vztahy pro jednotlivé excentricity, úhly k excentricitám a pro jejich derivace podle času, ale i vztahy pro ložiskové mezery mají tvary odpovídající rovnicím (3.1) – (3.3).

## 3.2 Odvození Reynoldsovy rovnice

Aby v tenkém tenkém viskózním filmu, který odděluje dva povrchy, došlo k hydrodynamickému mazání, musí být splněny dvě podmínky (Stachowiak a Batchelor, 2013): uvedené povrchy se

vůči sobě pohybují dostatečnou relativní rychlostí a mezeza mezi povrchy nemá nulový gradient, což znamená, že povrchy nejsou rovnoběžné ani rovinné.

Existuje několik způsobů odvození Reynoldsovy rovnice. Vzhledem k tomu, že Reynoldsova rovnice popisuje chování tekutiny, může být odvozena zjednodušením Navierových-Stokesových rovnic, jak ukazují např. Szeri (1980); San Andrés (2010). Časté je i odvození na základě znalosti silové rovnováhy na kontrolním objemu, který je vyjmut z filmu (Hirani, 2012; Stachowiak a Batchelor, 2013). Zapoměl (2007) pak ve své monografii srovnává oba uvedené přístupy.

V této práci je ukázáno odvození ze silové rovnováhy na kontrolním objemu filmu a to z důvodu, že je názornější než odvození zjednodušením Navierových-Stokesových rovnic.

### 3.2.1 Zjednodušující předpoklady

Podobně jako v případě odvození mnohých jiných matematických modelů je i pro odvození Reynoldsovy rovnice nutné přijmout několik zjednodušujících předpokladů. Vzhledem k tomu, že tato práce pojednává o kluzných ložiskách turbodmychadel, bude dále předpokládáno, že mazivem je olej. Další předpoklady jsou uvedeny a okomentovány níže.

#### i) Na površích čepu a ložiskové pánve nedochází k prokluzu oleje.

Předpoklad platí pro olejové filmy obecně (Stachowiak a Batchelor, 2013).

#### ii) Proudění oleje v ložiskové mezeře je laminární.

Při laminárním proudění jsou proudnice rovnoběžné a nemísí se. Pokud není prokázáno, že olej proudí turbulentně, předpokládá se, že proudí laminárně. V případě radiálních kluzných ložisek dochází k turbulentnímu proudění při lokální ztrátě stability proudění. Obvykle se ověřují podmínky pro dva typy nestability (San Andrés, 2010):

- *Tollmienova-Schlichtingova nestabilita*<sup>1</sup> nastává, pokud setrvačné účinky v mezní vrstvě převáží nad viskózními silami. Nestabilita se vyznačuje vznikem vln či vírů ve směru kolmém na směr proudění. Vznik nestability je podmíněn splněním následující nerovnosti (Vohr a Chow, 1969; San Andrés, 2010):

$$Re = \frac{(u_j - u_s) \rho c_r}{\mu} \geq Re_c, \quad (3.4)$$

kde  $\rho$  a  $\mu$  jsou hustota a dynamická viskozita oleje,  $c_r$  je radiální vůle ložiska,  $u_j$  a  $u_s$  jsou obvodové rychlosti čepu hřídele a ložiskové pánve,  $Re$  je Reynoldsovo číslo a  $Re_c$  je kritická hodnota Reynoldsova čísla.  $Re_c$  není napříč oborem definována jednoznačně. Nejčastěji se používá rovnost  $Re_c = 2000$  (Szeri, 1980; San Andrés, 2010), ale někteří autoři se přiklánějí k hodnotám nižším: např. Someya (1989) a Zapoměl (2007) uvádějí jako kritickou hodnotu 1500 a Hirs (1974) dokonce 1000.

V tab. 3.1 jsou uvedeny typické parametry vnitřního olejového filmu, který odděluje čep hřídele a plovoucí pouzdro. Z tabulky je zřejmé, že i ložiska velmi rychle se otáčejících rotorů turbodmychadel mají nízká Reynoldsova čísla a ke vzniku Tollmienovy-Schlichtingovy nestability nedochází.

- *Taylorova-Couettova nestabilita*<sup>2</sup> nastává u proudění se zakřivenými proudnicemi v případě, kdy destabilizující odstředivé účinky převáží nad stabilizujícími viskózními

<sup>1</sup>Anglicky též *parallel flow instability*.

<sup>2</sup>Anglicky též *centrifugal instability*.

Parametr	Symbol	Jednotka	Ložisko 1	Ložisko 2	Ložisko 3	Ložisko 4
poloměr ložiska	$r$	(mm)	4,4	5,53	4,24	3,15
délka ložiska	$l$	(mm)	7,6	6,5	4,82	2,62
radiální vůle ložiska	$c_r$	( $\mu\text{m}$ )	18,6	34,0	34,0	14,0
maximální otáčky rotoru	$f_{max}$	(Hz)	2 700	3 000	2 865	4 000
maximální otáčky pouzdra	$f_p$	(Hz)	440	600	360	440
hustota oleje	$\rho$	( $\text{kg m}^{-3}$ )	760	neuveďeno <sup>†</sup>	neuveďeno <sup>†</sup>	neuveďeno <sup>†</sup>
dynamická viskozita oleje	$\mu$	(mPas)	4,9	6,4	2,8	2,4
Reynoldsovo číslo	$Re$	(-)	180,25	336,69	615,87	312,37
redukované $Re$	$Re^*$	(-)	0,76	2,07	4,94	1,39
Taylorovo číslo	$Ta$	(-)	137,34	696,97	3 041,51	433,67

<sup>†</sup> Pro výpočet  $Re$ ,  $Re^*$  a  $Ta$  byla použita hodnota  $\rho = 760\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

**Tabulka 3.1:** Parametry ložiska 1 byly dodány výrobcem, parametry ložiska 2 jsou převzaty z (Tian et al., 2012) a parametry ložisek 3 a 4 jsou převzaty z (Chasalevris, 2016).

silami. Nestabilita je charakterizována vznikem sekundárního laminárního proudění nazývaného *Taylorovy* či *Taylorovy-Görtlerovy víry*. Ke vzniku nestability dochází, pokud *Taylorovo číslo*

$$Ta = \frac{c_r}{r} Re^2 \quad (3.5)$$

překročí kritickou hodnotu  $Ta_c$ , která závisí na excentricitě čepu. Pokud je čep vůči pánvi koncentrický, platí (San Andrés, 2010)

$$Ta_c = 1707,8. \quad (3.6)$$

Závislost  $Ta_c$  na relativní excentricitě  $\varepsilon$  uvádí Zapoměl (2007) následovně

$$Ta_c = 4006,9 \varepsilon^2 - 1444 \varepsilon + 1697,4. \quad (3.7)$$

Z tab. 3.1 je patrné, že v některých kluzných ložiskách s plovoucím pouzdrém mohou teoreticky vznikat Taylorovy víry. Vzhledem k tomu, že se Taylorova-Couettova nestabilita modeluje téměř výhradně pomocí Navierových-Stokesových rovnic (Deng a Braun, 2008), není v této práci dále diskutována.

### iii) Objemové síly v olejovém filmu jsou zanedbatelné.

Předpoklad platí pro ložiska, která se nenacházejí v silovém poli, které významně ovlivňuje proudění oleje. Předpoklad tedy neplatí např. při magnetohydrodynamickém mazání (Stachowiak a Batchelor, 2013).

### iv) Setrvačné síly v olejovém filmu jsou zanedbatelné.

Chen a Chen (1989) ukazují, že pokud je *redukované Reynoldsovo číslo*

$$Re^* = Re \frac{c_r}{r} \quad (3.8)$$

nižší než 1,4, je vliv setrvačných sil na vlastnosti olejového filmu zanedbatelný. Sestieri a Piva (1982) uvádějí, že pro  $Re^* \geq 5$  lze při zanedbání setrvačných očekávat chyby v určení maximálního hydrodynamického tlaku vyšší než deset procent.

Z tab. 3.1 vyplývá, že v některých případech může redukované Reynoldsovo číslo  $Re^*$  dosahovat poměrně vysokých hodnot. Z tohoto důvodu je zahrnutí vlivu setrvačných sil do Reynoldsovy rovnice podrobněji rozebráno v oddíle 3.4.2.

**v) Olej je Newtonovská kapalina.**

Předpoklad platí pro většinu motorových olejů provozovaných za běžných tlaků. Výjimkou mohou být některé polymerní oleje (Stachowiak a Batchelor (2013)).

**vi) Hydrodynamický tlak je po výšce filmu konstantní.**

Předpoklad platí pro tenké filmy vždy (Stachowiak a Batchelor, 2013; Zapoměl, 2007).

**vii) Hustota oleje je po výšce filmu konstantní.**

Předpoklad platí pro motorové oleje s nízkou hodnotou teplotní roztažnosti (Stachowiak a Batchelor, 2013). Hustota oleje je nicméně funkcí obvodové a podélné souřadnice, protože teplota v olejovém filmu kolísá i o více než 20 °C (Bukovník a Smolík et al., 2017).

**viii) Viskozita oleje je po výšce filmu konstantní.**

Jde o hrubý odhad, který ale výrazně zjednoduší výsledný tvar Reynoldsovy rovnice. Ve skutečnosti se viskozita po výšce filmu mění (Stachowiak a Batchelor, 2013).

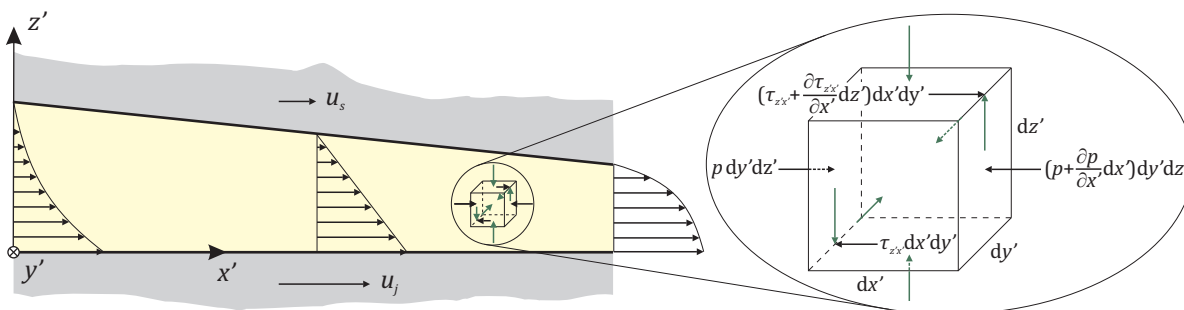
**ix) Vliv zakřivení olejového filmu je zanedbatelný.**

Předpoklad platí v případech, kdy je radiální vůle ložiska  $c_r$  významně nižší než poloměr čepu hřídele  $r$  (Szeri, 1980; Zapoměl, 2007).

Při respektování výše uvedených předpokladů je možné sestavit silovou rovnováhu na kontrolním objemu olejového filmu. Z rovnice rovnováhy se dále získají výrazy pro rychlost proudění oleje stěnami kontrolního objemu a ty se pak dosadí do vztahu vyjadřujícího zákon zachování hmotnosti, případně kontinuity toku.

**3.2.2 Silová podmínka rovnováhy**

Předpokládejme, že sledujeme olejový film vymezený dvěma povrchy. Dolní povrch se posouvá vůči hornímu a současně tyto povrchy nejsou rovnoběžné. V souladu se zjednodušujícími předpoklady uvedenými v oddíle 3.2.1 působí na kontrolní objem olejového filmu silové účinky znázorněné na obr. 3.2. Podmínku rovnováhy ve směru osy  $x'$  lze vyjádřit pomocí rovnosti (Stachowiak a Batchelor, 2013)



**Obrázek 3.2:** Princip vzniku hydrodynamického mazání ve filmu mezi dvěma neparalelními a vzájemně se pohybujícími povrchy (Hirani, 2012) a silové účinky působící na kontrolní objem filmu (Stachowiak a Batchelor, 2013).

$$p \, dy' \, dz' + \left( \tau_{z'x'} + \frac{\partial \tau_{z'x'}}{\partial z'} dz' \right) dx' \, dy' = \left( p + \frac{\partial p}{\partial x'} dx' \right) dy' \, dz' + \tau_{z'x'} dx' \, dy', \quad (3.9)$$

kde  $p = p(x', y', t)$  je hydrodynamický tlak a směr působení smykového napětí  $\tau_{z'x'}$  je patrný z obr. 3.2. Po úpravě má rovnost (3.9) tvar

$$\frac{\partial \tau_{z'x'}}{\partial z'} dz' dx' dy' = \frac{\partial p}{\partial x'} dx' dy' dz'. \quad (3.10)$$

Za předpokladu, že  $dx' dy' dz' > 0$  (tj. objem elementu je nenulový), musí platit

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial \tau_{z'x'}}{\partial z'}. \quad (3.11)$$

Obdobně je možné odvodit silovou podmínku rovnováhy pro síly působící ve směru  $y'$ :

$$\frac{\partial p}{\partial y'} = \frac{\partial \tau_{z'y'}}{\partial z'}, \quad (3.12)$$

přičemž  $\tau_{z'y'}$  je složka smykového napětí působící ve směru  $y'$  a ležící v rovině s normálou  $z'$ .

Dle **předpokladu vi)** je hydrodynamický tlak  $p$  po výšce filmu konstantní. Gradient hydrodynamického tlaku ve směru  $z'$  je tedy nulový a platí

$$\frac{\partial p}{\partial z'} = 0. \quad (3.13)$$

V souladu s **předpokladem v)** je olej Newtonská kapalina a podléhá Newtonovu zákonu viskozity. Ten pro případ proudění v tenkém filmu mezi dvěma deskami, které se mohou posouvat, nabývá tvaru (Zapoměl, 2007; Stachowiak a Batchelor, 2013)

$$\tau_{z'x'} = \mu \frac{\partial u}{\partial z'}, \quad \tau_{z'y'} = \mu \frac{\partial v}{\partial z'}, \quad (3.14)$$

kde  $\mu$  je dynamická viskozita oleje a  $u$  a  $v$  jsou rychlosti proudění ve směru  $x'$  a  $y'$ . Dosadíme-li do Newtonova zákona viskozity dříve odvozené silové podmínky rovnováhy (3.11) a (3.12), přejde tento zákon do tvaru

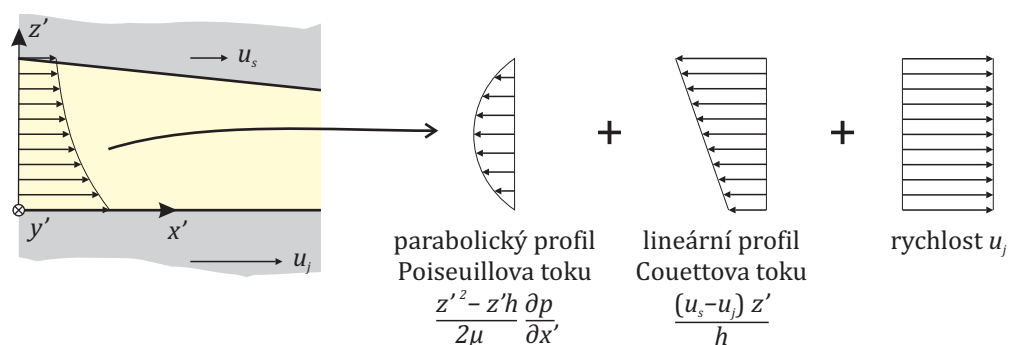
$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z'} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z'} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial z'} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z'} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z'^2}, \quad (3.15)$$

který popisuje fyzikální závislost mezi hydrodynamickým tlakem  $p$  a rychlostmi proudění  $u$  a  $v$ . Vztahy (3.15) je účelné zjednodušit integrací po výšce filmu, tj. podle proměnné  $z'$ . Vzhledem k **předpokladům vi)** a **viii)** nejsou hydrodynamický tlak  $p$  ani dynamická viskozita  $\mu$  funkcemi prostorové souřadnice  $z'$ , což integraci zjednoduší. Po provedení první integrace podle  $z'$  přejde první ze vztahů z (3.15) do tvaru

$$\frac{\partial p}{\partial x'} z' + C_1 = \mu \frac{\partial u}{\partial z'}. \quad (3.16)$$

Druhou integrací podle stejné proměnné lze obdržet rovnost

$$\frac{\partial p}{\partial x'} \frac{z'^2}{2} + C_1 z + C_2 = \mu u, \quad (3.17)$$



**Obrázek 3.3:** Složky rychlostního profilu toku oleje při hydrodynamickém mazání (Stachowiak a Batchelor, 2013).

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty určené okrajovými podmínkami. Za předpokladů, že olejový film má ve sloupci, z něhož byl vyjmut kontrolní objem, výšku  $h$  a dolní povrch se posouvá ve směru  $s$  konstantní rychlostí  $u_j$  a horní povrch se posouvá ve směru  $s$  konstantní rychlostí  $u_s$  mají okrajové podmínky tvar

$$u = u_j \quad \text{pro } z' = 0, \quad (3.18a)$$

$$u = u_s \quad \text{pro } z' = h. \quad (3.18b)$$

Po dosazení okrajových podmínek (3.18) do rovnice (3.17) lze vypočítat hodnoty integračních konstant následovně

$$C_1 = (u_s - u_j) \frac{\mu}{h} - \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{h}{2}, \quad C_2 = \mu u_j. \quad (3.19)$$

Dosazením integračních konstant (3.19) do rovnice (3.17) je vyjádřena rovnost

$$\frac{\partial p}{\partial x'} \frac{z'^2}{2} + (u_s - u_j) \frac{\mu z'}{h} - \frac{\partial p}{\partial x'} \frac{h z'}{2} + \mu u_j = \mu u, \quad (3.20)$$

která určuje rychlost toku  $u$  v libovolném místě sloupce, v němž se nachází kontrolní objem. Vztah pro rychlost toku  $v$  je možné odvodit analogicky. Rychlosti  $u$  a  $v$  se sestávají ze tří složek znázorněných na obr. 3.3. Obě rychlosti je možné explicitně vyjádřit jako funkce prostorové derivace hydrodynamického tlaku  $p$  a rychlostí hraničních povrchů:

$$u = \frac{z'^2 - z'h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x'} + (u_s - u_j) \frac{z'}{h} + u_j, \quad (3.21a)$$

$$v = \frac{z'^2 - z'h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y'} + (v_s - v_j) \frac{z'}{h} + v_j. \quad (3.21b)$$

### 3.2.3 Zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity toku)

Integrační tvar zákona zachování hmotnosti vyjadřuje, že změna hmotnosti tekutiny v kontrolním objemu  $V$  je rovna celkové bilanci hmotnostních toků hranicí objemu  $\partial V$ . Vimmr (2008) tento zákon uvádí ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho dV + \oint_{(\partial V)} \rho v_i dS_i = 0, \quad (3.22)$$



kde  $\rho$  je hustota tekutiny a  $v_i$  je tok ve směru osy  $x_i$ . Pomocí Gauss-Ostrogradského věty

$$\oint_{(\partial V)} f_i dS_i = \int_{(V)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dV,$$

kde  $f_i = f_i(x_i)$  jsou spojitě souřadnice vektorového pole, je možné integrál přes hranici objemu ve vztahu (3.22) převést na integrál přes samotný objem. Zákon zachování hmotnosti je pak formulován rovností

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho dV + \int_{(V)} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} dV = 0, \quad (3.23)$$

která platí pro libovolný kontrolní objem a tedy i pro sloupec filmu, který je definován jako objem vymezený dolním a horním povrchem. Za předpokladu, že výška sloupce je  $h$  a průřez po výšce filmu je neměnný a má plošný obsah  $A$ , je možné rovnost (3.23) upravit do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{(A)0}^h \rho dz dx dy + \int_{(A)0}^h \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} dz dx dy = 0.$$

Protože  $A$  je konstantní, lze v prvním členu zaměnit pořadí derivace a integrace. Výška sloupce  $h$  se ale může kvůli případným nerovnostem na posouvající se hranici filmu v čase měnit a proto není možné zaměnit pořadí příslušného integrálu a parciální derivace podle času  $t$ . Po provedení výše uvedené záměny a úpravě přejde zákon zachování hmotnosti do tvaru

$$\int_{(A)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz \right) dx dy = - \int_{(A)} \left[ \int_0^h \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} dz \right] dx dy.$$

Nyní lze využít skutečností, že pokud se rovnají určité integrály, musí se rovnat i jejich integrandy a že lze zaměnit pořadí integrace a derivace, je-li funkce  $\rho v_i$  spojitá a pokud  $\partial \rho v_i / \partial x_i$  má integrovatelnou majorantu. Po provedení úprav a s využitím **předpokladu vii)**, který uvádí, že  $\rho$  je po výšce filmu konstantní, lze zákon zachování hmotnosti pro sloupec olejové filmu vyjádřit pomocí rovnosti

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho \int_0^h v_i dz' \right) = 0. \quad (3.24)$$

Protože dolním ani horním povrchem neprotéká mazivo, týká se rovnice (3.24) pouze rychlosti toku  $u$  ve směru osy  $x'$  a rychlosti toku  $v$  ve směru osy  $y'$ . Po dosazení funkcí (3.21), které explicitně vyjadřují rychlosti toků  $u$  a  $v$ , obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \rho \int_0^h \left[ \frac{z'^2 - z' h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x'} + (u_s - u_j) \frac{z'}{h} + u_j \right] dz' \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y'} \left\{ \rho \int_0^h \left[ \frac{z'^2 - z' h}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y'} + (v_s - v_j) \frac{z'}{h} + v_j \right] dz' \right\} = 0. \end{aligned}$$

Po provedení integrací je získán vztah popisující rozložení hydrodynamického tlaku  $p$  v olejovém filmu v závislosti na výšce filmu  $h$ , dynamické viskozitě maziva  $\mu$ , hustotě  $\rho$  a rychlosti posuvu hraničních povrchů:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'} + (u_j + u_s) \frac{\rho h}{2} \right] - \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y'} + (v_j + v_s) \frac{\rho h}{2} \right] = 0. \quad (3.25)$$

Po uspořádání členů je odvozena Reynoldsova rovnice popisující rozložení hydrodynamického tlaku  $p$  ve filmu mezi dvěma povrchy (Hirani, 2012):

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y'} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left[ (u_j + u_s) \frac{\rho h}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ (v_j + v_s) \frac{\rho h}{2} \right] + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t}, \quad (3.26)$$

kde  $p$ ,  $h$ ,  $\rho$  a  $\mu$  jsou funkcemi prostorových proměnných  $x'$ ,  $y'$  a času  $t$  a rychlosti  $u_j$ ,  $u_s$ ,  $v_j$  a  $v_s$  obecně nejsou konstanty, ale mohou záviset na příslušné prostorové souřadnici a čase.

Členy na levé straně Reynoldsovy rovnice (3.26) se označují jako *tlakové*<sup>3</sup>, členy na pravé straně jako *zdrojové*<sup>4</sup>. Parciální derivace  $\partial h/\partial x'$  a  $\partial h/\partial y'$  zahrnují vliv *klínovitosti* olejového filmu<sup>5</sup>. Parciální derivace  $\partial(u_j+u_s)/\partial x'$  a  $\partial(v_j+v_s)/\partial y'$  popisují stav, kdy je jeden z hraničních povrchů poddajný a při pohybu se deformuje, nebo kdy jeden z hraničních povrchů koná obecný pohyb<sup>6</sup>. A konečně parciální derivace  $\partial h/\partial t$  zahrnuje vliv *stlačování filmu*<sup>7</sup> (Rendl, 2017; Hirani, 2012).

### 3.2.4 Reynoldsova rovnice pro film kluzného ložiska

Olejový film cylindrického kluzného ložiska je vymezený dvěma válcovými plochami, případně víceplochými povrchy u ložisek jiných typů. Pokud je olejový film zkoumán v prostoru obvodové souřadnice  $s$  a podélné souřadnice  $x$ , jejichž počátek a orientace jsou ukázány na obr. 3.1, a současně je v souladu s **předpokladem ix)** zanedbána křivost filmu, lze rozložení hydrodynamického tlaku ve filmu modelovat s využitím Reynoldsovy rovnice (3.26), v níž jsou zavedeny substituce  $x' := s$  a  $y' := x$ .

U kluzných ložisek se obvykle zanedbává vliv vibrací čepu hřídele na rychlost bodů na obvodu čepu a obvodová rychlost se považuje za nezávislou na obvodové souřadnici (Zapoměl, 2007) a rovněž se zanedbávají případné posuvy čepu hřídele vůči ložiskové pánvi v podélném směru. Za těchto předpokladů má Reynoldsova rovnice tvar

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6(u_j + u_s) \frac{\partial(\rho h)}{\partial s} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t}. \quad (3.27)$$

Velmi častým zjednodušením používaným při návrzích ložisek je *nestlačitelná izoviskózní aproximace*, při níž se dynamická viskozita a hustota filmu považují za konstantní. Reynoldsova rovnice pro nestlačitelný izoviskózní olejový film nabývá tvaru

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6\mu(u_j + u_s) \frac{\partial h}{\partial s} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.28)$$

o kterém Stachowiak a Batchelor (2013) tvrdí, že je nejčastěji uváděným tvarem Reynoldsovy rovnice napříč technickou literaturou.

<sup>3</sup> Anglicky *pressure terms*.

<sup>4</sup> Anglicky *source terms*.

<sup>5</sup> Anglicky *wedge action*.

<sup>6</sup> Anglicky *stretching action*.

<sup>7</sup> Anglicky *squeeze action*.

### 3.3 Tribologické parametry kluzného ložiska

V inženýrských aplikacích se často pracuje s parametry kluzných ložisek, které jsou odvozeny z jejich geometrie a z podmínek, za kterých jsou provozována. Základní tribologické parametry kluzných ložisek jsou popsány a definovány v následujícím seznamu.

**Poměr délky a průměru ložiska**  $\eta = l/d$ , kde  $d = 2r$  je průměr ložiska.

**Sommerfeldovo číslo**  $S$  je bezrozměrné číslo, které se vypočítá pomocí návrhových parametrů kluzného ložiska. V této práci je používáno Sommerfeldovo číslo  $S$  ve tvaru

$$S = \frac{\mu d l \omega_0}{W} \left( \frac{r}{c_r} \right)^2 = \frac{2 \mu r l \omega_0}{W} \left( \frac{r}{c_r} \right)^2, \quad (3.29)$$

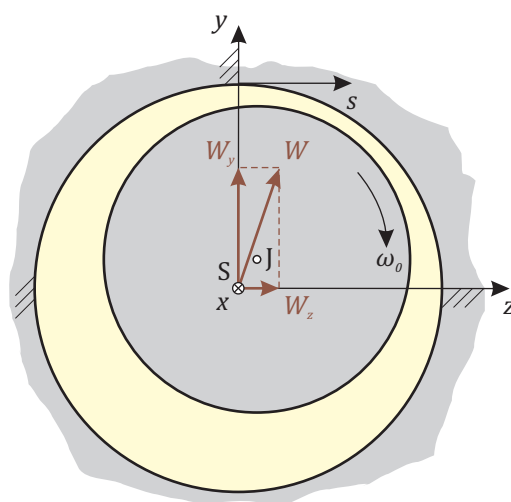
přičemž  $W$  je zatížení ložiska. Sommerfeldovo číslo se ne vždy uvádí ve tvaru (3.29), který je doménou především anglosaské literatury (Someya, 1989; Muszyńska, 2005). Gasch a Pfützner (1975) a Stachowiak a Batchelor (2013) uvádějí číslo v reciprokém tvaru. V některých případech se v definičním vztahu (3.29) uvádí otáčky čepu hřídele  $n_0$  v  $\text{ot} \cdot \text{min}^{-1}$  namísto jeho úhlové rychlosti  $\omega_0$  (San Andrés, 2010; Hirani, 2012).

**Zatížení (únosnost) ložiska**  $W$  vyjadřuje celkovou sílu, kterou je zatížena ložisková pánev. Tuto sílu lze vypočítat jako integrál z hydrodynamického tlaku přes povrch ložiskové pánve. Pro pánev kruhového průřezu platí (Stachowiak a Batchelor, 2013)

$$W = \sqrt{W_y^2 + W_z^2} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} p \, ds \, dx, \quad (3.30)$$

kde  $W_y$  a  $W_z$  představují složky zatížení ve směru vertikální osy  $y$  a horizontální osy  $z$ , které jsou ukázány na obr. 3.4. Složky zatížení  $W_y$  a  $W_z$  lze vypočítat pomocí integrálů

$$W_y = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} p \cos \frac{s}{r} \, ds \, dx, \quad W_z = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} p \sin \frac{s}{r} \, ds \, dx, \quad (3.31)$$



Obrázek 3.4: Směr působení složek zatížení ložiska  $W_y$  a  $W_z$ .

**Třecí síla**  $F_{fric}$  je v případě plně zaplaveného ložiska, ve kterém nedochází ke kontaktu mezi čepem hřídele a ložiskovou pánví, závislá výhradně na smykovém napětí, kterým působí olej na kluzné povrchy. Na elementární plochu čepu hřídele  $dA$  třecí síly  $dF_{fric,j,s}$  v obvodovém směru  $s$  a  $dF_{fric,j,x}$  v podélném směru  $x$ . Při uvažování platnosti Newtonova zákona viskozity (3.14) lze tyto síly vyjádřit následovně

$$dF_{fric,j,s} = \tau_{j,s} dA = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial H} \right|_{H=0} dA, \quad dF_{fric,j,x} = \tau_{j,x} dA = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial H} \right|_{H=0} dA, \quad (3.32)$$

přičemž symboly  $\tau_{j,s}$  a  $\tau_{j,x}$  ve vztazích (3.32) jsou smyková napětí působící na povrch čepu hřídele v obvodovém směru  $s$  a v podélném směru  $x$  a  $H$  je radiální vzdálenost od povrchu čepu hřídele. Po dosazení vztahů (3.21) pro rychlosti toků  $u$  a  $v$  a integraci přes povrch ložiskové pánve je vyjádřena celková velikost třecích sil působících na čep hřídele

$$F_{fric,j,s} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \mu \left. \frac{\partial}{\partial H} \left[ \frac{H^2 - Hh}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial s} + (u_s - u_j) \frac{H}{h} + u_j \right] \right|_{H=0} ds dx, \quad (3.33a)$$

$$F_{fric,j,x} = \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \mu \left. \frac{\partial}{\partial H} \left[ \frac{H^2 - Hh}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + (v_s - v_j) \frac{H}{h} + v_j \right] \right|_{H=0} ds dx. \quad (3.33b)$$

Za předpokladu  $v_j = v_s = 0$  lze rovnosti (3.33) upravit do tvaru

$$F_{fric,j,s} = - \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial s} + (u_j - u_s) \frac{\mu}{h} \right] ds dx, \quad (3.34a)$$

$$F_{fric,j,x} = - \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} ds dx. \quad (3.34b)$$

Třecí síly působící na povrch ložiskové pánve je možné vyjádřit po dosazení  $h = H$  do (3.33). Další podrobnosti jsou uvedeny v podkapitole 4.2.

**Součinitel tření**  $f_{fric}$  lze vypočítat jako podíl třecí síly  $F_{fric}$  a zatížení ložiska  $W$ .

**Ztrátový výkon**  $P_{loss}$  vyjadřuje výkonovou ztrátu v ložisku způsobenou hydrodynamickými silami. S využitím rovnosti (2.48) lze ztrátový výkon vyjádřit jako

$$P_{loss} = F_{fric} r (\omega_0 - \omega_p). \quad (3.35)$$

**Průtok oleje ložiskem** lze stanovit integrováním rychlosti proudění přes plochu, na které je průtok sledován. Při návrhu ložiska je nejdůležitější stanovit průtok oleje čelními plochami  $x = \pm l/2$ . Pro tok v podélném směru daný rovností (3.21b) a při uvažování  $v_j = v_s = 0$  je objemový průtok  $Q_x$  čelní plochou  $x = l/2$  dán integrálem

$$Q_x = \int_0^{2\pi} \int_0^h v dH ds = \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{H^2 - Hh}{2\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=l/2} dH ds = - \int_0^{2\pi} \frac{h^3}{12\mu} \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=l/2} ds. \quad (3.36)$$

### 3.4 Další tvary Reynoldsovy rovnice

Reynoldsova rovnice ve tvarech (3.27) a (3.28) sice postačuje v mnoha aplikacích, ale nezahrnuje vlivy setrvačných sil v olejovém filmu, kavitace a drsnosti povrchů. Tyto jevy se ve větší či menší míře projevují v ložiskách turbodmychadel, a proto jsou v následujících oddílech popsány výpočtové postupy a úpravy Reynoldsovy rovnice, které umožňují zahrnout jejich vliv na rozložení hydrodynamického tlaku v olejovém filmu.

#### 3.4.1 Reynoldsova rovnice v bezrozměrném tvaru

Převod Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru spočívá v nahrazení všech proměnných jejich bezrozměrnými protějšky. Reynoldsova rovnice v bezrozměrném tvaru nachází uplatnění především při optimalizaci parametrů ložiska, protože umožňuje provést optimalizační proces s menším množstvím nezávisle proměnných parametrů. Také mnohé analytické a numerické metody pro výpočet Reynoldsovy rovnice využívají její bezrozměrný tvar, protože řešení rovnice v takovém tvaru je lépe podmíněno (Stachowiak a Batchelor, 2013). Zde je bezrozměrná Reynoldsova rovnice uvedena proto, že je použita při modelování výše uvedených jevů.

Převod Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru bude ukázán na rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6(u_j + u_s) \frac{\partial h}{\partial s} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.37)$$

který popisuje rozložení hydrodynamického tlaku v olejovém filmu konstantní hustoty.

#### Varianta 1

První varianta převodu Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru využívá vztahy

$$s = r \bar{s}, \quad x = l \bar{x}, \quad h = c_r \bar{h}, \quad \mu = \mu_0 \bar{\mu} \quad (3.38)$$

kde veličiny označené pruhem, tedy  $\bar{\square}$ , jsou bezrozměrné,  $\mu_0$  je střední viskozita olejového filmu a význam ostatních parametrů je patrný z obr. 3.1a. Dosazením těchto transformačních vztahů do Reynoldsovy rovnice (3.37) dostáváme

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{c_r^3 \bar{h}^3}{\mu_0 \bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{c_r^3 \bar{h}^3}{\mu_0 \bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{6(u_j + u_s)}{r} \frac{\partial (c_r \bar{h})}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{\partial (c_r \bar{h})}{\partial t}. \quad (3.39)$$

Po vytknutí konstant  $c_r$  a  $\mu_0$  před operátory parciálních derivací, zavedení substituce  $u = u_j + u_s$  a vynásobením rovnice (3.39) výrazem  $(r) / (c_r u)$  přejde tato do tvaru

$$\frac{c_r^2}{\mu_0 u r} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{c_r^2}{\mu_0 u r} \frac{r^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{r}{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}, \quad (3.40)$$

ve kterém výrazy

$$\bar{p} = \frac{c_r^2 p}{\mu_0 u r}, \quad \tau = \frac{u t}{r} \quad (3.41)$$

slouží jako definiční transformační vztahy pro bezrozměrný hydrodynamický tlak  $\bar{p}$  a bezrozměrný čas  $\tau$ . Po dosazení uvedených transformačních vztahů do (3.40) je odvozena Reynoldsova rovnice v bezrozměrném tvaru

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{r^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}, \quad (3.42)$$

která platí pro laminární proudění oleje v ložiskové mezeře s absolutně hladkými povrchy (Hirani, 2012; Stachowiak a Batchelor, 2013). Řešení této rovnice se v případě ložiska se středovým úhlem kluzné plochy  $\alpha$  nachází v oblasti  $\langle 0, \alpha \rangle \times \langle -1/2, 1/2 \rangle$ . Při analýze kluzných ploch segmentových ložisek se někdy požaduje, aby řešení leželo v oblasti  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle -1/2, 1/2 \rangle$ . V takovém případě se zavádí transformační vztah pro obvodovou souřadnici

$$s = \alpha r \bar{s}, \quad (3.43)$$

a bezrozměrná Reynoldsova rovnice nabývá tvaru

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{r^2}{l^2} \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \alpha \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \alpha^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}. \quad (3.44)$$

### Varianta 2

Druhá varianta převodu Reynoldsovy rovnice do bezrozměrného tvaru využívá vztahy

$$\bar{s} = \frac{s}{r}, \quad \bar{x} = \frac{x}{r}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \bar{u} = \frac{u_j + u_s}{r \omega_0}, \quad \bar{p} = \frac{c_r^2 p}{\mu_0 \omega_0 r^2}, \quad \bar{h} = \frac{h}{c_r}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}. \quad (3.45)$$

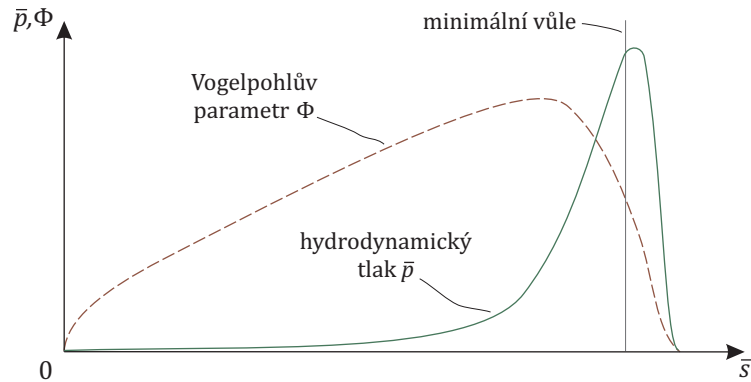
Postupem, který je analogickým s odvozením popsáním v předchozím odstavci, lze získat následující bezrozměrný tvar Reynoldsovy rovnice

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}. \quad (3.46)$$

Řešení této rovnice se v případě ložiska se středovým úhlem kluzné plochy  $\alpha$  nachází v oblasti  $\langle 0, \alpha \rangle \times \langle -\eta, \eta \rangle$ , kde  $\eta$  je poměr délky a průměru ložiska.

### Vogelpohlova substituce

Reynoldsova rovnice v bezrozměrném tvaru má určitou nevýhodu při řešení úloh s vysokými hodnotami  $\varepsilon$ . Tato nevýhoda vyplývá z fyzikální podstaty úlohy – bezrozměrný hydrodynamický tlak nabývá své maximální hodnoty  $\bar{p}_{max}$  poblíž minimální výšky ložiskové mezery  $\bar{h}_{min}$ . V okolí  $\bar{p}_{max}$  se navíc nachází nejvyšší i nejnižší hodnota parciální derivace  $\partial \bar{p} / \partial \bar{s}$ , viz obr. 3.5. Aby bylo



**Obrázek 3.5:** Porovnání závislosti bezrozměrného hydrodynamického tlaku  $\bar{p}$  a Vogel-pohlůva parametru  $\Phi$  na obvodové souřadnici  $\bar{s}$  při  $\varepsilon = 0,95$  (Stachowiak a Batchelor, 2013).

dosaženo co nejpřesnějších výsledků, je třeba pokrýt oblast v okolí  $\bar{h}_{min}$  co nejhustší sítí, což zvýší počet stupňů volnosti úlohy a negativně ovlivní výpočtový čas. Další možností je zavedení tzv. Vogelpohlovy substituce (Stachowiak a Batchelor, 2013)

$$\Phi = \bar{p} \bar{h}^{3/2}, \quad (3.47)$$

kde  $\Phi$  je bezrozměrný Vogelpohlův parametr, jehož typický průběh v závislosti na obvodové souřadnici  $\bar{s}$  je ukázán na obr. 3.5. Do bezrozměrné Reynoldsovy rovnice není možné zavést substituci (3.47) přímo ale až po úpravě do vhodného tvaru. Úprava bezrozměrné Reynoldsovy rovnice bude ukázána na rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}, \quad (3.48)$$

kteřá popisuje pole bezrozměrného hydrodynamického tlaku  $\bar{p}$  v izoviskózním olejovém filmu.

Prvním krokem je vyjádření první parciální derivace Vogelpohlova parametru  $\Phi$  podle  $\bar{s}$ , kterou lze s využitím pravidla o derivaci součinu zapsat jako

$$\frac{\partial(\bar{p} \bar{h}^{3/2})}{\partial \bar{s}} = \bar{h}^{3/2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} + \frac{3}{2} \bar{p} \bar{h}^{1/2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}}. \quad (3.49)$$

Ze vztahu (3.49) lze vyjádřit parciální derivaci  $\partial \bar{p} / \partial \bar{s}$  a následným vynásobením celé rovnosti výrazem  $\bar{h}^{3/2}$  je možné upravit výraz na levé straně do tvaru, ve kterém vystupuje v bezrozměrné Reynoldsově rovnici (3.48), tedy

$$\bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} = \bar{h}^{3/2} \frac{\partial(\bar{p} \bar{h}^{3/2})}{\partial \bar{s}} - \frac{3}{2} \bar{p} \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}}. \quad (3.50)$$

První člen Reynoldsovy rovnice je možné s využitím (3.50) vyjádřit jako rozdíl dvou výrazů

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[ \bar{h}^{3/2} \frac{\partial(\bar{p} \bar{h}^{3/2})}{\partial \bar{s}} \right]}_{\text{i)}} - \underbrace{\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{p} \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \right)}_{\text{ii)}}. \quad (3.51)$$

Výrazy na pravé straně (3.51) je možné dále upravit. Pro úpravu výrazu i) se využije pravidlo pro derivaci součinu funkcí a pro úpravu výrazu ii) je nutné využít následující vztahy

$$\frac{\partial \bar{h}^{3/2}}{\partial \bar{s}} = \frac{3}{2} \bar{h}^{1/2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}}, \quad \frac{\partial \bar{h}^{1/2}}{\partial \bar{s}} = \frac{1}{2} \bar{h}^{-1/2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}}.$$

Výrazy i) a ii) z rovnosti (3.51) pak lze upravit do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[ \bar{h}^{3/2} \frac{\partial(\bar{p} \bar{h}^{3/2})}{\partial \bar{s}} \right] &= \bar{h}^{3/2} \frac{\partial^2(\bar{p} \bar{h}^{3/2})}{\partial \bar{s}^2} + \frac{\partial \bar{h}^{3/2}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial(\bar{p} \bar{h}^{3/2})}{\partial \bar{s}} = \bar{h}^{3/2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{s}^2} + \frac{3}{2} \bar{h}^{1/2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{p} \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \right) &= \bar{h}^2 \bar{p} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{s}^2} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial(\bar{p} \bar{h}^2)}{\partial \bar{s}} = \bar{h}^{1/2} \Phi \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{s}^2} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial(\bar{h}^{1/2} \Phi)}{\partial \bar{s}} = \\ &= \bar{h}^{1/2} \Phi \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \left( \bar{h}^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}} + \Phi \frac{\partial \bar{h}^{1/2}}{\partial \bar{s}} \right) = \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$= \bar{h}^{1/2} \Phi \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{s}^2} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \left( \bar{h}^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{s}} + \frac{1}{2} \bar{h}^{-1/2} \Phi \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \right). \quad (3.53)$$

Dosazením výrazů (3.52) a (3.53) do rovnosti (3.51) lze vyjádřit první člen bezrozměrné Reynoldsovy rovnice (3.48) pouze pomocí Vogelpohlova parametru  $\Phi$  a bezrozměrné výšky ložiskové mezery  $\bar{h}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) = \bar{h}^{3/2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{s}^2} - \frac{3}{2} \bar{h}^{1/2} \Phi \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{s}^2} - \frac{3}{4} \bar{h}^{-1/2} \Phi \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}}. \quad (3.54)$$

Předpis pro druhý člen Reynoldsovy rovnice (3.48) lze odvodit analogicky. Dosazením (3.54) a zmíněného analogického vztahu do bezrozměrné Reynoldsovy rovnice (3.48) je formulována *Vogelpohlova rovnice* (Stachowiak a Batchelor, 2013)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{s}^2} + \frac{r^2}{l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{x}^2} = \mathcal{F} \Phi + \mathcal{G}, \quad (3.55)$$

kde parametry  $\mathcal{F}$  a  $\mathcal{G}$  jsou dány následovně:

$$\mathcal{F} = \frac{3}{4} \frac{\left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \right)^2}{\bar{h}^2} + \frac{3}{2} \frac{\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{s}^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2}}{\bar{h}}, \quad \mathcal{G} = \frac{6 \bar{u}}{\bar{h}^{3/2}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + \frac{12}{\bar{h}^{3/2}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}. \quad (3.56)$$

Vogelpohlova rovnice (3.55) se vyznačuje tím, že na rozdíl od bezrozměrné Reynoldsovy rovnice (3.37) neobsahuje parciální derivace součinu neznámé proměnné s  $\bar{h}$ . Zbývá dodat, že Vogelpohlova substituce (3.47) není jedinou používanou substitucí. Např. Šimek (2008) využívá substituci

$$\Psi = (\bar{p} \bar{h})^2. \quad (3.57)$$

### 3.4.2 Reynoldsova rovnice respektující setrvačné síly v olejovém filmu

Vliv setrvačných sil působících na olejový film kluzného ložiska je zanedbatelný pokud pro reduované Reynoldsovo číslo  $Re^*$  definované rovnicí (3.8) platí  $Re^* < 1,4$ . Významný vliv na mechanické vlastnosti filmu lze pozorovat v případech, že platí  $Re^* \approx 5$  (Sestieri a Piva, 1982; Chen a Chen, 1989).

Rozšířenou Reynoldsovu rovnici, která respektuje setrvačné síly v olejovém filmu, je možné odvodit z Navierových-Stokesových rovnic. Jak ukazují Reinhardt a Lund (1975), rozšířená Reynoldsova rovnice je poměrně složitá a v případě simulací nestacionárních dějů není tuto rovnici jednoduché vyřešit, protože obsahuje smíšené parciální derivace podle času a prostоровých souřadnic. Reinhardt a Lund (1975) tedy navrhnou řešit celý problém ve dvou krocích. V prvním kroku je vypočítána klasická Reynoldsova rovnice, např.

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}, \quad (3.58)$$

jejíž řešení  $p^{(0)}$  se poté použije pro výpočet výrazů na pravé straně rozšířené Reynoldsovy rovnice. Hydrodynamický tlak  $p^{(1)}$  z rozšířené Reynoldsovy rovnice ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \bar{h}^3 \frac{\partial \bar{p}^{(1)}}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left\{ -\frac{3 \bar{h}^7}{560} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] - \right.$$



$$\begin{aligned}
 & -\frac{3\bar{h}^6}{140} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} \right)^2 + \frac{\bar{h}^5}{20} \frac{\partial^2 \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}^2} + \frac{13\bar{h}^4}{140} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} - \frac{\bar{h}^2}{10} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} - \frac{3\bar{h}^6}{140} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} + \\
 & + \frac{13\bar{h}^4}{70} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} + \frac{\bar{h}^5}{10} \frac{\partial^2 \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s} \partial \tau} \left. \right\} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ -\frac{3\bar{h}^7}{560} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[ \left( \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] - \right. \\
 & - \frac{3\bar{h}^6}{140} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{h}^5}{20} \frac{\partial^2 \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{s} \partial \bar{x}} + \frac{13\bar{h}^4}{140} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} - \frac{3\bar{h}^6}{140} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \\
 & \left. + \frac{13\bar{h}^4}{70} \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} + \frac{\bar{h}^5}{10} \frac{\partial^2 \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{x} \partial \tau} \right\} \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

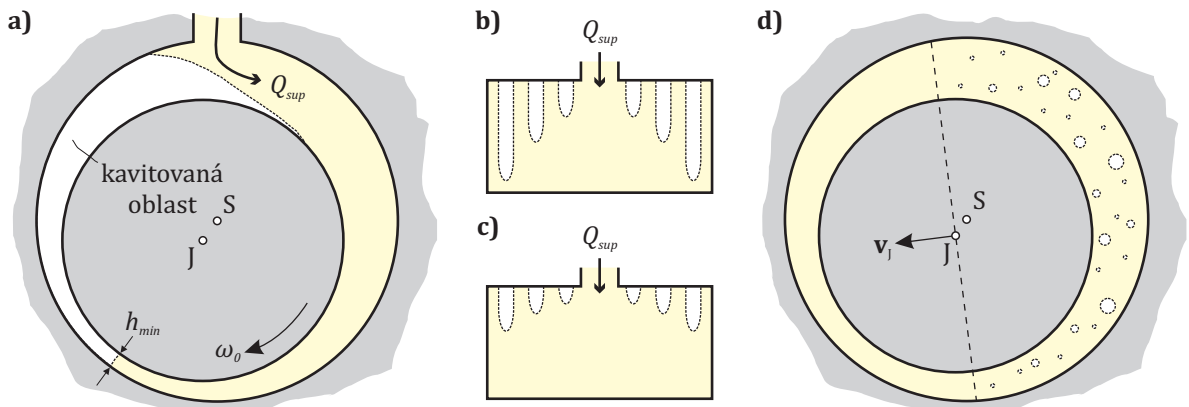
je korigován na vliv setrvačných sil v olejovém filmu.

### 3.4.3 Modelování olejového filmu s kavitací

V hydrodynamických ložiskách se nacházejí oblasti, ve kterých Reynoldsova rovnice predikuje záporný hydrodynamický tlak. Tato oblast vzniká kvůli kombinaci dvou dějů (Stachowiak a Batchelor, 2013):

- Předpokládejme, že v souladu s obr. 3.6a je čep hřídele vychýlený z geometrického středu ložiska S, otáčí se konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_0$  a nekmitá. Ložiskovou mezerou v místě s minimální výškou  $h_{min}$  proudí olej v množství, které nedokáže vyplnit oblast ložiskové mezery, která je na obr. 3.6a ohraňována čárkovaně. V této oblasti se v obvodovém směru vytváří vrstvy, ve kterých chybí olej, naznačené na obr. 3.6b a 3.6c. Chybějící olej je doplňován až v místě mazacích drážek či otvorů napájecím průtokem  $Q_{sup}$ .
- Předpokládejme, že v souladu s obr. 3.6d je čep hřídele vychýlený z geometrického středu ložiska S, nerotuje a pohybuje se ve směru vektoru rychlosti  $\mathbf{v}_J$ . Vazký olej není schopen zaplavit zvětšující se část ložiskové mezery a dojde ke vzniku dutinek vyplněných plynem.

Jak bylo naznačeno výše, ve skutečném olejovém filmu nedochází k poklesu hydrodynamického tlaku do záporných hodnot. Namísto toho dojde při poklesu hydrodynamického tlaku



**Obrázek 3.6:** Naznačení polohy kavitované oblasti při stacionární provozu ložiska a) a při čistém stlačování filmu d). Velikost kavit je ovlivněna množstvím přitékajícího oleje: pokud je průtok  $Q_{sup}$  nižší, jsou kavitativy větší b) a s rostoucím průtokem se zmenšují c).

pod únosnou mez, označovanou jako *kavitační* nebo též *saturační tlak*, ke vzniku dutin zvaných také *kavity*, které jsou vyplněny plynem rozpuštěným v oleji. Ve většině běžných ložisek se jedná o vzduch. Kavity se opětovně zaplňují olejem v místech, kde se nacházejí mazací drážky či otvory. Pokud dojde k lokálnímu nárůstu hydrodynamického tlaku, mohou kavity implodovat. Při implozích se uvolňuje značné množství energie a v případech, kdy k implozím dochází na kluzné vrstvě ložiska, je tato vrstva namáhána napětím dosahujícím až 0,5 GPa (Stachowiak a Batchelor, 2013), což způsobuje nadměrné opotřebení kluzné vrstvy.

Modely pro výpočet hydrodynamického tlaku v olejovém filmu s kavitací fungují na vícekrokovém principu. V prvním kroku je vypočítán hydrodynamický tlak pomocí Reynoldsovy rovnice a jsou nalezeny oblasti, ve kterých dochází ke kavitaci, a ve druhém kroku se ve vytipovaných oblastech řeší nové rovnice. Používané modely je možné rozdělit do dvou skupin. První skupinu tvoří zjednodušené modely, které nerespektují zákon zachování hmotnosti, a druhé skupině patří modely, které tento zákon splňují.

### Zjednodušený model

Zjednodušený model spočívá v nalezení oblastí, kde platí

$$p < p_c, \quad (3.60)$$

přičemž  $p_c$  je saturační tlak. Hodnota hydrodynamického tlaku  $p$  v nalezené oblasti, kde dochází ke kavitaci, se poté nahradí hodnotou  $p_c$ . Velikost kavitačního tlaku  $p_c$  se často volí nulová, i když ve skutečnosti je srovnatelná s tlakem plynu, ve kterém ložisko pracuje. I přes svou jednoduchost je představený model hojně využíván ve výpočtových softwarech (Obeid a Yeiser et al., 2013; Offner et al., 2018; Stachowiak a Batchelor, 2013; Zapoměl, 2007).

### Model respektující zákon zachování hmotnosti

Zjednodušený model má zásadní nevýhodu v tom, že nevyhovuje zákonu zachování hmotnosti, takže neumožňuje odhadnout velikost kavit a nepřesně predikuje třecí síly v oblasti s kavitací (Stachowiak a Batchelor, 2013). Z tohoto důvodu Brewe (1986) navrhl využít modifikovanou Elrodovu univerzální rovnici, která popisuje zaplavení tenkého filmu mazivem. Navržený model platí pro ložisko s hladkými kluznými povrchy a laminárně proudící olejový film a lze ho zapsat ve tvaru (Sawicki a Rao, 2004)

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \mathcal{B} \bar{K} \bar{h}^3 \frac{\partial \theta}{\partial \bar{s}} \right) + \left( \frac{r}{\bar{l}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \mathcal{B} \bar{K} \bar{h}^3 \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\theta \bar{h}}{\mathcal{K}} \right) + 12 \frac{\partial (\theta \bar{h})}{\partial \tau}, \quad (3.61)$$

v němž  $\theta = \theta(\bar{s}, \bar{x}, \tau)$  vyjadřuje *poměrné zaplavení ložiskové mezery*<sup>8</sup> pokud  $\theta < 1$ . Jinak jde o bezrozměrnou hustotu

$$\theta = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.62)$$

kde  $\rho = \rho(\bar{s}, \bar{x}, \tau)$  je hustota oleje v části filmu bez kavitace a  $\rho_c$  je hustota oleje při saturačním tlaku. Bezrozměrné veličiny  $\bar{s}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{h}$  a  $\tau$  jsou dány transformačními vztahy (3.38) a (3.41). Parametr  $\bar{K}$  je bezrozměrný modul objemové stlačitelnosti maziva daný rovností

$$\bar{K} = \frac{K r}{\mu (u_j + u_s)} \left( \frac{c_r}{r} \right)^2, \quad (3.63)$$

<sup>8</sup> Anglicky *fill ratio* nebo též *fractional film content*.

ve které  $K$  je modul objemové stlačitelnosti maziva. Parametr  $\mathcal{B}$  v Elrodově univerzální rovnici (3.61) je tzv. *přepínací funkce*<sup>9</sup>, která zajišťuje, že tlakový gradient v oblastech s kavitací je nulový. Přepínací funkci  $\mathcal{B}$  lze zapsat následujícím způsobem:

$$\mathcal{B} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \theta \geq 1, \\ 0 & \text{pro } \theta < 1. \end{cases} \quad (3.64)$$

Parametr  $\mathcal{K}$  v rovnici (3.61) je *součinitel rychlosti olejového filmu*<sup>10</sup>, který je podobně jako přepínací funkce  $\mathcal{B}$  daný po částech (Brewer, 1986)

$$\mathcal{K} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \theta \geq 1, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_p}{\mu}\right)^{-1} & \text{pro } \theta < 1. \end{cases} \quad (3.65)$$

přičemž  $\mu_p$  je dynamická viskozita plynu, který vyplňuje kavity.

### 3.4.4 Reynoldsova rovnice pro ložiska s drsnými kluznými povrchy

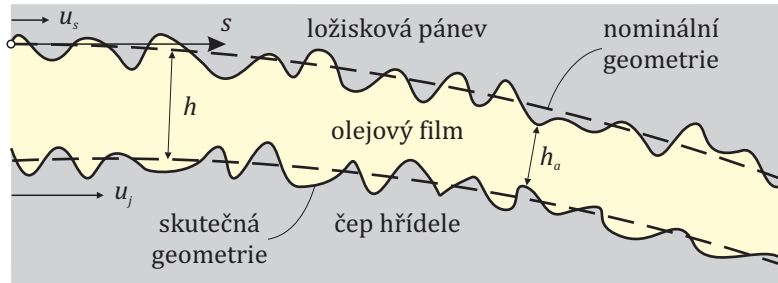
Reálné povrchy ložiskových pánví a čepů nejsou dokonale hladké ani dokonale kruhové a v případech, kdy je ložisková mezera velmi malá nebo dochází ke kontaktu mezi kluznými plochami, ovlivňuje skutečná geometrie hydrodynamický tlak v ložiskové mezeře. V literatuře nejrozšířenější tvar Reynoldsovy rovnice respektující drsnost kluzných ploch podrobně rozebírají např. Patir a Cheng (1979); Prat et al. (2002) a Offner et al. (2018). Zmíněná rovnice má tvar

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\phi_s h^3}{12\mu} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi_x h^3}{12\mu} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} \right) = \frac{u_j + u_s}{2} \frac{\partial \langle h_a \rangle}{\partial s} + \frac{(u_j - u_s) \sigma_c}{2} \frac{\partial \phi_c}{\partial s} + \frac{\partial \langle h_a \rangle}{\partial t}, \quad (3.66)$$

kde  $\phi_s$  a  $\phi_x$  jsou koeficienty Poiseuillova proudění ve směrech os  $s$  a  $x$  a  $\phi_c$  je koeficient laminárního Couettova proudění,  $\langle p \rangle$  je střední hodnota  $p$ ,  $h$  představuje nominální výšku ložiskové mezery a  $h_a$  skutečnou výšku ložiskové mezery, která zahrnuje drsnosti kluzných povrchů, jejich geometrické úchytky a případné deformace, viz obr. 3.7. Parametr  $\sigma_c$  je kompozitní drsnost ložiska, kterou Greenwood a Tripp (1970) definují jako

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_j^2 + \sigma_s^2}, \quad (3.67)$$

přičemž  $\sigma_j$  a  $\sigma_s$  jsou efektivní drsnosti povrchů čepu a ložiskové pánve.



Obrázek 3.7: Příčný řez částí ložiskové mezery nehladkého radiálního ložiska.

<sup>9</sup> Anglicky *switch(ing) function* nebo *Boolean function*.

<sup>10</sup> Anglicky *fluid film velocity factor*.

Jednotlivé koeficienty proudění z rovnice (3.66) jsou funkcemi  $h = h(s, x, t)$  a  $h_a = h_a(s, x, t)$  a je možné je analyticky vyjádřit jen ve speciálních případech (Prat et al., 2002). Často se tedy počítají numericky (Offner et al., 2018) nebo odhadují pomocí aproximativních empirických funkcí (Patir a Cheng, 1979). V limitním případě pro koeficienty proudění platí (Patir a Cheng, 1979)

$$\lim_{\frac{h}{\sigma_c} \rightarrow \infty} \phi_s = 1, \quad \lim_{\frac{h}{\sigma_c} \rightarrow \infty} \phi_x = 1, \quad \lim_{\frac{h}{\sigma_c} \rightarrow \infty} \phi_c = 0 \quad (3.68)$$

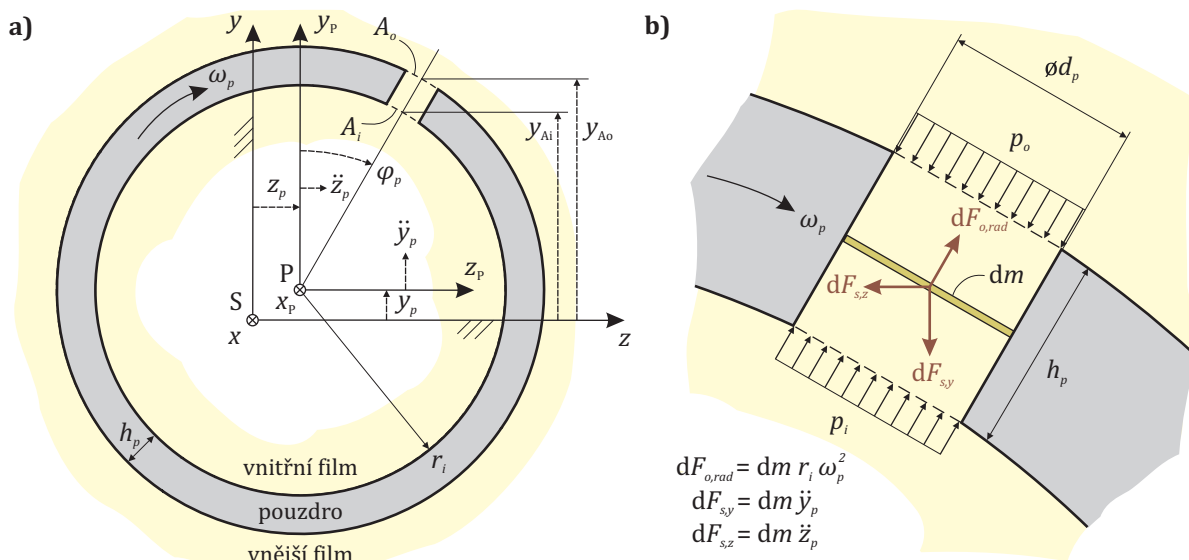
a Reynoldsova rovnice (3.66) nabývá stejného tvaru jako rovnice (3.27), která popisuje hydrodynamický tlak v ložisku s hladkými kluznými povrchy.

### 3.5 Vliv plovoucího pouzdra na hydrodynamické mazání

Radiální ložiska se dvěma olejovými filmy používaná pro uložení rotorů turbodmychadel jsou specifická tím, že zásobování vnitřního filmu olejem je realizováno mazacími otvory v plovoucím pouzdru. Kromě toho jsou vlastnosti obou olejových filmů ovlivněny úhlovou rychlostí pouzdra, která je dána rovnováhou třecích sil působících na vnitřním a vnějším povrchu pouzdra (Nguyen-Schäfer, 2012).

#### 3.5.1 Proudění oleje mazacím otvorem

Proudění oleje mazacím otvorem je diskutováno na příkladu plovoucího pouzdra tloušťky  $h_p$  s jedním kruhovým mazacím otvorem o průměru  $d_p$ , viz obr. 3.8a. Proudění v případných dalších mazacích otvorech se řídí stejnými zákony, je ale třeba uvažovat, že jednotlivé mazací otvory svírají se svislou osou  $y_p$  různé úhly.



**Obrázek 3.8:** Geometrické parametry plovoucího pouzdra s jedním mazacím otvorem a souřadnice určující polohu pouzdra a) a setrvačné síly působící na elementární objem vyjmutý z mazacího otvoru b).

Předpokládejme, že proudění oleje mazacím otvorem je stabilizované, otvor je plně zatopen a proudící olej je nestlačitelná kapalina. První dvě podmínky jsou poměrně přísné a lze očekávat, že pokud se mazací otvor bude nacházet v oblasti, kde dochází v jednom nebo obou filmech ke kavitaci, nebudou tyto podmínky splněny. Respektování těchto podmínek nicméně umožňuje modelovat proudění mazacím otvorem pomocí Bernoulliho rovnice, zatímco v obecnějším případě by bylo nutné použít Navierovy-Stokesovy rovnice. Dle Bernoulliho rovnice platí v libovolném průřezu kolmém na osu mazacího otvoru rovnost (Spurk a Aksel, 2008)

$$\frac{1}{2} \rho \langle v \rangle^2 + p + \rho \mathcal{U} = \text{konst.}, \quad (3.69)$$

kde  $\langle v \rangle$  je střední rychlost proudění oleje průřezem a  $\mathcal{U}$  je potenciál vnějšího konzervativního silového pole, který je funkcí polohy průřezu. Za předpokladu, že se plovoucí pouzdro nachází v homogenním gravitačním poli, platí pro průřezy  $A_o$  a  $A_i$  nacházející se na vnějším a vnitřním konci mazacího otvoru, viz obr. 3.8a, rovnost

$$\frac{1}{2} \rho \langle v_o \rangle^2 + p_o + \rho g y_o = \frac{1}{2} \rho \langle v_i \rangle^2 + p_i + \rho g y_i, \quad (3.70)$$

ve které indexy  $o$  a  $i$  označují průřez, ve kterém je indexovaná veličina sledována. Protože je olej považován za nestlačitelný a mazací otvor je plně zaplaven, platí pro libovolný průřez také rovnice kontinuity

$$A \langle v \rangle = \text{konst.}, \quad (3.71)$$

ze které vyplývá, že pokud platí  $A_o = A_i = A$ , pak jsou rychlosti  $\langle v_o \rangle$  a  $\langle v_i \rangle$  totožné. Díky tomu lze rovnost (3.70) upravit do tvaru

$$p_o - p_i + \rho g (y_o - y_i) = 0, \quad (3.72)$$

který je možné dále zjednodušit na

$$p_o - p_i + \rho g h_p \cos \varphi_p = 0. \quad (3.73)$$

Rovnost (3.73) lze použít jako vazební podmínku při výpočtu hydrodynamického tlaku ve vnějším a vnitřním olejovém filmu radiálního kluzného ložiska s plovoucím pouzdem.

### Vliv setrvačných sil na proudění mazacím otvorem

Rovnost (3.73) platí v případě, že se mazací otvor nepohybuje, a jde tedy pouze o hrubý odhad vlastností proudění mezi vnějším a vnitřním olejovým filmem ložiska. Ve skutečnosti je olej proudící skrz mazací otvor unášen rotujícím a kmitajícím pouzdem a působí na něj setrvačné síly zobrazené na obr. 3.8b.

Proudění mazacím otvorem probíhá dominantně v radiálním směru a proto bude ovlivněno především radiálními složkami setrvačných sil. Za předpokladu, že hmotnost  $dm$  elementárního objemu vyjmutého z mazacího otvoru v souladu s obr. 3.8b je

$$dm = \rho A dr', \quad (3.74)$$

kde  $dr'$  je diferenciál v radiální souřadnice  $r'$ , lze celkovou velikost setrvačných sil působících na olej v mazacím otvorem v radiálním směru vyjádřit následovně:

$$F_{o,rad} = \int_{r_i}^{r_i+h_p} \rho A r' \omega_p^2 dr' = \frac{1}{2} \rho A \left[ (r_i + h_p)^2 - r_i^2 \right] \omega_p^2 = \frac{1}{2} \rho A (h_p^2 + 2 r_i h_p) \omega_p^2, \quad (3.75)$$

$$F_{s,rad} = \int_{r_i}^{r_i+h_p} \rho A \ddot{y}_p dr' \cos \varphi_p + \int_{r_i}^{r_i+h_p} \rho A \ddot{z}_p dr' \sin \varphi_p = \rho A h_p (\ddot{y}_p \cos \varphi_p + \ddot{z}_p \sin \varphi_p). \quad (3.76)$$

Symbol  $\ddot{\phantom{x}}$  ve výše uvedených vztazích označuje druhou derivaci podle času  $t$ . Síla  $F_{o,rad}$  ze vztahu (3.75) působí v kladném směru, tedy ve směru od osy otáčení pouzdra, a omezuje tedy průtok z vnějšího filmu do vnitřního. Síla  $F_{s,rad}$  ze vztahu (3.76) působí v záporném směru. Vzhledem ke směru působení způsobují síly  $F_{o,rad}$  a  $F_{s,rad}$  tlakové ztráty, které lze dosadit do rovnice (3.73) následujícím způsobem

$$\left(p_o - \frac{F_{o,rad}}{A}\right) - \left(p_i - \frac{F_{s,rad}}{A}\right) + \rho g h_p \cos \varphi_p = 0. \quad (3.77)$$

Po dosazení vztahů (3.75) a (3.76) do rovnosti (3.77) dostáváme

$$p_o - p_i - \frac{1}{2} \rho (h_p^2 + 2 r_i h_p) \omega_p^2 + \rho h_p (\ddot{y}_p \cos \varphi_p + \ddot{z}_p \sin \varphi_p + g \cos \varphi_p) = 0. \quad (3.78)$$

Tlakové ztráty v rovnosti (3.78) zapříčiněné rotací pouzdra lze odvodit i jiným způsobem než pomocí podmínek silové rovnováhy. Např. [Spurk a Aksel \(2008\)](#) ukazují odvození Bernoulliho rovnice v rotujícím souřadnicovém systému a dostávají se ke stejnému výsledku, jako je uveden výše. Rovnost (3.78) je možné použít jako vazební podmínku při výpočtu hydrodynamického tlaku ve vnějším a vnitřním olejovém filmu radiálního kluzného ložiska s rotujícím a kmitajícím plovoucím pouzdrém.

### Vliv třecích sil na proudění mazacím otvorem

Kromě setrvačných sil způsobují tlakové ztráty rovněž síly třecí. Bernoulliho rovnice respektující tyto ztráty se uvádí ve tvaru ([Elger et al., 2016](#))

$$\frac{1}{2} \rho \langle v_o \rangle^2 + p_o + \rho g y_o = \frac{1}{2} \rho \langle v_i \rangle^2 + p_i + \rho g y_i + \Delta p_f + \Delta p_m, \quad (3.79)$$

kde  $\Delta p_f$  jsou tlakové ztráty způsobené třením a  $\Delta p_m$  jsou místní tlakové ztráty způsobené singularitami v potrubí<sup>11</sup>. Místní tlakové ztráty jsou způsobeny lokálními překážkami jako jsou kolena, uzávěry a rozšíření nebo zúžení potrubí, které se v mazacích otvorech plovoucích pouzder nenachází. Proto lze tyto ztráty zanedbat. Tlakové ztráty  $\Delta p_f$  způsobené třením lze odhadnout s využitím fenomenologické Darcyho-Weisbachovy rovnice ([Elger et al., 2016](#))

$$\Delta p_f = f_D \frac{\rho}{2} \frac{h_p \langle v \rangle^2}{d_p}, \quad (3.80)$$

v níž  $f_D$  je Darcyho součinitel ztráty třením a délka  $h_p$  a průměr potrubí  $d_p$  jsou uvedeny tak, aby odpovídaly situaci na obr. 3.8. Darcyho součinitel  $f_D$  závisí na drsnosti povrchu mazacího otvoru a Reynoldsově číslu  $Re$ , které se pro proudění v potrubí kruhového průřezu vypočítá pomocí vztahu

$$Re = \frac{\langle v \rangle \rho d_p}{\mu}. \quad (3.81)$$

<sup>11</sup> Anglicky *minor losses*.

Pro hladké povrchy a  $Re < 2320$  je Darcyho součinitel ztráty třením  $f_D$  nepřímě úměrný Reynoldsovu číslu a lze ho aproximovat vztahem (Elger et al., 2016)

$$f_D = \frac{64}{Re}. \quad (3.82)$$

Dosazením vztahů (3.81) a (3.82) do Darcyho-Weisbachovy rovnice (3.80) je tlaková ztráta  $\Delta p_f$  vyjádřena jako funkce geometrie mazacího otvoru, dynamické viskozity oleje a rychlosti proudění oleje otvorem

$$\Delta p_f = 32 \mu \frac{h_p \langle v \rangle}{d_p^2}. \quad (3.83)$$

Posledně jmenovaný parametr, střední rychlost proudění  $\langle v \rangle$ , je neznámý a vzhledem k tomu, že při odvozování Reynoldsovy rovnice nebyl tok oleje v radiálním směru uvažován, není možné tuto rovnici pro výpočet parametru  $\langle v \rangle$  použít. V případě laminárního proudění lze ale  $\langle v \rangle$  odhadnout z tlakového spádu pomocí Hagenova-Poiseuillova zákona, který Spurk a Aksel (2008) uvádí ve tvaru

$$Q = \frac{\pi d_p^4 \Delta p}{128 \mu h_p}, \quad (3.84)$$

kde  $Q$  je objemový tok potrubím a  $\Delta p$  je tlakový spád, tedy rozdíl tlaků na začátku a na konci mazacího otvoru. Střední rychlost proudění  $\langle v \rangle$  je podílem objemového toku  $Q$  a průřezu  $A$  a lze jí tedy vyjádřit vztahem

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{1}{4} \pi d_p^2} = \frac{d_p^2 \Delta p}{512 \mu h_p}. \quad (3.85)$$

Tlakový spád  $\Delta p$  závisí na tlakových ztrátách způsobených třením a je tedy nutné nalézt ho iterativně. Nejprve se vypočítá hydrodynamický tlak ve vnějším a vnitřním filmu s vazebními rovnicemi bez tření, určí se tlakové ztráty způsobené třením a úloha se řeší se třením.

Protože délka mazacího otvoru  $h_p$  je v porovnání s jeho průměrem  $d_p$  poměrně malá, lze očekávat, že Reynoldsovo číslo  $Re$  může být vyšší než 2320. V takových případech nelze Darcyho součinitel  $f_D$  vyjádřit explicitně a v intervalu  $2320 < Re < 4000$ , ve kterém je proudění mazacím otvorem přechodové, navíc ani jednoznačně (Spurk a Aksel, 2008; Elger et al., 2016). Pokud je splněna nerovnost  $Re > 4000$ , je proudění turbulentní a existuje celá řada fenomenologických rovnic, které platí v různých intervalech  $Re$ . Jednou z těchto rovnic je Kármánova-Prandtllova rovnice (Elger et al., 2016):

$$\frac{1}{\sqrt{f_D}} = -1,93 \ln \left( \frac{1,9}{Re \sqrt{f_D}} \right). \quad (3.86)$$

Pro střední rychlost turbulentního proudění  $\langle v \rangle$  Hagenovův-Poiseuillov zákon (3.84) neplatí a  $\langle v \rangle$  je nutné iterativně vypočítat z Bernoulliho rovnice (3.79). Vzhledem k tomu, že kromě Bernoulliho rovnice se řeší ještě Reynoldsova rovnice ve dvou olejových filmech, je iterativní proces časově velmi náročný, což je umocněno ne vždy dobrou konvergencí. Především v případech, kdy se řeší nelineární kmity celého rotoru podepřeného ložisky s plovoucím pouzdrém, lze tedy doporučit zanedbání třecích sil na proudění mazacími otvory nebo nahrazení Darcyho-Weisbachovy rovnice (3.80) jiným empirickým vztahem.



### 3.5.2 Úhlová rychlost plovoucího pouzdra

Úhlová rychlost plovoucího pouzdra  $\omega_p$  má sice velmi malý vliv na kmitání rotoru turbodmychadla (Schweizer a Sievert, 2009), ale určuje rychlosti hraničních povrchů v Reynoldsově rovnici a je tedy důležité ji určit pro výpočet hydrodynamického tlaku a dalších tribologických parametrů kluzného ložiska (Nguyen-Schäfer, 2012).

Úhlové zrychlení plovoucího pouzdra  $\ddot{\varphi}_p = \ddot{\varphi}_p(t)$  se řídí pohybovou rovnicí (Nguyen-Schäfer, 2012; Dyk a Smolík et al., 2018)

$$I_{0,p} \ddot{\varphi}_p = M_{fric,i} + M_{fric,o}, \quad (3.87)$$

kde  $I_{0,p}$  je moment setrvačnosti k ose rotace pouzdra a  $M_{fric,i}$  a  $M_{fric,o}$  jsou momenty způsobené třecími silami ve vnitřním a ve vnějším olejovém filmu. Obecně lze třecí momenty vypočítat z třecích sil získaných integrací rovnice (3.34a). Za předpokladu, že natáčení čepu hřídele a plovoucího pouzdra kolem příčných os je zanedbatelné, lze třecí momenty vyjádřit analyticky pomocí vztahů (Dyk a Smolík et al., 2018)

$$M_{fric,i} = \frac{2 \pi \mu_i r_i^3 l_i (\omega_0 - \dot{\varphi}_p)}{c_{r,i} \sqrt{1 - (\varepsilon_j^{rel})^2}} + \frac{y_j^{rel} F_{hd,i,z} - z_j^{rel} F_{hd,i,y}}{2}, \quad (3.88)$$

$$M_{fric,o} = -\frac{2 \pi \mu_o r_o^3 l_o \dot{\varphi}_p}{c_{r,o} \sqrt{1 - \varepsilon_p^2}} + \frac{y_p F_{hd,o,z} - z_p F_{hd,o,y}}{2}, \quad (3.89)$$

ve kterých je použito označení geometrických parametrů ložiska z obr. 3.1b,  $F_{hd,i,x}$  a  $F_{hd,o,x}$  jsou složky hydrodynamických sil ve směru  $X$ , které jsou způsobeny hydrodynamickým tlakem ve vnitřním filmu  $i$  a ve vnějším filmu  $o$ . Relativní excentricity  $\varepsilon_j^{rel}$  a  $\varepsilon_p$  jsou definovány následovně

$$\varepsilon_j^{rel} = \frac{e_j^{rel}}{c_i} = \frac{\sqrt{(y_j^{rel})^2 + (z_j^{rel})^2}}{c_i}, \quad \varepsilon_p = \frac{e_p}{c_o} = \frac{\sqrt{y_p^2 + z_p^2}}{c_o}, \quad (3.90)$$

přičemž souřadnice použité ve výše uvedených vztazích jsou vyznačeny v obr. 3.1b.

V případě ložisek s malými vůlemi má rozhodující vliv na velikost třecích momentů teplota oleje, která určuje nejenom jeho dynamickou viskozitu, ale i na rozměry ložiska. Radiální vůle  $c_{r,i}$  ze vztahu (3.88) a radiální vůle  $c_{r,o}$  ze vztahu (3.89) je tedy vhodné modelovat jako funkce teploty oleje, potažmo úhlové rychlosti čepu hřídele a povrchových teplot čepu a ložiskové pánve. Vhodný matematický model se soustředěnými parametry odvodili Trippett a Li (1984). Jimi publikované výsledky ukazují dobrou shodu s experimentálními daty. Model je nicméně limitován předpokladem, že čep hřídele a plovoucí pouzdro jsou koncentrické s ložiskovou pánví, což model limituje v případech, kdy se v jednom nebo v obou filmech rozvine nestabilita. Pak je třeba pro predikci radiálních vůlí a viskozit použít termo-hydrodynamický model (Stachowiak a Batchelor, 2013).

## 3.6 Stanovení provozních vůlí radiálních ložisek

Rotor i ložisková skříň turbodmychadla se při provozu zahřívají a dochází k jejich teplotním deformacím. Teplota plovoucího pouzdra je dominantně dána přestupem tepla z olejových filmů (Trippett a Li, 1984; Nguyen-Schäfer, 2012; Bukovnik a Smolík et al., 2017). Provozní (skutečné)



vůle ložisek jsou určeny teplotními deformacemi jednotlivých součástí a liší se od nominálních (klidových) rozměrů.

V ideálním případě se provozní teplota částí turbodmychadla určuje pomocí 3D CFD simulace následované 3D analýzou teplotních deformací s využitím MKP (Kořán, 2013; Bukovník a Smolík et al., 2017). Výpočtový model použitý pro CFD simulaci by měl zahrnovat nejen rotor a skříň turbodmychadla, ale také olejové filmy respektující třecí ztráty a plovoucí pouzdra. Kromě provozních vůlí jsou tak získána i pole popisující teplotu olejových filmů, ze kterých mohou být určena pole viskozit.

Výše uvedená předkalkulace vůlí a viskozity je nicméně časově náročná. Alternativně lze provozní vůle odhadnout s využitím modelu se soustředěnými parametry, které namísto teplotních polí využívají efektivní teploty. Jak ukázali Trippett a Li (1984), takto získané výsledky dobře korespondují s experimenty i v případě analýzy ložiska s plovoucím pouzdrém. Při implementaci modelu se soustředěnými parametry předpokládáme, že se teplotní deformace řídí lineárním vztahem pro teplotní délkovou roztažnost

$$l(T) = l_{\text{nom}} [1 + \alpha (T - T_{\text{ref}})], \quad (3.91)$$

ve kterém  $l(T)$  je délka tělesa při teplotě  $T$ ,  $l_{\text{nom}}$  je nominální délka tělesa při referenční teplotě  $T_{\text{ref}}$  a  $\alpha_i$  je teplotní koeficient roztažnosti materiálu, ze kterého je těleso  $i$  vyrobeno. Dále předpokládáme, že vnější průměr čepu hřídele i vnitřní průměr ložiskové pánve při zahřívání zvětšují. Vztahy pro určení provozních vůlí ložiska s plovoucím pouzdrém lze potom odvodit z (3.91) ve tvaru

$$c_{r,i}^{\text{prov}} = c_{r,i}^{\text{nom}} [1 + \alpha_j (T_j - T_{\text{ref}})] + r_i [\alpha_p (T_p - T_{\text{ref}}) - \alpha_j (T_j - T_{\text{ref}})], \quad (3.92)$$

$$c_{r,o}^{\text{prov}} = c_{r,o}^{\text{nom}} [1 + \alpha_p (T_p - T_{\text{ref}})] + r_o [\alpha_s (T_s - T_{\text{ref}}) - \alpha_p (T_p - T_{\text{ref}})], \quad (3.93)$$

kde  $c_{r,i}^{\text{nom}}$ ,  $c_{r,o}^{\text{nom}}$  jsou nominální radiální vůle vnitřního a vnějšího filmu při teplotě  $T_{\text{ref}}$  a  $r_i$ ,  $r_o$  jsou nominální poloměry vnitřního a vnějšího filmu při teplotě  $T_{\text{ref}}$ . Konstanty  $\alpha_j$ ,  $\alpha_p$ ,  $\alpha_s$  jsou teplotní koeficienty roztažnosti materiálu čepu hřídele, plovoucího pouzdra a ložiskové pánve a  $T_j$ ,  $T_p$ ,  $T_s$  jsou efektivní teploty čepu hřídele, plovoucího pouzdra a ložiskové pánve. Teplotu  $T_p$  aproximují Trippett a Li (1984) vztahem

$$T_p \approx \frac{T_i + T_o}{2}, \quad (3.94)$$

kde  $T_i$ ,  $T_o$  jsou efektivní teploty vnitřního a vnějšího olejového filmu, které závisí na teplotě mazacího oleje, teplotách čepu hřídele a ložiskové pánve a třecích ztrátách. I v tomto případě je tedy nutné použít CFD analýzu nebo měření alespoň pro odhad teplot  $T_s$  a  $T_j$ .

## 4 Výpočet hydrodynamické síly

Ve druhé kapitole byly uvedeny dva možné přístupy umožňující zahrnout síly v radiálních kluzných ložiskách do pohybových rovnic popisujících ohybové kmitání rotoru turbodmychadla. Jednalo se o linearizovaný model (2.42), ve kterém jsou síly v ložisku nahrazeny lineárními dynamickými koeficienty, a o nelineární model (2.57), při jehož použití je nutné vypočítat síly v ložisku v každém časovém kroku integrace pohybové rovnice.

Síly přenášené kluznými ložisky se dělí na hydrodynamické, které jsou dány hydrodynamickým tlakem v olejovém filmu, a elastické, které jsou zapříčiněny deformacemi kluzných povrchů a kontakty mezi těmito povrchy. Tato kapitola se zabývá výpočty hydrodynamických sil v kluzných ložiskách.

Pro stanovení sil je nejprve nutné najít řešení Reynoldsovy rovnice. Různé aproximativní analytické a numerické postupy jsou diskutovány v první části kapitoly. V další části kapitoly jsou uvedeny vztahy pro výpočet okamžitých hydrodynamických sil přenášených olejovým filmem a je ukázán postup umožňující linearizaci těchto sil.

### 4.1 Řešení Reynoldsovy rovnice

Přestože analytické řešení Reynoldsovy rovnice v uzavřeném tvaru odvodili Sfyris a Chasalevris v roce 2012, nejčastěji se v úlohách výpočtového hydrodynamického mazání stále využívají numerické metody, především metoda konečných diferencí (Obeid a Yeiser et al., 2013; Stachowiak a Batchelor, 2013; Rendl, 2017), metoda konečných prvků (Chandra a Sinhasan, 1987; Larsen a Santos, 2015; Offner et al., 2018) a metoda konečných objemů (Prata et al., 1988; Profito et al., 2015). Popularita numerických metod je zapříčiněna nejen výpočetním výkonem současných počítačů, ale i jejich použitelností v obecných úlohách. Analytické řešení je totiž nutné odvodit pro předem definovaný tvar kluzných ploch a pro dané okrajové podmínky (Stachowiak a Batchelor, 2013).

#### 4.1.1 Aproximativní analytické řešení pro krátká ložiska

V problémech nelineární dynamiky jsou velmi populární aproximativní analytická řešení. Při odvozování aproximativního řešení se využívá skutečnosti, že za určitých podmínek je možné zjednodušit tvar Reynoldsovy rovnice. Nejznámější aproximativní řešení postihují případy *nekonečně dlouhého ložiska* (Sommerfeld, 1904) a *nekonečně krátkého ložiska* (Ocvirk, 1952).

Pro nekonečně dlouhé ložisko platí  $\eta \rightarrow \infty$  (San Andrés, 2010). Poměr délky a průměru ložiska  $\eta$  je definován v podkapitole 3.3. Pro uvedené hodnoty  $\eta$  je druhý člen v bezrozměrné Reynoldsově rovnici (3.42) nulový a hydrodynamický tlak je popsán rovnicí (Zapoměl, 2007)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial s} \right) = 6(u_j + u_s) \frac{\partial(\rho h)}{\partial s} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Pro nekonečně krátké ložisko naopak platí  $\eta \rightarrow 0$  (San Andrés, 2010) a Reynoldsova

rovnice přechází do tvaru (Krämer, 1993; Zapoměl, 2007)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 6(u_j + u_s) \frac{\partial(\rho h)}{\partial s} + 12 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t}. \quad (4.2)$$

V inženýrských aplikacích se Reynoldsovy rovnice pro nekonečně dlouhé a nekonečně krátké ložisko používají i v nelimitních případech obvykle označovaných výrazy dlouhé a krátké ložisko. Definice dlouhého a krátkého ložiska v odborné literatuře není jednotná. Kritéria, která jsou nejčastěji uváděná v současné odborné literatuře, jsou shrnuta v tab. 4.1. Ze srovnání vyplývá, že existuje určitý interval  $\eta$  – např. dle San Andrés (2010) je to  $\eta \in (0,5, 2)$  – ve kterém ložisko nelze považovat za krátké ani za dlouhé. Takové ložisko se obvykle označuje jako *konečné ložisko* nebo *ložisko konečné délky*.

Ložiska turbodmychadel nejčastěji spadají právě do kategorie konečných ložisek, ale pro většinu z nich platí  $\eta < 1$ , což je naznačeno v tab. 3.1 a diskutováno Nguyen-Schäferem (2012). Pro výpočet hydrodynamických sil v kluzných ložiskách turbodmychadel je tedy podstatnější nalezení analytického řešení Reynoldsovy rovnice pro nekonečně krátké ložisko (4.2) než Reynoldsovy rovnice pro nekonečně dlouhé ložisko.

Za předpokladu, že dynamická viskozita oleje  $\mu$  a hustota oleje  $\rho$  jsou konstantní a v souladu s rovností (3.3) je ložisková mezera  $h$  funkcí pouze obvodové souřadnice  $s$ , lze Reynoldsovu rovnici pro nekonečně krátké ložisko zapsat ve tvaru (Zapoměl, 2007)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \mathcal{A}, \quad \text{kde} \quad \mathcal{A} = \frac{6\mu(u_j + u_s)}{h^3} \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{12\mu}{h^3} \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Po dvojité integraci rovnosti (4.3) podle podélné souřadnice  $x$  lze hydrodynamický tlak  $p$  v nekonečně krátkém ložisku vyjádřit pomocí rovnosti

$$p = \frac{1}{2} \mathcal{A} x^2 + C_1 x + C_2, \quad (4.4)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou integrační konstanty, jejichž velikost lze určit z okrajových podmínek. Pokud přívod oleje do ložiska neovlivňuje rozložení hydrodynamického tlaku a hydrodynamický tlak na čelech olejového filmu je roven tlaku ve vnějším okolí ložiska  $p_a$ , což lze vyjádřit rovnostmi

$$p(s, -l/2) = p_a, \quad p(s, l/2) = p_a, \quad (4.5)$$

nabývají integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$  hodnot

$$C_1 = 0, \quad C_2 = p_a - \frac{1}{8} \mathcal{A} l^2. \quad (4.6)$$

Kritérium pro krátké ložisko	Kritérium pro dlouhé ložisko	Autor
$r^2 \gg l^2$	$r^2 \ll l^2$	Hirani (2012)
$\eta \leq 1$	$\eta \geq 1$	Nguyen-Schäfer (2012)
$\eta \leq 0,5$	$\eta \geq 2^\dagger$	San Andrés (2010)
$\eta < 0,33$	$\eta > 3$	Stachowiak a Batchelor (2013)
$\eta \leq 0,25$	$\eta \geq 0,25^\dagger$	Zapoměl (2007)

<sup>†</sup> Autor navíc uvádí, že za dlouhé může být považováno i ložisko, které je na svých čelech dobře těsněno.

**Tabulka 4.1:** Kritéria pro dlouhá a krátká ložiska napříč odbornou literaturou. V této práci je použito kritérium dle San Andrés (2010).

Po dosazení (4.6) do (4.4) nabývá řešení Reynoldsovy rovnice (4.2) tvaru

$$p = \frac{1}{2} \mathcal{A} \left( x^2 - \frac{l^2}{4} \right) + p_a, \quad (4.7)$$

kteřý popisuje tlakové pole v ložiskové mezeře libovolného nekonečně krátkého kluzného ložiska se středovým úhlem  $2\pi$  (Zapoměl, 2007). Řešení (4.7) v určitých oblastech olejového filmu predikuje záporný hydrodynamický tlak. V těchto oblastech ale ve skutečnosti dochází ke kavitaci a proto je vhodné rovnost (4.7) doplnit alespoň zjednodušeným modelem kavitace, který je vyjádřen nerovností (3.60).

Funkci popisující ložiskovou mezeru  $h$  mnohých typů ložisek je možné za předpokladu, že čep hřídele i ložisková pánev mají nedeformovatelné průřezy, vyjádřit analyticky. Pro ložiska kruhových průřezů, která se používají pro uložení rotorů turbodmychadel, platí vztah (3.3)

$$h = c_r - e \cos \left( \frac{s}{r} - \phi \right). \quad (4.8)$$

Derivace  $h$  podle obvodové souřadnice  $s$  a času  $t$  lze pak vyjádřit pomocí rovností

$$\frac{\partial h}{\partial s} = e \sin \left( \frac{s}{r} - \phi \right) \frac{1}{r}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\dot{e} \cos \left( \frac{s}{r} - \phi \right) + e \sin \left( \frac{s}{r} - \phi \right) (-\dot{\phi}). \quad (4.10)$$

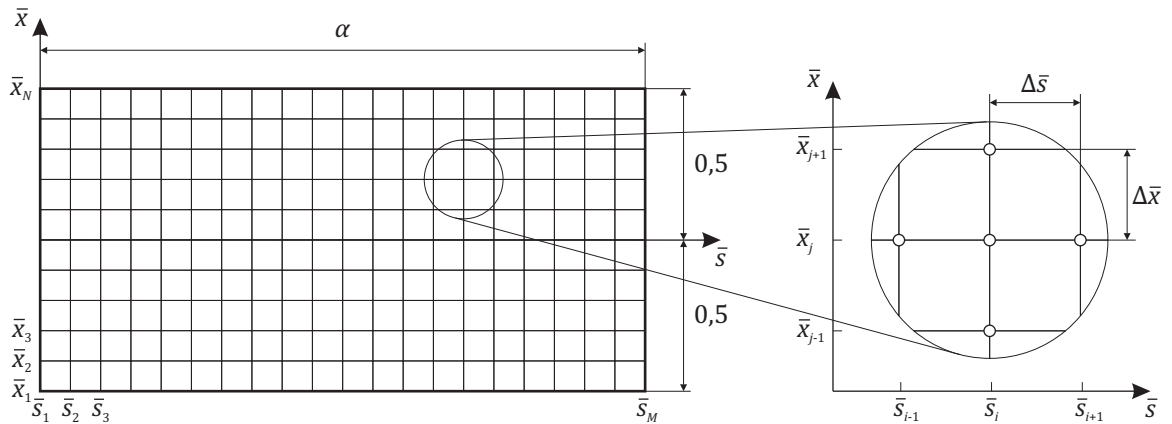
Po dosazení (4.9) a (4.10) do (4.7) se řešení Reynoldsovy rovnice (4.2) zjednoduší do tvaru

$$p = \frac{3\mu}{h^3} \left[ \left( \frac{u_j + u_s}{r} - 2\dot{\phi} \right) e \sin \left( \frac{s}{r} - \phi \right) - 2\dot{e} \cos \left( \frac{s}{r} - \phi \right) \right] \left[ x^2 - \frac{l^2}{4} \right] + p_a, \quad (4.11)$$

kteřý popisuje tlakové pole v ložiskové mezeře nekonečně krátkého kruhového ložiska.

#### 4.1.2 Numerické řešení s využitím metody konečných diferencí

Metoda konečných diferencí (MKD) je postavena na aproximaci parciálních derivací v Reynoldsově rovnici konečnými diferencemi ve zvolených bodech olejového filmu. Těmito bodům se obvykle říká uzly a soubor všech uzlů tvoří výpočtovou síť. Při řešení Reynoldsovy rovnice



Obrázek 4.1: Strukturovaná pravidelná síť o  $M \times N$  uzlech pokrývající kluznou plochu.

metodou konečných diferencí se nejčastěji volí strukturovaná pravidelná síť o  $M \times N$  bodech, která je ukázána na obr. 4.1. Tato síť pokrývá oblast  $\langle 0, \alpha \rangle \times \langle -1/2, 1/2 \rangle$ , na které je hledáno řešení bezrozměrné Reynoldsovy rovnice (3.42), která je v oddíle 3.4.1 odvozena ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{r^2}{l^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) = 6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}. \quad (4.12)$$

Ve vnitřních uzlech sítě z obr. 4.1 se prostorové parciální derivace nejčastěji nahrazují centrálními (středovými) diferencemi (Hirani, 2012; Stachowiak a Batchelor, 2013). Například parciální derivace  $\partial \bar{p} / \partial \bar{s}$  je v uzlu sítě o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  aproximována způsobem ukázaným na obr. 4.2. Uvedenou aproximaci lze vyjádřit následujícím vztahem

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right|_{\bar{s}_i, \bar{x}_j} \approx \frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{2 \Delta \bar{s}}, \quad (4.13)$$

kde  $\bar{p}_{i,j}$  označuje bezrozměrný hydrodynamický tlak  $\bar{p}$  v uzlu o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$ .

Druhou parciální derivaci  $\partial^2 \bar{p} / \partial \bar{s}^2$  v uzlu o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  je možné vyjádřit s využitím aproximačních vztahů pro první parciální derivace  $\partial \bar{p} / \partial \bar{s}$  v bodech o souřadnicích  $(\bar{s}_i - \Delta \bar{s} / 2, \bar{x}_j)$  a  $(\bar{s}_i + \Delta \bar{s} / 2, \bar{x}_j)$  způsobem ukázaným na obr. 4.3. Příslušná aproximační formule má tvar

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{s}^2} \right|_{\bar{s}_i, \bar{x}_j} \approx \frac{\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right|_{\bar{s}_i - \Delta \bar{s} / 2, \bar{x}_j} - \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right|_{\bar{s}_i + \Delta \bar{s} / 2, \bar{x}_j}}{\Delta \bar{s}}, \quad (4.14)$$

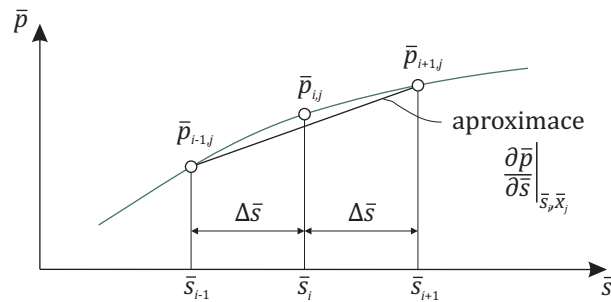
kde dílčí aproximační formule lze vyjádřit následovně

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right|_{\bar{s}_i - \Delta \bar{s} / 2, \bar{x}_j} \approx \frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{\Delta \bar{s}}, \quad \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right|_{\bar{s}_i + \Delta \bar{s} / 2, \bar{x}_j} \approx \frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i+1,j}}{\Delta \bar{s}}. \quad (4.15)$$

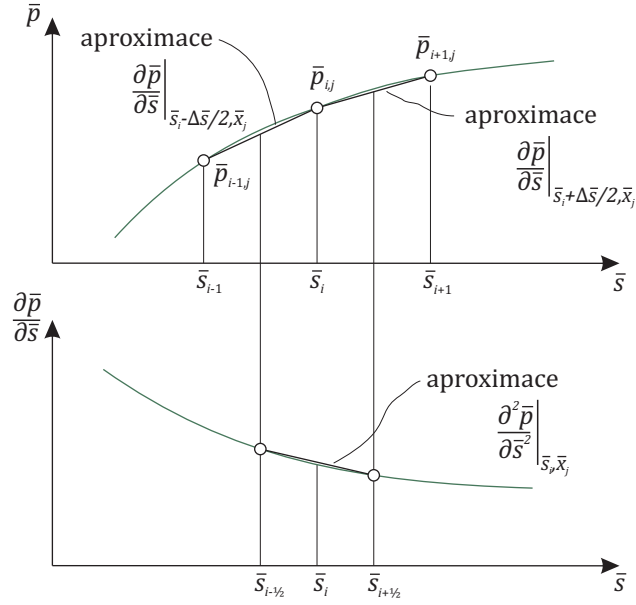
Po dosazení vztahů (4.15) do (4.14) je vyjádřena centrální diferenční formule

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{s}^2} \right|_{\bar{s}_i, \bar{x}_j} \approx \frac{\bar{p}_{i-1,j} - 2\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i+1,j}}{\Delta \bar{s}^2}, \quad (4.16)$$

která aproximuje druhou parciální derivaci  $\partial^2 \bar{p} / \partial \bar{s}^2$  v uzlu o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  pouze pomocí hodnot funkce  $\bar{p}$  v uzlech o souřadnicích  $(\bar{s}_{i-1}, \bar{x}_j)$ ,  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  a  $(\bar{s}_{i+1}, \bar{x}_j)$ .



**Obrázek 4.2:** Nahrazení parciální derivace  $\partial \bar{p} / \partial \bar{s}$  v bodě o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  centrální diferencí.



**Obrázek 4.3:** Nahrazení parciální derivace  $\partial^2 \bar{p} / \partial \bar{s}^2$  v bodě o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  centrální diferencí.

První tři členy v bezrozměrné Reynoldsově rovnici (4.12) lze s využitím vztahů (4.13) – (4.16) vyjádřit pomocí následujících aproximačních formulí:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} \right) \Bigg|_{\bar{s}_i, \bar{s}_j} \approx \frac{\frac{\bar{h}_{i-1/2,j}^3}{\bar{\mu}_{i-1/2,j}} \bar{p}_{i-1,j} - \left( \frac{\bar{h}_{i-1/2,j}^3}{\bar{\mu}_{i-1/2,j}} + \frac{\bar{h}_{i+1/2,j}^3}{\bar{\mu}_{i+1/2,j}} \right) \bar{p}_{i,j} + \frac{\bar{h}_{i+1/2,j}^3}{\bar{\mu}_{i+1/2,j}} \bar{p}_{i+1,j}}{\Delta \bar{s}^2}, \quad (4.17a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \right) \Bigg|_{\bar{s}_i, \bar{x}_j} \approx \frac{\frac{\bar{h}_{i,j-1/2}^3}{\bar{\mu}_{i,j-1/2}} \bar{p}_{i,j-1} - \left( \frac{\bar{h}_{i,j-1/2}^3}{\bar{\mu}_{i,j-1/2}} + \frac{\bar{h}_{i,j+1/2}^3}{\bar{\mu}_{i,j+1/2}} \right) \bar{p}_{i,j} + \frac{\bar{h}_{i,j+1/2}^3}{\bar{\mu}_{i,j+1/2}} \bar{p}_{i,j+1}}{\Delta \bar{x}^2}, \quad (4.17b)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \Bigg|_{\bar{s}_i, \bar{x}_j} \approx \frac{\bar{h}_{i+1,j} - \bar{h}_{i-1,j}}{2 \Delta \bar{s}}. \quad (4.17c)$$

Člen vyjadřující vliv stlačování filmu je možné aproximovat levostrannou diferencí formulí (Hirani, 2012; Stachowiak a Batchelor, 2013)

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau} \Bigg|_{\bar{s}_i, \bar{x}_j, \tau_k} \approx \frac{\bar{h}_{i,j,k} - \bar{h}_{i,j,k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}}, \quad (4.18)$$

ve které  $\tau_k$  je bezrozměrný čas na  $k$ -té časové hladině a  $\bar{h}_{i,j,k}$  je výška ložiskové mezery v uzlu o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  na  $k$ -té časové hladině. Je zřejmé, že časové hladiny od sebe nemusí dělit ekvidistantní časový krok. Po dosazení aproximačních vztahů (4.17) a (4.18) do (4.12) lze numerické řešení bezrozměrné Reynoldsovy rovnice ve vnitřním uzlu sítě o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  formálně vyjádřit vztahem (Zapoměl, 2007; Rendl, 2017)

$$a_{i,j} \bar{p}_{i-1,j} + b_{i,j} \bar{p}_{i,j-1} + c_{i,j} \bar{p}_{i,j} + d_{i,j} \bar{p}_{i+1,j} + e_{i,j} \bar{p}_{i,j+1} = f_{i,j}, \quad (4.19)$$

kde  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$ ,  $d_{i,j}$ ,  $e_{i,j}$  a  $f_{i,j}$  jsou reálné koeficienty, které závisí na parametrech  $\bar{h}$  a  $\bar{\mu}$ , na charakteristických rozměrech sítě  $\Delta\bar{x}$  a  $\Delta\bar{y}$ , na geometrii ložiska a na okrajových podmínkách. Vztah (4.19) formálně platí pro všech  $(M-2)(N-2)$  vnitřních uzlů sítě z obr. 4.1.

Při použití aproximačních vztahů (4.17a) a (4.17b) je nutné stanovit bezrozměrnou výšku ložiskové mezery  $\bar{h}$  a bezrozměrnou dynamickou viskozitu oleje  $\bar{\mu}$  v bodech, které se nacházejí mezi uzly výpočtové sítě. Pokud jsou uvedené parametry předepsány analyticky, není stanovení jejich hodnot problém. V ostatních případech je třeba hodnoty parametrů aproximovat nebo upravit aproximační vztahy (4.17a) a (4.17b) do tvaru, ve kterém se meziuzlové hodnoty nevyskytují. Toho lze docílit aplikací pravidla o derivaci součinu na bezrozměrnou Reynoldsovu rovnici (4.12), která pak přejde do tvaru (Rendl, 2017)

$$3 \frac{\bar{h}^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{s}} + \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{s}^2} + 3 \frac{\bar{h}^2}{\bar{\mu}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{h}^3}{\bar{\mu}} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \bar{x}^2} = 6 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{s}} + 12 \frac{\partial \bar{h}}{\partial \tau}. \quad (4.20)$$

Po dosazení aproximačních vztahů (4.13), (4.16) a (4.18) do rovnice (4.20) lze numerické řešení Reynoldsovy rovnice ve vnitřním uzlu sítě o souřadnicích  $(\bar{s}_i, \bar{x}_j)$  formálně vyjádřit výše použitým vztahem (4.19), ale pro stanovení koeficientů  $a_{i,j}$ ,  $b_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$ ,  $d_{i,j}$ ,  $e_{i,j}$  a  $f_{i,j}$  již není potřeba znát hodnotou parametrů  $\bar{h}$  a  $\bar{\mu}$  mezi uzly výpočtové sítě.

### Okrajové podmínky

Vztah (4.19) platí pouze ve vnitřních uzlech výpočtové sítě. Aby bylo možné Reynoldsovu rovnici vyřešit, je třeba tento vztah doplnit o podmínky na okrajích sítě a v oblastech přívodu oleje. V následujících odstavcích jsou uvedeny a okomentovány nejčastěji používané okrajové podmínky:

**Tlak na okrajích kluzné plochy.** Pokud ložisko není dobře těsněno, je tlak na čelech kluzné plochy roven tlaku prostředí  $p_a$  a platí tedy

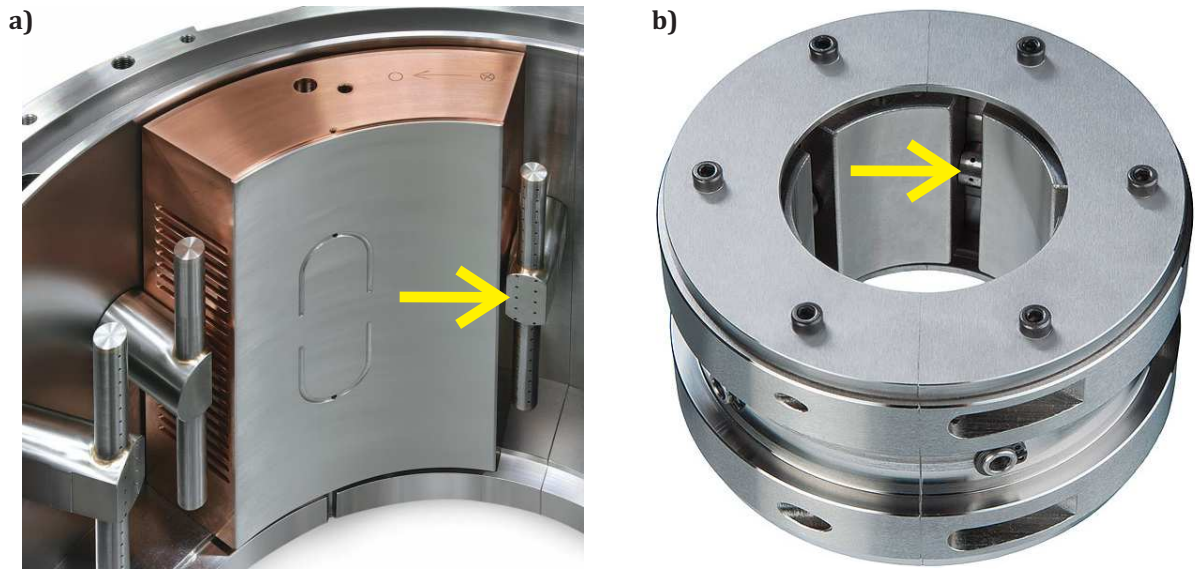
$$\bar{p}_{i,1} = \bar{p}_{i,N} = \bar{p}_a, \quad i = 1, \dots, M, \quad (4.21)$$

kde bezrozměrný tlak prostředí  $\bar{p}_a$  je stanoven z tlaku prostředí  $p_a$  pomocí příslušného transformačního vztahu, např. (3.41) nebo (3.45). Samotný tlak prostředí  $p_a$  se nejčastěji volí nulový nebo o velikosti atmosférického tlaku, tedy  $p_a \approx 1$  bar (Zapoměl, 2007; Stachowiak a Batchelor, 2013). V případě, kdy jsou čela ložiska dobře těsněna, je tlak na příslušných okrajích kluzné plochy vyšší.

Na náběžnou hranu kluzné plochy je olej přiváděn sprchami nebo otvory umístěnými v ložiskovém tělese (obr. 4.4). Tlak na náběžné hraně se nejčastěji ztotožňuje s mazacím tlakem  $p_s$ , který bývá uváděn v datovém listu ložiska společně s dalšími návrhovými parametry. Obecně však na náběžné hraně není konstantní tlak, přesnější stanovení okrajové podmínky vyžaduje výpočet toku oleje mazacím systémem. Tlak na odtokové hraně se volí buď roven tlaku prostředí  $p_a$ , nebo dle konstrukčního řešení ložiska, protože na odtokovou hranu může být přiváděno určité množství oleje (obr. 4.4a), aby se zabránilo vzniku kavitace (Waukesha Bearings, 2012–2018). Okrajové podmínky na náběžné a odtokové hraně lze vyjádřit následovně:

$$\bar{p}_{1,j} = \bar{p}_s, \quad \bar{p}_{M,j} = \bar{p}_a, \quad j = 1, \dots, M. \quad (4.22)$$





Obrázek 4.4: Konstrukční řešení přívodu oleje na kluznou plochu ložiskového segmentu [Waukesha Bearings \(2012–2018\)](#) a) a [GTW Bearings \(2018\)](#) b).

**$2\pi$  olejový film** . Pokud pro středový úhel ložiska platí  $\alpha = 2\pi$ , pak se levý a pravý okraj výpočtové sítě z obr. 4.1 překrývají a hodnoty tlaku v překrývajících se uzlech musí být totožné. Podmínku lze vyjádřit vztahem ([Stachowiak a Batchelor, 2013](#); [Rendl, 2017](#))

$$\bar{p}_{1,j} = \bar{p}_{M,j}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

**Podélně symetrický olejový film** vzniká v ložiskách v případě, kdy lze zanedbat natáčení čepu hřídele kolem příčných os, tj.  $h$  je funkcí pouze obvodové souřadnice. Tato podmínka je splněna například v ložiskách podpírající tuhé rotory, tedy rotory, které se při provozu elasticky nedeformují ([ČSN ISO 1940-1, 2005](#)). Pokud je navíc na obou čelech ložiska stejný tlak a geometrie mazacích drážek, otvorů a kapes je symetrická vůči obvodové ose  $\bar{s}$ , lze Reynoldsovu rovnici řešit na poloviční oblasti  $\langle 0, \alpha \rangle \times \langle -1/2, 0 \rangle$  a na uzly ležící na  $\bar{x} = -\Delta\bar{x}$  se aplikuje podmínka symetrie

$$p_{i,(N-1)/2} = p_{i,(N+3)/2}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (4.24)$$

kteřá platí pro  $N$  liché a vyžaduje rozšíření sítě na horním okraji o novou řadu uzlů s indexy  $i, (N+3)/2$ . Tlak v uzlech s indexy  $i, (N+1)/2$  je neznámý a okrajová podmínka se pro ně nestanovuje ([Zapoměl, 2007](#); [Stachowiak a Batchelor, 2013](#); [Rendl, 2017](#)).

**Mazací drážky a otvory** slouží pro přívod mazacího oleje. V uzlech, které se nacházejí v otvorech, se nastavuje mazací tlak  $p_s$ . Jde o tlak v ústí otvoru do olejového filmu ([Zapoměl, 2007](#)). Někdy je však znám pouze tlak na výtlačném hrdle čerpadla olejového okruhu a průtočné množství oleje. Pak je nutné mazací tlak  $p_s$  vypočítat např. pomocí Bernoulliho rovnice (3.79).

Mazací drážky a otvory mohou mít různé tvary. K lokalizaci uzlů v drážkách a otvorech je možné využít program `jourmesh` vyvinutý autorem této práce, který lze společně s dokumentací nalézt v [Příloze A](#).



**Mazací kapsy** jsou prohlubně vyfrézované do kluzné plochy kvůli přívodu mazacího či zvedacího oleje (viz obr. 4.4a) nebo kvůli zlepšení stability ložiska (Šimek, 2008). V místě mělkých mazacích kapes, jejichž hloubka je nižší než radiální vůle ložiska  $c_r$ , se zvětšuje ložisková mezera  $h$  v souladu s geometrií kapsy (Offner et al., 2018), v místě hlubokých kapes, ve kterých nedochází ke vzniku hydrodynamického mazání, se nastavuje konstantní hydrodynamický tlak (Zapoměl, 2007).

### Přímé řešení lineární soustavy rovnic

Soustavu rovnic pro výpočet hydrodynamického tlaku ve vnitřních uzlech výpočtové sítě (4.19) doplněnou o okrajové podmínky (4.21) – (4.24) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}^{MKD} \bar{\mathbf{p}}^{MKD} = \mathbf{f}^{MKD}. \quad (4.25)$$

kde  $\mathbf{A}^{MKD}$  je koeficientová matice,  $\mathbf{f}^{MKD}$  je vektor pravé strany a  $\bar{\mathbf{p}}^{MKD}$  je vektor uzlových tlaků, který obsahuje neznámé i známé uzlové tlaky. Pro účely numerického výpočtu je vhodné vektor  $\bar{\mathbf{p}}^{MKD}$  uspořádat do tvaru

$$\tilde{\mathbf{p}} = [\tilde{\mathbf{p}}_z, \tilde{\mathbf{p}}_n]^\top,$$

ve kterém  $\tilde{\mathbf{p}}_z$  a  $\tilde{\mathbf{p}}_n$  jsou vektory známých a neznámých uzlových tlaků. Matematicky je možné přechod  $\bar{\mathbf{p}}^{MKD} \rightarrow \tilde{\mathbf{p}}$  vyjádřit pomocí transformační matice  $\mathbf{T}$

$$\bar{\mathbf{p}}^{MKD} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{p}}, \quad (4.26)$$

která má strukturu odpovídající transformační matici  $\mathbf{T}_e$  ze vztahu (2.25). Po dosazení (4.26) do (4.25) a vynásobení výsledné rovnosti maticí  $\mathbf{T}^\top$  zleva nabývá lineární soustava rovnic tvaru

$$\mathbf{T}^\top \mathbf{A}^{MKD} \mathbf{T} \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{T}^\top \mathbf{f}^{MKD}, \quad (4.27)$$

který lze kompaktně zapsat jako

$$\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad \text{kde} \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_z \\ \tilde{\mathbf{p}}_n \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Protože neznámé se nacházejí pouze ve vektoru  $\tilde{\mathbf{p}}_n$ , je nutné tento vektor osamostatnit na levé straně rovnosti (4.28). Po jednoduché algebraické manipulaci lze získat rovnost

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_n = \tilde{\mathbf{f}} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_z, \quad (4.29)$$

kterou není možné řešit přímou metodou, protože se jedná o přeurčenou soustavu lineárních rovnic. Rendl (2017) doporučuje tuto soustavu řešit pseudoinverzí, jejíž použití vede na

$$\tilde{\mathbf{p}}_n = \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{12}^\top & \tilde{\mathbf{A}}_{22}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{12}^\top & \tilde{\mathbf{A}}_{22}^\top \end{bmatrix} \right) \left( \tilde{\mathbf{f}} - \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}_z \right). \quad (4.30)$$

Některé programovací jazyky obsahují knihovní funkce, které jsou schopny řešit přeurčené soustavy rovnic efektivněji než pseudoinverzí. Např. v prostředí Matlab je knihovní funkce řešící rovnici (4.29) až  $6 \times$  rychlejší než pseudoinverze (Rendl, 2017). Pro dosažení této rychlosti je třeba využít skutečnosti, že koeficientová matice  $\mathbf{A}^{MKD}$  je řídká a téměř pásová. Díky tomu ji lze reprezentovat jako proměnnou typu `sparse`, která je vygenerována přímo z jednotlivých koeficientů  $a_{i,j}$  až  $e_{i,j}$  knihovní funkcí `spdiags`, nikoliv konverzí z proměnné typu `array`.

### Iterační řešení lineární soustavy rovnic

Rovnici (4.29) lze řešit rovněž iteračně. Např. [Hirani \(2012\)](#) doporučuje sestavit rovnici (4.29) z rovností pro vnitřní uzly sítě upravených do tvaru

$$a_{i,j} \bar{p}_{i-1,j}^{(k)} + b_{i,j} \bar{p}_{i,j-1}^{(k)} + c_{i,j} \bar{p}_{i,j}^{(k)} + d_{i,j} \bar{p}_{i+1,j}^{(k-1)} + e_{i,j} \bar{p}_{i,j+1}^{(k-1)} = f_{i,j}, \quad (4.31)$$

kde  $\square^{(k)}$  označuje iterační krok. Vztah (4.31) platí, pokud jsou hodnoty  $\bar{p}_{i,j}^{(k)}$  hledány ve vze-  
stupném pořadí vůči indexům  $i, j$ . Počáteční tlak ve vnitřních uzlech sítě  $\bar{p}_{i,j}^{(0)}$  se volí dle okra-  
jových podmínek nebo se vypočítá pomocí aproximativního analytického řešení. Numerické  
schéma (4.31) velmi rychle konverguje, pokud má úloha řešení ([Hirani, 2012](#); [Stachowiak a  
Batchelor, 2013](#)).

Zastavovací podmínku iteračního procesu je možné definovat pomocí souhrnné relativní  
chyby, která je někdy označována reziduum ([Stachowiak a Batchelor, 2013](#)), jako nerovnost

$$\frac{\sum_{(i)} \sum_{(j)} \left| \bar{p}_{i,j}^{(k)} - \bar{p}_{i,j}^{(k-1)} \right|}{\sum_{(i)} \sum_{(j)} \bar{p}_{i,j}^{(k)}} \leq \varepsilon_{rel}, \quad (4.32)$$

kde  $\varepsilon_{rel}$  je požadovaná relativní přesnost řešení. Alternativně lze použít zastavovací podmínku

$$\frac{(\mathbf{l}_r^T \mathbf{r}_r)^2}{(\mathbf{l}_r^T \mathbf{l}_r) (\mathbf{r}_r^T \mathbf{r}_r)} \geq 1 - \varepsilon_{MAC}, \quad (4.33)$$

kde  $\mathbf{l}_r$  a  $\mathbf{r}_r$  jsou vektory hodnot výrazů levé a pravé strany Reynoldsovy rovnice a  $\varepsilon_{MAC}$  je  
velmi malé číslo. Nerovnost (4.33) je založena na kritériu modální věrohodnosti<sup>1</sup> a uvádí ji  
např. [Zapoměl \(2007\)](#).

#### 4.1.3 Numerické řešení s využitím metody konečných prvků

Základní princip využití metody konečných prvků (MKP) pro nalezení numerického řešení  
parciální diferenciální rovnice spočívá v transformaci rovnice do integrálního (slabého) tvaru.  
V případě Reynoldsovy rovnice se pro transformaci používají metody třídy vážených reziduí  
založené obvykle na Galerkinově metodě ([Chandra a Sinhasan, 1987](#)). Výslednou globální sou-  
stavu rovnic, která je sestavena z elementových rovnic, lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A}^{MKP} \bar{\mathbf{p}}^{MKP} = \mathbf{f}^{MKP} + \bar{\mathbf{q}}, \quad (4.34)$$

kde  $\mathbf{A}_{MKP}$  je koeficientová matice,  $\mathbf{f}^{MKP}$  je vektor pravé strany, jejichž strukturu popisují  
[Larsen a Santos \(2015\)](#). Vektor  $\bar{\mathbf{p}}_{MKP}$  zahrnuje hodnoty bezrozměrného hydrodynamického  
tlaku ve všech uzlech výpočtové sítě a  $\bar{\mathbf{q}}$  je vektor bezrozměrných uzlových toků. Rovnice (4.34)  
je řešena pro dvě neznámé ([Chandra a Sinhasan, 1987](#)):

- Na okrajích kluzné plochy je hydrodynamický tlak daný podmínkami (4.21) a (4.22) a  
hledá se řešení pro neznámý uzlový tok  $\bar{q}_{i,j}$ .
- V místě mazacích drážek a otvorů je možné předepsat buď hydrodynamický tlak nebo  
uzlový tok ([Offner et al., 2018](#)).

<sup>1</sup>Anglicky *modal assurance criterion (MAC)*.

- V kavítovaných oblastech je hydrodynamický tlak roven saturačnímu tlaku, platí tedy  $\bar{p}_{i,j}^{MKP} = \bar{p}_c$ , a hledá se řešení pro neznámý uzlový tok  $\bar{q}_{i,j}$ .
- V ostatních uzlech je bezrozměrný hydrodynamický tlak  $\bar{p}_{i,j}^{MKP}$  neznámý a  $\bar{q}_{i,j} = 0$ .

## 4.2 Výpočet hydrodynamické síly

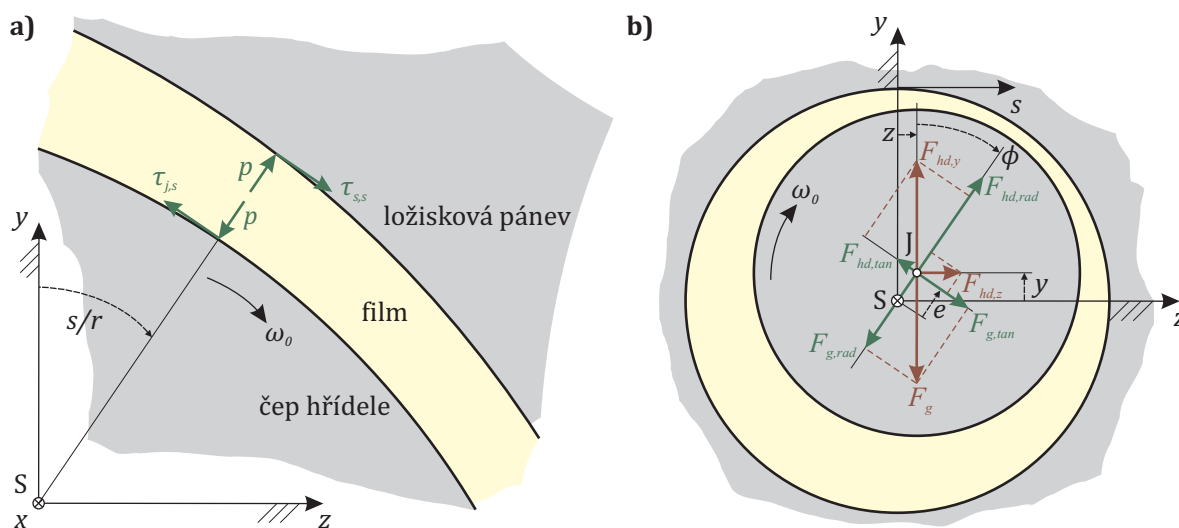
Jako *hydrodynamická* nebo *hydraulická síla* je označována síla vyvozená olejovým filmem na čep hřídele. Výpočet hydrodynamické síly je nezbytný nejen pro stanovení statické polohy čepu hřídele a odezvy na časově proměnné buzení, ale i pro posuzování stability ložiska.

V ložiskách kromě hydrodynamických sil vznikají za určitých podmínek také elastické síly. Ke vzniku elastických sil dochází, pokud dojde ke kontaktu kluzných ploch, nebo když alespoň jedna z kluzných ploch je drsná a olejový film dostatečně tenký nebo když je některé z těles v ložisku dostatečně poddajné (Patir a Cheng, 1979; Offner et al., 2018). Tato podkapitola nicméně o elastických silách nepojednává.

### 4.2.1 Výpočet síly ze známého tlakového pole

Na libovolnou elementární plochu  $dA$  nacházející se na povrchu čepu hřídele působí olejový film dvěma silovými účinky znázorněnými na obr. 4.5a. Jednak jde o sílu  $p dA$  způsobenou hydrodynamickým tlakem v olejovém filmu, která působí v normálovém směru, a pak o sílu v tečném směru vyvolanou ulpíváním maziva na kluzném povrchu (Zapoměl, 2007).

Za předpokladu, že pro olej platí Newtonův zákon viskozity (3.14) a elastické síly jsou zanedbatelné, je síla v tečném směru způsobena pouze smykovým napětím, kterým působí olej na kluzné povrchy. V obvodovém směru působí smyková napětí o velikosti



**Obrázek 4.5:** Směry působení hydrodynamického tlaku a smykového napětí v obvodovém směru na elementární plochy čepu hřídele a ložiskové pánve a) a složky hydrodynamické síly  $\mathbf{f}_{hd}$  a tíhové síly  $\mathbf{f}_g$  v kartézském souřadnicovém systému (červeně) a pootočeném souřadnicovém systému (zeleně) b).

$$\tau_{j,s} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial H} \right|_{H=0} = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial s} + (u_s - u_j) \frac{\mu}{h}, \quad (4.35a)$$

$$\tau_{s,s} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial H} \right|_{H=h} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial s} + (u_s - u_j) \frac{\mu}{h}, \quad (4.35b)$$

kde  $\tau_{j,s}$  a  $\tau_{s,s}$  jsou smyková napětí, kterými působí olej v obvodovém směru  $s$  na povrch čepu hřídele, respektive povrch ložiskové pánve. Parametr  $H$  ve vztazích (4.35) označuje vzdálenost od povrchu čepu hřídele v normálovém směru k tomuto povrchu.

V části olejového filmu, kde dochází ke kavitaci, platí  $\partial p / \partial s = 0$  a smykové napětí je závislé pouze na obvodových rychlostech kluzných ploch  $u_j$  a  $u_s$ , ložiskové mezeře  $h$  a dynamické viskozitě  $\mu$  směsi oleje a plynu, která vyplňuje kavitovanou oblast (Zapoměl, 2007).

V podélném směru  $x$  se čep hřídele a ložiskové pánve obvykle neposouvají a smyková napětí napětí v tomto směru jsou tedy určena pouze ložiskovou mezerou a gradientem tlaku

$$\tau_{j,x} = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial H} \right|_{H=0} = -\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.36a)$$

$$\tau_{s,x} = \mu \left. \frac{\partial v}{\partial H} \right|_{H=h} = \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.36b)$$

V kartézském souřadnicovém systému, jehož orientace je patrná z obr. 4.5a, lze složky hydraulické síly působící na elementární plochu  $dA$  vyjádřit následovně:

$$dF_{hd,y} = -p \cos\left(\frac{s}{r}\right) dA + \tau_{j,s} \sin\left(\frac{s}{r}\right) dA, \quad (4.37a)$$

$$dF_{hd,z} = -p \sin\left(\frac{s}{r}\right) dA - \tau_{j,s} \cos\left(\frac{s}{r}\right) dA. \quad (4.37b)$$

Složky celkové hydrodynamické síly, kterou olejový film působí na čep hřídele, lze stanovit jako integrály diferenciálních sil  $dF_{hd,y}$  a  $dF_{hd,z}$  přes kluznou plochu. Protože smykové napětí  $\tau_{j,s}$  je v případech, kdy jsou kluzné povrchy hladké nebo nedochází ke kontaktu mezi čepem hřídele a ložiskovou pávní, řádově menší než hydrodynamický tlak  $p$  a lze ho při výpočtu složek hydrodynamické síly zanedbat (Patir a Cheng, 1979; Zapoměl, 2007; Offner et al., 2018), mají výsledné integrály tvar

$$F_{hd,y} = \iint_{(A)} dF_{hd,y} = - \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi r} p \cos\left(\frac{s}{r}\right) ds dx, \quad (4.38a)$$

$$F_{hd,z} = \iint_{(A)} dF_{hd,z} = - \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi r} p \sin\left(\frac{s}{r}\right) ds dx, \quad (4.38b)$$

kde meze integrace podle obvodové souřadnice  $s$  platí pro ložisko se středovým úhlem  $2\pi$ . Ze vztahů (4.38) je zřejmé, že složky hydrodynamické síly působící na čep hřídele mají při zanedbání smykového napětí stejnou velikost, ale opačnou orientaci při porovnání se složkami zatížení ložiska (3.31).

Složky hydrodynamické síly a případných dalších sil působících na čep hřídele lze vyjádřit i v prostoru souřadnic  $(e, \phi)$ . V tomto prostoru lze libovolnou sílu  $\mathbf{f}_i$  rozložit na radiální složku

$F_{i,rad}$  působící ve směru spojnice mezi středem ložiska S a středem čepu hřídele J, tj. ve směru excentricity  $e$ , a na tečnou složku  $F_{i,tan}$ , která působí ve směru kolmém na radiální směr. Je-li kartézský souřadnicový systém orientován v souladu s obr. 4.5b, pak lze radiální a tečnou složku síly  $\mathbf{f}_i$  vyjádřit následovně

$$F_{i,rad} = F_{i,y} \cos \phi + F_{i,z} \sin \phi, \quad F_{i,tan} = -F_{i,y} \sin \phi + F_{i,z} \cos \phi \quad (4.39)$$

a naopak, vertikální složku  $F_{i,y}$  a horizontální složku  $F_{i,z}$  síly  $\mathbf{f}_i$  je možné vyjádřit pomocí radiální a tečné složky s využitím vztahů

$$F_{i,y} = F_{i,rad} \cos \phi - F_{i,tan} \sin \phi, \quad F_{i,z} = F_{i,rad} \sin \phi + F_{i,tan} \cos \phi. \quad (4.40)$$

#### 4.2.2 Výpočet síly z aproximativního analytického řešení Reynoldsovy rovnice

Pokud je Reynoldsova rovnice řešena analyticky nebo aproximativně analyticky, lze hydrodynamický tlak  $p$  vyjádřit jako funkci nebo funkční řadu (Sfyris a Chasalevris, 2012; Zapoměl, 2007). Integrály (4.38) vyjadřující složky hydrodynamické síly je pak možné vyřešit analyticky a složky hydrodynamické síly vyjádřit v uzavřeném tvaru. Přesný tvar řešení závisí na zvolených okrajových podmínkách.

V tomto oddíle bude diskutováno stanovení radiálních a tečných složek hydrodynamické síly v uzavřeném tvaru v případě, kdy tlakové pole je aproximováno Reynoldsovou rovnicí pro nekonečně krátké ložisko (4.2). Navíc se předpokládá, že ložisko je kruhového průřezu a ložisková mezera je předepsána vztahem (4.8).

##### Sommerfeldova okrajová podmínka pro plný film

Sommerfeldova okrajová podmínka pro plný ( $2\pi$ ) film předpokládá, že v olejovém filmu nedochází ke kavitaci a integrace hydrodynamického tlaku se provádí přes meze uvedené ve vztazích (4.38) (Sommerfeld, 1904). Po integraci rovnosti (4.11), která popisuje tlakové pole v ložiskové mezěře nekonečně krátkého kruhového ložiska, lze radiální a tečnou složku hydrodynamické síly vyjádřit ve tvaru (Zapoměl, 2007)

$$F_{hd,rad}^{2\pi} = -\frac{\mu r l^3}{c_r^2} \frac{\pi (1 + 2\varepsilon^2) \dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}}, \quad (4.41a)$$

$$F_{hd,tan}^{2\pi} = \frac{\mu r l^3}{c_r^2} \left( \frac{u_j + u_s}{2} - 2\dot{\phi} \right) \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (4.41b)$$

Z tvaru rovnosti (4.41a) je zřejmé, že síla  $F_{hd,rad}^{2\pi}$  je nenulová pouze v případě, kdy dochází ke kmitání čepu hřídele. To je způsobeno skutečností, že rovnost (4.11) predikuje fyzikálně nereálný záporný tlak v rozšiřující se části ložiskové mezery, ve které ve skutečnosti dojde ke kavitaci a tlak zde bude nabývat velikosti saturačního tlaku  $p_s$  (Stachowiak a Batchelor, 2013).

##### Sommerfeldova okrajová podmínka pro poloviční film

Sommerfeldova okrajová podmínka pro poloviční ( $\pi$ ) film předpokládá, že v rozšiřující se části ložiskové mezery dojde ke kavitaci a hydrodynamický tlak  $p$  zde bude nulový. Podmínku lze pro ložiska kruhového průřezu formulovat ve tvaru (Sommerfeld, 1904)

$$p = 0, \quad \text{když} \quad \frac{s}{r} \in \begin{cases} \langle \phi, \phi + \pi \rangle & \forall \phi \in \langle 0, \pi \rangle, \\ \langle 0, \phi - \pi \rangle \cup \langle \phi, 2\pi \rangle & \forall \phi \in \langle \pi, 2\pi \rangle. \end{cases} \quad (4.42)$$

Po integraci rovnosti (4.11) v mezích daných podmínkou (4.42) lze radiální a tečnou složku hydrodynamické síly vyjádřit ve tvaru (Zapoměl, 2007; Bastani a de Queiroz, 2010)

$$F_{hd,rad}^{\pi} = -\frac{\mu r l^3}{c_r^2} \left[ \left| \frac{u_j + u_s}{2} - 2\dot{\phi} \right| \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{\pi (1 + 2\varepsilon^2) \dot{\varepsilon}}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right], \quad (4.43a)$$

$$F_{hd,tan}^{\pi} = \frac{\mu r l^3}{c_r^2} \left[ \left( \frac{u_j + u_s}{2} - 2\dot{\phi} \right) \frac{\pi \varepsilon}{4(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon \dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right]. \quad (4.43b)$$

### Bastaniho zobecnění Sommerfeldovy okrajové podmínky pro poloviční film

Rovnosti (4.43) dobře popisují působení hydrodynamické síly na čepy ložisek, pro která platí  $\eta \leq 0,5$  (San Andrés, 2010). Pro ložiska konečné délky, pro něž platí  $\eta \in (0,5; 2)$ , mají rovnosti (4.43) tendenci predikovat vyšší síly, než jaké v ložisku ve skutečnosti působí. Tento problém se pokusili vyřešit Bastani a de Queiroz (2010), kteří korigovali složky hydrodynamické síly pomocí multiplikatивních funkcí závisících na excentricitě  $\varepsilon$  a poměru délky ku průměru ložiska  $\eta$ . Korigované složky síly lze vyjádřit ve tvaru

$$F_{hd,rad}^{\pi,cor} = (f_1 \varepsilon^3 + f_2 \varepsilon^2 + f_3 \varepsilon + f_4) F_{hd,rad}^{\pi}, \quad (4.44a)$$

$$F_{hd,tan}^{\pi,cor} = (g_1 \varepsilon^2 + g_2 \varepsilon + g_3) F_{hd,tan}^{\pi}, \quad (4.44b)$$

kde  $f_i = f_i(\eta)$  a  $g_i = g_i(\eta)$  jsou multiplikatивní kvartické nebo kubické polynomy ve tvaru

$$f_1 = 0,5298 \eta^3 - 2,983 \eta^2 + 6,084 \eta - 5,046, \quad (4.45a)$$

$$f_2 = 0,2610 \eta^4 - 2,122 \eta^3 + 6,673 \eta^2 - 10,13 \eta + 7,252, \quad (4.45b)$$

$$f_3 = 0,1934 \eta^3 - 1,135 \eta^2 + 2,633 \eta - 2,933, \quad (4.45c)$$

$$f_4 = -0,0261 \eta^3 + 0,2953 \eta^2 - 1,070 \eta + 1,517, \quad (4.45d)$$

$$g_1 = 0,3479 \eta^4 - 1,983 \eta^3 + 3,913 \eta^2 - 2,595 \eta - 0,5057, \quad (4.45e)$$

$$g_2 = -0,1890 \eta^4 + 0,9467 \eta^3 - 1,417 \eta^2 + 0,2101 \eta + 0,6514, \quad (4.45f)$$

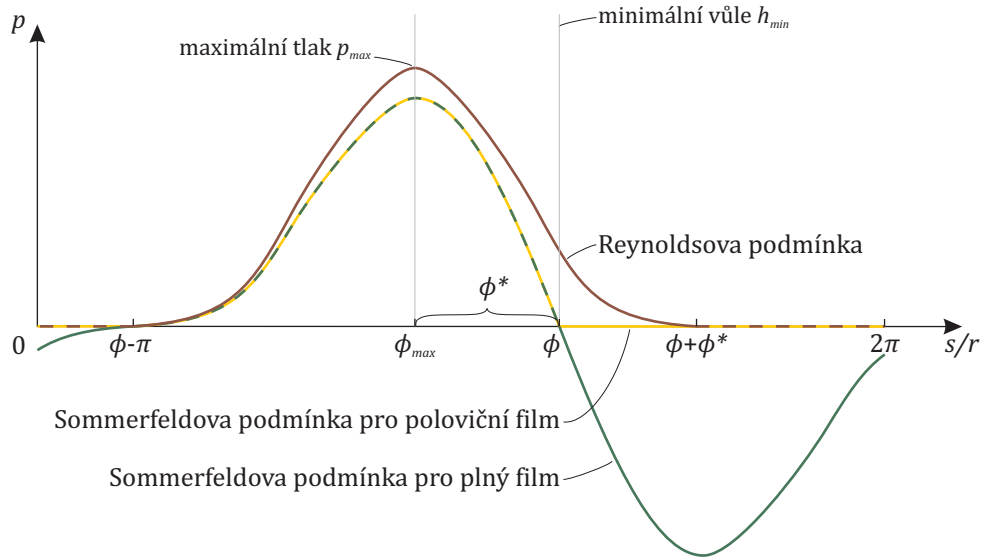
$$g_3 = 0,0592 \eta^3 - 0,2005 \eta^2 - 0,1118 \eta + 0,9485. \quad (4.45g)$$

Koeficienty lineární kombinace uvedené v polynomech (4.45) získali (Bastani a de Queiroz, 2010) metodou lineární regrese, pomocí které hledali nejlepší shodu vztahů (4.44) s numerických řešením Reynoldsovy rovnice.

### Reynoldsova okrajová podmínka

Přestože rovnosti (4.43) a (4.44) dobře aproximují složky hydrodynamické síly v krátkých ložiskách a v ložiskách konečné délky, použití Sommerfeldovy okrajové podmínky pro poloviční ( $\pi$ ) film přináší problémy při výpočtu průtoku oleje ložiskem. Toky stanovené při uvažování této podmínky nesplňují zákon zachování hmotnosti, protože průtočné množství oleje je na rozhraní oblastí s nulovým a nenulovým tlakem nespojitě (Stachowiak a Batchelor, 2013). Tuto skutečnost si uvědomil již Reynolds (1886), který navrhl použití okrajové podmínky ve tvaru

$$p = 0, \quad \text{když} \quad \frac{s}{r} \in \begin{cases} \langle \phi + \phi^*, \phi + \pi \rangle & \forall \phi \in \langle 0, \pi \rangle, \\ \langle 0, \phi - \pi \rangle \cup \langle \phi + \phi^*, 2\pi \rangle & \forall \phi \in \langle \pi, 2\pi \rangle, \end{cases} \quad (4.46)$$



**Obrázek 4.6:** Závislost hydrodynamického tlaku na obvodové souřadnici při uvažování Sommerfeldových okrajových podmínek pro plný ( $2\pi$ ) a poloviční ( $\pi$ ) film a Reynoldsovy okrajové podmínky.

kde  $\phi^*$  je středový úhel mezi místy, kde je v ložisku nejvyšší hydrodynamický tlak  $p_{max}$  a kde je ložisková mezera  $h$  minimální. Hydrodynamický tlak vypočítaný pomocí výše diskutovaných podmínek je ukázán na obr. 4.6.

Reynoldsovy okrajové podmínky (4.46) se využívá především při výpočtech hydrodynamického tlaku a síly v segmentových ložiskách. Při implementaci se využívá skutečnosti, že v místě s nejvyšším hydrodynamickým tlakem je parciální derivace  $\partial p / \partial s$  nulová (Stachowiak a Batchelor, 2013).

### 4.3 Stanovení dynamických koeficientů ložiska

V mnohých úlohách rotorové dynamiky, které se omezují na kmitání čepu hřídele v blízkém okolí statické rovnovážné polohy nazývané též pracovní bod ložiska, se hydrodynamická síla linearizuje způsobem popsáním v oddíle 2.1.4. Při zanedbání setrvačných sil v olejovém filmu lze přírůstek hydrodynamické síly, který je zapříčiněn vychýlením čepu hřídele z pracovního bodu o výchylky  $\Delta y_j$  ve vertikálním směru a  $\Delta z_j$  v horizontálním směru, zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \Delta F_{hd,y} \\ \Delta F_{hd,z} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

kde  $b_{ij}$  a  $k_{ij}$  jsou lineární koeficienty vyjadřující tlumení a tuhost olejového filmu. Dále jsou představeny dva způsoby, s jejichž využitím lze dynamické koeficienty stanovit.

#### 4.3.1 Stanovení dynamických koeficientů ložiska ze zatížení ložiska

Dynamické koeficienty ložiska, na které působí tíhová síla  $F_g$ , se stanovují ve dvou krocích (Stachowiak a Batchelor, 2013; Rendl, 2017): nejprve je třeba nalézt pracovní bod ložiska ( $y_{0,j}$ ,  $z_{0,j}$ ), ve kterém jsou složky zatížení  $W_{0,i}$  dané rovnostmi (3.31) v rovnováze se složkami  $F_g$ .



Poté je čep vychýlen z pracovního bodu ve směru osy  $j$  o malou vzdálenost  $\Delta x_j$ . Pro novou polohu čepu hřídele se stanoví složky zatížení  $W_{\Delta x_j, i}$ , které působí na ložiskovou pánev. Za předpokladu, že platí vztah (4.47) a vzhledem k tomu, že zatížení působí v opačném směru než hydrodynamická síla, lze koeficient tuhosti  $k_{ij}$  vyjádřit následovně

$$k_{ij} = \frac{W_{\Delta x_j, i} - W_{0, i}}{\Delta x_j}. \quad (4.48)$$

Koeficient tlumení  $b_{ij}$  je možné vypočítat analogicky, ale namísto výchylky se čepu udělí malá rychlost  $\Delta \dot{x}_j$ , která se v Reynoldsově rovnici projeví ve členu zahrnujícím stlačování olejového filmu. Na ložiskovou pánev působí nové složky zatížení  $W_{\Delta \dot{x}_j, i}$  a pro koeficienty tlumení  $b_{ij}$  platí

$$b_{ij} = \frac{W_{\Delta \dot{x}_j, i} - W_{0, i}}{\Delta \dot{x}_j}. \quad (4.49)$$

Vztahy pro stanovení dynamických koeficientů (4.48) a (4.49) jsou citlivé na volbu  $\Delta x_j$  a  $\Delta \dot{x}_j$  (Rendl, 2017). Pro zlepšení podmíněnosti těchto vztahů doporučují Stachowiak a Batchelor (2013) jejich transformaci do bezrozměrného prostoru za použití transformačních vztahů

$$\bar{k}_{ij} = \frac{c_r k_{ij}}{W_0}, \quad \bar{b}_{ij} = \frac{c_r \omega_0 b_{ij}}{W_0}, \quad (4.50)$$

kde  $W_0$  je celkové zatížení ložiska v pracovním bodě definované vztahem (3.30). Po dosazení (4.50) do vztahů (4.48) a (4.49) platí

$$\bar{k}_{ij} = \frac{c_r}{\Delta x_j} \frac{W_{\Delta x_j, i} - W_{0, i}}{W_0} = \frac{1}{\Delta \varepsilon_j} \frac{W_{\Delta x_j, i} - W_{0, i}}{W_0}, \quad (4.51a)$$

$$\bar{b}_{ij} = \frac{c_r \omega_0}{\Delta \dot{x}_j} \frac{W_{\Delta \dot{x}_j, i} - W_{0, i}}{W_0} = \frac{\omega_0}{\Delta \dot{\varepsilon}_j} \frac{W_{\Delta \dot{x}_j, i} - W_{0, i}}{W_0}. \quad (4.51b)$$

Pravá strana bezrozměrných rovností (4.51) je rozdělena na členy: první člen je bezrozměrný diferenční krok a druhý člen je bezrozměrný rozdíl zatížení ložiska ve výchozí a ve změněné konfiguraci. Z prvního členu lze určit, jaké diferenční kroky  $\Delta x_j$  a  $\Delta \dot{x}_j$  jsou při analýze ložiska dostatečně malé: Stachowiak a Batchelor (2013) doporučují volit  $\Delta \varepsilon_j \leq 0,001$  a  $\Delta \dot{\varepsilon}_j / \omega_0 \leq 0,001$ . Ve druhém členu z rovností (4.51) mohou být použita i bezrozměrná zatížení získaná integrací bezrozměrného tlaku (Stachowiak a Batchelor, 2013).

Ještě ve 2. polovině minulého století nebylo zcela běžné při určování koeficientů  $k_{ij}$  a  $b_{ij}$  hledat řešení Reynoldsovy rovnice. Namísto toho se z návrhových parametrů analyzovaného ložiska vypočítalo Sommerfeldovo číslo  $S$  definované vztahem (3.29) a hledaly se tabelované hodnoty bezrozměrných koeficientů  $\bar{k}_{ij}$  a  $\bar{b}_{ij}$ , které byly získány předchozí výpočtovou analýzou či experimentálně (Gasch a Pfützner, 1975; Someya, 1989). Platnost tabulek či grafů nebyla univerzální a bylo nutné je sestavit pro každý typ ložiska (válcové, citronové atd.) a poměr délky ku průměru ložiska  $\eta$ .

### 4.3.2 Stanovení tuhosti ložiska z odezvy čepu hřídele na změnu statického zatížení

V některých programech pro výpočty dynamiky vázaných mechanických soustav může být z hlediska výpočtového času výhodnější řešit úlohy polohy než úlohy síly. V těchto případech je



dříve popsaná metoda stanovení dynamických koeficientů ložiska obtížně implementovatelná a koeficienty je výhodnější identifikovat jiným způsobem. Při tom lze využít skutečnosti, že je-li čep hřídele nacházející se ve statické rovnovážné poloze přitížen poruchovou silou  $\Delta \mathbf{f}_{pert}$ , změní se síly působící na čep o následující přírůstky

$$\Delta \mathbf{f}_{pert} + \Delta \mathbf{f}_s + \Delta \mathbf{f}_g + \Delta \mathbf{f}_b + \Delta \mathbf{f}_k + \Delta \mathbf{f}_{hd} = \mathbf{0}, \quad (4.52)$$

kde  $\Delta \mathbf{f}_s$ ,  $\Delta \mathbf{f}_g$ ,  $\Delta \mathbf{f}_b$  a  $\Delta \mathbf{f}_k$  jsou přírůstky setrvačných, gyroskopických, tlumicích a elastických sil působících na hřídel a  $\Delta \mathbf{f}_{hd}$  je přírůstek hydrodynamické síly. Po odeznění přechodové odezvy a za předpokladu, že nedojde ke ztrátě stability, zaujme čep hřídele novou statickou rovnovážnou polohu a síly působící na čep se oproti výchozímu stavu změní o následující přírůstky

$$\Delta \mathbf{f}_{pert} + \Delta \mathbf{f}_k + \Delta \mathbf{f}_{hd} = \mathbf{0}, \quad (4.53)$$

kde přírůstek hydrodynamické síly  $\Delta \mathbf{f}_{hd}$  je dán rovností (4.47). Velmi malé poruchové síly způsobují zanedbatelné elastické deformace a tak lze ve většině případů uvažovat  $\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{0}$ .

Při volbě dvou poruchových sil o velikosti

$$\Delta \mathbf{f}_{pert}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta F_{pert,y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{f}_{pert}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta F_{pert,z} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

lze přírůstky sil působící na čep hřídele po odeznění přechodové odezvy, které jsou dány rovností (4.53), formulovat pomocí dvou soustav lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_y \\ \Delta z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_{pert,y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_z \\ \Delta z_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta F_{pert,z} \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

kde  $\Delta y_y$ ,  $\Delta z_y$  jsou odezvy na poruchovou sílu  $\Delta F_{pert,y}$  a  $\Delta y_z$ ,  $\Delta z_z$  jsou odezvy na poruchovou sílu  $\Delta F_{pert,z}$ . Po úpravě lze soustavy (4.55) přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} \Delta y_y & \Delta z_y \\ \Delta y_z & \Delta z_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{yy} \\ k_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta F_{pert,y} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \Delta y_y & \Delta z_y \\ \Delta y_z & \Delta z_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{zy} \\ k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta F_{pert,z} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Tyto dvě soustavy lineárních rovnic lze vyřešit analyticky. S využitím skutečnosti, že inverzní matice ke koeficientové matici nabývá tvaru

$$\begin{bmatrix} \Delta y_y & \Delta z_y \\ \Delta y_z & \Delta z_z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta y_y \Delta z_z - \Delta y_z \Delta z_y} \begin{bmatrix} \Delta z_z & -\Delta z_y \\ -\Delta y_z & \Delta y_y \end{bmatrix}$$

je možné jednotlivé koeficienty tuhosti vyjádřit pomocí následujících rovností:

$$k_{yy} = \frac{\Delta z_z \Delta F_{pert,y}}{\Delta y_y \Delta z_z - \Delta y_z \Delta z_y}, \quad (4.57a)$$

$$k_{yz} = \frac{-\Delta y_z \Delta F_{pert,y}}{\Delta y_y \Delta z_z - \Delta y_z \Delta z_y}, \quad (4.57b)$$

$$k_{zy} = \frac{-\Delta z_y \Delta F_{pert,z}}{\Delta y_y \Delta z_z - \Delta y_z \Delta z_y}, \quad (4.57c)$$

$$k_{zz} = \frac{\Delta y_y \Delta F_{pert,z}}{\Delta y_y \Delta z_z - \Delta y_z \Delta z_y}. \quad (4.57d)$$

### 4.3.3 Stanovení dynamických koeficientů ložiska z odezvy v časové oblasti

Výše představená metoda je sice jednoduchá, má ale zásadní nevýhodu v tom, že ji není možné použít pro stanovení koeficientů tlumení ložiska. Tyto koeficienty lze v úlohách polohy identifikovat pouze metodami aplikovanými na dynamickou odezvu v časové nebo frekvenční oblasti. Níže bude diskutována modifikovaná přímá metoda identifikace koeficientových matic v časové oblasti (Dupal, 2008). Kmitání čepu hřídele v blízkém okolí kolem pracovního bodu ložiska je popsáno pohybovou rovnicí (2.56), která musí být splněna v každém časovém okamžiku. Pokud na soustavu nepůsobí žádné elastické aerodynamické účinky, platí

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t_1) + [\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}_l(\omega_0)]\dot{\mathbf{q}}(t_1) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_l(\omega_0)]\mathbf{q}(t_1) &= \mathbf{f}(\omega_0, t_1), \\ &\vdots \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t_n) + [\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G} + \mathbf{B}_l(\omega_0)]\dot{\mathbf{q}}(t_n) + [\mathbf{K} + \mathbf{K}_l(\omega_0)]\mathbf{q}(t_n) &= \mathbf{f}(\omega_0, t_n), \end{aligned} \quad (4.58)$$

kde  $t_1, \dots, t_n$  je posloupnost časových hodnot vybraná tak, aby obsahovala pouze časy  $t_i$ , ve kterých soustava kmitá ustáleně, a  $\mathbf{f}(\omega_0, t_i)$  je vektor externích budících sil, který obsahuje rotující síly způsobené známými nevyvážky.

Po převedení známých výrazů na pravou stranu a transpozici lze soustavu pohybových rovnic (4.58) zapsat ve tvaru

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}^\top(t_1) & \mathbf{q}^\top(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}^\top(t_n) & \mathbf{q}^\top(t_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_l^\top(\omega_0) \\ \mathbf{K}_l^\top(\omega_0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{p}^\top(\omega_0, t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^\top(\omega_0, t_n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \quad (4.59)$$

kde

$$\mathbf{p}^\top(\omega_0, t_i) = \mathbf{f}^\top(\omega_0, t_i) - \dot{\mathbf{q}}^\top(t_i) \mathbf{M}^\top - \dot{\mathbf{q}}^\top(t_i) [\mathbf{B}^\top + \omega_0 \mathbf{G}^\top] - \mathbf{q}^\top(t_i) \mathbf{K}^\top.$$

Řešení soustavy rovnic (4.59) lze za předpokladu, že matice  $\mathbf{A}$  je regulární, najít jako minimum reziduální matice. Výsledek minimalizace lze vyjádřit ve tvaru (Dupal, 2008)

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A}^\mathbf{H} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\mathbf{H} \mathbf{P}. \quad (4.60)$$

## 5 Charakteristiky ohybového kmitání rotorů turbodmychadel

Rotory jednostupňových i dvoustupňových turbodmychadel, které jsou přímo poháněny spalovacími, mají stejně koncipovaný rotor (Wikimedia, 2001–): na převislých koncích poměrně subtilního hřídele se nachází masivní oběžná kola turbíny a kompresoru. Rotor je uložen ve dvou radiálních a jednom axiálním ložisku, která se nacházejí mezi oběžnými koly. Následující text se omezuje na případ nejčastějšího konstrukčního řešení, což jsou kluzná ložiska s plovoucími pouzdry. Kluzná ložiska s plovoucími pouzdry mají lepší tlumicí vlastnosti než ložiska valivá či fóliová, na druhou stranu ale rotory podepřené těmito ložisky vykazují silně nelineární chování (Nguyen-Schäfer, 2012; Schweizer, 2010).

V této kapitole jsou shrnuty metody pro diagnostiku ohybového kmitání a analýzu chování rotujících zařízení a jsou popsány charakteristiky nelineárního ohybového kmitání rotorů turbodmychadel používaných v motorech osobních a malých nákladních automobilů. V závěru kapitoly je diskutován vliv použitého modelu hydrodynamických sil na výsledky simulace ohybového kmitání rotoru.

### 5.1 Základní metody pro analýzu vibrací točivých strojů

Norma ČSN ISO 20816-1 (2017) rozeznává dva typy vibrací točivých strojů: ložiskové (statorové) a rotorové vibrace. Ložiskové (statorové) vibrace jsou měřeny či simulovány na netočivých částech strojů, nejčastěji na povrchu ložiskových stojanů nebo ložiskových těles. Rotorovými vibracemi se rozumí kmitání točivých částí stroje a tento typ vibrací se dále dělí na relativní a absolutní vibrace. Relativní vibrace popisují pohyb točivé části vůči kmitající netočivé části, zatímco absolutní vibrace jsou vztaženy k nehybnému rámu.

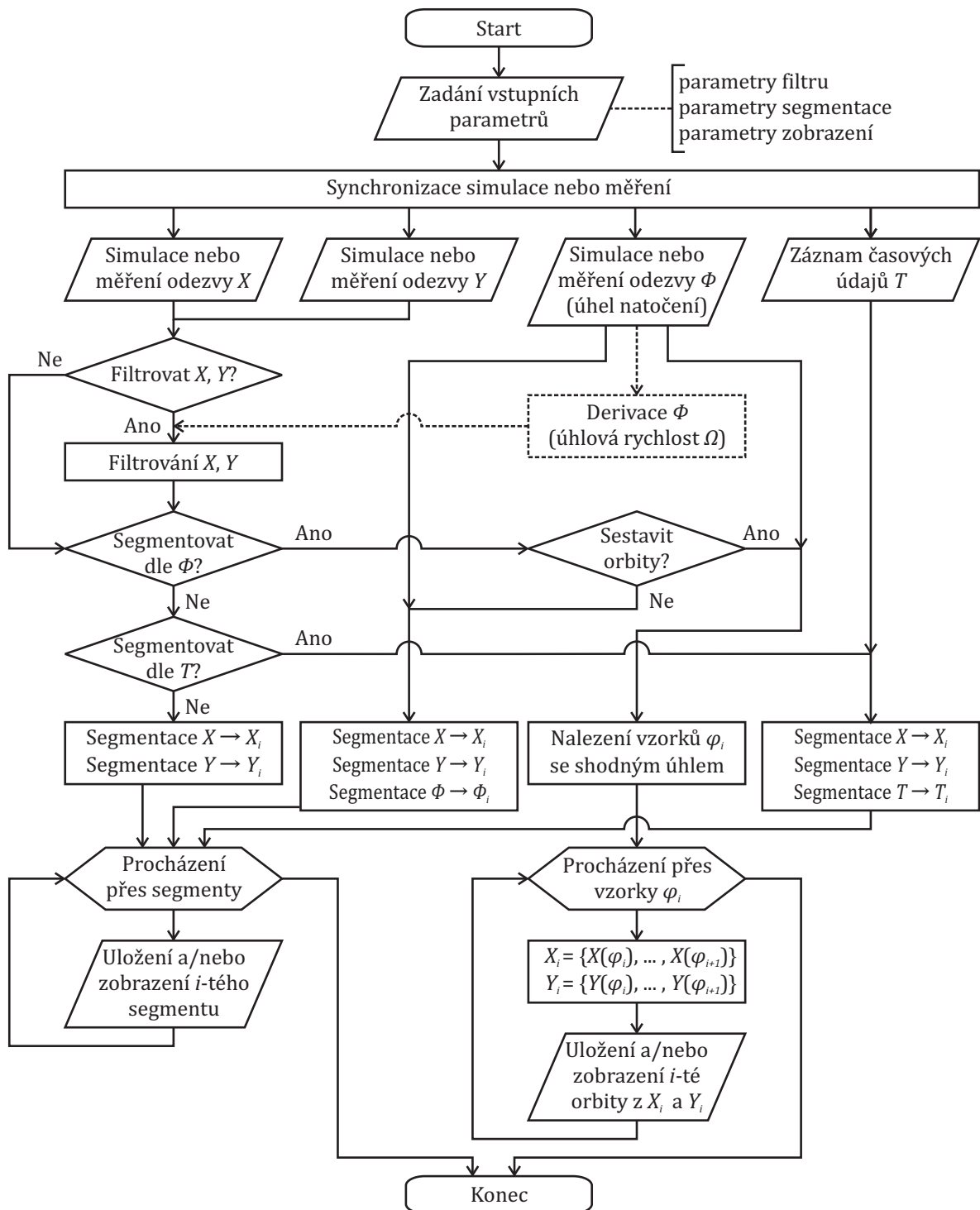
K hodnocení vibrací se přistupuje i v závislosti na provozních podmínkách stroje. ČSN ISO 20816-1 (2017) uvádí následující provozní podmínky:

- běžné (nominální) ustálené provozní podmínky,
- jiné (neustálené) podmínky, při kterých probíhají přechodové změny, včetně rozběhu nebo doběhu stroje, počátečního zatěžování a jiných změn zatížení,
- jevy (poruchy), které vedou ke změnám vibrací při běžném ustáleném provozu.

Vibrace za ustálených provozních podmínek se se nejčastěji hodnotí pouze v časové či frekvenční oblasti, pro hodnocení přechodových změn a poruch je vhodnější kombinovaná časově-frekvenční oblast (Norton a Karczub, 2003).

#### 5.1.1 Analýza vibrací v časové oblasti

Vibrace v časové oblasti lze sledovat dlouhodobě, v rámci přechodových stavů jako je najíždění či doběh, nebo je možné hodnotit okamžitou odezvu.

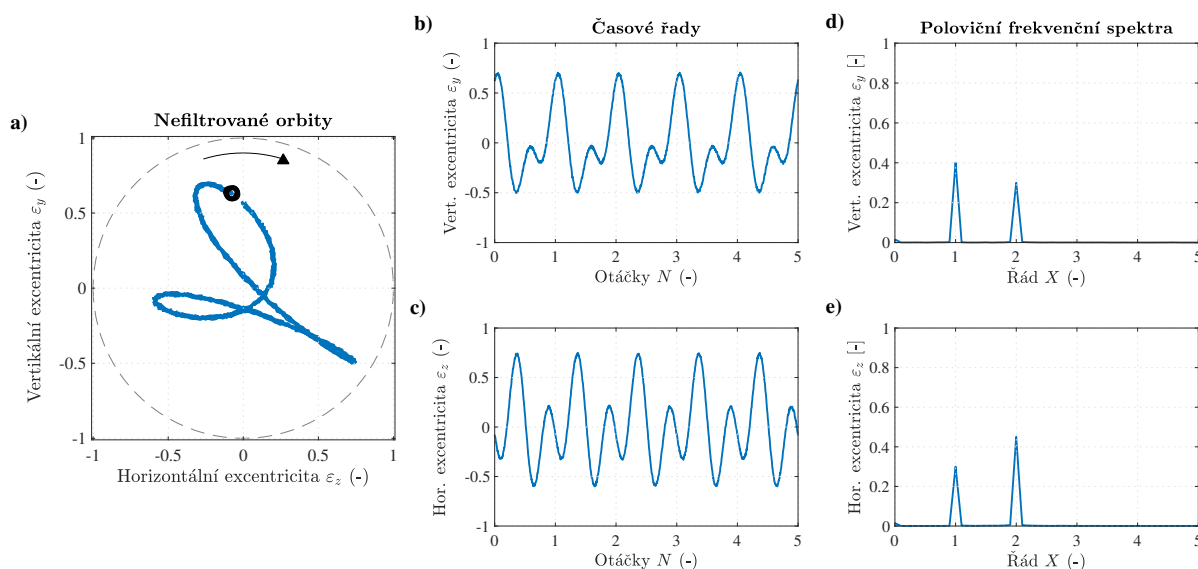


**Obrázek 5.1:** Vývojový diagram znázorňující postup při analýze vibrací v časové oblasti a při sestavování orbit.

Postup při hodnocení okamžitých vibrací v časové oblasti je nastíněn na obr. 5.1. Při tomto hodnocení se analyzuje změřený či simulovaný signál o délce desítek milisekund až desítek sekund. Pokud signál obsahuje šum či jiné typy poruch, je vhodné ho filtrovat. Filtry se používají i v případech, kdy se ze signálu separují otáčkové složky vibrací nebo stacionární (stejnoseměrná) složka. Stacionární složka se vyskytuje například v signálech z měření rotorových vibrací a vymezuje vzdálenost mezi snímačem rotorových vibrací a bodech, kolem kterého kmitá hřídel (Norton a Karczub, 2003; Muszyńska, 2005). Delší signály se často rozdělují na kratší úseky, které se dále statisticky zpracovávají. Odezva rotorových soustav, ve kterých se jednotlivé části otáčejí s různou úhlovou rychlostí, se někdy vykresluje v závislosti na úhlu natočení hlavního (hnacího) hřídele. Tato praxe se uplatňuje například při hodnocení odezvy pohonného ústrojí spalovacích motorů, kde jako reference slouží natočení klikového hřídele (Offner et al., 2018).

Kmitání rotačních částí točivých strojů může být souhlasné nebo protiběžné vůči směru otáčení a příslušné pohyby se označují jako pohyby s *dopřednou precesí* a *zpětnou precesí* (Byrtus et al., 2010; Muszyńska, 2005). Průběh odezvy v jednom směru informací o precesi neobsahuje (obr. 5.2b a 5.2c) a proto se odezva rotačních částí točivých strojů často zobrazuje jako tzv. *orbity*. Orbitu lze sestavit, pokud se měří nebo simuluje odezva ve dvou směrech, které se nacházejí v jedné rovině kolmé na osu rotace a zároveň je znám úhel natočení hřídele. Do diagramu se potom vynášejí trajektorie, kterou urazí střed hřídele během jednoho otočení a zároveň je vhodné vyznačit polohu středu hřídele na začátku otočení a vyznačit směr otáčení, aby bylo možné určit precesi pohybu (Muszyńska, 2005). V případě hodnocení vibrací při poruchách a přechodových dějích je vhodné jednotlivé orbity doplnit časovou značkou či je barevně odlišit, aby bylo možné rozlišit časovou následnost posuzovaného děje.

Diagramy dlouhodobého vývoje vibrací se nazývají *trendy* a zobrazují vývoj efektivní hodnoty vibrací nebo otáčkové složky vibrací. Trendy se obvykle využívají při posuzování stavu stacionárních strojů jako jsou turbosoustrojí a pro hodnocení vibrací turbodmychadel nemají



**Obrázek 5.2:** Nefiltrovaná orbita a), časové průběhy b), c) a frekvenční spektra d), e) signálů předepsaných funkcemi  $\varepsilon_y = 0,4 \cos(2\pi t) + 0,3 \sin(4\pi t + 0,25\pi) + \sigma(t)$  a  $\varepsilon_z = 0,3 \sin(2\pi t - 0,1\pi) - 0,45 \sin(4\pi t) + \sigma(t)$ , kde  $\sigma(t)$  je náhodný proces (šum) s oborem hodnot  $\langle 0, 0,03 \rangle$ .

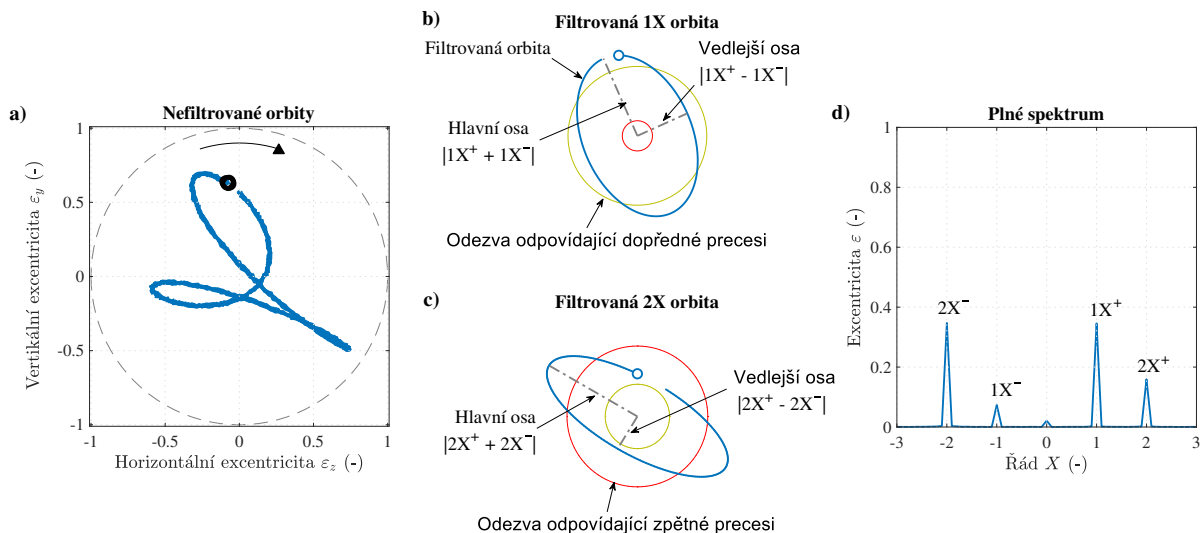
příliš význam. Obdobně lze sestavit diagram vývoje efektivní hodnoty vibrací v závislosti na libovolném proměnném parametru. Nejčastěji se tyto diagramy sestavují v závislosti na otáčkách stroje při najíždění a doběhu. Diagram ukazující závislost otáčkové složky odezvy a její fáze na otáčkách se nazývá *Bodeho diagram* (Muszyńska, 2005).

### 5.1.2 Analýza vibrací ve frekvenční oblasti

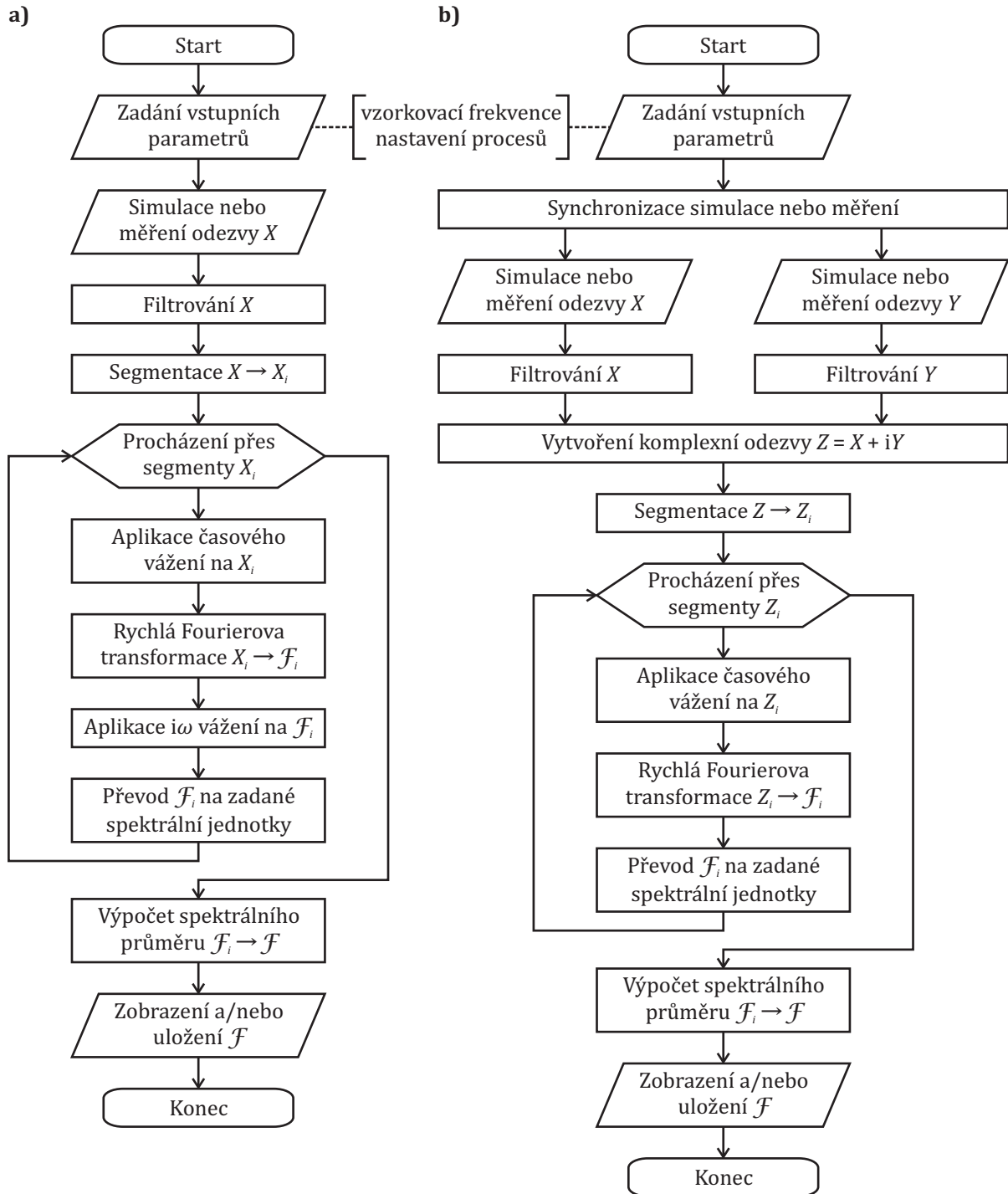
Při analýze experimentálních dat či výsledků simulací nelineárních modelů se odezva skládá z komponent o různých frekvencích. Pokud je těchto komponent větší množství je analýza odezvy v časové oblasti problematická a využívá se frekvenční oblast (Norton a Karczub, 2003). Základním nástrojem pro transformaci časové řady do frekvenční oblasti je *diskrétní Fourierova transformace*, která je nejčastěji počítána algoritmem *rychlé Fourierovy transformace* (FFT).

Základním předpokladem algoritmu FFT je, že jednotlivé body (vzorky) časové řady jsou uloženy s konstantní vzorkovací periodou. Časová řada se pak dále upravuje filtrováním, segmentací, tedy rozdělením na kratší úseky, aplikací váhových oken atd. Tyto úpravy detailně rozebírá např. Randall (1987). Následnost všech operací je patrná z obr. 5.4a, který rovněž popisuje algoritmus programu *autofft* vypracovaného v rámci této práce a veřejně publikovaného na MATLAB Central File Exchange (Smolík, 2018).

Frekvenční spektrum získané transformací jedné časové řady neobsahuje informaci o precesi pohybu, což je ilustrováno na obr. 5.2d a 5.2e. Tento problém řeší analýza nefiltrované orbity. Nefiltrovaná orbita může být chápána jako soubor eliptických trajektorií, které popisují pohyb na jednotlivých frekvencích. Například nefiltrovaná orbita z obr. 5.3a je složena ze dvou komponent a šumu. Komponenty odpovídají pohybům s frekvencí otáčení  $1X$  (viz obr. 5.3b) a s dvojnásobnou frekvencí otáčení  $2X$  (viz obr. 5.3c) a v souladu s předchozí kapitolou lze tyto komponenty chápat jako filtrované orbity. Obě eliptické filtrované orbity lze dále rozdělit na dvě kruhové trajektorie odpovídající pohybům s dopřednou a zpětnou precesí. Příčné kmity



**Obrázek 5.3:** Nefiltrovaná orbita a), filtrované orbity odpovídající otáčkové složce b) a dvojnásobku otáčkové složky c) a plná spektra d) signálů předepsaných funkcemi  $\varepsilon_y = 0,4 \cos(2\pi t) + 0,3 \sin(4\pi t + 0,25\pi) + \sigma(t)$  a  $\varepsilon_z = 0,3 \sin(2\pi t - 0,1\pi) - 0,45 \sin(4\pi t) + \sigma(t)$ , kde  $\sigma(t)$  je náhodný proces (šum) s oborem hodnot  $\langle 0, 0,03 \rangle$ .



**Obrázek 5.4:** Vývojové diagramy znázorňující konstrukci frekvenčního spektra z časové řady  $X$  a) a konstrukci plného frekvenčního spektra z časových řad  $X$  a  $Y$  b). Diagram platí za předpokladu, že časové řady  $X$  a  $Y$  reprezentují kmitání rotoru v jedné referenční rovině, časové vzorky  $x_i$  a  $y_i$  jsou ukládány synchronně, směry  $X$  a  $Y$  jsou na sebe kolmé a rotor se otáčí ve směru od  $X$  k  $Y$ .

hřídele lze tedy na každé frekvenci popsat dvěma amplitudami, které lze uspořádat tak, že amplitudám pohybů se zpětnou precesí jsou přiřazeny záporné hodnoty frekvencí a amplitudám pohybů s dopřednou frekvencí jsou přiřazeny kladné hodnoty frekvencí. Takto sestavená funkce je ukázána na obr. 5.3d a nazývá se plné (frekvenční) spektrum<sup>1</sup> (Goldman a Muszyńska, 1999).

Plné spektrum je možné rovněž vypočítat pomocí rychlé Fourierovy transformace komplexní časové řady  $Z = X + iY$ , kde  $i$  je imaginární jednotka a  $X$ ,  $Y$  jsou synchronní časové řady odpovídající na sebe kolmým pohybům, které jsou orientovány tak, že se hřídel otáčí od  $X$  k  $Y$ . Celý postup při sestavování plného spektra je ilustrován vývojovým diagramem z obr. 5.4b.

## 5.2 Charakteristiky ohybového kmitání rotorů turbodmychadel

Pro rotory uložené v kluzném ložisku kruhového průřezu je typické, že ztratí stabilitu při překročení prahové úhlové rychlosti  $\omega_t$ . Díky tlumení kluzného ložiska je možné rotor provozovat i při úhlové rychlosti  $\omega_0$ , která je mírně vyšší než  $\omega_t$ . Pokud je ale úhlová rychlost  $\omega_0$  výrazně vyšší než  $\omega_t$ , dojde k samobuzenému kmitání, které se označuje jako víření oleje, při kterém se brzy vyčerpá ložisková vůle a v mezním cyklu se čep hřídele pohybuje po kruhové trajektorii s poloměrem  $\varepsilon \rightarrow 1$ . Pohyb je charakteristický dopřednou precesí a úhlovou rychlostí průvodice v rozmezí 0,42 – 0,49 násobku úhlové rychlosti  $\omega_0$  (Krämer, 1993; Muszyńska, 2005; San Andrés, 2010).

Ani rotory uložené v kluzných ložiscích s plovoucím pouzdrém nejsou nepodmíněně stabilní. Jejich prahová úhlová rychlost  $\omega_{t,p}$ , při které systém ztratí stabilitu, je dokonce nižší, než kdyby byl rotor uložen v běžném kluzném ložisku (Schweizer, 2010). Rotory v kluzných ložiscích s plovoucím pouzdrém ale mohou být bez větších problémů provozovány při plně rozvinutých nestabilitách typu *víření*<sup>2</sup> i *tlučení oleje*<sup>3</sup> a to díky tomu, že se nestabilita obvykle rozvine pouze v jednom z olejových filmů a druhý film funguje jako tlumicí prvek (Schweizer, 2009). Rotující součást se v nestabilním filmu pohybuje po kruhových trajektoriích, jejich poloměr je ale v mezním cyklu díky přídavnému tlumení stabilního filmu nižší než v předchozím případě a pohybuje se na úrovni  $\varepsilon \approx 0,8$  (Schweizer, 2009; Smolík et al., 2017).

Nominální frekvence nestabilního pohybu při nestabilitě typu víření oleje leží v případě vnějšího filmu v rozmezí 0,42 – 0,49 násobku úhlové rychlosti plovoucího pouzdra  $\omega_p$  a v případě vnitřního filmu v rozmezí 0,42 – 0,49 násobku efektivní hydrodynamické rychlosti filmu, kterou lze odhadnout jako součet  $\omega_p + \omega_0$  (Schweizer, 2009). Jakmile se nominální frekvence nestabilního pohybu ztotožní s vlastní frekvencí, která přísluší vlastnímu tvaru s dopřednou frekvencí, přejde víření oleje do nestability nazývané tlučení oleje. Tlučení oleje je stejné jako víření oleje zapříčiněno nestabilitou olejového filmu, ale projevuje se subsynchronním rezonančním kmitáním rotoru. V případě kluzných ložisek s jedním olejovým filmem se tlučení oleje projevuje rychlým nárůstem amplitud, který vede až ke kontaktům mezi rotorem a statorem (Krämer, 1993). U rotorů uložených v kluzných ložiscích s plovoucími pouzdry není tlučení oleje destruktivní, pokud má film, v němž k tlučení nedochází, dostatečné tlumení (Schweizer, 2010).

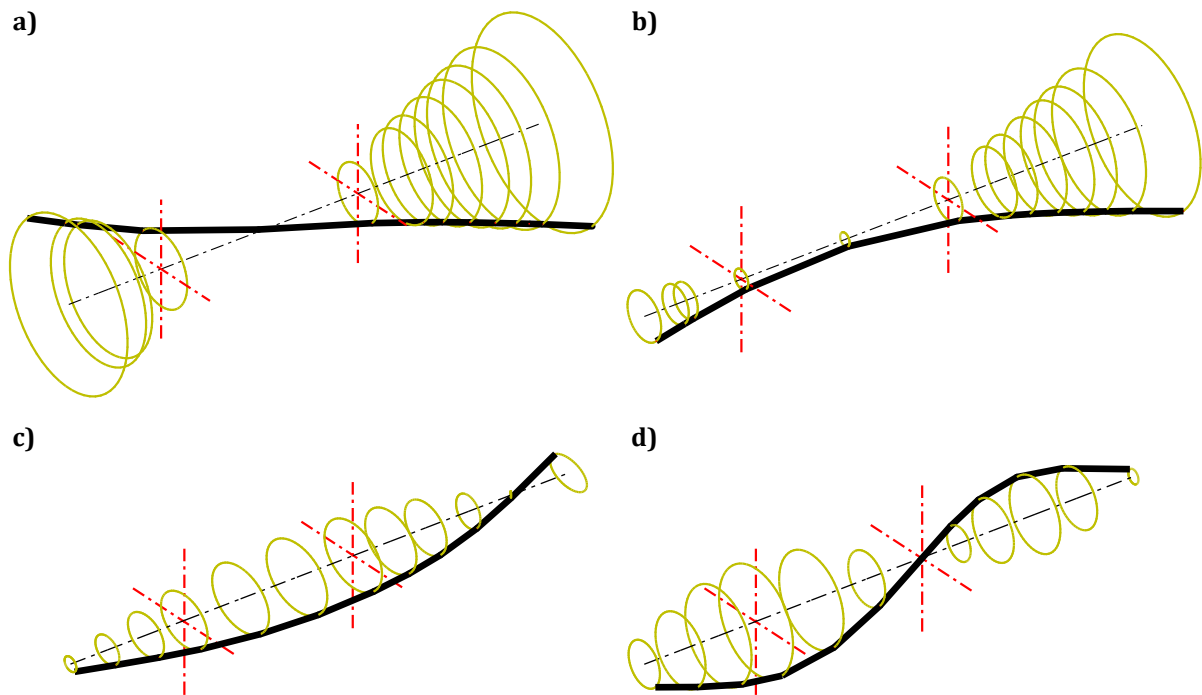
V předchozím odstavci je naznačeno, že pro klasifikaci nestabilit v kluzných ložiscích s plovoucím pouzdrém je nutné znát modální vlastnosti rotoru. Rotory turbodmychadel typicky mají v rozsahu provozních otáček tři až čtyři dvojice ohybových vlastních tvarů kmitu a jeden torzní vlastní tvar kmitu (Šimek, 2008; Schweizer, 2010; Smolík et al., 2017):

<sup>1</sup>Anglicky *fullspectrum*

<sup>2</sup>Anglicky *oil whirl*.

<sup>3</sup>Anglicky *oil whip*.





**Obrázek 5.5:** Nejčastější první čtyři ohybové vlastní tvary kmitu rotoru turbodmychadla: kónický a), cylindrický b), 1. ohybový c) a 2. ohybový d).

**Kónické vlastní tvary kmitu** (obr. 5.5a) se při  $\omega_0 = 0$  rad/s nejčastěji nacházejí v intervalu 200 – 300 Hz a jsou typické tím, že při nich téměř nedochází k elastickým deformacím hřídele. Mají jeden uzlový bod, jehož poloha závisí na rozložení hmotnosti rotoru.

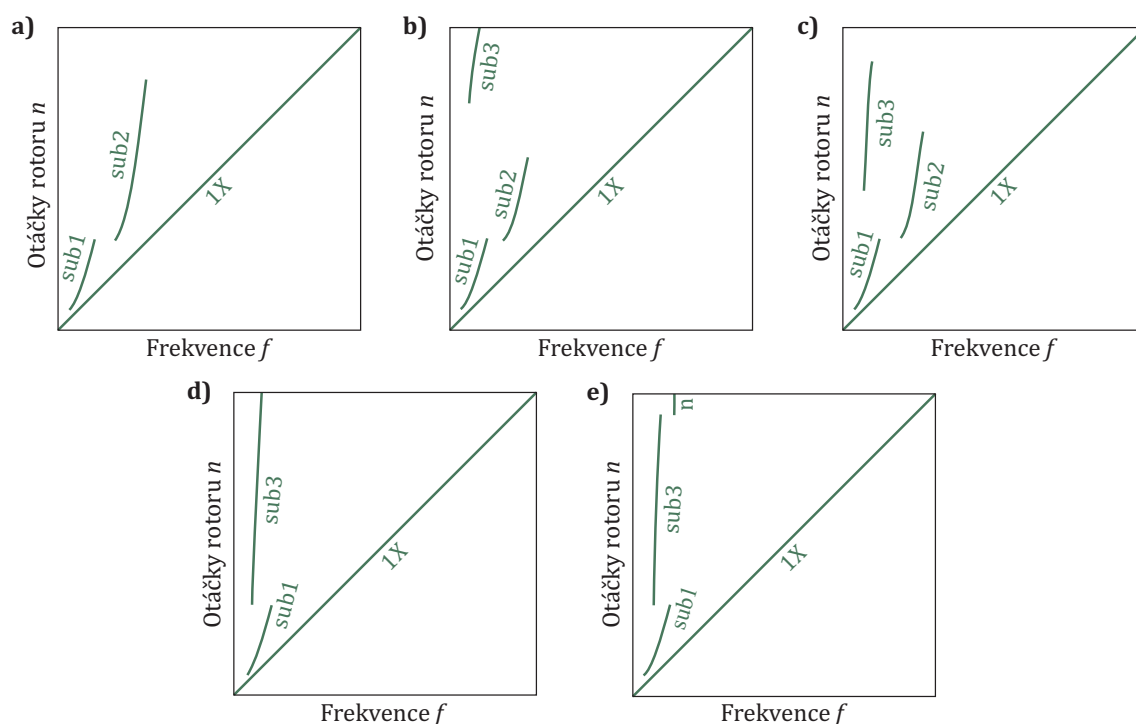
**Cylindrické (translační) vlastní tvary kmitu** (obr. 5.5a) se vyznačují tím, že nemají žádný uzlový bod, a při  $\omega_0 = 0$  rad/s je jejich vlastní frekvence zhruba  $2\times$  až  $3\times$  vyšší než vlastní frekvence kónických vlastních tvarů kmitu. Hřídel se může elasticky deformovat, míra deformací závisí na poměru tuhosti hřídele a hmotnosti oběžných kol.

**1. ohybové vlastní tvary kmitu** (obr. 5.5c) mají dva uzlové body, které se obvykle nacházejí mimo prostor radiálních ložisek, a jsou závislé na gyroskopických momentech oběžných kol. Může dokonce dojít k tomu, že 1. ohybový tvar s dopřednou precesí nemá kritické otáčky (Šimek, 2008).

**2. ohybové vlastní tvary kmitu** (obr. 5.5d) mají jeden uzlový bod v prostoru mezi radiálními ložisky a až dva uzlové body na převíslých koncích rotoru. V rozsahu provozních otáček se tyto tvary nemusí vůbec nacházet, častý je rovněž případ, kdy se v uvedeném rozsahu nachází pouze tvar se zpětnou precesí, který není citlivý na buzení nevyvázkem.

**1. torzní vlastní tvar kmitu** se vyznačuje torzním kmitáním oběžných kol v protifázi. Frekvenčně tento tvar často odpovídá 1. ohybovým vlastním tvarům kmitu při  $\omega_0 = 0$  rad/s.

Turbodmychadla nejsou provozována na konstantních otáčkách, ale pracují v určitém otáčkovém rozsahu. Se změnami otáček dochází k rozvoji a potlačování nestabilit v olejových filmech. Schweizer (2010) zevrubně studoval odezvy rotorů turbodmychadel používaných ve



Obrázek 5.6: Charakteristické typy odezvy rotoru turbodmychadla podle Schweizera (2010).

spalovacích motorech automobilů a malých nákladních vozů a došel k závěru, že existuje pět charakteristických typů odezvy ukázaných v grafech na obr. 5.6. Popisky z obr. 5.6 se týkají následujících jevů (Schweizer a Sievert, 2009; Schweizer, 2010):

- 1X** je *synchronní* odezva, tedy odezva na frekvenci odpovídající úhlové rychlosti rotoru  $\omega_0$ . Synchronní odezva je obvykle způsobena statickou nevyvážeností rotoru. V odezvě se kromě složky 1X mohou vyskytovat i její celočíselné násobky, dále označené **2X**, **3X** atd., které jsou zapříčiněny nelinearitami systému.
- sub1** je *subsynchronní* složka zapříčiněná nestabilitou vnitřního olejového filmu, která je doprovázena kónickým kmitáním rotoru s dopřednou precesí.
- sub2** je *subsynchronní* složka zapříčiněná nestabilitou vnitřního olejového filmu, která je doprovázena cylindrickým kmitáním rotoru s dopřednou precesí.
- sub3** je *subsynchronní* složka zapříčiněná nestabilitou vnějšího olejového filmu, která je doprovázena kónickým kmitáním rotoru s dopřednou precesí
- n** je *totální* nebo též *absolutní nestabilita*. Za totální nestabilitu se označuje stav, kdy oba olejové filmy ztratí stabilitu a *sub2* a *sub3* mají totožnou nebo velmi blízkou frekvenci. Pokud se frekvence složek *sub2* a *sub3* dostatečně liší, ke vzniku totální nestability nedochází a namísto toho jsou *sub2* a *sub3* přítomny v odezvě současně, jak je ukázáno na obr. 5.6c.



a) Parametry hřídele					
hustota	(kg m <sup>-3</sup> )				7,86 · 10 <sup>3</sup>
modul pružnosti	(MPa)				2,00 · 10 <sup>5</sup>
Poissonovo číslo	(–)				3,00 · 10 <sup>-1</sup>
koeficient tlumení $\alpha_m$	(s)				5,24 · 10 <sup>1</sup>
koeficient tlumení $\beta_k$	(s <sup>-1</sup> )				1,06 · 10 <sup>-6</sup>
b) Parametry oběžných kol		Turbínové kolo		Kompresorové kolo	
hmotnost	(kg)		3,26 · 10 <sup>-1</sup>		1,18 · 10 <sup>-1</sup>
mom. setrvačnosti k ose rotace	(kg m <sup>2</sup> )		8,10 · 10 <sup>-5</sup>		4,40 · 10 <sup>-5</sup>
mom. setrvačnosti k příčné ose	(kg m <sup>2</sup> )		7,70 · 10 <sup>-5</sup>		3,20 · 10 <sup>-5</sup>
statická nevývaha	(kg m)		0,00 · 10 <sup>0</sup>		0,00 · 10 <sup>0</sup>
c) Parametry radiálních ložisek		Turbínové ložisko		Kompresorové ložisko	
		vnitřní film	vnější film	vnitřní film	vnější film
poloměr ložiska	(m)	5,53 · 10 <sup>-3</sup>	8,00 · 10 <sup>-3</sup>	5,53 · 10 <sup>-3</sup>	8,00 · 10 <sup>-3</sup>
délka ložiska	(m)	6,50 · 10 <sup>-3</sup>	9,00 · 10 <sup>-3</sup>	6,50 · 10 <sup>-3</sup>	9,00 · 10 <sup>-3</sup>
radiální vůle	(m)	3,40 · 10 <sup>-5</sup>	4,40 · 10 <sup>-5</sup>	3,40 · 10 <sup>-5</sup>	4,40 · 10 <sup>-5</sup>
dynamická viskozita	(Pa s)	4,90 · 10 <sup>-3</sup>	4,90 · 10 <sup>-3</sup>	6,40 · 10 <sup>-3</sup>	6,40 · 10 <sup>-3</sup>
hmotnost pouzdra	(kg)		7,20 · 10 <sup>-3</sup>		7,20 · 10 <sup>-3</sup>
moment setrvačnosti pouzdra	(kg m <sup>2</sup> )		3,36 · 10 <sup>-7</sup>		3,36 · 10 <sup>-7</sup>

**Tabulka 5.1:** Parametry rotoru turbodmychadla použitého pro simulaci kmitání s využitím analytického modelu hydrodynamických sil jsou převzaty z (Tian et al., 2012).

Modely i) a ii) jsou implementovány v Matlabu, model iii) je implementován v softwaru AVL Excite. Protože AVL Excite využívá silovou formulaci pro popis kinematických vazeb, není možné předepsat hřídeli konstantní úhlovou rychlost a otáčení hřídele je zajištěno pomocí regulátoru s předepsaným pohybem. Regulátor je poddajnou torzní vazbou připojen k uzlu 11.

Plovoucí pouzdra mají tři stupně volnosti – dva příčné posuvy jsou popsány v oddíle 2.1.3 a natočení kolem podélné osy, které závisí na rovnováze třecích sil a je rozebráno v oddíle 3.5.2. Parametry pouzder jsou uvedeny v tab. 5.1c.

### 5.3.2 Parametry simulace

Odezva systému byla simulována při konstantních provozních parametrech a při různých konstantních frekvencích otáčení rotoru  $f_r$  daných posloupností  $f_{r,i} = (416,6, 500, \dots, 2500)$  Hz. Simulace pro každou zvolenou frekvenci  $f_r$  byla provedena v časovém intervalu  $t \in (0, 0,3)$  s. Počáteční podmínky byly zvoleny tak, aby odpovídaly statické rovnovážné poloze systému, na který působí tíhové zrychlení a hydrodynamické síly.

Pohybové rovnice modelů i) a ii) byly integrovány pomocí matlabovské funkce `ode113`, která využívá vícekrokovou Adamsovu-Bashforthovu-Moultonovu metodu. Pohybová rovnice modelu iii) byla řešena pomocí zpětného diferenčního schématu s variabilním časovým krokem, které odpovídá matlabovské funkci `ode15s` s volbou 'BDF', 'on' (Offner et al., 2018). Maximální časový krok integrace byl  $\Delta t_{\max} = 20 \mu\text{s}$ , výsledky byly transformovány do časových řad s konstantní vzorkovací periodou  $\Delta t = 20 \mu\text{s}$ , což odpovídá vzorkovací frekvenci  $f_s = 50$  kHz.

### 5.3.3 Výsledky

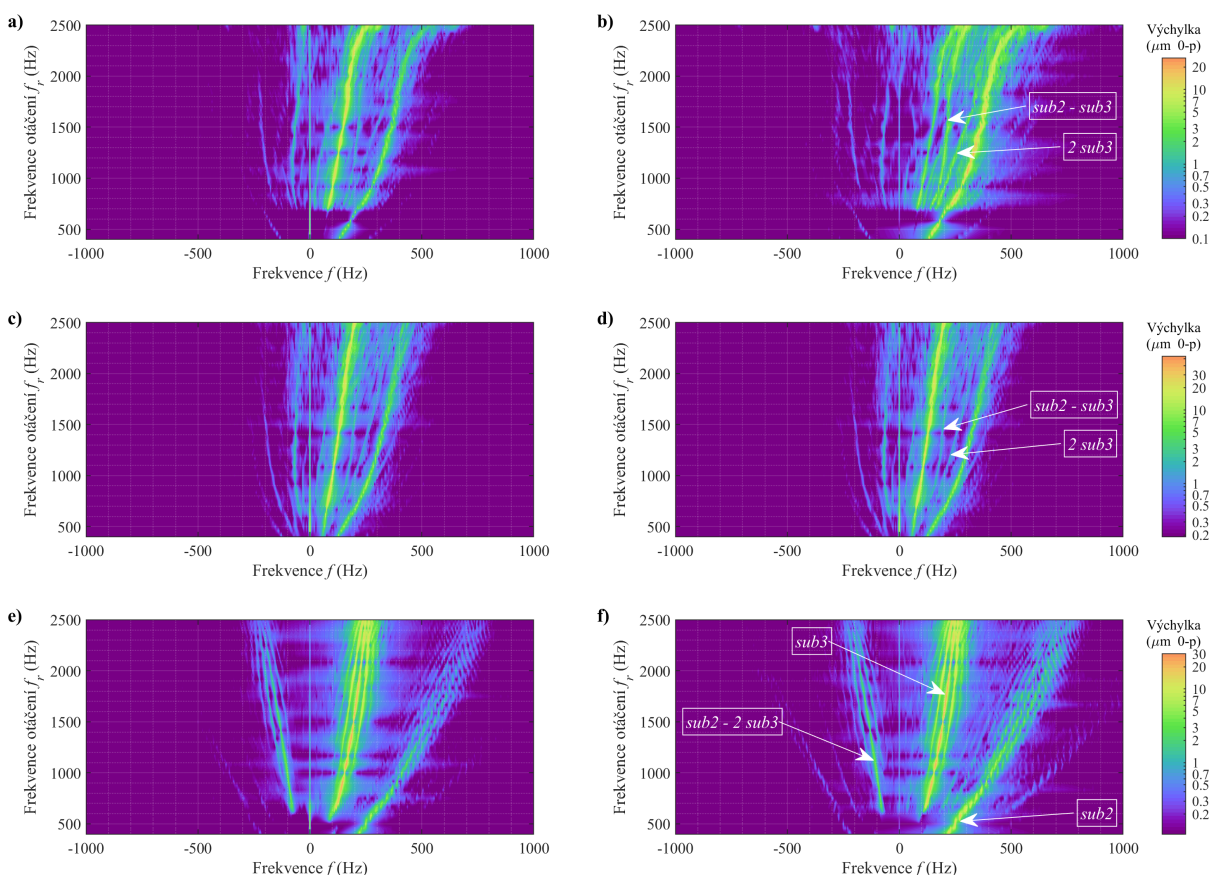
Odezva v uzlech 12 a 13 nacházejících se v radiálních ložiskách je zobrazena ve formě plných frekvenčních spekter na obr. 5.8. Odezva testovacího rotoru turbodmychadla je charakteristická výraznými subharmonickými složkami *sub2* a *sub3*. Rotor turbodmychadla je typu c) ve smyslu dělení dle charakteru odezvy, které je definováno na obr. 5.6.

Na základě předpokladu, že numerické řešení Reynoldsovy rovnice je přesnější než její přibližné analytické řešení, je odezva modelu iii) dále uvažována jako referenční. V referenční odezvě se vyskytují následující složky:

*sub2* zapříčiněná nestabilitou vnějšího filmu je nejvýznamnější složkou odezvy do  $f_r \approx 830$  Hz.

Se zvyšující se frekvencí otáčení  $f_r$  se amplituda složky *sub2* snižuje až k nule. V pásmu  $f_r \in \langle 450, 830 \rangle$  Hz pravděpodobně dochází ke dvěma skokovým změnám frekvence *sub2*. Vzhledem k metodě výpočtu odezvy nelze tuto domněnku potvrdit.

*sub3* zapříčiněná nestabilitou vnitřního filmu se projevuje po překročení  $f_r \approx 670$  Hz. K této složce se postupně přidávají postranní frekvence, jejichž amplitudy dosahují maxima v okolí  $f_r = 2300$  Hz.



**Obrázek 5.8:** Odezva testovacího rotoru turbodmychadla v uzlu 12 (levý sloupec) a v uzlu 13 (pravý sloupec) ve formě plného frekvenčního spektra. Diagramy a), b) byly získány analýzou modelu i), diagramy c), d) analýzou modelu ii) a diagramy e), f) analýzou modelu iii).

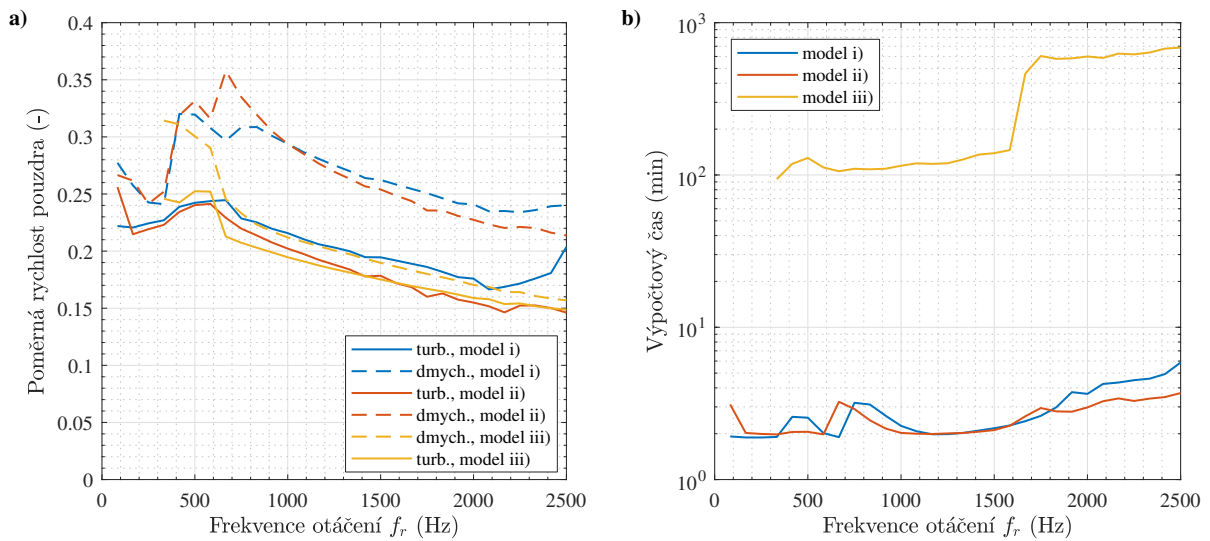
$sub2 - 2 sub3$  se zpětnou precesí (se zápornou frekvencí  $f$ ) se projevuje od  $f_r \approx 650$  Hz. Jde o projev nelinearity systému, který experimentálně dokázali Schweizer a Sievert (2009).

Odezva modelu ii) vykazuje podobné rysy jako referenční odezva, nicméně subharmonická složka  $sub2$  má nižší frekvenci. Postranní frekvence v odezvě chybí, ale projevují se další subharmonické složky zapříčiněné nelinearitou systému, nejvíce  $2 sub3$ ,  $sub2 - sub3$ . Amplitudy  $sub2$  a  $sub3$  jsou v podobném poměru jako v referenční odezvě.

Odezva modelu i) se od referenční odezvy liší v několika směrech. Složka  $sub2$  má v uzlu 13 vyšší amplitudy než složka  $sub3$  (obr. 5.8b) a odezva se zpětnou precesí zcela chybí. V uzlu 12 vykazuje odezva velmi podobný trend jako v případě modelu ii). Po překročení  $f_r \approx 2400$  Hz dochází k prudkým změnám frekvence obou hlavních subharmonických složek.

Uvedené rozdíly jsou způsobeny skutečností, že poměr délky a průměru  $\eta$  ani jednoho ze čtyř olejových filmů v systému nesplňuje kritérium pro krátké ložisko  $\eta \leq 0,5$  dle San Andrése (2010). Vliv mají i rozdílné úhlové rychlosti plovoucích pouzder na straně dmychadla, které jsou zakresleny v grafu na obr. 5.9a.

I když ani jeden z aproximativních modelů nelze doporučit pro použití při velmi přesných analýzách odezvy rotorů turbodmychadel uložených na kluzných ložiskách konečné délky, lze je využít v optimalizačních úlohách, protože mají zhruba o dva řády nižší nároky na výpočtový čas, což je ukázáno na obr. 5.9b.



**Obrázek 5.9:** Porovnání predikované poměrné rychlosti plovoucích pouzder a) a výpočtového času potřebného pro simulaci b). Výpočtový čas byl měřen na kancelářském PC HP Compaq Elite 8300 MT s procesorem Intel® Core™ i5-3570 @  $2 \times 3,4$  GHz s 16,0 GB RAM při výpočtu na jednom vláknu.

## 6 Analýza kmitání sériově vyráběného rotoru

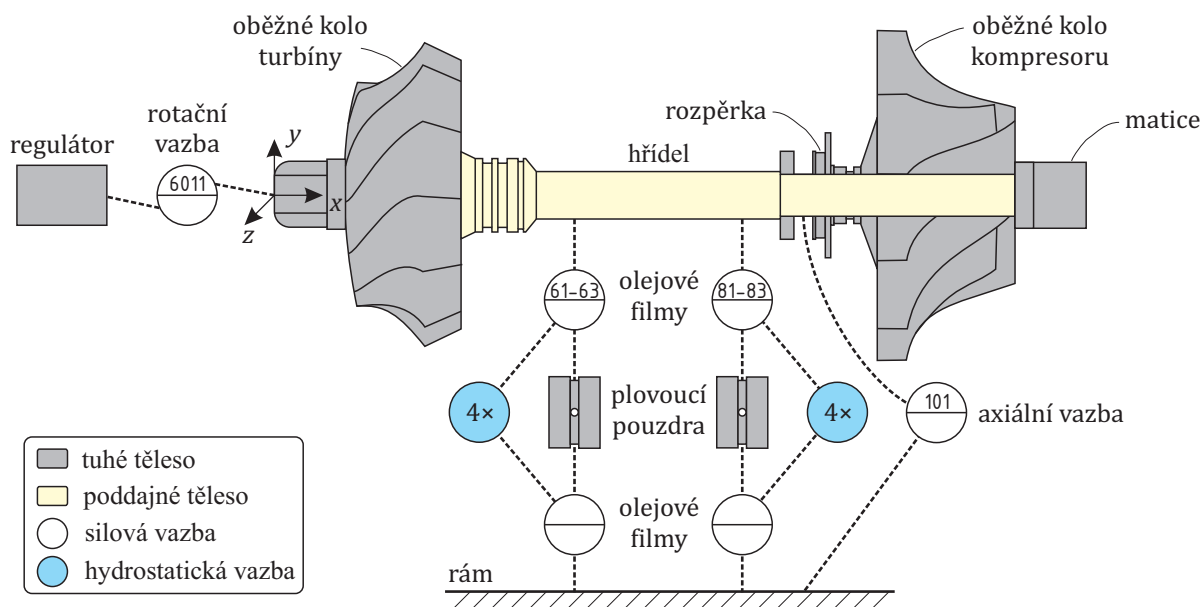
V této kapitole je analyzováno ohybové kmitání konkrétního sériově vyráběného rotoru turbodmychadla, které může najít uplatnění v dieselových motorech lehkých užitkových vozů, lehkých nákladních automobilů a traktorů.

V úvodu kapitoly je popsán model a jeho parametry, jsou stanoveny provozní vůle ložisek a efektivní viskozita olejových filmů. Dále je provedena citlivostní analýza odezvy rotoru na změnu nevyváhy rotoru a změnu ložiskových vůlí. V této části je ukázáno, že ložiskové vůle mají zásadní vliv na typ odezvy rotoru (Tian et al., 2012; Smolík et al., 2017) a je tedy nutné určit provozní vůle co nejpřesněji. V předposlední části kapitoly je diskutována efektivita a přesnost různých modelů proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech a v závěru kapitoly je navrženo ložisko s plovoucím pouzdem, ve kterém jsou potlačeny projevy nestabilních kmitů a v němž jsou sníženy hydrodynamické třecí ztráty.

### 6.1 Popis modelu

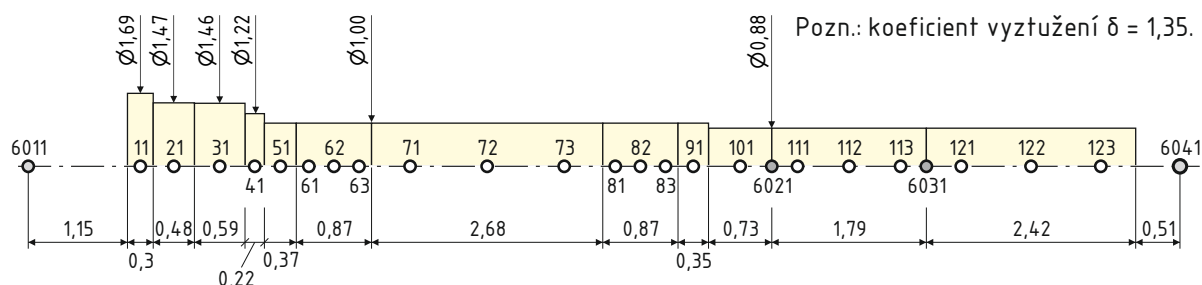
#### 6.1.1 Parametry modelu

Schéma modelu rotoru turbodmychadla je znázorněno na obr. 6.1, pohyb jednotlivých těles je definován v tab. 6.1. Model se sestává z rotoru s poddajným hřídelem s tuhými oběžnými koly, který je podepřen dvěma radiálními kluznými ložisky s tuhými plovoucími pouzdry. Vnitřní a



**Obrázek 6.1:** Schéma modelu analyzovaného rotoru turbodmychadla. Čísla ve značkách vazeb označují čísla uzlů vázaných poddajných těles.





**Obrázek 6.2:** Bezrozměrná geometrie poddajného hřídele je vztažena k průměru čepu hřídele, který je přibližně  $8,50 \cdot 10^{-3}$  m.

Těleso	Rám	Regulátor	Rotor	Plovoucí pouzdro
typ tělesa	tuhé	tuhé	poddajné	tuhé
stupně volnosti – posuvy	–	–	$x, y, z$	$y, z$
stupně volnosti – natočení	–	–	kolem $x, y, z$	kolem $x$
předepsané pohyby	–	natočení kolem $x$	–	–
materiál	litina	–	ocel	bronz
Youngův modul (MPa)	–	–	$2,05 \cdot 10^5$	–
Poissonovo číslo (–)	–	–	$2,90 \cdot 10^{-1}$	–
koeficient tlumení $\alpha_m$ (s)	–	–	$5,24 \cdot 10^1$	–
koeficient tlumení $\beta_k$ ( $s^{-1}$ )	–	–	$1,06 \cdot 10^{-6}$	–
teplotní koef. roztažnosti ( $K^{-1}$ )	$9,00 \cdot 10^{-6}$	–	$1,10 \cdot 10^{-5}$	$2,04 \cdot 10^{-5}$

**Tabulka 6.1:** Shrnutí stupňů volnosti a materiálových parametrů těles v systému.

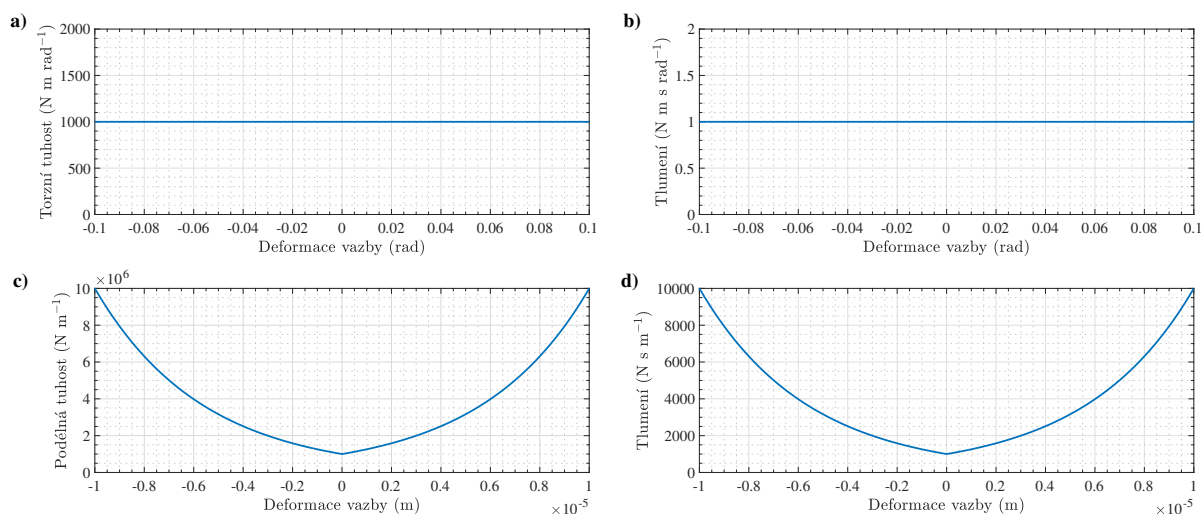
Těleso	Řídicí uzel	$m$ (kg)	$I_{xx}$ ( $kg\ m^2$ )	$I_{yy}$ ( $kg\ m^2$ )	$I_{zz}$ ( $kg\ m^2$ )	$D_{xy}$ ( $kg\ m^2$ )
turbínové kolo	6011	$1,416 \cdot 10^{-1}$	$2,376 \cdot 10^{-5}$	$1,956 \cdot 10^{-5}$	$1,955 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-9}$
rozpěrka	6021	$7,718 \cdot 10^{-3}$	$2,619 \cdot 10^{-7}$	$2,990 \cdot 10^{-7}$	$2,990 \cdot 10^{-7}$	$0 \cdot 10^0$
kompresorové kolo	6031	$2,795 \cdot 10^{-2}$	$1,954 \cdot 10^{-5}$	$1,327 \cdot 10^{-5}$	$1,329 \cdot 10^{-5}$	$0 \cdot 10^0$
samojistná matice	6041	$4,280 \cdot 10^{-3}$	$8,300 \cdot 10^{-8}$	$7,800 \cdot 10^{-8}$	$7,200 \cdot 10^{-8}$	$0 \cdot 10^0$
plovoucí pouzdro	–	$5,830 \cdot 10^{-3}$	$1,840 \cdot 10^{-7}$	$1,370 \cdot 10^{-7}$	$1,370 \cdot 10^{-7}$	$0 \cdot 10^0$

**Tabulka 6.2:** Hmotnostní parametry tuhých těles a tuhých součástí rotoru turbodmychadla. Řídicí uzel označuje číslo uzlu poddajného hřídele, ke kterému je tuhá součást připojena.

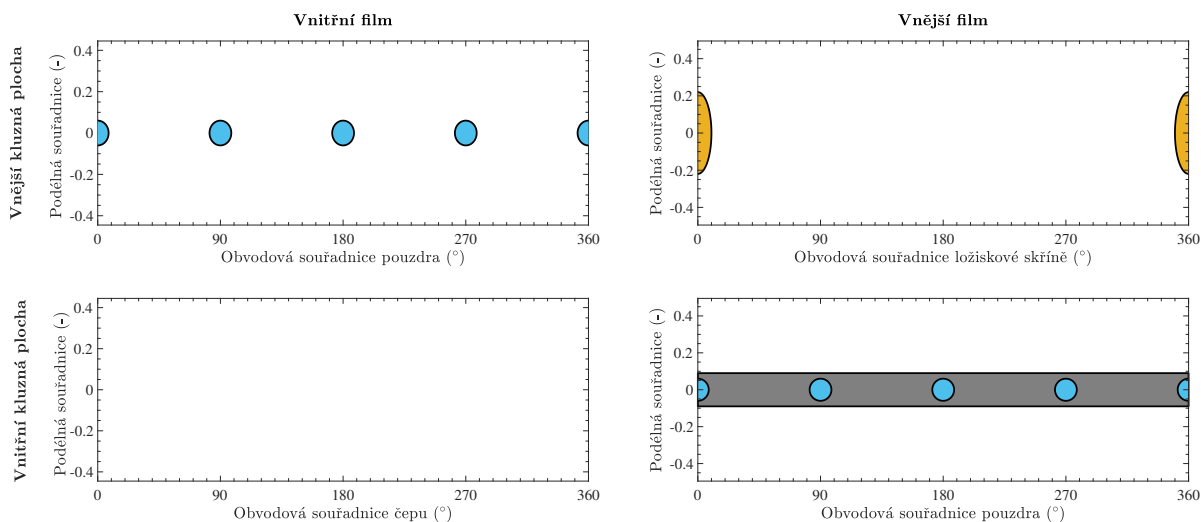
vnější film každého ložiska jsou propojeny čtyřmi mazacími otvory. Otáčky rotoru jsou řízeny pomocí regulátoru s předepsaným pohybem. Aerodynamické síly působící v turbínovém a kompresorovém stupni jsou zanedbány.

Stupně volnosti všech těles a jejich materiálové parametry jsou shrnuty v tab. 6.1. Rozměry použité při sestavení koeficientových matic poddajného hřídele jsou zakresleny na obr. 6.2, hmotnostní parametry oběžných kol a dalších těles připojených k hřídeli jsou uvedeny v tab. 6.2. Parametry axiální a rotační vazby, které jsou použity pro připojení rotoru k rámu a regulátoru k rotoru, jsou zakresleny v grafech na obr. 6.3. Nominální vlastnosti radiálních ložisek jsou shrnuty v tab. 6.3, okrajové podmínky na kluzných plochách jsou ukázány na obr. 6.4.





**Obrázek 6.3:** Tuhost a) a tlumení b) rotační vazby mezi regulátorem a rotorem turbodmychadla a tuhost c) a tlumení d) axiální vazby mezi rotorem turbodmychadla a rámem.



**Obrázek 6.4:** Okrajové podmínky v ložiskách. Ve zlaté oblasti je předepsán napájecí tlak  $4,50 \cdot 10^5$  Pa, v tmavě šedé oblasti je ložisková mezera zvětšena o  $5,4 \cdot 10^{-4}$  m a v modrých oblastech se nacházejí mazací otvory propojující vnější a vnitřní film. Na okrajích filmu je uvažován tlak  $1,00 \cdot 10^5$  Pa, saturační (kavitační) tlak je  $9,80 \cdot 10^4$  Pa.

Strana	Film	Průměr (-)	Délka (-)	Radiální vůle (m)	Typ oleje	Velikost sítě
turbínová	vnitřní	1,00	0,87	$1,50 \cdot 10^{-5}$	10W-30	121 × 21
	vnější	1,54	0,99	$3,25 \cdot 10^{-5}$	10W-30	121 × 21
kompresorová	vnitřní	1,00	0,87	$1,50 \cdot 10^{-5}$	10W-30	121 × 21
	vnější	1,54	0,99	$3,25 \cdot 10^{-5}$	10W-30	121 × 21

**Tabulka 6.3:** Nominální parametry radiálních ložisek. Bezrozměrný průměr a délka jsou vztaženy k průměru čepu hřídele, který je přibližně  $8,50 \cdot 10^{-3}$  m.

### 6.1.2 Provozní vůle radiálních ložisek

Provozní vůle radiálních ložisek jsou určeny pomocí rovností (3.92) a (3.93) a jsou vykresleny na obr. 6.5. Střední teploty olejových filmů a těles uvažované při výpočtu jsou uvedeny v tab. 6.4 a nominální rozměry ložisek při teplotě 20 °C jsou uvedeny v tab. 6.3. Závislost střední teploty olejových filmů na frekvenci otáčení  $f_r$  je v souladu s prací, kterou publikovali (Bukovník a Smolík et al., 2017), aproximována lineární funkcí.

### 6.1.3 Provozní viskozita oleje

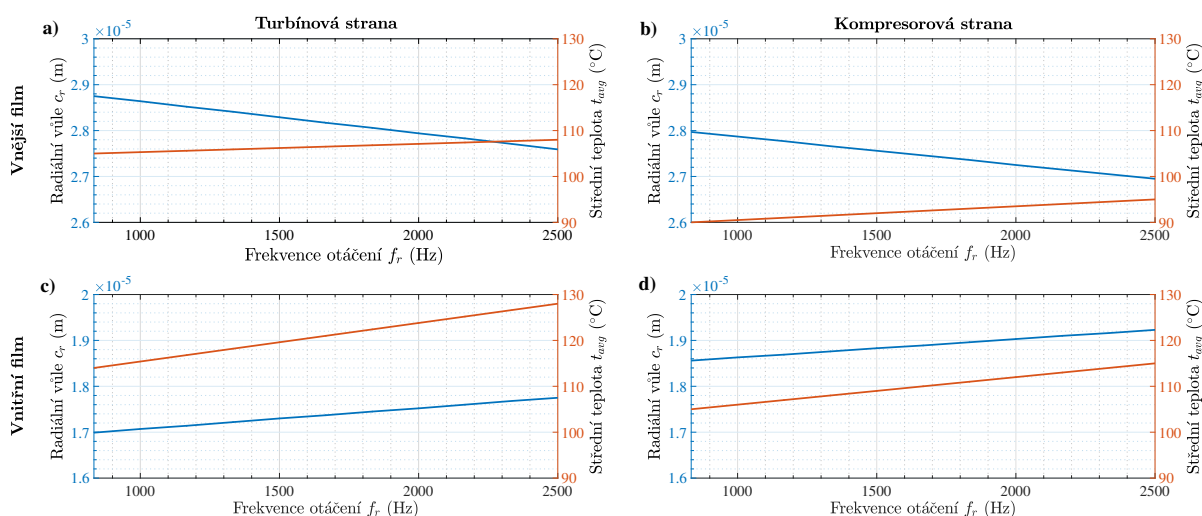
Závislost dynamické viskozity na teplotě je popsána pomocí Vogelovy rovnice, která má pro případ oleje SAE 10W-30 tvar

$$\ln [\mu(t_o)] = \frac{737,69}{t_o + 89,9} - 8,5272, \quad (6.1)$$

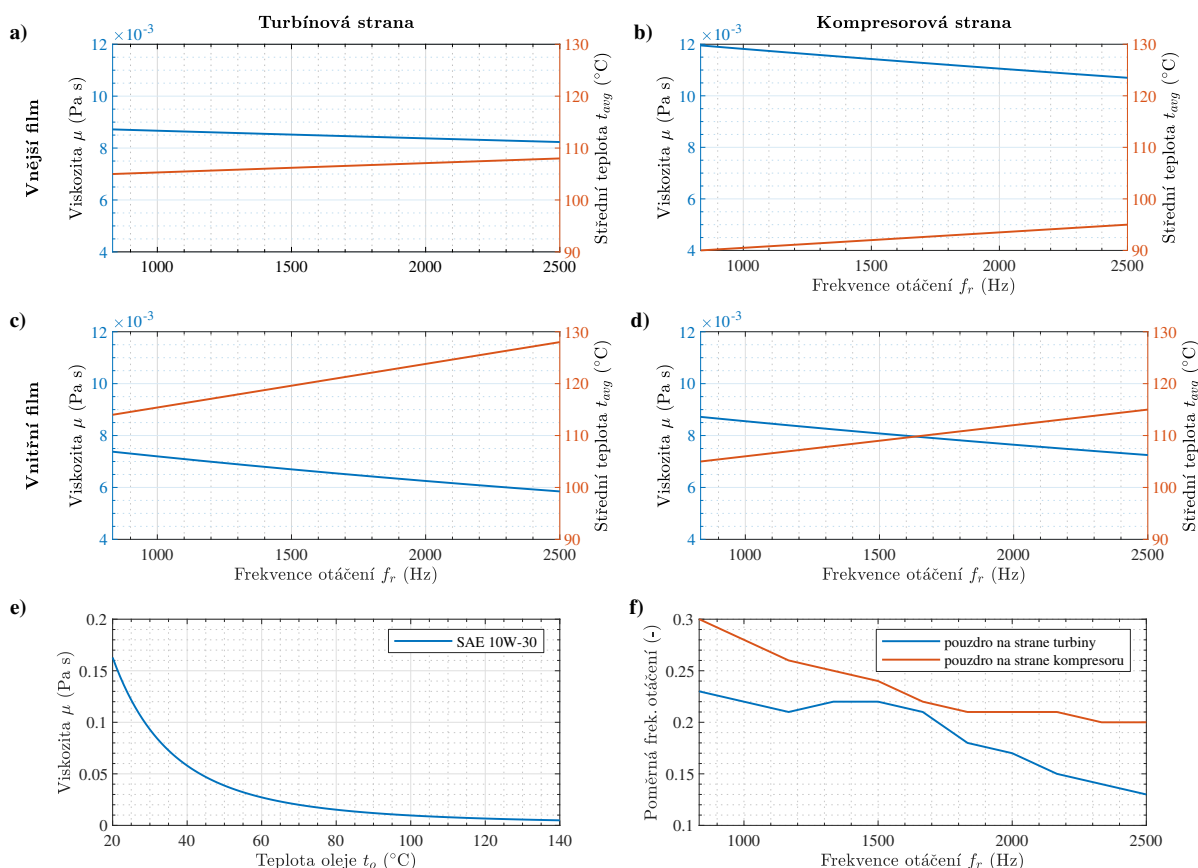
kde  $\mu(t_o)$  je dynamická viskozita oleje při teplotě  $t_o$  ve °C (Offner et al., 2018). Dynamická viskozita oleje SAE 10W-30 při teplotách olejových filmů uvedených v předchozím oddíle je znázorněna na obr. 6.6a–d a diagram vyjadřující závislost dynamické viskozity tohoto oleje na jeho teplotě je vykreslen na obr. 6.6e.

Střední teplota	Turbínové ložisko		Kompresorové ložisko	
	$f_r = 833,3$ Hz	$f_r = 2500$ Hz	$f_r = 833,3$ Hz	$f_r = 2500$ Hz
čep (°C)	145	145	90	90
ložisková pánev (°C)	160	160	120	120
vnitřní film (°C)	114	128	105	115
vnější film (°C)	105	108	90	95

**Tabulka 6.4:** Teploty rotoru a ložiskové skříně vypočítal s využitím 3D CFD simulace Kořán (2013). Tyto výsledky jsou využity také pro stanovení střední teploty olejových filmů, přičemž je v souladu s (Trippett a Li, 1984) předpokládáno, že mezi olejem a povrchy čepu a ložiskové pánve nedochází k výměně tepla.



**Obrázek 6.5:** Závislost vůlí ložisek a středních teplot olejových filmů na frekvenci otáčení rotoru  $f_r$ .



**Obrázek 6.6:** Závislost viskozity a středních teplot olejových filmů na frekvenci otáčení rotoru  $f_r$  a) – d), závislost dynamické viskozity oleje SAE 10W-30 na jeho teplotě e) a závislost počáteční poměrné frekvence otáčení pouzder na frekvenci otáčení rotoru f).

#### 6.1.4 Provozní stavy, počáteční podmínky a další parametry

Na všechna tělesa v soustavě působí tíhové zrychlení  $g = -9.8067 \text{ m s}^{-2}$  ve směru vertikální osy  $y$ . Nevyváženost rotoru je specifikována pro jednotlivé analýzy zvlášť. Plovoucí pouzdra jsou uvažována jako perfektně vyvážená, protože jejich nevyváženost má na amplitudy kmitání rotoru turbodmychadla minimální vliv (Smolík a Hajžman, 2016).

Pokud není uvedeno jinak, je odezva systému simulována v čase  $t \in \langle 0, 0,16 \rangle$  s a při konstantní frekvenci otáčení rotoru  $f_r$ , která je dána posloupností  $f_{r,i} = (833,3, 1000, \dots, 2500)$  Hz, což odpovídá posloupnosti  $n_{r,i} = (50\,000, 60\,000, \dots, 150\,000)$  ot min $^{-1}$ . Počáteční poloha těles je zvolena tak, že se plovoucí pouzdra i čepy hřídele nacházejí v geometrických středech ložisek. Počáteční frekvence otáčení rotoru je dána posloupností  $f_{r,i}$ , počáteční poměrná frekvence otáčení plovoucích pouzder je dána funkcemi z obr. 6.6f. Funkce jsou vytvořeny na s využitím simulace odezvy perfektně vyváženého rotoru turbodmychadla. Po ustálení odezvy jsou zjištěny úhlové rychlosti pouzder, z nich jsou vypočítány poměrné frekvence otáčení pouzder a výsledné hodnoty se zaokrouhlí na dvě platné číslice.

Pohybová rovnice je integrována v softwaru AVL Excite pomocí zpětného diferenčního schématu (BDF) s variabilním časovým krokem od  $6,25 \cdot 10^{-9}$  do  $2,00 \cdot 10^{-6}$  s. Hydrodynamický tlak v olejových filmech je stanoven s využitím metody konečných prvků.

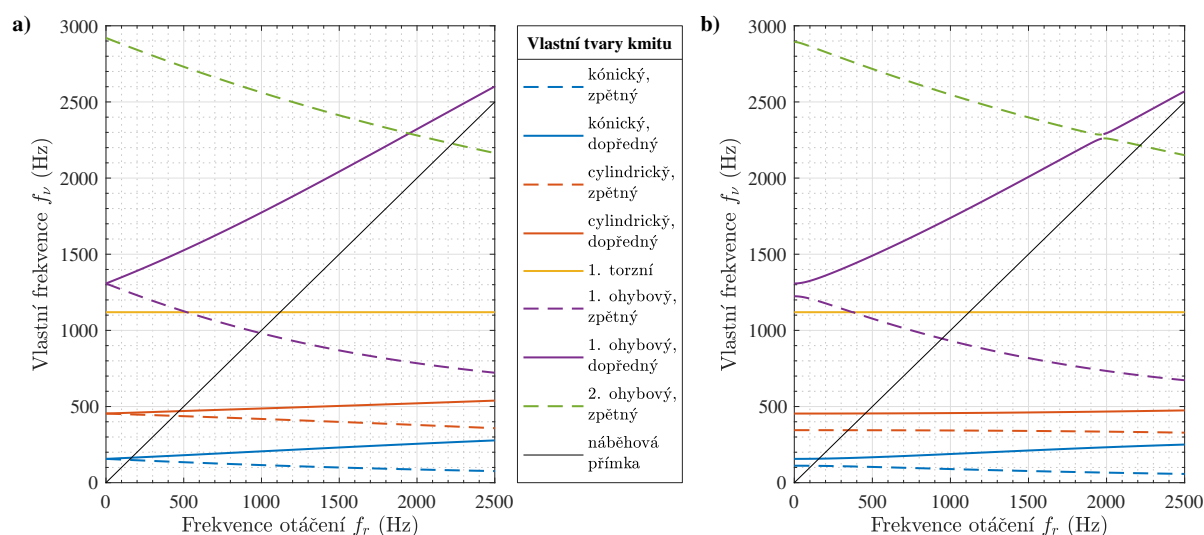
System není v čase  $t = 0$  s v rovnovážném stavu, což se projevuje existencí přechodové odezvy (volných kmitů) v intervalu  $t < 0,035$  s. Odezva je tedy analyzována až po odeznění přechodové odezvy v čase  $t \geq 0,035$  s. Výsledky jsou transformovány do časových řad se vzorkovací periodou  $2,00 \cdot 10^{-5}$  s, která odpovídá vzorkovací frekvenci  $f_s = 5,00 \cdot 10^5$  Hz. Pro účely odhadu frekvenčního spektra pomocí rychlé Fourierovy transformace (FFT) jsou od výsledných časových řad odečteny matlabovskou funkcí `detrend` s volbou `'constant'` jejich střední hodnoty a následně je na časové řady aplikován hornopropustný filtr vytvořený kódem uvedeným níže. Před provedením FFT je na časové řady aplikováno Hannovo váhové okno.

```
N = 5; % řád filtru
fstop = 5.0; % mezní frekvence (Hz)
Astop = 25; % zeslabení signálu (dB)
fs = 50000; % vzorkovací frekvence (Hz)
h = fdesign.highpass('N,Fst,Ast', N, fstop, Astop, fs);
hpfilt = design(h, 'cheby2');
```

## 6.2 Odhad vlastních frekvencí rotoru turbodmychadla

Ohybové kmitání rotoru turbodmychadla je snazší analyzovat, pokud jsou známy alespoň přibližné hodnoty vlastních a kritických frekvencí systému. [Schweizer a Sievert \(2009\)](#) a [Nguyen-Schäfer \(2012\)](#) doporučují pro účely odhadu vlastních a kritických frekvencí použít linearizovaný model ložisek, který je představen v oddíle 2.1.4.

Vertikální i horizontální tuhosti kluzného ložiska s plovoucím pouzdem se pohybují okolo hodnoty  $1,00 \cdot 10^6$  N m<sup>-1</sup>, přičemž tuhost ve vertikálním směru  $y$  je větší než v horizontálním směru  $z$  ([Smolík, 2013](#)). Pro prvotní odhad se tuhosti v obou směrech běžně nahrazují hodnotou  $1,00 \cdot 10^6$  N m<sup>-1</sup> a vazební tuhosti  $k_{l,yz}$ ,  $k_{l,zy}$  i tlumení ložiska se zanedbávají ([Schweizer a Sievert \(2009\)](#); [Tian et al. \(2012\)](#)). Vlastní frekvence se s úhlovou rychlostí rotoru mění pouze v závislosti



**Obrázek 6.7:** Vlastní frekvence rotoru turbodmychadla uloženého na lineárních izotropních a) a lineárních ortotropních ložiskách b). Vlastní tvary kmitu jsou zobrazeny na obr. 5.5.

na velikosti gyroskopických účinků a lze je stanovit s využitím řešení problému vlastních hodnot silně nekonzervativního systému (Byrtus et al., 2010; Smolík, 2013).

Výsledek analýzy vlastních frekvencí rotoru uloženého na lineárních ložiskách s tuhostí  $k_{l,yy} = k_{l,zz} = 1,00 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-1}$ , která byla provedena v softwaru FEMROT, jenž běží v prostředí Matlabu (Smolík, 2013), je zobrazen na obr. 6.7a. Na obr. 6.7b je výsledek analýzy pro ložiska s tuhostmi  $k_{l,yy} = 1,00 \cdot 10^6 \text{ N m}^{-1}$  a  $k_{l,zz} = 5,00 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}$ . V obou případech jsou vlastní tvary kmitu seřazeny dle vlastních frekvencí stejně a lze předpokládat, že 1. ohybový tvar kmitu s dopřednou precesí nebude v pásmu do  $f_r = 2500 \text{ Hz}$  mít kritické otáčky. Ortotropie ložiska ovlivňuje především vlastní frekvence cylindrických a 1. ohybových tvarů kmitu.

### 6.3 Vliv nevyváhy na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla

Odezva rotoru turbodmychadla byla simulována pro varianty nevyváženosti rotoru uvedené v tab. 6.5. Hydrodynamický tlak na vnitřní straně mazacích otvorů v plovoucích pouzdrech je určen rovností  $p_i = p_s - \frac{1}{2} \rho (h_p^2 + 2 r_i h_p) \omega_p^2$ , která je odvozena ze vztahu (3.78), a kde  $p_s = 4,50 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  je mazací tlak a  $\omega_p$  je konstanta předepsaná funkcemi z obr. 6.6f.

Odezva v uzlu 62 v ložisku na turbínové straně je pro vybrané varianty nevyváženosti ukázána na obr. 6.8 ve formě plných frekvenčních spekter. V grafech na obr. 6.8 jsou popsány nejvýznamnější složky odezvy. Ani v jednom případě nebyla v odezvě výrazná složka se zpětnou precesí a pro hodnocení odezvy tedy není nutné používat plná frekvenční spektra.

Odezva ve vertikálním směru v uzlech 62 a 82 je ukázána na obr. 6.9 a 6.10. V ložisku na turbínové straně je nejvýznamnější složka *sub3*, v ložisku na kompresorové straně složka *sub2*.

Se zvyšující se statickou nevyvážeností roste i amplituda synchronní odezvy *1X*. I při poměrně velké statické nevyváženosti (G 16) má ale synchronní odezva zhruba o řád nižší amplitudy než subharmonické složky. Statická nevyváženost ovlivňuje i subharmonické složky odezvy, což je patrné především na obr. 6.9e, 6.9g a 6.10c, kde při frekvenci otáčení  $f_r \approx 1250 \text{ Hz}$  dochází ke skokové změně frekvence složky *sub3*. Tato změna je doprovázena náhlým zvýšením úhlové rychlosti pouzdra na straně turbíny, viz obr. 6.10e a 6.10f. Hydrodynamické ztráty v radiálních ložiskách na změnu rychlosti pouzder ale téměř nereagují, viz obr. 6.10g a 6.10h.

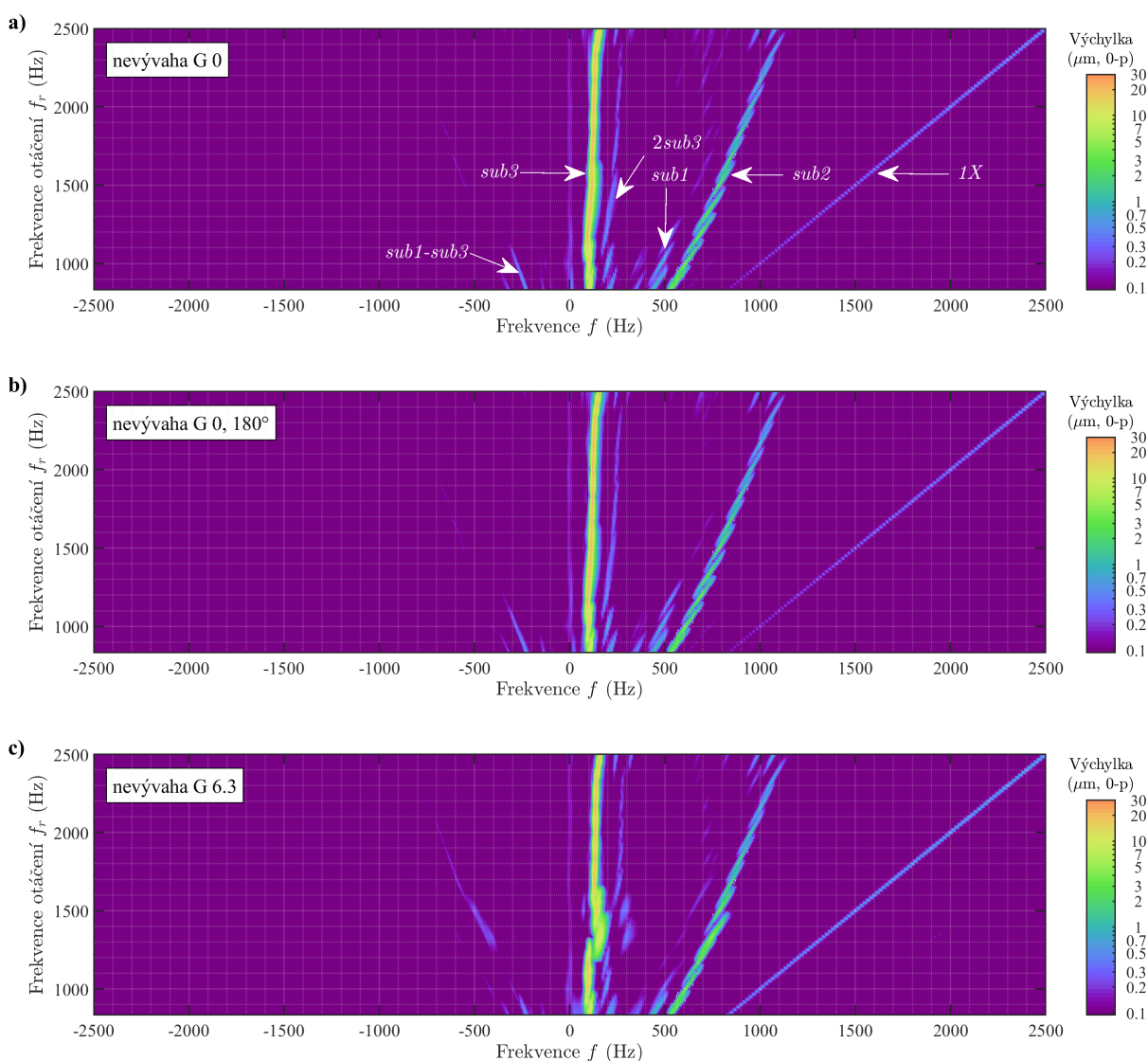
Úhlová rychlost pouzder a hydrodynamické ztráty nejsou ani po odeznění přechodové odezvy konstantní a mají pro danou sadu provozních parametrů a zátěžných sil charakter stacionárního ergodického procesu, který definuje např. Dupal (2008). Pro snazší interpretaci

Varianta	Turbínové kolo		Kompresorové kolo		Celková statická nevyváha $U_{st} \text{ (g mm)}$
	$\Delta U_t \text{ (g mm)}$	$\psi_t \text{ (}^\circ\text{)}$	$\Delta U_k \text{ (g mm)}$	$\psi_k \text{ (}^\circ\text{)}$	
G 0	$0,00 \cdot 10^0$	0	$0,00 \cdot 10^0$	0	$0,00 \cdot 10^0$
G 0, 180°	$5,40 \cdot 10^{-2}$	0	$5,40 \cdot 10^{-2}$	180	$0,00 \cdot 10^0$
G 6.3	$5,40 \cdot 10^{-2}$	0	$5,40 \cdot 10^{-2}$	0	$1,08 \cdot 10^{-1}$
G 6.3, 90°	$9,35 \cdot 10^{-2}$	0	$5,40 \cdot 10^{-2}$	90	$1,08 \cdot 10^{-1}$
G 6.3, 180°	$1,62 \cdot 10^{-1}$	0	$5,40 \cdot 10^{-2}$	180	$1,08 \cdot 10^{-1}$
G 16	$1,35 \cdot 10^{-1}$	0	$1,35 \cdot 10^{-1}$	0	$2,70 \cdot 10^{-1}$

**Tabulka 6.5:** Testované varianty nevyváženosti rotoru turbodmychadla.  $\Delta U$  označuje statickou nevyváženost a  $\psi$  je úhel, který svírá vektor nevyváženosti s vertikální osou. K označení variant je použit stupeň jakosti vyvážení definovaný normou ČSN ISO 1940-1 (2005).

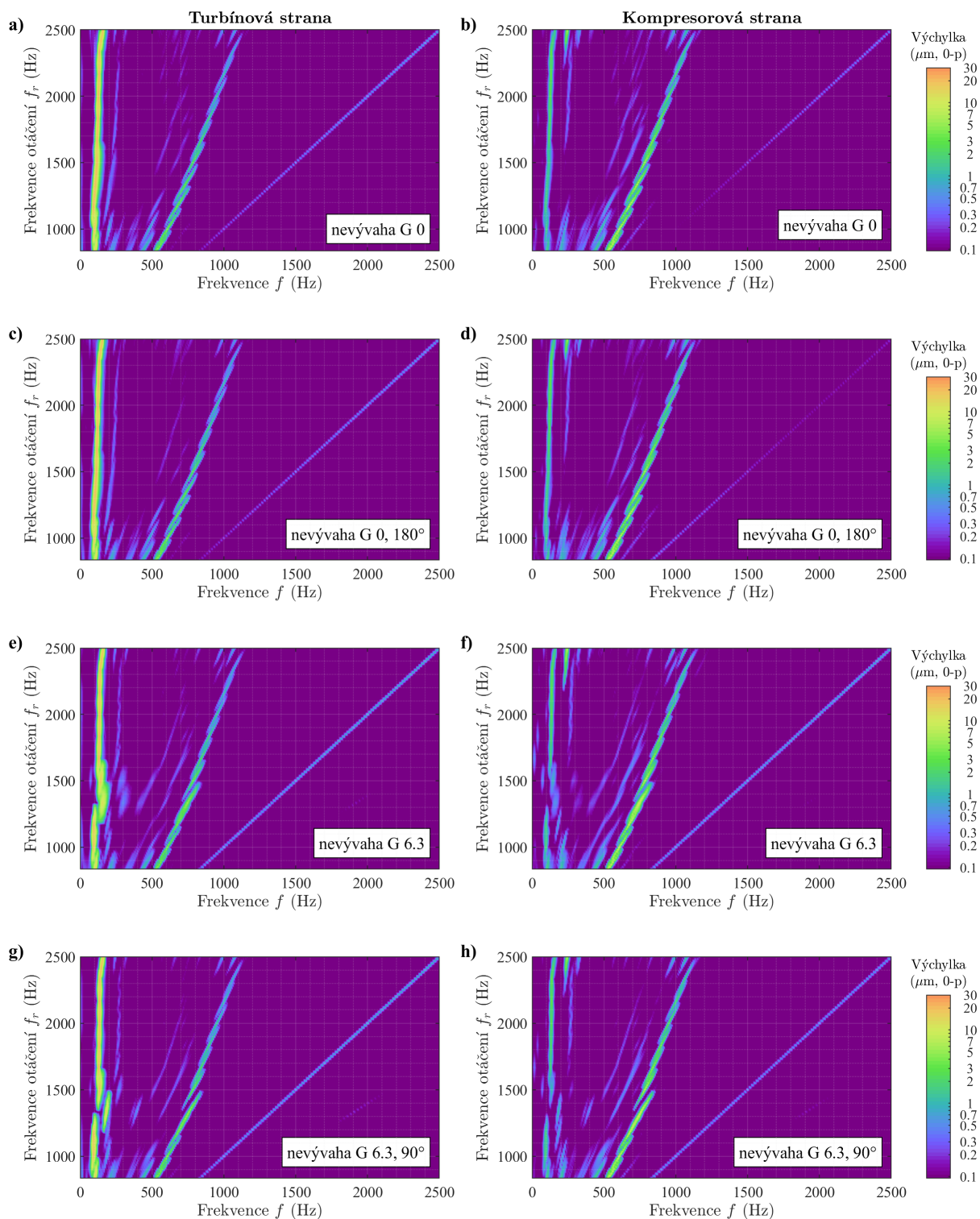
závislostí těchto procesů na provozních parametrech je zobrazována střední hodnota procesů a tam, kde je to možné, také spolehlivostní interval, ve kterém se s pravděpodobností 0,95 nachází aktuální hodnota dané veličiny. Meze spolehlivostního intervalu jsou vzdáleny o 1,96 násobek směrodatné odchylky procesu od jeho střední hodnoty.

Odezva rotoru s dynamickou nevyváhou ( $G 0, 180^\circ$ ) je prakticky totožná se odezvou staticky vyváženého rotoru ( $G 0$ ). Při současném působení statické i dynamické nevyváženosti je odezva ovlivněná fázovým úhlem mezi jednotlivými vektory nevyváženosti. Může tak docházet ke skokovým změnám obou subharmonických složek  $sub2$  a  $sub3$ , viz obr. 6.9g a 6.9h, ale také lze dosáhnout stavu, kdy jsou skokové změny téměř eliminovány, viz obr. 6.10a.

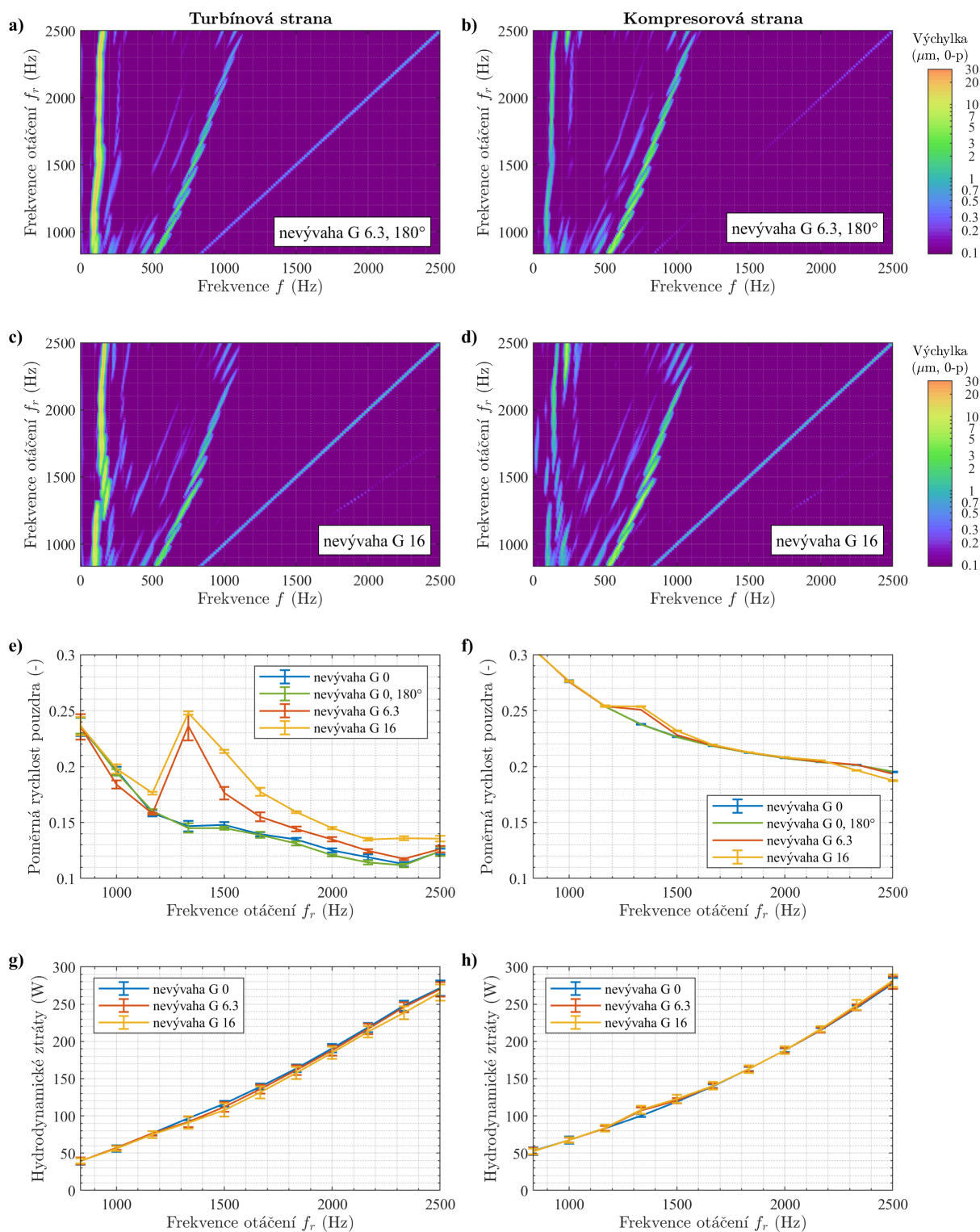


**Obrázek 6.8:** Predikované kmitání čepů hřídele v radiálním ložisku na straně turbíny při vybraných variantách nevyváženosti rotoru je zobrazeno ve formě plných frekvenčních spekter. V části a) jsou označeny nejvýznamnější složky odezvy. Testované varianty nevyváženosti jsou specifikovány v tab. 6.5.





**Obrázek 6.9:** Vertikální kmitání čepů hřídele v radiálních ložiskách při různých variantách nevyváženosti rotoru. Testované varianty jsou specifikovány v tab. 6.5.



**Obrázek 6.10:** Vertikální kmitání čepů hřídele v radiálních ložiskách při různých variantách nevyváženosti rotoru a) – d). Dále jsou zobrazeny střední hodnoty poměrné rychlosti plovoucích pouzder e), f) a hydrodynamických ztrát v ložiskách g), h) doplněné o intervaly, ve kterých se nachází aktuální hodnota veličin s pravděpodobností 0,95. Testované varianty nevyváženosti jsou specifikovány v tab. 6.5.



## 6.4 Vliv ložiskové vůle na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla

Vliv ložiskové vůle na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla je studován při nevyváženostech rotoru G 0, 180° a G 6.3 dle tab. 6.5. Dynamická viskozita olejových filmů je dána diagramy z obr. 6.6 a hydrodynamický tlak na vnitřní straně mazacích otvorů v plovoucích pouzdrech je určen rovností  $p_i = p_s - \frac{1}{2} \rho (h_p^2 + 2 r_i h_p) \omega_p^2$ , která je odvozena ze vztahu (3.78), a kde  $p_s = 4,50 \cdot 10^5$  Pa je mazací tlak a  $\omega_p$  je konstanta předepsaná funkcemi z obr. 6.6f.

### Předběžná analýza

V rámci předběžné analýzy je porovnána odezva při uvažování nominálních vůlí z tab. 6.3 s odezvou při uvažování provozních vůlí z obr. 6.6. Výsledky studie jsou na obr. 6.11.

V ložisku na turbínové straně je při všech simulovaných variantách nejvýznamnější složkou odezvy *sub3*, při uvažování nominálních vůlí se v odezvě nachází více druhotných subharmonických složek. Nevyváženost má na kmitání čepu v ložisku na turbínové straně malý vliv.

V ložisku na kompresorové straně je při uvažování nominálních vůlí nejvýznamnější složka odezvy *sub3*, zatímco při uvažování provozních vůlí je to *sub2*. Také na kompresorové straně se při uvažování nominálních vůlí nachází v odezvě množství druhotných subharmonických složek. Vliv nevyváženosti je patrný především při uvažování provozních vůlí a to na průběžích složek *sub2* a *sub3* při frekvencích  $f_r = 1333,3$  a 1500 Hz a na kvalitě odezvy při  $f_r = 2333,3$  Hz.

### Podrobná analýza

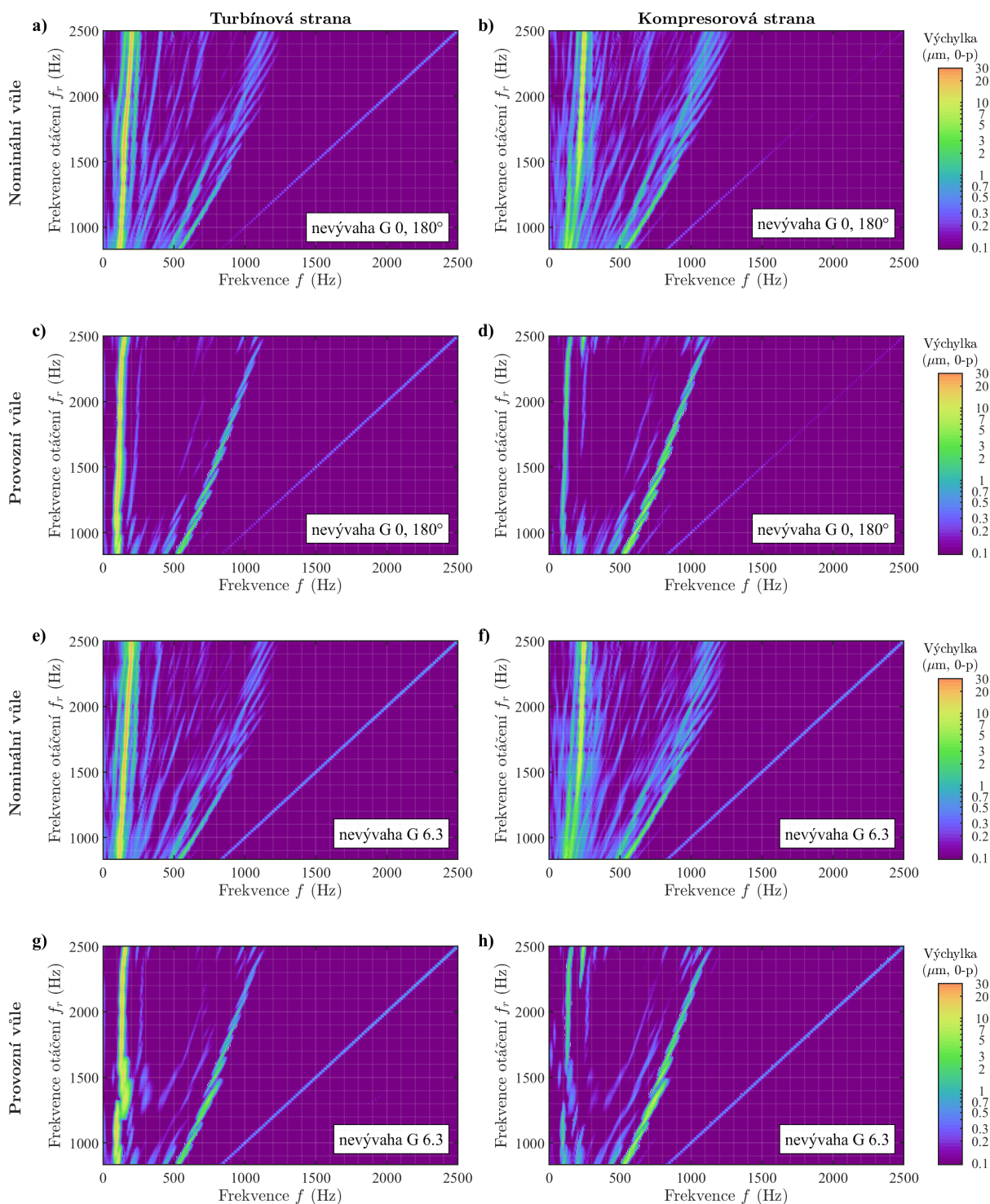
Podrobná analýza vlivu ložiskových vůlí na ohybové kmitání byla provedena pro frekvenci otáčení  $f_r = 1000$  Hz. Při této frekvenci se v odezvě projevují obě výše uvedené subharmonické složky *sub2* a *sub3*, což je ukázáno na obr. 6.12a – 6.12d. V rámci podrobné analýzy je zkoumán vliv vnější vůle  $c_{r,o}$  a vnitřní vůle  $c_{r,i}$  radiálního ložiska na amplitudu a frekvenci těchto složek a dále na poměrné rychlosti pouzder a hydrodynamické ztráty. Pro jednoduchost je předpokládáno, že vůle v obou ložiscích jsou totožné. Vnější vůle je dána množinou  $c_{r,o,i} = (25, 26, \dots, 35) \mu\text{m}$  a vnitřní vůle je dána množinou  $c_{r,i,j} = (15, 16, \dots, 22) \mu\text{m}$ . Simulována je odezva při všech možných kombinacích  $c_{r,o,i}$  a  $c_{r,o,j}$ .

Poměrná rychlost turbínového pouzdra je dána složitou funkcí (obr. 6.12e). Poměrná rychlost kompresorového pouzdra závisí zejména na vnitřní vůli. Závislost je téměř lineární, ale negativní. V obou ložiskách je maximální poměrná rychlost dosažena, když je vnější vůle největší ( $c_{r,o} = 35 \mu\text{m}$ ) a vnitřní nejmenší ( $c_{r,i} = 15 \mu\text{m}$ ).

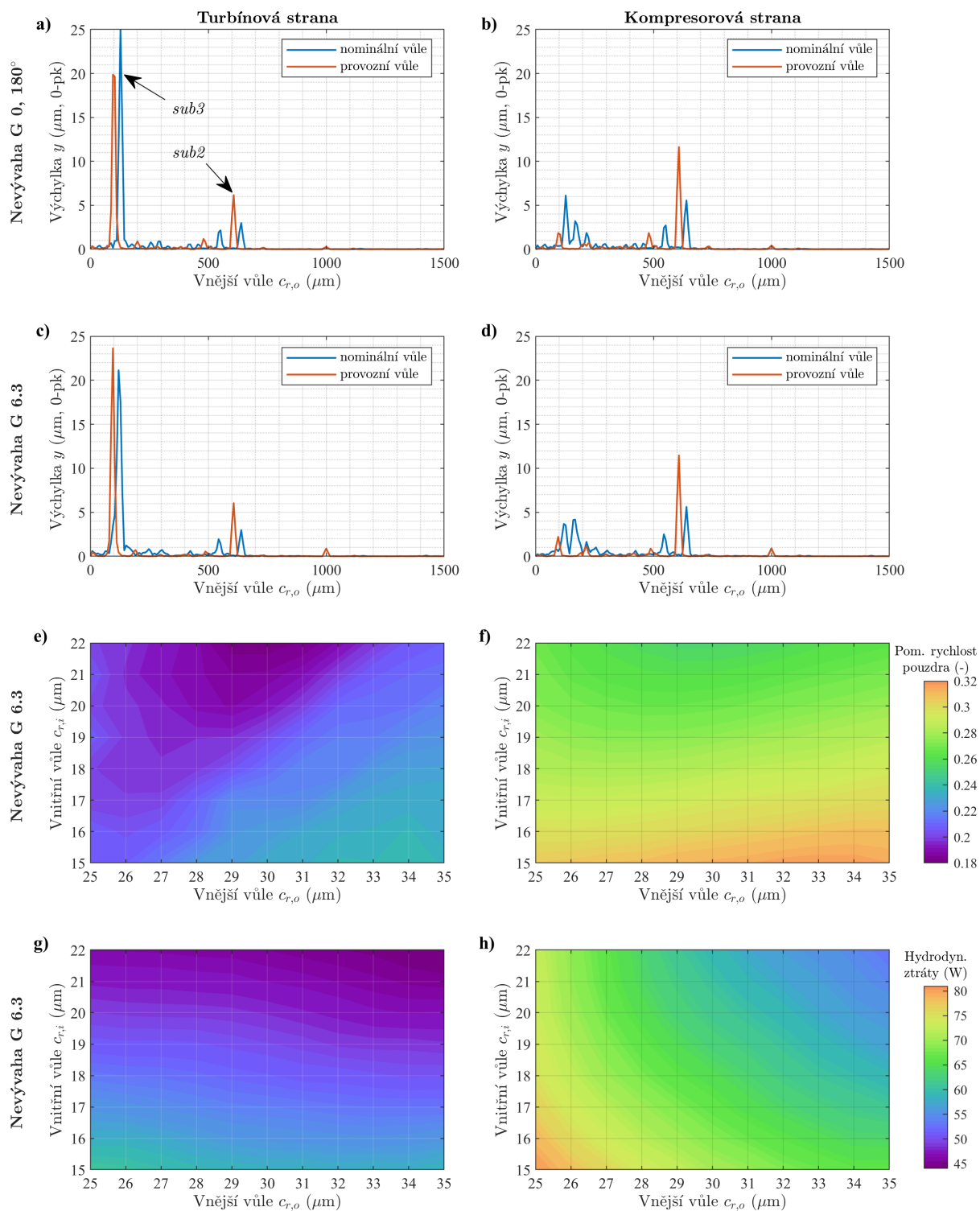
Hydrodynamické ztráty v turbínovém ložisku (obr. 6.12g) jsou přibližně o pětinu nižší než ztráty v kompresorovém ložisku (obr. 6.12h). V turbínovém ložisku jsou ztráty nepřímo úměrné  $c_{r,i}$  a na vnější vůli  $c_{r,o}$  závisí jen málo. V kompresorovém ložisku jsou ztráty nepřímo úměrné oběma vůlím. V obou případech jsou ztráty nejvyšší při minimálních vůlích.

Amplituda *sub3* je přímo úměrná vnější vůli  $c_{r,o}$ , výrazně méně závisí na vnitřní vůli  $c_{r,i}$ , kde se s klesající vůlí  $c_{r,i}$  zvyšuje, viz obr. 6.13a – 6.13d. Závislost frekvence *sub3* na ložiskových vůlích je složitá a odpovídá závislosti poměrné rychlosti turbínového pouzdra na vůlích, viz obr. 6.12e. Amplituda *sub2* je v turbínovém ložisku dvakrát menší než v kompresorovém a závisí na poměru vůlí  $c_{r,o}/c_{r,i}$ , viz obr. 6.13e – 6.13h. Největší hodnoty amplituda dosahuje když  $c_{r,o}/c_{r,i} \rightarrow 1$ . Frekvence *sub2* závisí téměř lineárně na vnitřní vůli  $c_{r,i}$ , závislost na vnější vůli se projevuje jen při nízkých hodnotách  $c_{r,o}$ . Frekvence ani amplituda *sub2* se s nevyvážeností téměř nemění. V případě *sub3* lze změny pozorovat, nejsou ale jednoduše kvantifikovatelné.

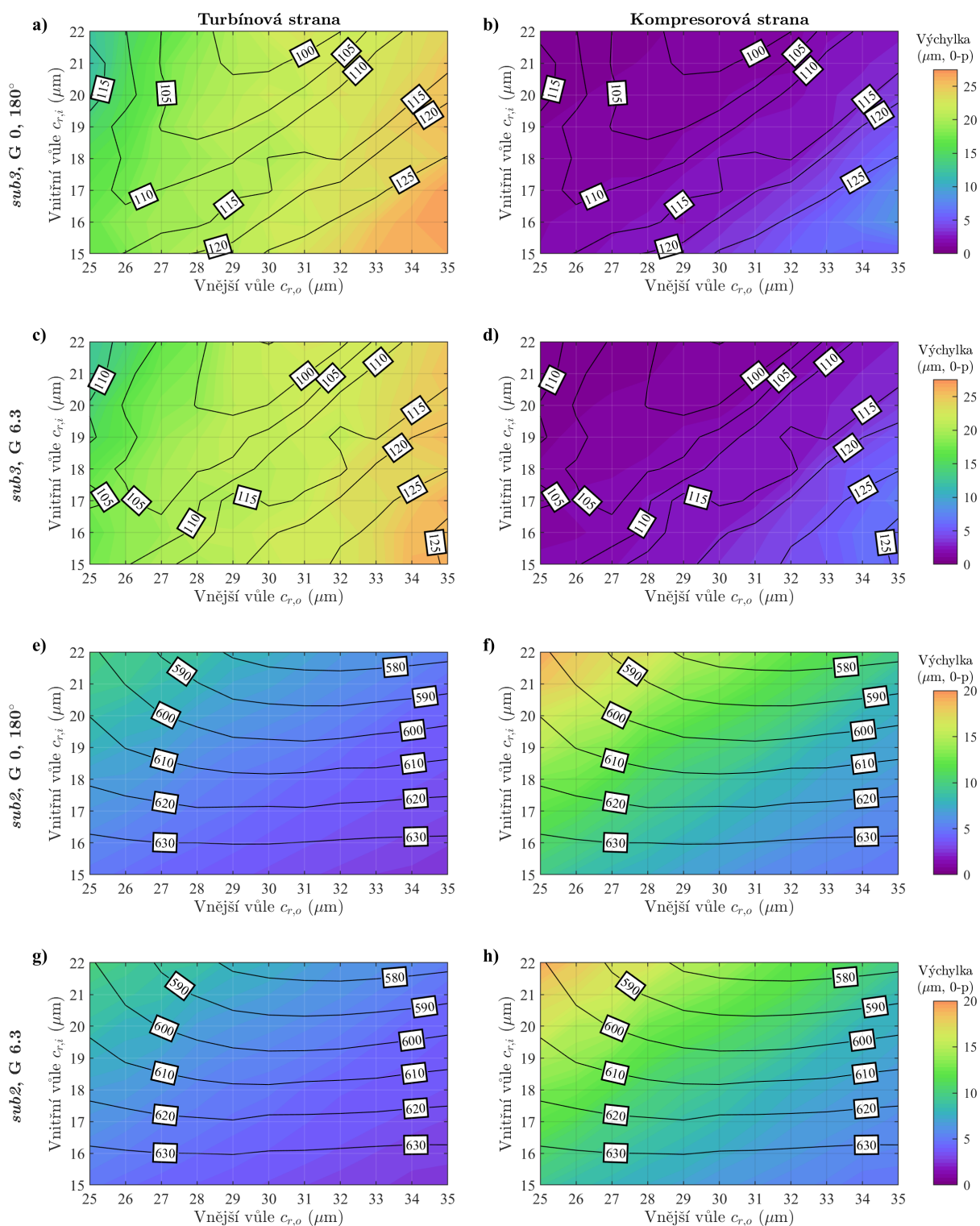
Podobné závěry platí i pro jiný rotor na stejných ložiskách (Smolík et al., 2017).



**Obrázek 6.11:** Výsledky *předběžné analýzy* vlivu ložiskové vůle na kmitání rotoru turbodmychadla. Porovnáno je vertikální kmitání čepů hřídele v radiálních ložiskách při uvažování nominálních a provozních vůlí a při čistě statické (G 6.3) a čistě dynamické (G 0, 180°) nevyváženosti. Obě varianty nevyváženosti jsou specifikovány v tab. 6.5.



**Obrázek 6.12:** Výsledky *předběžné analýzy* vlivu ložiskové vůle na kmitání rotoru turbodmychadla při  $f_r = 1000$  Hz a) – d). Dále jsou zobrazeny výsledky *podrobné analýzy*: v částech e) a f) je průměrná poměrná rychlost plovoucích pouzdra při  $f_r = 1000$  Hz v závislosti na ložiskových vůlích a v částech g) a h) průměrné hydrodynamické ztráty při  $f_r = 1000$  Hz v závislosti na ložiskových vůlích.



**Obrázek 6.13:** Výsledky *podrobné analýzy* vlivu ložiskové vůle na kmitání rotoru turbodmychadla při  $f_r = 1000$  Hz. V částech a) – d) je zobrazena závislost amplitudy a frekvence složky *sub3*, která souvisí s jevy ve vnitřním filmu, na ložiskových vůlích. V částech e) – h) je zobrazena závislost amplitudy a frekvence složky *sub2*, která souvisí s jevy ve vnějším filmu, na ložiskových vůlích.

## 6.5 Proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech

Vliv modelu proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdech na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla je posuzován pro případ ložiskových vůlí a viskozit olejových filmů daných diagramy z obr. 6.5 a 6.6. Nevyváženost rotoru je G 6.3 dle tab. 6.5. Rovnosti předepisující hydrodynamický tlak  $p_i$  na vnitřní straně mazacího otvoru byly implementovány třemi způsoby:

**základní model:**  $p_i = p_s$ ,

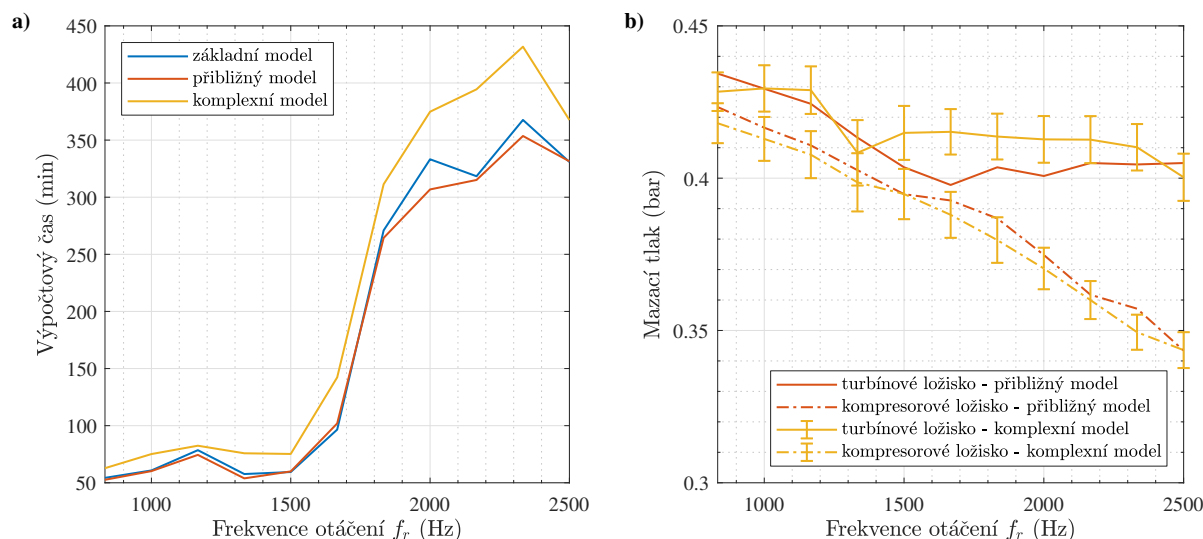
**přibližný model:**  $p_i = p_s - \frac{1}{2} \rho (h_p^2 + 2 r_i h_p) \omega_p^2$ ,

**komplexní model:**  $p_i = p_o - \frac{1}{2} \rho (h_p^2 + 2 r_i h_p) \dot{\varphi}_p^2 + \rho h_p (\ddot{y}_p \cos \varphi_p + \ddot{z}_p \sin \varphi_p + g \cos \varphi_p)$ ,

kde  $p_s = 4,50 \cdot 10^5$  Pa je mazací tlak na přítoku z ložiskové skříně a  $p_o$  je tlak na vnější straně mazacího otvoru. Komplexní model je odvozen v oddíle 3.5.1, kde jsou rovněž vysvětleny zbývající parametry. Hodnoty geometrických parametrů jsou uvedeny v tab. 6.3, hustota oleje je  $\rho = 760 \text{ kg m}^{-3}$ . Přibližný model vznikl z komplexního zanedbáním méně významných tlakových ztrát. Úhlová rychlost pouzdra  $\omega_p$  je konstanta daná funkcemi z obr. 6.6f, zatímco  $\varphi_p$ ,  $\dot{\varphi}_p$ ,  $\ddot{y}_p$  a  $\ddot{z}_p$  jsou v každém časovém kroku numerické integrace aktualizovány.

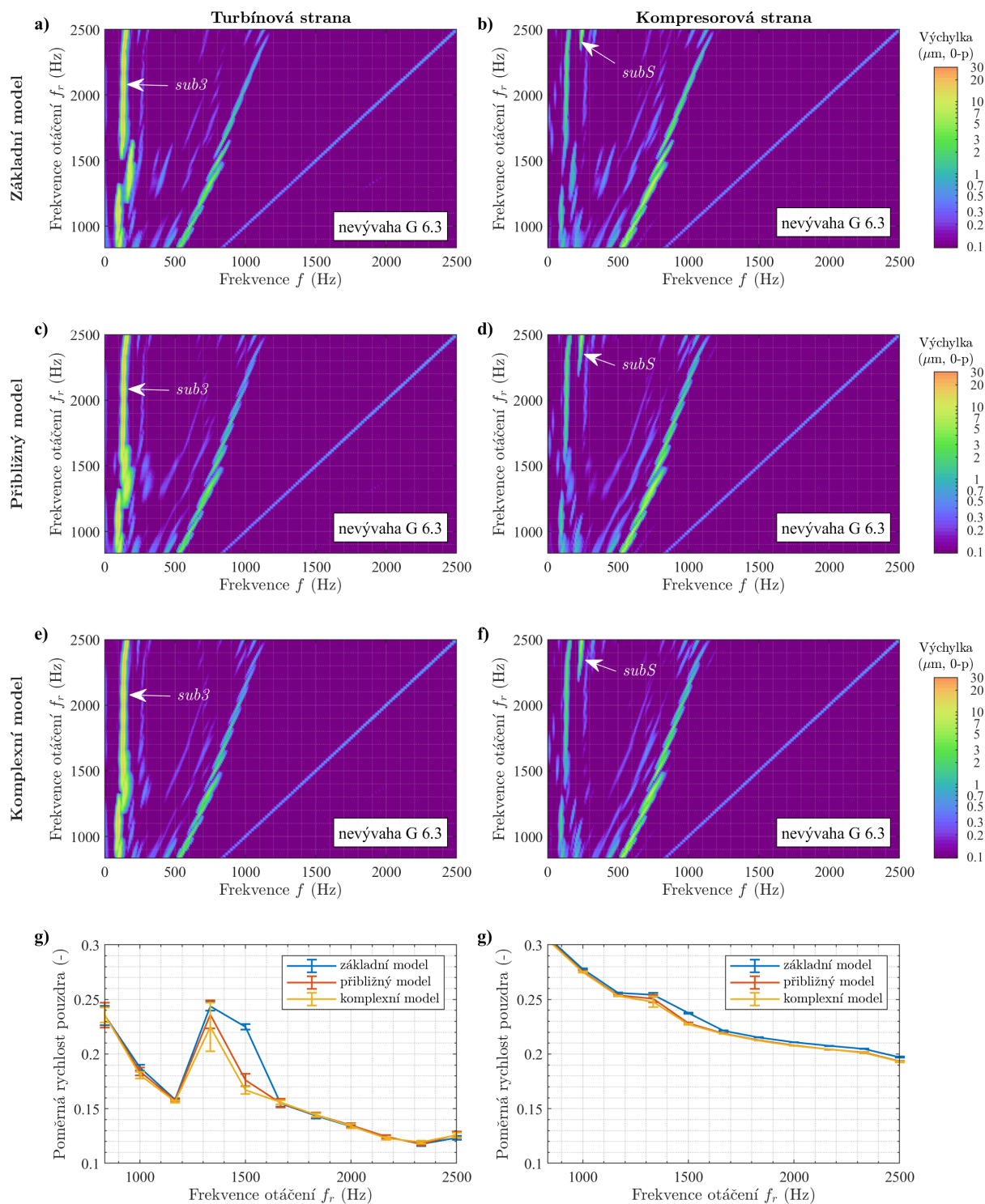
Výpočtové časy potřebné pro simulaci základního a přibližného modelu jsou srovnatelné s tím, že přibližný model je mírně efektivnější. Simulace komplexního modelu je o 25 – 40 % náročnější. Závislost výpočtových časů na frekvenci otáčení rotoru  $f_r$  je ukázána na obr. 6.14a.

Na obr. 6.14b jsou znázorněny mazací tlaky na vnitřní straně pouzdra v závislosti na  $f_r$ . V případě mazacích tlaků predikovaných komplexním modelem je zobrazena průměrná hodnota doplněná o interval, ve kterém se aktuální hodnota mazacího tlaku nachází s pravděpodobností 0,95. Tlaky predikované v otvorech pouzdra v kompresorovém ložisku se s výjimkou případu  $f_r = 2333,3 \text{ Hz}$  nacházejí v intervalu spolehlivosti. U tlaků v otvorech pouzdra v turbínovém ložisku jde o posloupnost  $f_{r,i} = (1500, \dots, 2000) \text{ Hz}$ .



**Obrázek 6.14:** Porovnání výpočtového času potřebného pro simulaci a) a predikovaný tlaku na vnitřní straně pouzdra b). Výpočtový čas byl měřen na kancelářském PC HP Compaq Elite 8300 MT s procesorem Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i5-3570 @ 2 × 3,4 GHz s 16,0 GB RAM při výpočtu na jednom vlákně.





**Obrázek 6.15:** Porovnání vertikálního kmitání čepů hřídele v radiálních ložiskách při použití různých modelů proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech a) – f). V částech g) a h) jsou zobrazeny střední hodnoty poměrné rychlosti plovoucích pouzder v radiálních ložiskách při použití různých modelů proudění oleje mazacími otvory.

Odezva rotoru turbodmychadla závisí na použitém modelu mazání vnitřního filmu jen málo, což je ukázáno na obr. 6.15. V odezvě simulované s využitím základního modelu se při frekvencích  $f_r = 1333,3$  a  $f_r = 1500$  Hz odlišuje průběh subharmonické složky  $sub3$  a úhlové rychlosti plovoucích pouzder jsou NIŽŠÍ. Dalším rozdílem je pozdější výskyt subharmonické složky označené na obr. 6.15 jako  $subS$ . Tato složka pravděpodobně souvisí se synchronizací nestabilit ve vnějším a vnitřním filmu (Schweizer, 2009) a neodpovídá dvojnásobku  $sub3$ .

Rozdíly mezi odezvami, které jsou simulovány s využitím přibližného a komplexního modelu jsou minimální. Významnější je pouze fakt, že špičky ve spektrogramech na obr. 6.15e a 6.15f jsou ostřejší než v případě spektrogramů z obr. 6.15c a 6.15d. K tomuto jevu dochází, pokud frekvence sledovaného děje kolísá nebo při chybě průsakem (Randall, 1987).

## 6.6 Návrh efektivního uložení rotoru turbodmychadla

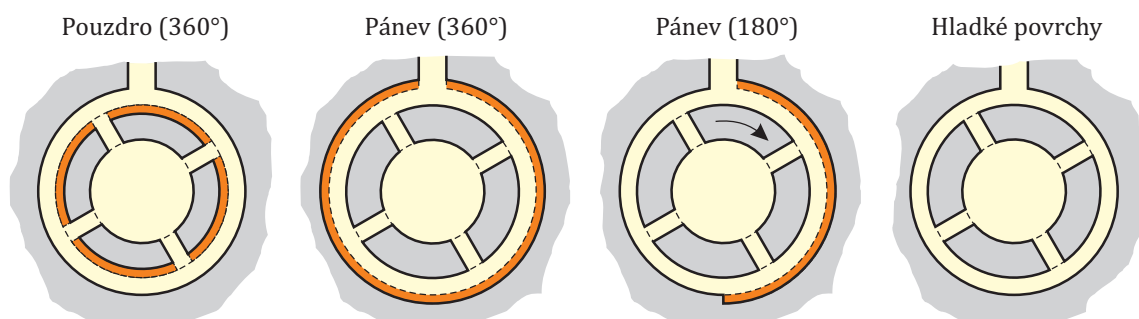
Efektivní uložení rotoru turbodmychadla je navrženo pro ložiskové vůle a viskozity olejových filmů dané diagramy z obr. 6.5 a 6.6. Nevyváženost rotoru je  $G 6.3$  dle tab. 6.5. Proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech je modelováno pomocí vztahu (3.78).

Nejprve byl analyzován vliv polohy a délky obvodové drážky, která slouží k rozvádění oleje ve vnějším filmu a k přívodu oleje do mazacích otvorů vnitřního filmu. Testované konfigurace jsou zobrazeny na obr. 6.16, výsledky analýzy jsou uvedeny níže:

**Pouzdro (360°):** v této konfiguraci rotuje olej v obvodové drážce spolu s pouzdem, což zvyšuje efektivní hydrodynamickou rychlost vnějšího filmu a zhoršuje tak jeho stabilitu (Schweizer, 2010; Zhang et al., 2018). Nestabilita vnějšího filmu se projevuje výraznou amplitudou subharmonické složky  $sub3$  v ložisku na turbínové straně, viz obr. 6.18a. V ložisku na kompresorové straně dominuje složka  $sub2$ , složka  $sub3$  je méně výrazná, viz obr. 6.18b.

**Pánev (360°):** v této konfiguraci je efektivní hydrodynamická rychlost vnějšího filmu nižší než v případě předchozí konfigurace. Nestabilita vnějšího filmu se díky tomu rozvíjí při vyšší frekvenci otáčení. Pro  $f_r \geq 1500$  Hz jsou už amplitudy  $sub3$  srovnatelné s amplitudami v konfiguraci **pouzdro (360°)**, viz obr. 6.18c a 6.18d. V odezvě se dále nachází složka  $sub2$  a množství druhotných subharmonických složek.

**Pánev (180°):** odezvě do  $f_r = 1166,6$  Hz dominují složky  $sub1$  a  $sub2$ , při vyšších frekvencích otáčení se v odezvě nachází pouze  $sub2$ . Ve vnějším filmu dochází k rozvoji nestability spojené s nárůstem amplitud složky  $sub3$  až při  $f_r = 2333,3$  Hz, viz obr. 6.18e a 6.18f. Stabilita vnějšího filmu je pozitivně ovlivněna schodovitým ukončením obvodové drážky.



Obrázek 6.16: Testované konfigurace polohy a délky obvodové drážky ve vnějším olejovém filmu.

Podobný konstrukční prvek, zvaný Rayleighův schod, se používá pro stabilizaci málo zatížených segmentů radiálních (Waukesha Bearings, 2012–2018) i axiálních ložisek (San Andrés, 2010).

**Hladké povrchy:** v této konfiguraci zůstává vnější film stabilní v celém studovaném rozsahu frekvencí otáčení rotoru, ale vnitřní film je v celém rozsahu nestabilní, viz obr. 6.18g a 6.18h. Složka *sub2* je dominantní složkou odezvy a její amplitudy jsou v kompresorovém ložisku vyšší než v turbínovém. Kvalitativně shodné výsledky uvádí Zhang et al. (2018).

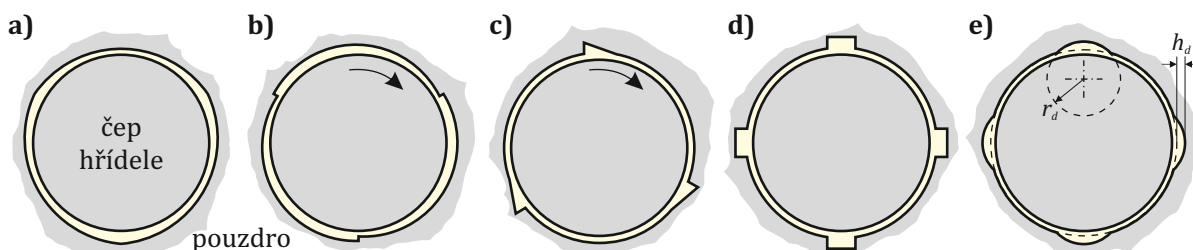
Z hlediska vibrační čepu hřídele se jako nejlepší řešení jeví konfigurace **pánev (180°)**, která zajišťuje stabilitu vnějšího filmu v širokém rozsahu frekvencí otáčení rotoru a zároveň se nestabilita vnitřního filmu projevuje méně než v případě konfigurace s **hladkými povrchy**.

Ke stabilizaci vnitřního filmu se používají různé techniky úpravy ložiskové mezery. Víceplochá (obr. 6.17a) a přesazená ložiska (obr. 6.17b) se používají pouze u malých sérií, protože jejich výroba je nákladná (Šimek, 2008). Navíc mají vyšší hydrodynamické ztráty než cylindrická ložiska (Eling et al., 2015). Alternativně se souvislá plocha na vnitřním povrchu pouzdra přerušuje axiálními drážkami (Šimek, 2008). Drážky trojúhelníkového průřezu (obr. 6.17c) jsou náročné na přesnost výroby a vyžadují dodatečnou kontrolu sestaveného turbodmychadla, protože pouzdro musí být orientováno správně vůči směru otáčení rotoru. Drážky obdélníkového průřezu (obr. 6.17d) nejsou pro potlačení nestability příliš efektivní (Zhang et al., 2018).

V této práci je testován vliv 4 rovnoměrně rozmístěných axiálních drážek kruhového průřezu s parametry  $r_d = 8,00 \cdot 10^{-3}$  m,  $h_d = 7,00 \cdot 10^{-6}$  m, jejichž význam je patrný z obr. 6.17e. Tato konfigurace ložiska je dále označena jako **pánev (180°) + vruby**. Vibrace čepu hřídele jsou velmi podobné jako v konfiguraci **pánev (180°)**, viz obr. 6.19a a 6.19b, ale při  $f_r \geq 2333,3$  Hz se v odezvě nenachází složka *sub3*.

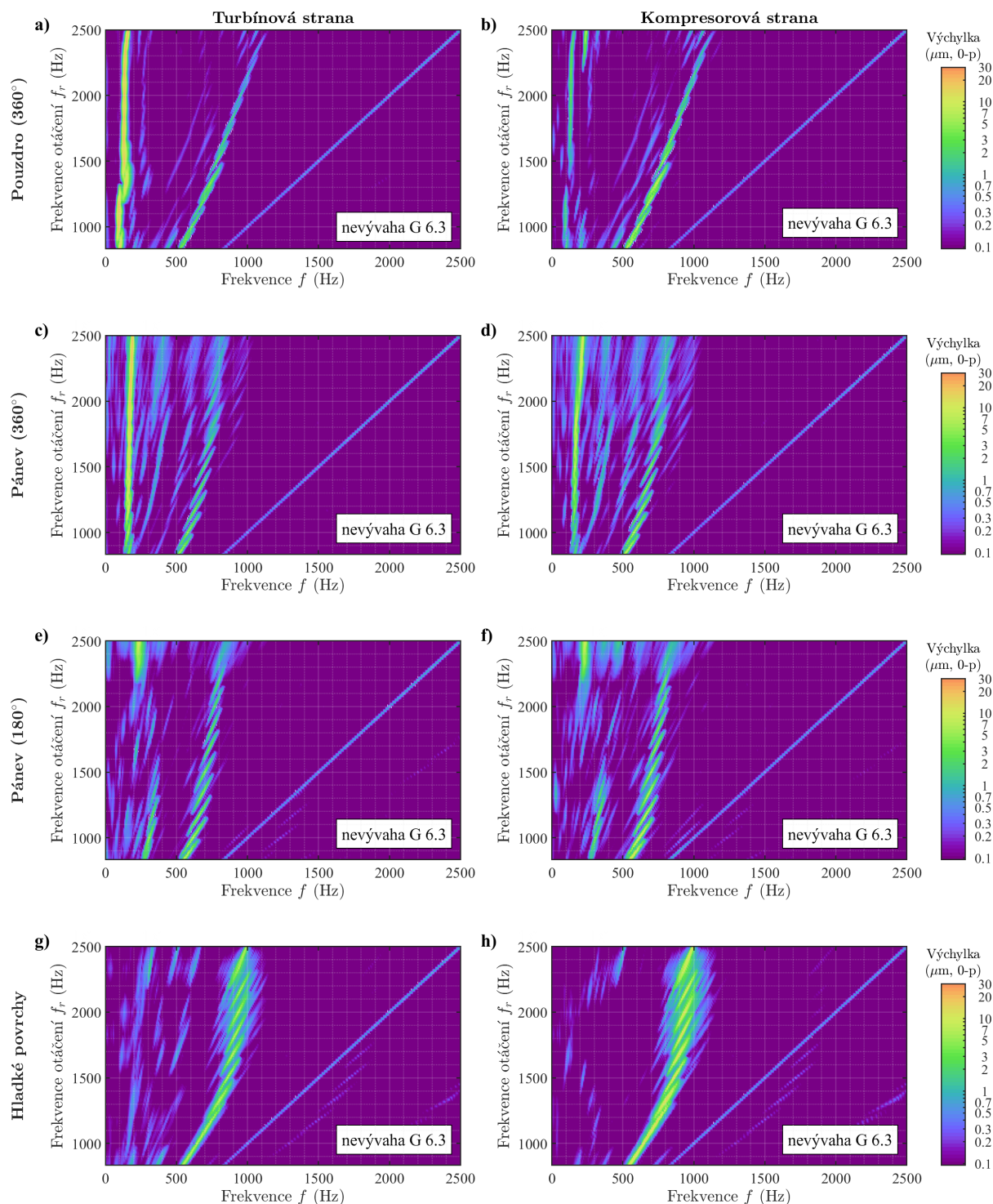
Pro provoz kluzného ložiska je optimální, pokud vůle ložiskové mezery není čerpána z více než 80 % (Stachowiak a Batchelor, 2013). Na obr. 6.19c – 6.19f jsou zobrazeny diagramy čerpání vůlí, která znázorňují maximální a průměrnou amplitudu relativního ustáleného kmitání čepů a pouzder v závislosti na  $f_r$ . Žádná z analyzovaných konfigurací ložisek nesplňuje výše uvedenou podmínku optimality. V konfiguracích **pánev (180°)** a **pánev(180°) s drážkami** ale dochází k nadměrnému čerpání vůlí pouze při nízkých frekvencích otáčení  $f_r$ , kde rotor turbodmychadla nebývá dlouhodobě provozován.

Kromě vibrační rotoru jsou posouzeny také hydrodynamické ztráty v ložiskách. Ty jsou znázorněny na obr. 6.19g a 6.19h v poměrném tvaru, který je vztážen ke ztrátám v ložiskách v konfiguraci **pouzdro (360°)**, u níž je zároveň zobrazen spolehlivostní interval, ve kterém se aktuální velikost ztrát nachází s pravděpodobností 0,95. Nejefektivnější jsou ložiska v konfiguraci **pouzdro (360°) + vruby**, kdy jsou ztráty o více než 10 % nižší než v referenční konfiguraci.

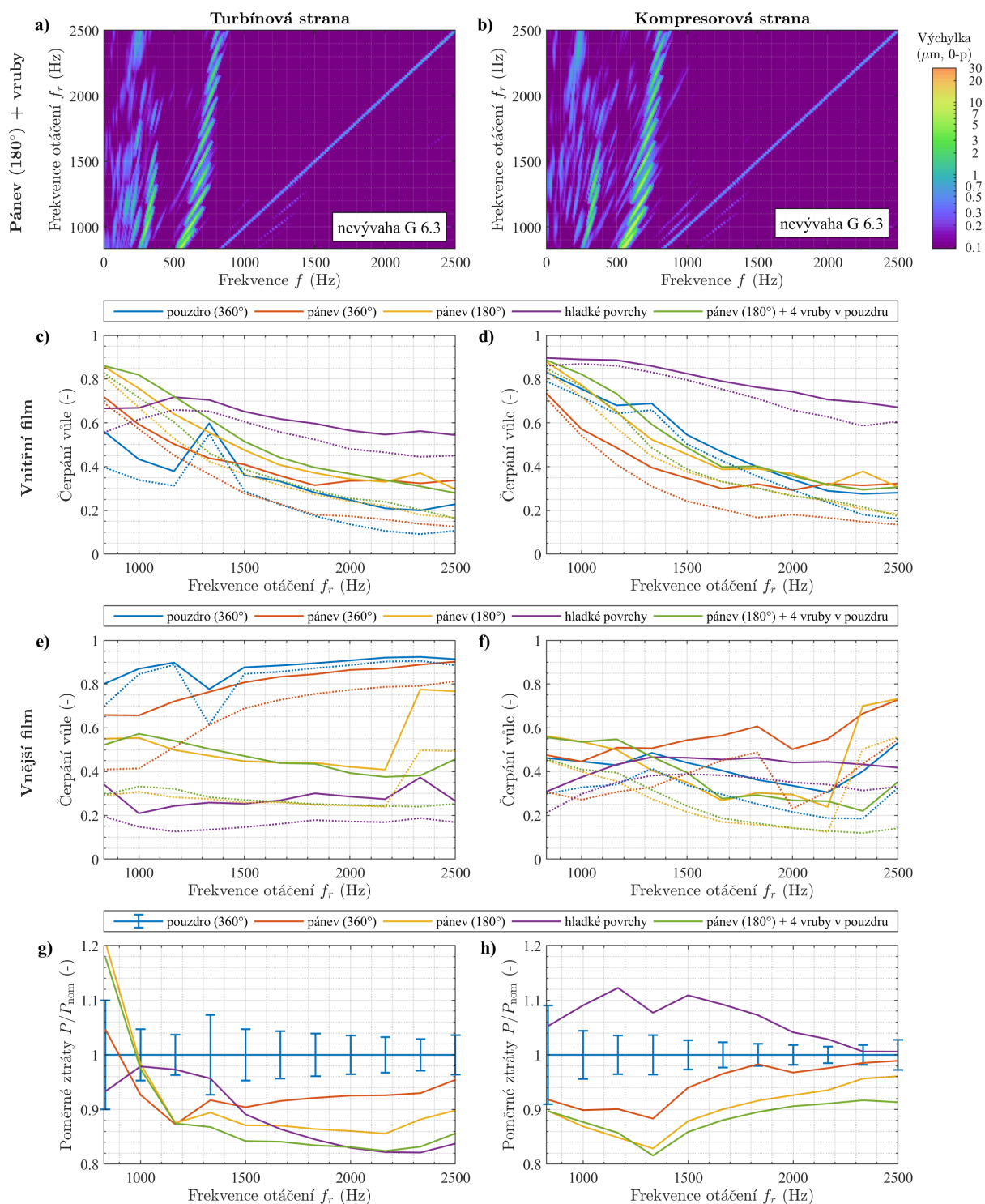


**Obrázek 6.17:** Víceploché ložisko a), přesazené ložisko b) a cylindrické ložisko s axiálními drážkami trojúhelníkového c), obdélníkového d) a kruhového e) průřezu.





**Obrázek 6.18:** Vertikální kmitání čepů hřídele v radiálních ložiskách v různých konfiguracích polohy a délky obvodové drážky ve vnějším olejovém filmu. Testované konfigurace jsou zobrazeny na obr. 6.16.



**Obrázek 6.19:** Vertikální kmitání čepů hřídele v radiálních ložiskách v konfiguraci **pánev (180°)** a s přidáním axiálních drážek kruhového průřezu do vnitřního filmu a) a b). V částech c) – f) jsou porovnány maximální a průměrné (tečkovaně) amplitudy relativního kmitání čepů a pouzder ve všech konfiguracích a v částech g) a h) jsou porovnány střední hodnoty hydrodynamických ztráty v kluzných ložiskách, přičemž  $P_{\text{nom}}$  jsou ztráty v daném ložisku v konfiguraci **pouzdro (360°)**.

## 6.7 Doporučení vyplývající z provedených analýz

**Podkapitola 6.3: nevyváženost oběžných kol** ovlivňuje průběh subharmonických složek, nemá ale zásadní vliv na celkové amplitudy vibrací. Rovněž vliv na hydrodynamické ztráty v ložiskách je velmi malý. Naopak poměrná rychlost pouzder se může vlivem nevyváženosti zvýšit až o polovinu.

V případě navrhování nového turbodmychadla je vhodné analyzovat ohybové kmitání rotoru pro případy čistě statické nevyváženosti a čistě dynamické nevyváženosti, protože mezi těmito stavy jsou největší rozdíly.

**Podkapitola 6.4:** Amplituda složky *sub3* od nestability vnějšího filmu je přímo úměrná vnější vůli ložiska  $c_{r,o}$  a výrazně méně závisí na vnitřní vůli ložiska  $c_{r,i}$ , kde se s klesající vůlí zvyšuje. Amplituda složky *sub2* od nestability vnitřního filmu závisí na poměru vůlí  $c_{r,o}/c_{r,i}$ . Největší hodnoty amplituda dosahuje když  $c_{r,o}/c_{r,i} \rightarrow 1$ .

V ložisku, kde je dominantní složka *sub3*, jsou hydrodynamické ztráty nepřímo úměrné vnitřní vůli  $c_{r,i}$ , v ložisku s dominantní složkou *sub2* jsou nepřímo úměrné oběma vůlím. Existují různé rozměry vůlí, při nichž jsou amplitudy kmitání stejné, ale hydrodynamické ztráty různé. Z tohoto důvodu by měly být hydrodynamické ztráty zahrnuty do cílové funkce při optimalizaci kmitání rotoru turbodmychadla.

**Podkapitola 6.5:** provedené výpočty naznačují, že pro účely simulování ohybového kmitání rotoru turbodmychadla je plně dostačující modelovat **laminární proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech** pomocí rovnosti  $p_i = p_s - \frac{1}{2} \rho (h_p^2 + 2 r_i h_p) \omega_p^2$ , kde  $p_i$  je hydrodynamický tlak na vnitřní straně mazacího otvoru,  $p_s$  je mazací tlak na přívodu oleje do vnějšího filmu,  $\omega_p$  je úhlová rychlost pouzdra a zbylé parametry jsou vyznačeny na obr. 3.8. Vibrace rotoru i tlak  $p_i$  určené s využitím přibližného vztahu jsou velmi blízké tlaku určenému pomocí komplexnější rovnosti (3.78), která je až o 40 % náročnější z hlediska výpočtového času. Významnější rozdíly v odezvě lze při použití přibližného modelu pozorovat až v případech, kdy tlakové ztráty na přítoku do vnitřního filmu dosahují hodnot kolem 1 baru, respektive 20 % z hodnoty  $p_s$ .

**Podkapitola 6.6:** bylo navrženo uložení rotoru turbodmychadla, díky kterému se amplitudy absolutních kmitů čepu hřídele v turbínovém ložisku sníží o více než 40 % a v kompresorovém ložisku o více než 15 %. Zároveň dojde ke snížení hydrodynamických ztrát v radiálních ložiskách o více než 10 %. Tato tvrzení platí pro frekvenci otáčení rotoru  $f_r \geq 1166,6$  Hz. Při nízkých frekvencích otáčení lze očekávat hydrodynamické ztráty a amplitudy kmitání čepu v turbínovém ložisku mírně vyšší.

V návrhu jsou představeny dva nové konstrukční prvky: obvodová drážka k rozvádění oleje ve vnějším filmu se nachází pouze na polovině obvodu ložiskové pánve ve směru rotace pouzdra (obr. 6.16) a je schodovitě ukončena. Vnitřní souvislá plocha plovacího pouzdra je přerušena čtyřmi axiálními drážkami kruhového průřezu (obr. 6.17d), díky kterým jsou sníženy třecí ztráty ve vnitřním filmu.

Geometrické parametry konstrukčních úprav nejsou v této práci optimalizovány ani podrobeny analýze citlivosti odezvy na výrobních nepřesnostech těchto úprav. Axiální drážky jsou navrženy tak, aby je bylo možné vyrobit pomocí protahovacího trnu. Přesnost takového výrobního postupu nelze očekávat v úrovni jednotek  $\mu\text{m}$ .

## 7 Měření ohybového kmitání rotoru

Vibrace ložiskových skříní turbodmychadel se obvykle měří pouze při vyvažování rotoru (Šimek, 2008) a rotorové vibrace jsou měřeny v rámci vývojových a garančních zkoušek, jako je testování životnosti turbodmychadla. Při těchto zkouškách se typicky měří absolutní vibrace ložiskové skříně a rotorové vibrace matice za kompresorovým kolem (Schweizer a Sievert, 2009). V případě, že je do turbodmychadla poháněno studeným vzduchem, je možné měřit rotorové vibrace také v referenční rovině umístěné v turbínové skříně (San Andrés et al., 2007). Pro měření rotorových vibrací se nejčastěji používají snímače na principu vířivých proudů, protože jsou odolné, teplotně stabilní a mají vysokou přesnost.

V této kapitole jsou popsány konstrukční úpravy umožňující měřit rotorové vibrace hřídele v blízkosti radiálních ložisek rotoru turbodmychadla, který je poháněn vzduchem s parametry blízkými spalínám motoru. Dále je navržena metoda měření otáček rotujících plovoucích pouzder pomocí levných indukčních snímačů, publikovaná v Smolík et al. (2016).

V prostřední části kapitoly je diskutován vliv montáže snímačů v kompresorové skříně a jsou uvedeny podmínky, které mohou vést k destrukci rotoru zkušební turbodmychadla.

V závěrečné části kapitoly jsou rozebrány výsledky zkoušek, jejichž cílem bylo posoudit vliv nevyváženosti rotoru na jeho odezvu a na otáčky plovoucích pouzder a vliv teploty vzduchu v turbíně na odezvu rotoru turbodmychadla. Dále byla řešena problematika porovnatelnosti zkoušek provedených při konstantních otáčkách rotoru a při proměnných otáčkách rotoru.

### 7.1 Popis zkoušky

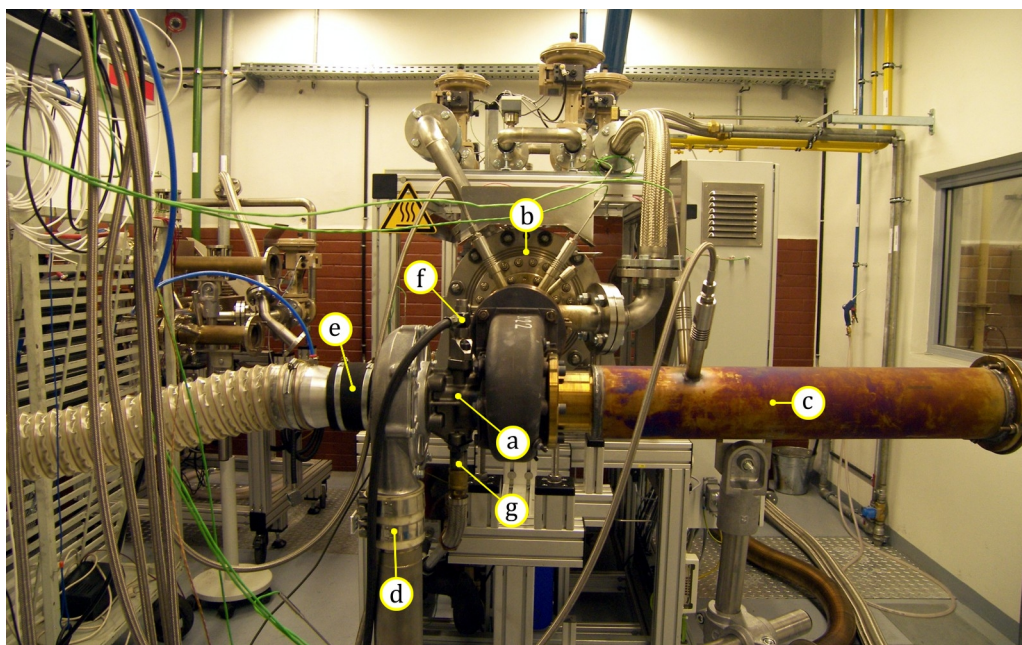
#### 7.1.1 Popis zkušebního zařízení

Zkouška byla provedena na modulárním zkušebním zařízení (obr. 7.1), ve kterém je možné zkoušet turbodmychadla různých velikostí. Pohon turbíny zajišťuje plynový hořák (obr. 7.1b), který dodává vzduch s řízenou teplotou, tlakem a průtočným množstvím. Rotor tak může být poháněn vzduchem s parametry, které odpovídají motorovým spalínám (tzv. *horký vzduch*), ale také studeným stlačeným vzduchem. Podobně lze řídit průtočné množství vzduchu, který přichází do kompresorové skříně. Obdobné zařízení použili např. Schweizer a Sievert (2009).

Mazací olej je do ložiskové skříně zkušební turbodmychadla přiveden z nádrže. Detail přívodního kanálu je na obr. 7.2. Teplota oleje v nádrži a průtočné množství oleje, resp. mazací tlak, jsou rovněž říditelné. V rámci této zkoušky byl použit mazací olej s viskozitním stupněm SAE 10W-30, teplota oleje na přívodu do skříně udržována na hodnotě 90°C a mazací tlak na hodnotě  $4,50 \cdot 10^5$  Pa. Posouzení vlivu mazacího tlaku na ohybové kmitání rotoru turbodmychadla bylo provedeno na jiném zkušebním zařízení, než je zařízení popisované, a není v textu dále rozebíráno.

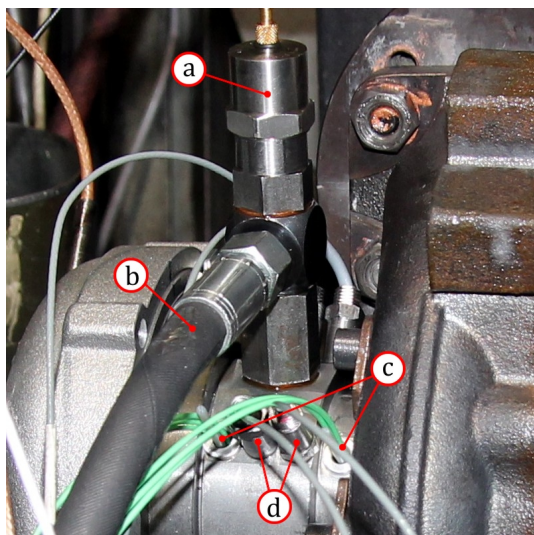
Rotory zkušební turbodmychadla jsou mírně modifikovány oproti sériově vyráběným: jejich kompresorová kola jsou jistěna duralovou měřicí maticí, která má větší průměr než standardní ocelová matice. Hmotnost duralové matice odpovídá hmotnosti ocelové matice, její průměr je ale větší. Díky tomu mohou být použity větší a levnější snímače na principu vířivých





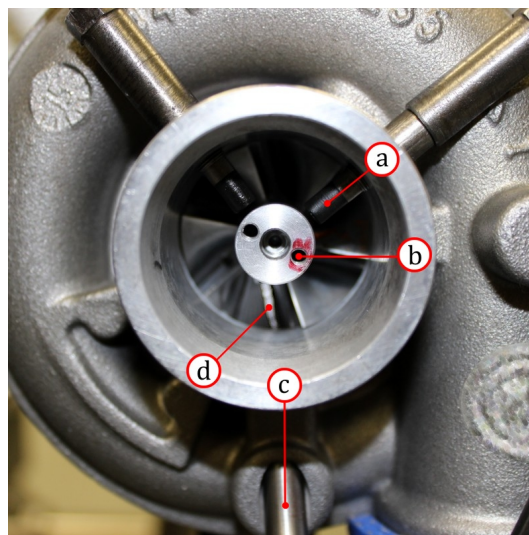
**Obrázek 7.1:** Pohled do zkušebny na zkušební zařízení:

- a) ložisková skříň turbodmychadla,
- b) plynový hořák s říditelnými parametry vzduchu na výstupu,
- c) odvod plynu z turbínové skříně,
- d) přívod vzduchu s říditelným průtočným množstvím do kompresorové skříně,
- e) odvod stlačeného vzduchu z kompresorové skříně,
- f) přívod mazacího oleje s říditelnou teplotou a tlakem do ložiskové skříně,
- g) odvod mazacího oleje z ložiskové skříně.



**Obrázek 7.2:** Detail ložiskové skříně:

- a) akcelerometr,
- b) přívod oleje do skříně,
- c) indukční snímače,
- d) snímače rotorových vibrací.



**Obrázek 7.3:** Pohled do kompresorové skříně:

- a) snímač rotorových vibrací,
- b) závitová díra pro nevyvážek,
- c) otáčková sonda,
- d) zlomená lopatka.

proudů. V rámci popisované zkoušky byly navíc do měřicí matice vyvrtány dvě závitové díry ukázané na obr. 7.3, které sloužily k zakládání přídavných nevyvážek. Další dvě díry byly vyvrtány i do kompresorového kola a čtyři do turbínového kola (obr. 7.4). Geometrie a hmotnostní parametry zkušebního rotoru jsou totožné s parametry specifikovanými na obr. 6.2 a v tab. 6.2. Rotor turbodmychadla byl vyvážen standardním postupem výrobce v následujících krocích:

- i) Hřídel s přivařeným turbínovým kolem byl pomaloběžně vyvážen ve dvou referenčních rovinách na vyvažovače s aerostatickými ložisky.
- ii) Kompresorové kolo bylo nasazeno na trn a pomaloběžně vyváženo ve dvou referenčních rovinách na vyvažovače s aerostatickými ložisky.
- iii) Sestavený rotor byl uložen do technologických skříní (uložení odpovídá v provoznímu uložení) a byl vysokootáčkově dovyvážen v jedné referenční rovině.

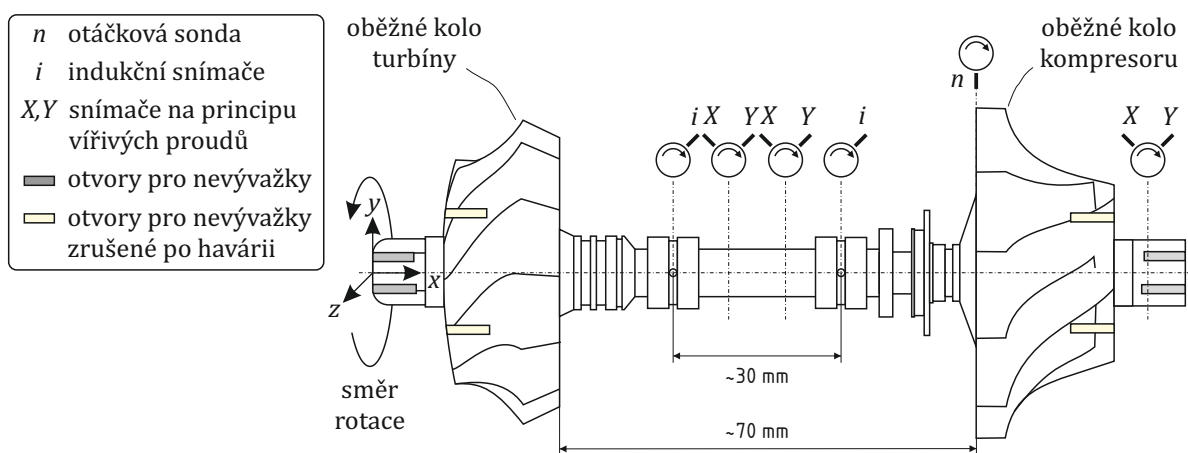
Zbytková statická nevyváženost rotoru, dále označená jako *nominální nevyváženost*, je nižší než  $1,08 \cdot 10^{-1} \text{ g mm}$  a splňuje požadavky na stupeň jakosti vyvážení G 6,3 dle ČSN ISO 1940-1 (2005)<sup>1</sup>. Zbytkovou dvojitou nevyváženost nelze vzhledem k vyvažovacímu postupu určit.

### 7.1.2 Popis metody měření rotorových vibrací

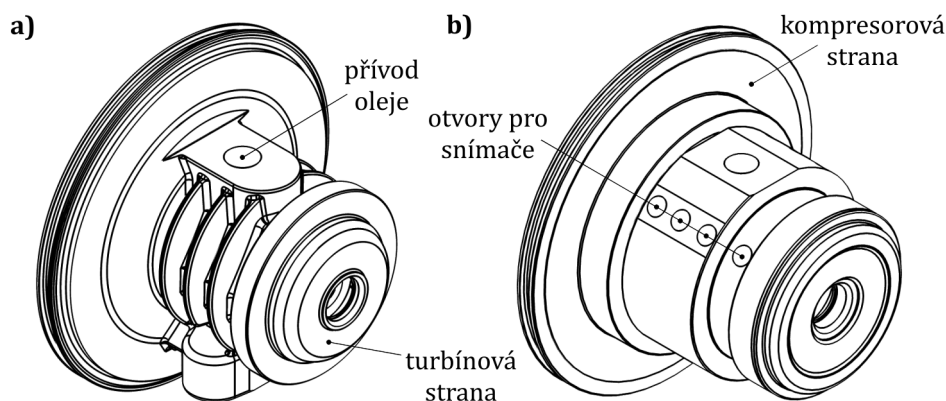
Typicky se referenční rovina pro měření relativních vibrací rotoru turbodmychadla nachází v kompresorové skříni zhruba v polovině délky měřicí matice. Snímače relativních vibrací jsou připevněny ke kompresorové skříni a jejich hlavy se nachází ve vstupním kanálu skříně (obr. 7.3). Teplota vzduchu ve vstupním kanálu není výrazně vyšší než teplota vzduchu na zkušebně a není nutné používat speciální teplotně odolné snímače. Z měření vibrací v jedné referenční rovině není možné zrekonstruovat tvar kmitu rotoru. Aby bylo možné zrekonstruovat ohybový tvar kmitu rotoru a posoudit kmitání čepu hřídele v radiálních ložiskách, bylo měření rotorových vibrací realizováno celkem ve třech referenčních rovinách, jejichž poloha je ukázána na obr. 7.4.

Protože se zkoušené turbodmychadlo velikostí řadí na pomezí malých a středně velkých turbodmychadel, není mezi radiálními ložisky příliš prostoru. Standardní ložisková skříň navíc

<sup>1</sup>V době provádění zkoušky byla tato norma ještě v platnosti, nyní je nahrazena normou ČSN ISO 21940-11.



**Obrázek 7.4:** Referenční roviny použité pro měření relativních rotorových vibrací, otáček rotoru a otáček plovoucích pouzder. Mezi směry X a Y je úhel  $90^\circ$ .



**Obrázek 7.5:** Standardní ložisková skříň zkoušeného turbodmychadla a) a prototyp zkušební skříňe b).

kvůli přítomnosti žeber ukázaných na obr. 7.5a neumožňuje montáž snímačů do libovolně zvolené referenční roviny. Proto byl vyvinut prototyp zkušební skříňe ukázaný na obr. 7.5b.

Prototyp zkušební skříňe byl vyroben z válcových odlitků. Délka prototypu je totožná s délkou sériové skříňe, geometrie olejového labyrintu a axiálních i radiálních ložisek zůstala zachována. Hmotnost prototypu je mírně vyšší než hmotnost originálu. Válcový tvar prototypu je výhodný v tom, že umožňuje situovat referenční roviny v podstatě libovolně, jediným limitujícím faktorem je průměr závitových děr určených pro montáž snímačů. Poloha závitových děr je naznačena na obr. 7.5b, použité snímače relativních rotorových vibrací na principu vířivých proudů mají průměr M3 a indukční snímače, kterými byla měřena úhlová rychlost plovoucích pouzder, mají průměr M4. Typová označení snímačů jsou uvedena v tab. 7.1. Po montáži snímačů byly závitové díry utěsněny, aby bylo zamezeno případným unikům oleje.

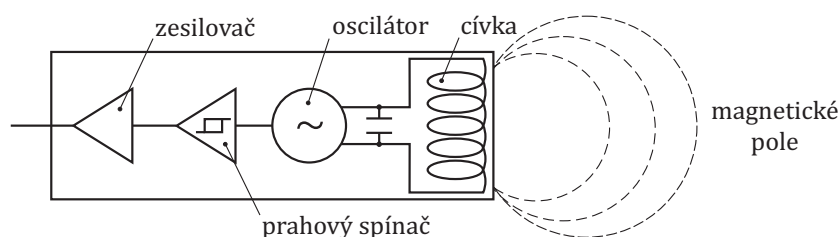
Snímače rotorových vibrací byly orientovány v souladu s ČSN ISO 20816-1 (2017). Podélné osy snímačů jsou na sebe kolmé a jsou pootočené o 45° od svislé osy. Snímače jsou označeny *X* a *Y*, označení je zvoleno tak, že se rotor otáčí ve směru od *X* k *Y*, viz obr. 7.4. Otáčky rotoru byly měřeny sondou standardu TTL umístěnou v kompresorové skříni, viz obr. 7.3c, která detekovala průchod lopatek oběžného kola kompresoru.

### 7.1.3 Měření otáček rotujících plovoucích pouzder

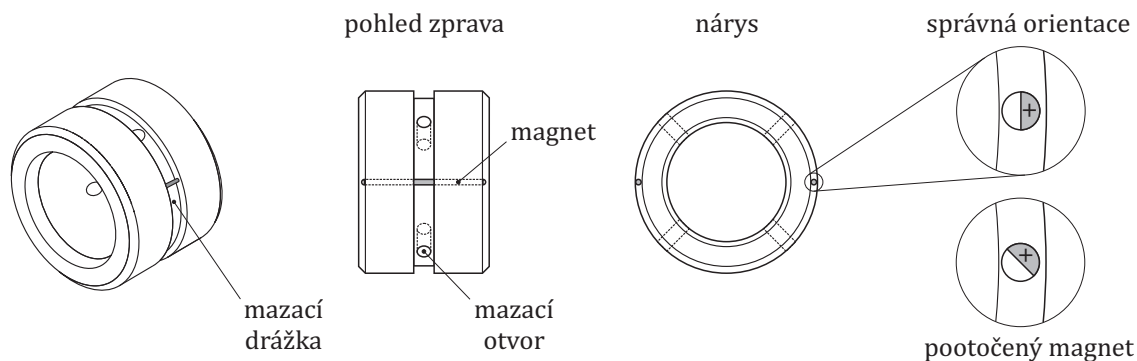
Úhlová rychlost rotujících plovoucích pouzder se obvykle měří snímačem výchylky na principu rotujících proudů, který detekuje procházení mazacího otvoru nebo jiného dostatečně hlubokého

Zařízení	Typové označení	Nominální citlivost
1× analyzátor signálů	Oros OR36	–
1× vysokorychlostní otáčková sonda	–	standard TTL
2× indukční snímač	OMRON $\mu$ PROX E2E	–
2× snímač na principu vířivých proudů	Brüel & Kjaer SD-051	13,2 mV $\mu\text{m}^{-1}$ (hliník)
4× snímač na principu vířivých proudů	$\mu\epsilon$ eddyNCDT 3010 S05	20,0 mV $\mu\text{m}^{-1}$ (ocel)
1× akcelerometr	Brüel & Kjaer 4370V	98,0 pC $\text{g}^{-1}$

**Tabulka 7.1:** Typové označení analyzátoru a seznam použitých snímačů.



Obrázek 7.6: Schéma indukčního snímače.



Obrázek 7.7: Schéma zkoušeného plovoucího pouzdra.

prvku, který se nachází na vnějším povrchu pouzdra. [Trippett a Li \(1984\)](#) úspěšně měřili úhlovou rychlost plovoucích pouzder opatřených podélnou drážkou a také ukázali, že vliv drážky na odezvu jimi zkoušeného rotoru je zanedbatelný. Jejich experiment byl nicméně prováděn za odlišných podmínek: vstupní teplota oleje byla oproti zde popisovanému testu třetinová ( $32\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), vstupní tlak oleje zhruba poloviční ( $2,76$  baru) a nominální vnější ložisková vůle  $1,33\times$  vyšší. [San Andrés a Kerth \(2004\)](#) měřili úhlovou rychlost plovoucích pouzder optickými vlákny.

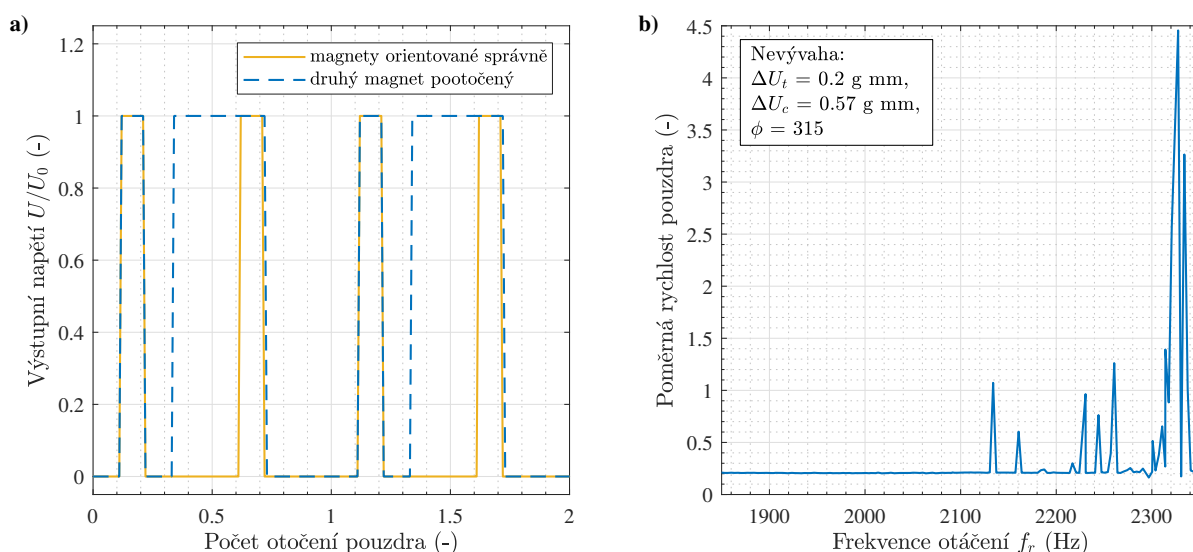
Výrobce zkušebního turbodmychadla nicméně metodu podélné drážky nepovolil v obavě, aby nedošlo k narušení vnějšího olejového filmu. Kvůli hloubce obvodové mazací drážky, která přesahovala měřicí rozsah běžně dostupných snímačů průměru M3 i M5, nebylo možné snímat průchod mazacích otvorů pomocí snímačů výchylky. Ve spolupráci s výrobcem tedy byla vyvinuta alternativní metoda využívající pro měření úhlové rychlosti pouzder indukční snímače.

Indukční snímače (obr. 7.6) jsou bezkontaktní senzory, které jsou v průmyslu využívány k detekci přiblížení vodivých předmětů. Indukční snímače se vzhledem k principu fungování a odezvové charakteristice někdy nazývají indukční přepínače<sup>2</sup>, protože elektrické veličiny na jejich výstupu nabývají pouze dvou hodnot. Indukční snímače mohou být použity nejen k detekci vodivých předmětů, ale jsou citlivé i na periodické změny magnetického pole před snímací hlavou. Výhodou indukčních snímačů je jejich odolnost vůči nepříznivým podmínkám: nevadí jim prašné prostředí, pracují v kapalinách a jsou odolné vůči elektromagnetickému rušení.

Představená aplikace využívá citlivost indukčních snímačů na změny magnetického pole. Hlavní myšlenka spočívá v tom, že se plovoucí pouzdro osadí dvěma malými tyčovými magnety umístěnými v podélně vyvrtných otvorech, viz obr. 7.7. Jakmile se pouzdro začne otáčet, vytvoří se v ložisku rotující magnetické pole a vhodně zvolený snímač – zde záleží na parametrech rezonančního obvodu ve snímači a parametrech magnetů v pouzdře – bude mít na výstupu

<sup>2</sup>Anglicky *inductive (proximity) switch*.





**Obrázek 7.8:** Naměřená odezva indukčního snímače v rotujícím magnetickém poli a) a naměřená poměrná rychlost plovoucího pouzdra při velké nevyváze rotoru b).

dva pulzy za otáčku. Důležité je ale dodržet správnou orientaci magnetu. Pokud je magnet pootočený, může být odezva snímače deformovaná, jak ukazuje obr. 7.8a. Před ostrým měřením je tedy nutné zkontrolovat polaritu magnetů.

Dále je nutné zajistit, aby olejový film byl co nejméně ovlivněn měřicím řetězcem. Snímač tedy musí být do ložiskové skříně namontován tak, aby jeho hlava nezasahovala do prostoru ložiskové mezery. Otvor se snímačem je vhodné vyplnit tepelně odolným epoxidem, aby bylo zamezeno únikům oleje. Epoxid, který případně zasahuje do ložiskové mezery, je třeba odstranit obráběcím nástrojem.

Popsaná měřicí metoda je za určitých podmínek zatížena významnou chybou měření (obr. 7.8b). Chyba měření se projevila pouze při provozu rotoru s velkou přídatnou nevyvážeností a nebyla opakovatelná – při většině běhů byla naměřená data v pořádku. Vzhledem k neopakovatelnosti jevu se nepodařilo zjistit příčinu vzniku chyby, je ale možné, že chyba měření souvisí s teplotou pracovního prostředí snímače, protože se neprojevila při pohonu turbíny studeným vzduchem, nebo s kmitáním pouzdra.

#### 7.1.4 Seznam zkoušených provozních stavů

V tab. 7.2 a 7.3 jsou seznamy zkoušených variant přídatné nevyváženosti a provozních stavů, při kterých bylo turbodmychadlo zkoušeno. Všechny provozní stavy byly zkoušeny při všech variantách přídatné nevyváženosti.

## 7.2 Vliv snímačů v kompresorové skříně na provoz turbodmychadla

Přestože byla zkouška navržena tak, aby měřicí řetězec ovlivňoval zkoušené turbodmychadlo co nejméně, již během první hodiny testování se zatíženým kompresorovým stupněm došlo k havárii rotoru. Tentýž rotor prošel dvoudenním testováním s nezatíženým kompresorovým stupněm a během tohoto testování se nevyskytly žádné problémy.

K havárii došlo při provozu na cca. 140 000 ot/min při pohonu turbíny horkým vzduchem a při nominálních hodnotách kompresního poměru a průtoku vzduchu kompresorovým stupněm. Havárie se projevila náhlým nárůstem vibrací a hluku a zkušební zařízení bylo manuálně odstaveno. Po demontáži skříní byla nalezena prasklá lopatka kompresorového kola (šlo o lopatku bez otvoru pro zakládání přídatných hmotností, viz obr. 7.3d). Dále bylo indikováno částečné ojetí vnitřního povrchu kompresorové skříně indikující kontakt mezi špičkami lopatek a skříní.

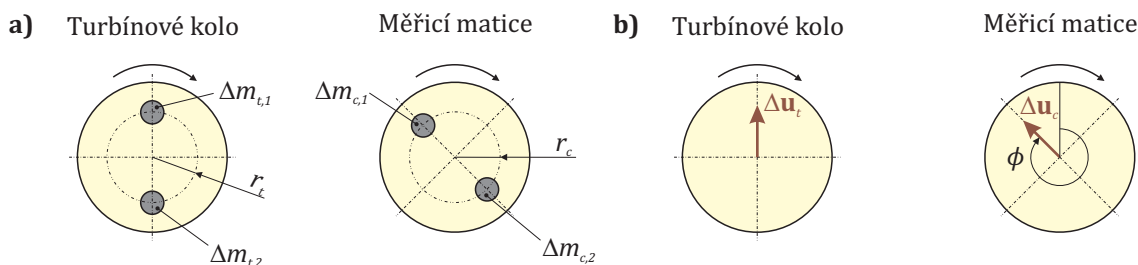
Varianta	Přídavné nevyvážky			Turbínové kolo			Měřicí matice		
	$\Delta U_t$ (g mm)	$\Delta U_c$ (g mm)	$\phi$ (°)	$r_t$ [mm]	$\Delta m_{t,1}$ (g)	$\Delta m_{t,2}$ (g)	$r_c$ (mm)	$\Delta m_{c,1}$ (g)	$\Delta m_{c,2}$ (g)
1	—	—	—	5,0	—	—	4,7	—	—
2	0,21	—	—	5,0	0,291	0,248	4,7	—	—
3	—	0,20	—	5,0	—	—	4,7	0,292	0,249
4	—	0,57	—	5,0	—	—	4,7	0,127	0,249
5	0,21	0,20	135	5,0	0,291	0,248	4,7	0,249	0,292
6	0,21	0,20	315	5,0	0,291	0,248	4,7	0,292	0,249
7	0,21	0,57	135	5,0	0,291	0,248	4,7	0,127	0,249
8	0,21	0,57	315	5,0	0,291	0,248	4,7	0,249	0,127

**Tabulka 7.2:** Seznam zkoušených variant přídavné nevyváženosti.  $\phi$  je fázový úhel mezi vektory přídavné nevyváženosti  $\Delta \mathbf{u}_t$  a  $\Delta \mathbf{u}_c$ , jehož orientace je patrná z obr. 7.9b. Geometrické a hmotnostní parametry  $r_t$ ,  $r_c$  a  $\Delta m_{t,i}$ ,  $\Delta m_{c,i}$  jsou definovány na obr. 7.9a.

Typ provozu	Opakování / délka	Provozní otáčky (1000 · ot min <sup>-1</sup> )	Průtok komp. (kg s <sup>-1</sup> )	Vzduch do turbíny
rozběh + doběh	3×	105 – 160* – 105	nekonstantní	teplý
ustálený stav	30 s	120	0,11	teplý
ustálený stav	30 s	140	0,13	teplý
rozběh + doběh	3×	60 – 145* – 60	nekonstantní	studený
ustálený stav	30 s	90	0,08	studený
ustálený stav	30 s	120	0,11	studený
ustálený stav	30 s	140	0,13	studený

\* Pro varianty celkové nevyváhy 6 – 8 z tab. 7.2 byly maximální otáčky pouze 140 000 ot/min.

**Tabulka 7.3:** Seznam testovaných provozních stavů. Průtok kompresorem je přibližný.



**Obrázek 7.9:** Umístění přídavných hmotností a) a orientace vektorů přídavné nevyváženosti b).

Na kluzných plochách ložisek nebyly nalezeny žádné indikace, takže závada ložisek, např. zadření, bylo vyloučeno. Před pokračováním zkoušky byly nicméně vyměněny rotor i plovoucí pouzdra. Havárie se ale záhy opakovala. Následky byly v tomto případě vážnější: dvě lopatky praskly, bylo indikováno obvodové ojetí kompresorové skříně a navíc došlo ke zničení obou snímačů relativních vibrací umístěných v kompresorové skříně. Kluzné plochy ložisek byly opět bez stop jakéhokoliv poškození.

Havárie byla pravděpodobně způsobena snímači rotorových vibrací umístěnými v kompresorové skříně. Tyto snímače narušily tlakové pole na vstupu do kompresorového stupně a jejich malá vzdálenost od náběžných hran lopatek kompresorového kola neumožnila stabilizaci tlakového pole. Při určitých zátěžných stavech byla nerovnoměrnost pole natolik závažná, že došlo k formaci oblastí zpětného proudění a rozkmitání lopatek nebo celého kola, které mělo fatální následky. Přesný mechanismus vzniku havárie je nicméně neznámý a pro lepší pochopení jevu by bylo třeba provést detailní CFD analýzu.

Nestabilní jevy, ke kterým dochází, pokud v kompresorovém stupni vznikne oblast se zpětným prouděním, popisuje Sorokes et al. (2014). Popisovaný jev se nazývá *přetažení*<sup>3</sup> a obvykle se projevuje zvýšenými vibracemi v subharmonické oblasti, tlakovými pulzacemi v prostoru kompresorové skříně a snížením kompresního poměru kompresorového stupně. V zásadě existují dva typy přetažení:

**Stacionární přetažení:** oblast zpětného proudění je lokalizovaná, nehybná.

**Rotující přetažení:** oblast zpětného proudění se pohybuje relativně vůči kompresorové skříně; typicky v obvodovém směru

Sorokes et al. (2014) dále uvádí podmínky, které přispívají ke vzniku oblasti zpětného proudění:

- proudění v kavitách obklopujících rotující oběžné kolo,
- *excentricita rotoru*, která způsobuje, že vůle mezi rotorem a skříní je po obvodu proměnná a tedy i rychlost proudění je po obvodu proměnná,
- *nerovnoměrné vstupní tlakové pole* způsobené mj. tvarem vstupního kanálu, konstrukčními prvky na stěnách vstupního kanálu nebo spojením vstupního proudu z dílčích proudů.

Podmínky vedoucí k popsání havárie je poměrně obtížné diagnostikovat za provozu i kvůli tomu, že po havárii nebyly měřeny vibrace matice a chybí tedy záznam nominálního stavu. Následující tvrzení se tedy týkají především odezvy v referenční rovině u radiálního ložiska na straně kompresoru.

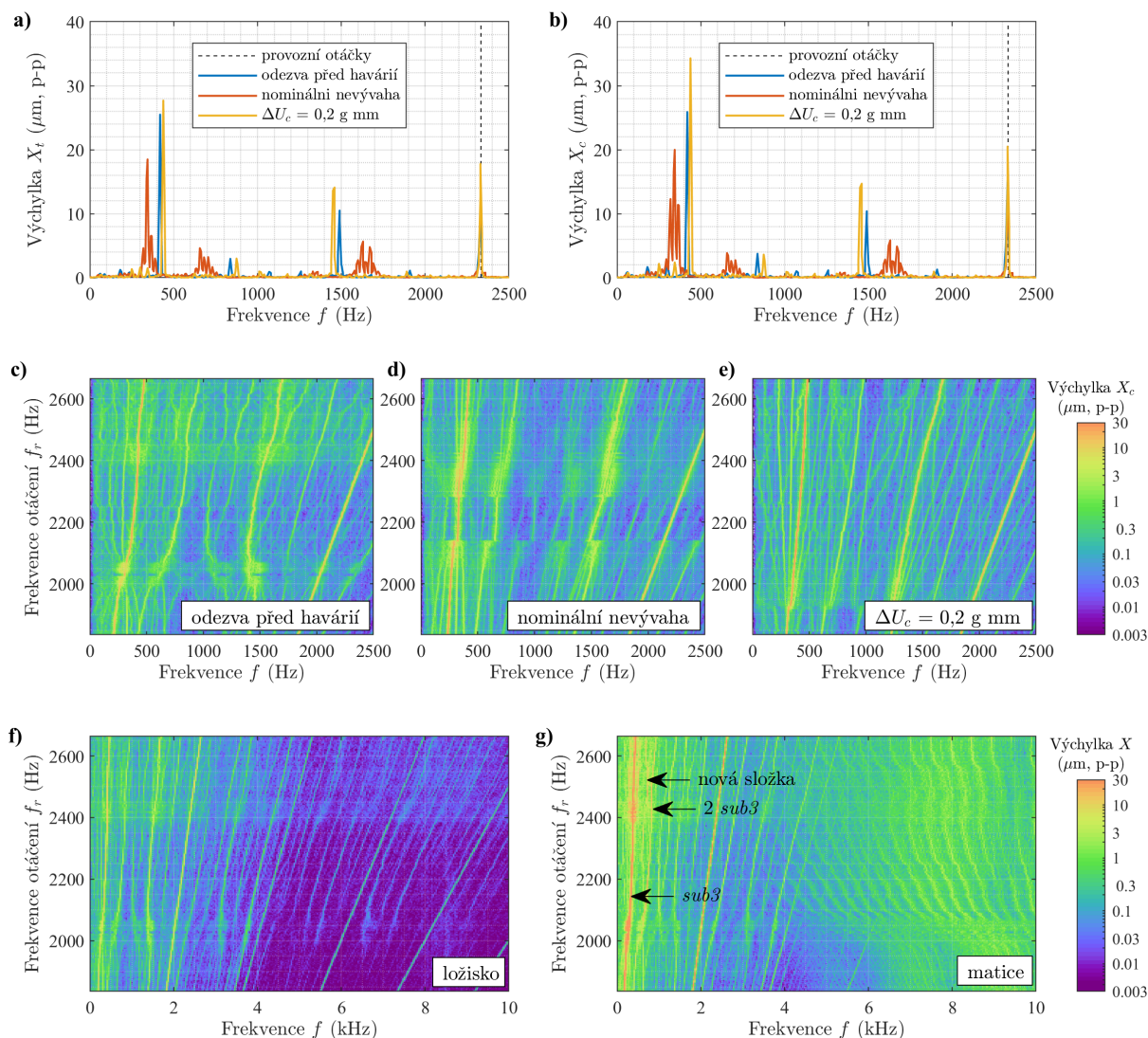
Bezprostředně před havárií došlo k nárůstu amplitud subharmonických složek. Obdobně se ale projevuje i odezva na zvýšenou nevyváženost kompresorového kola, což je ukázáno na obr. 7.10a a 7.10b. Amplitudy a frekvence subharmonických složek jsou v případě odezvy před havárií velmi podobné amplitudám a frekvencím při provozu s nevyváženým kompresorovým kolem a oba uvedené stavy se liší od odezvy na nominální nevyváženost.

V případě, že je analyzován časově-frekvenční záznam odezvy, je situace jiná. Na obr. 7.10c – 7.10e je zobrazena závislost odezvy ve frekvenční oblasti na frekvenci otáčení rotoru  $f_r$ . Z obr. 7.10c je patrné, že bezprostředně před havárií se po překročení  $f_r = 2000$  Hz měnil průběh subharmonických složek. V případě odezvy na nominální nevyváhu (obr. 7.10d) i odezvy na přídatnou nevyváženost kompresorového kola  $\Delta U_c = 0,20$  g mm (obr. 7.10e) se průběh

<sup>3</sup>Anglicky *stall*.

subharmonických složek v okolí  $f_r = 2000$  Hz nemění. Bezprostředně před havárií nedochází ke skokové změně frekvence subharmonické složky *sub3*. Frekvence se mění spojitě a kolem  $f_r = 2450$  Hz se dokonce mírně snižuje. Ve zbývajících dvou dochází ke skokovým změnám při  $f_r = 2150$  Hz (obr. 7.10d) a  $f_r \approx 1900$  Hz (obr. 7.10e).

Z obr. 7.10f a 7.10g vyplývá, že bezprostředně před havárií se v odezvě měřicí matice (a zřejmě také kompresorového kola) projevuje nová subharmonická složka a navíc se rozvíjí kmitání o frekvencích přes 7 kHz, které může souviset s vibracemi lopatek oběžného kola. Zmíněná nová složka se neprojevuje v odezvě čepu hřídele u kompresorového ložiska.



**Obrázek 7.10:** Porovnání rozkmitu čepu hřídele ve směru  $X$  u turbínového a) a kompresorového ložiska b) při různých provozních stavech. V částech c) až e) je zobrazen časově-frekvenční záznam odezvy čepu hřídele u kompresorového ložiska při různých provozních stavech a v částech f) a g) jsou ukázány časově-frekvenční záznamy odezvy čepu hřídele u kompresorového ložiska a odezvy měřicí matice.

## 7.3 Výsledky zkoušky

Předložené výsledky zkoušky byly získány po demontáži snímačů rotorových vibrací z prostoru kompresorové skříně.

### 7.3.1 Poměrná rychlost rotujících plovoucích pouzder

Závislosti poměrné rychlosti rotujících plovoucích pouzder na frekvenci otáčení rotoru jsou vykreslené na obr. 7.11. Jedná se o lineární průměry z realizovaných rozběhů rotoru turbodmyhadla. Data zatížená chybou měření ukázanou na obr. 7.8b nejsou do výsledků zahrnuta.

Poměrná rychlost plovoucího pouzdra v turbínovém ložisku je silně závislá na statické nevyváženosti rotoru. Poměrná rychlost pouzdra v kompresorovém ložisku je ovlivněna nevyvážeností málo, výjimkou je odezva na největší přídavnou nevyváženost ( $\Delta U_t = 0,21$  g mm,  $\Delta U_c = 0,57$  g mm,  $\phi = 315^\circ$ ). Při některých variantách nevyváženosti dochází k téměř skokovému snížení poměrné rychlosti pouzdra v turbínovém ložisku. Tento děj ale není přímo závislý na statické ani dvojitkové nevyváženosti. Lze tvrdit, že poměrné rychlosti pouzder v obou ložiskách jsou citlivé na celkovou statickou nevyváženost rotoru turbodmyhadla, pouzdro v turbínovém ložisku s rostoucí nevyvážeností zpomaluje a je citlivější na nevyváženost turbínového kola, naopak pouzdro v kompresorovém ložisku s rostoucí nevyvážeností zrychluje.

Citlivost poměrných rychlostí pouzder na teplotu vzduchu vstupujícího do turbínové skříně je velmi malý. Pozorování je nicméně limitováno vlastnostmi zkušebního zařízení a plynového hořáku. Rotor totiž mohl být poháněn studeným vzduchem pouze do frekvence otáčení  $f_r \approx 2400$  Hz a naopak nejnižší konstantní frekvence otáčení rotoru při pohonu teplým vzduchem je  $f_r \approx 1800$  Hz. Interval, na kterém lze naměřené hodnoty poměrných rychlostí porovnat, je poměrně úzký. Lze předpokládat, že při nižších frekvencích otáčení, na kterých jsou nižší hydrodynamické ztráty a teplota olejového filmu více závisí na teplotách hřídele a ložiskové skříně, budou výsledky rozdílnější.

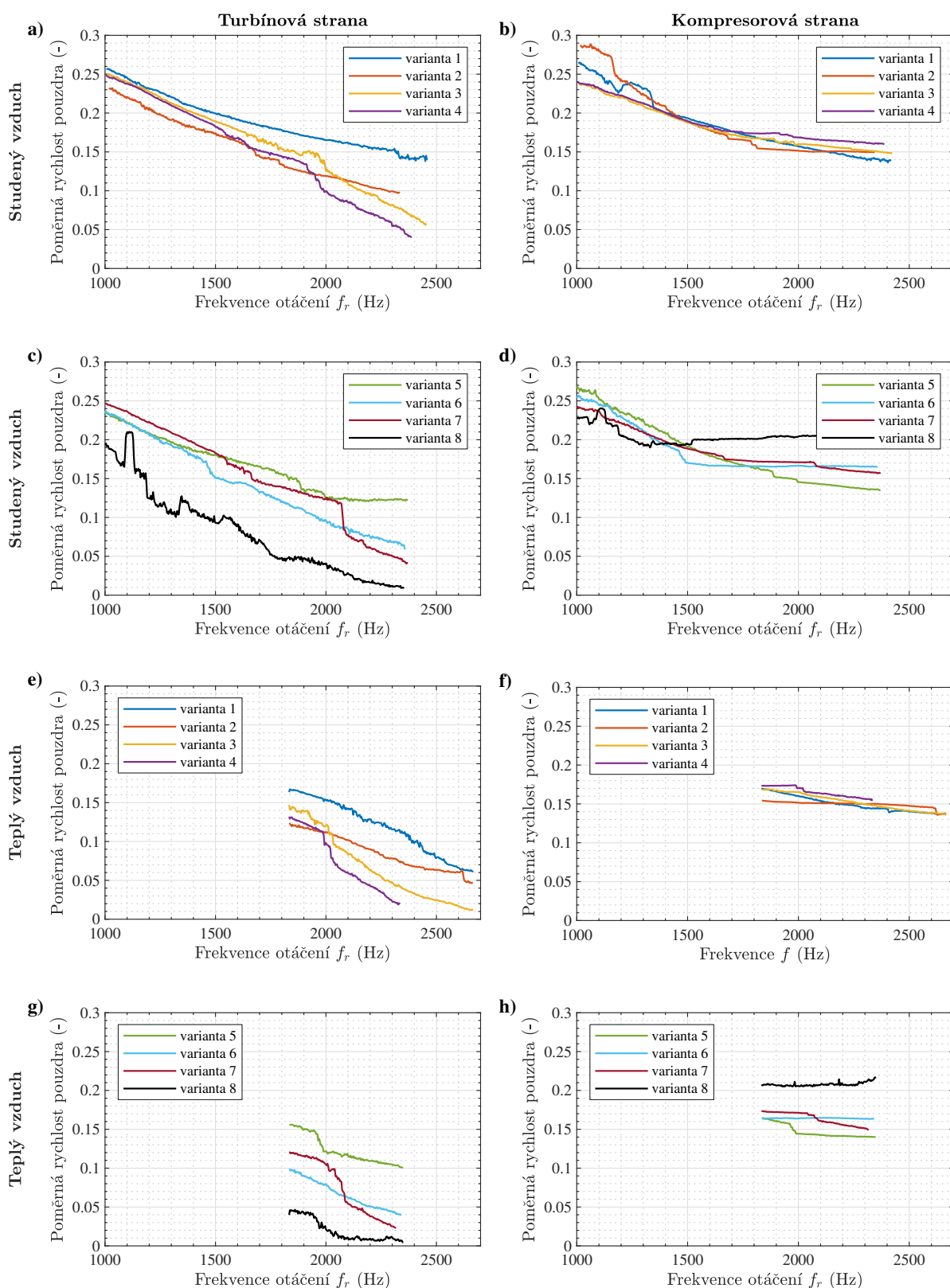
Předložené výsledky dokazují, že nelineární model, který navrhli [Trippett a Li \(1984\)](#) a který je odvozen pro případ, že pouzdro je koncentrické s ložiskovou pánví, nedokáže predikovat poměrnou rychlost pouzder v případech, kdy je rotor turbodmyhadla špatně vyvážen. Předložené výsledky také pravděpodobně vysvětlují rozdíly mezi experimentálními a teoretickými daty, ke kterým docházelo při vysokých otáčkách čepu hřídele a které [Trippett a Li \(1984\)](#) pozorovali.

### 7.3.2 Relativní rotorové vibrace

Relativní rotorové vibrace jsou posouzeny ve frekvenční oblasti. K tomu je využit FFT analyzátor s vlastnostmi definovanými v tab. 7.4. Vzhledem k celkovému rozsahu zkoušky jsou prezentovány pouze vybrané výsledky. Předložené výsledky měření relativních rotorových vibrací byly získány po odstranění snímačů z prostoru kompresorové skříně.

Na obr. 7.12 jsou vykresleny trajektorie čepu hřídele v referenčních rovinách u turbínového a kompresorového ložiska naměřená během ustáleného provozu při frekvenci otáčení rotoru  $f_r = 2000$  Hz. Délka záznamu každé trajektorie je 10 otočení čepu hřídele, tedy cca 5 ms. Trajektorie jsou závislé na velikosti založených přídavných nevyvážek. Velikost smyček trajektorie, které jsou způsobeny otáčkovou složkou odezvy, je závislá na statické nevyváženosti rotoru, zatímco průměr trajektorií, daný amplitudou subharmonické složky s nejnižší frekvencí, nejví jednoznačnou závislost na statické ani dvojitkové nevyváženosti rotoru. Teplota vzduchu





**Obrázek 7.11:** Poměrné rychlosti plovoucích pouzder naměřené při všech zkušenných rozbězích. Velikost nevyvážek je specifikována v tab. 7.2.

<i>Parametr</i>		<i>Přechodové stavy</i>	<i>Ustálený provoz</i>
vzorkovací frekvence	(kHz)	102,4	102,4
mezní frekvence hornopropustného filtru (Hz)		50	50
maximální frekvence	(kHz)	5	20
počet spektrálních čar	(-)	801	12801
spektrální rozlišení	(Hz)	6,25	1,5625
délka měřicího okna	(ms)	160	640
váhová funkce měřicího okna		Hann	Hann
překrytí oken	(%)	95	75
počet oken pro průměrování	(-)	3	60

**Tabulka 7.4:** Nastavení FFT analyzátoru použitého při měření relativních rotorových vibrací.

vstupujícího do turbíny se významněji projevuje pouze při nominální nevyváženosti a největší zkoušené přídatné nevyváženosti. Podobně jako v případě měření poměrné rychlosti pouzder lze předpokládat, že při nižších frekvencích otáčení, na kterých jsou nižší hydrodynamické ztráty a vlastnosti olejového filmu více závisí na teplotách hřídele a ložiskové skříně, budou výsledky rozdílnější.

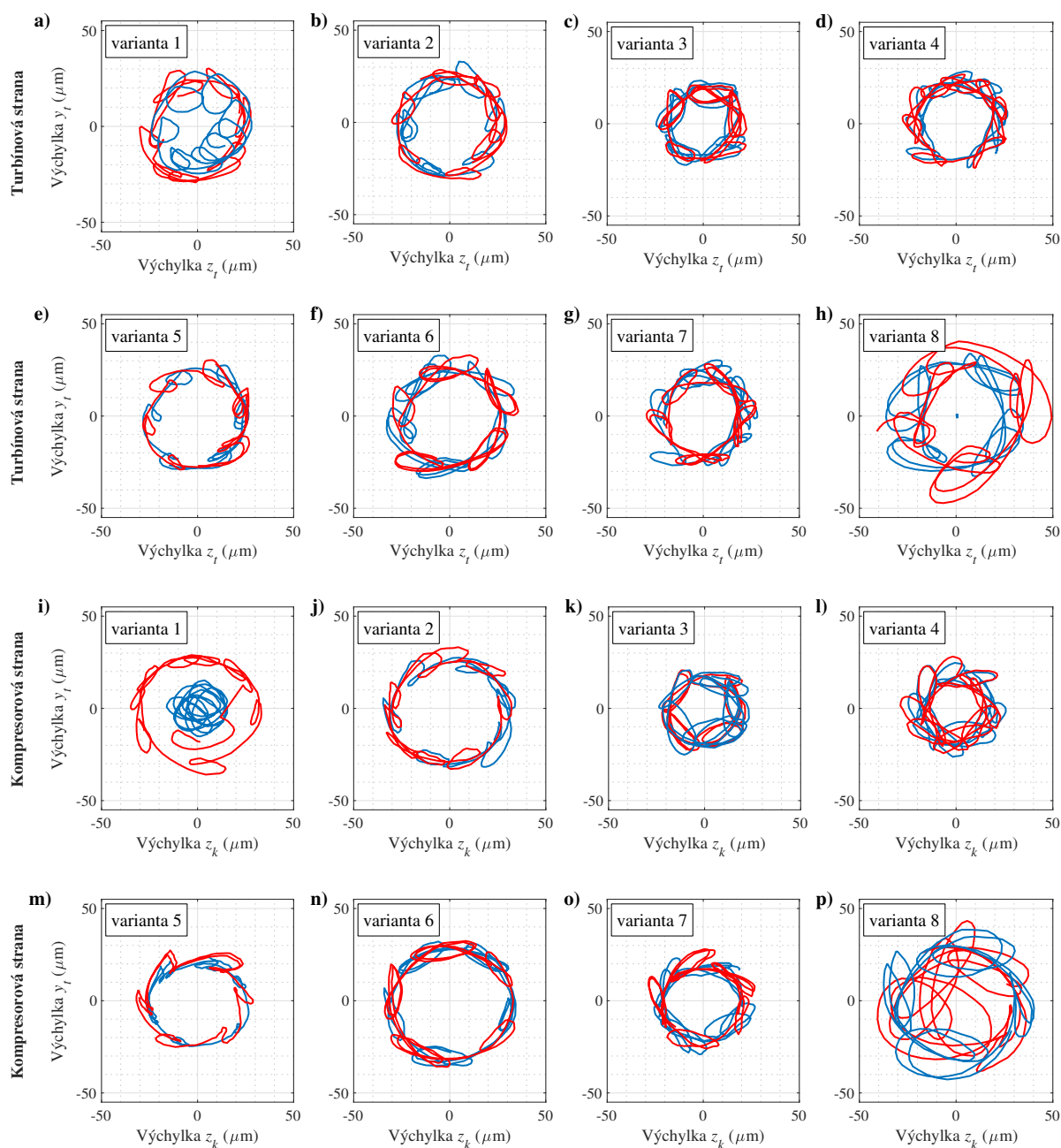
Na obr. 7.13 je srovnána odezva čepu hřídele v referenční rovině u turbínového ložiska naměřená během ustáleného provozu při frekvenci otáčení  $f_r = 2000$  Hz s odezvou čepu hřídele, která byla zaznamenána ve chvíli, kdy rotor dosáhl frekvence otáčení  $f_r = 2000$  Hz. Při ustáleném provozu jsou vybuzeny stejné složky odezvy jako při rozběhích. Jednotlivé složky si odpovídají frekvenčně i poměrem amplitud. Při porovnání amplitud složek získaných při rozběhu s amplitudami složek naměřených při ustáleném provozu lze konstatovat, že amplitudy získané při rozběhu jsou vyšší. Část pozorovatelného rozdílu může být nicméně způsobena nastavením FFT analyzátoru, který má v případě analýzy rozběhů výrazně nižší frekvenční rozlišení. To znamená, že na každé spektrální čáře je soustředěna energie z většího frekvenčního intervalu. Měření nicméně potvrzuje, že výsledky analýzy turbodmychadla při ustáleném provozu jsou porovnatelné s výsledky simulace rozběhů.

Na obr. 7.14 a 7.15 jsou ukázány časově-frekvenční záznamy rozběhů při pohonu studeným vzduchem. Jde o odezvy čepu hřídele ve směru  $X$  v referenčních rovinách u turbínového i kompresorového ložiska.

Na obr. 7.14a a obr. 7.14b jsou patrné skokové změny subharmonických složek, které jsou popsány v předchozí kapitole a které experimentálně pozorovali také Schweizer a Sievert (2009). K první změně dochází při  $f_r = 1350$  Hz, kdy náhle vymizí subharmonická složka  $sub1$  o frekvenci přibližně 550 Hz. Tato složka je zapříčiněna nestabilitou vnitřního olejového filmu. Po překročení  $f_r = 1350$  Hz je dominantní složkou odezvy čepu hřídele u turbínového ložiska subharmonická složka  $sub3$ . Tato složka je na kompresorové straně málo významná a dominantní je otáčková složka vibrací. V obou referenčních rovinách je zároveň výrazná složka o frekvenci  $1X - 2 sub3$ , kde  $1X$  je otáčková složka odezvy. Druhá skoková změna nastává při frekvenci otáčení  $f_r = 2320$  Hz, kdy dojde k frekvenčnímu posunu subharmonické složky  $sub3$ , což je pravděpodobně projevem synchronizace frekvence subharmonické složky  $sub3$  s hydrodynamickou rychlostí vnitřního filmu (Schweizer, 2009).

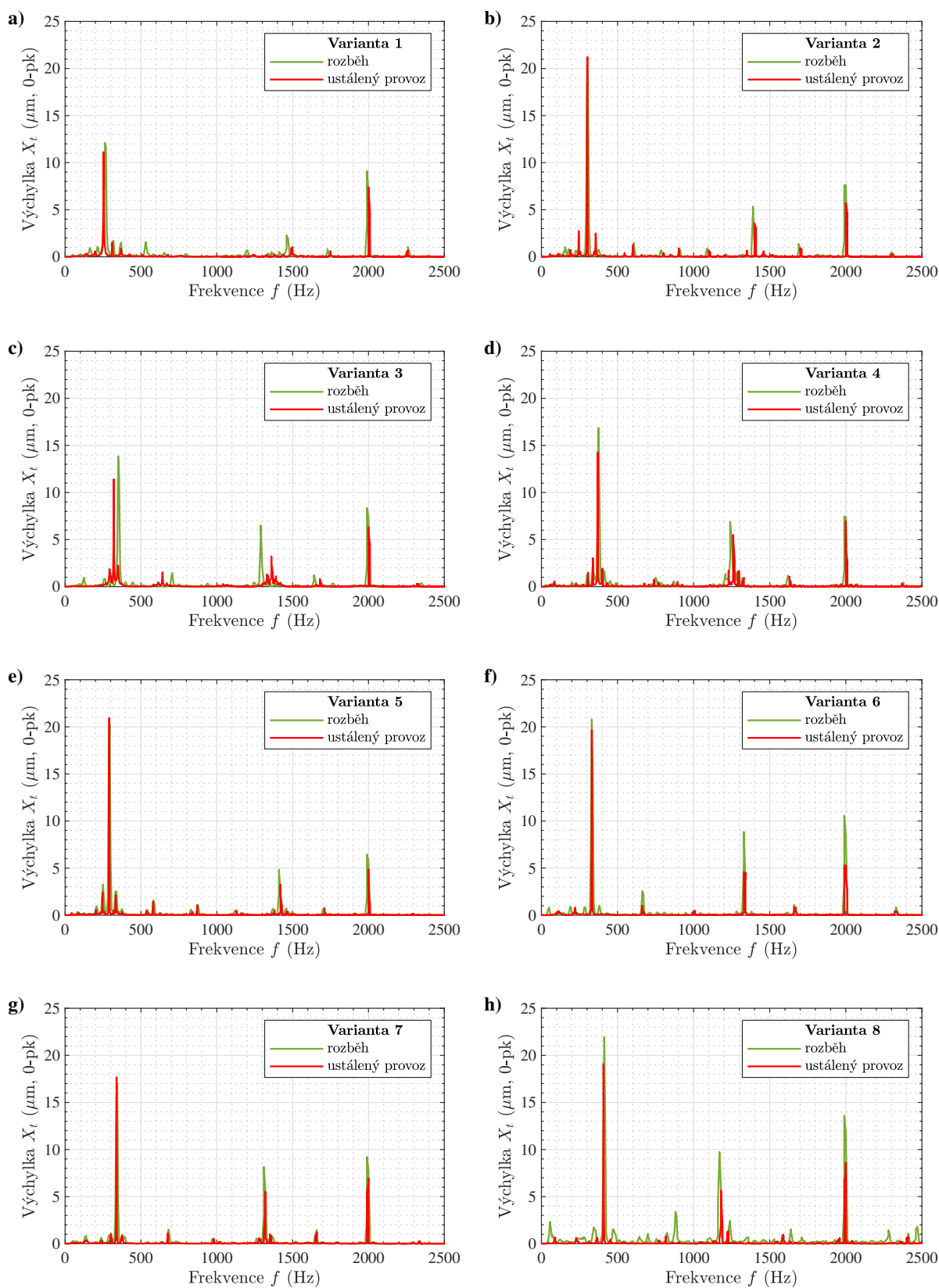
Z dalších diagramů je patrné, že při rozvážení rotoru se frekvence otáčení, při nichž dochází ke skokovým změnám odezvy, snižují a v některých případech, např. obr. 7.14e, 7.14g a 7.15e se projevuje další skoková změna frekvence subharmonické složky  $sub3$ .

Se zvyšující se statickou nevyvážeností rotoru se zvyšuje frekvenční posun složek při skokových změnách odezvy. V případě varianty nevyváženosti 8 se subharmonická složka *sub3* změní téměř o 100 Hz. Nevyváženost rotoru má rovněž vliv na výskyt postranních frekvencí, které popisuje [Nguyen-Schäfer \(2012\)](#). Tyto rozdíly jsou patrné především při porovnání grafů z obr. 7.15e a 7.15f.

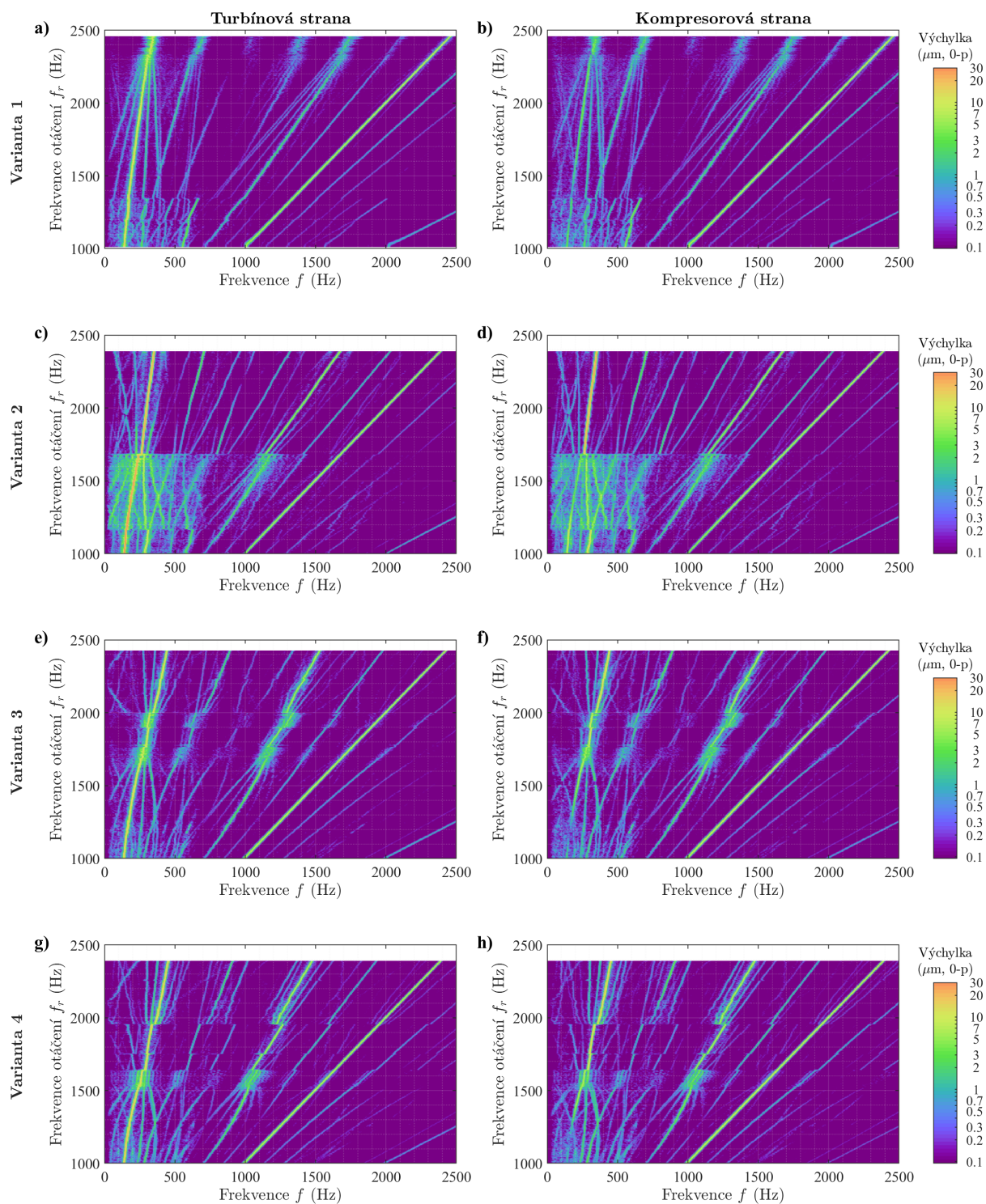


**Obrázek 7.12:** Trajektorie čepu hřídele v referenčních rovinách mezi ložisky při provozu na konstantních frekvencích otáčení  $f_r = 2000$  Hz a pohonu teplým (červeně) i studeným vzduchem (modře). Velikost nevyvážků je specifikována v tab. 7.2.

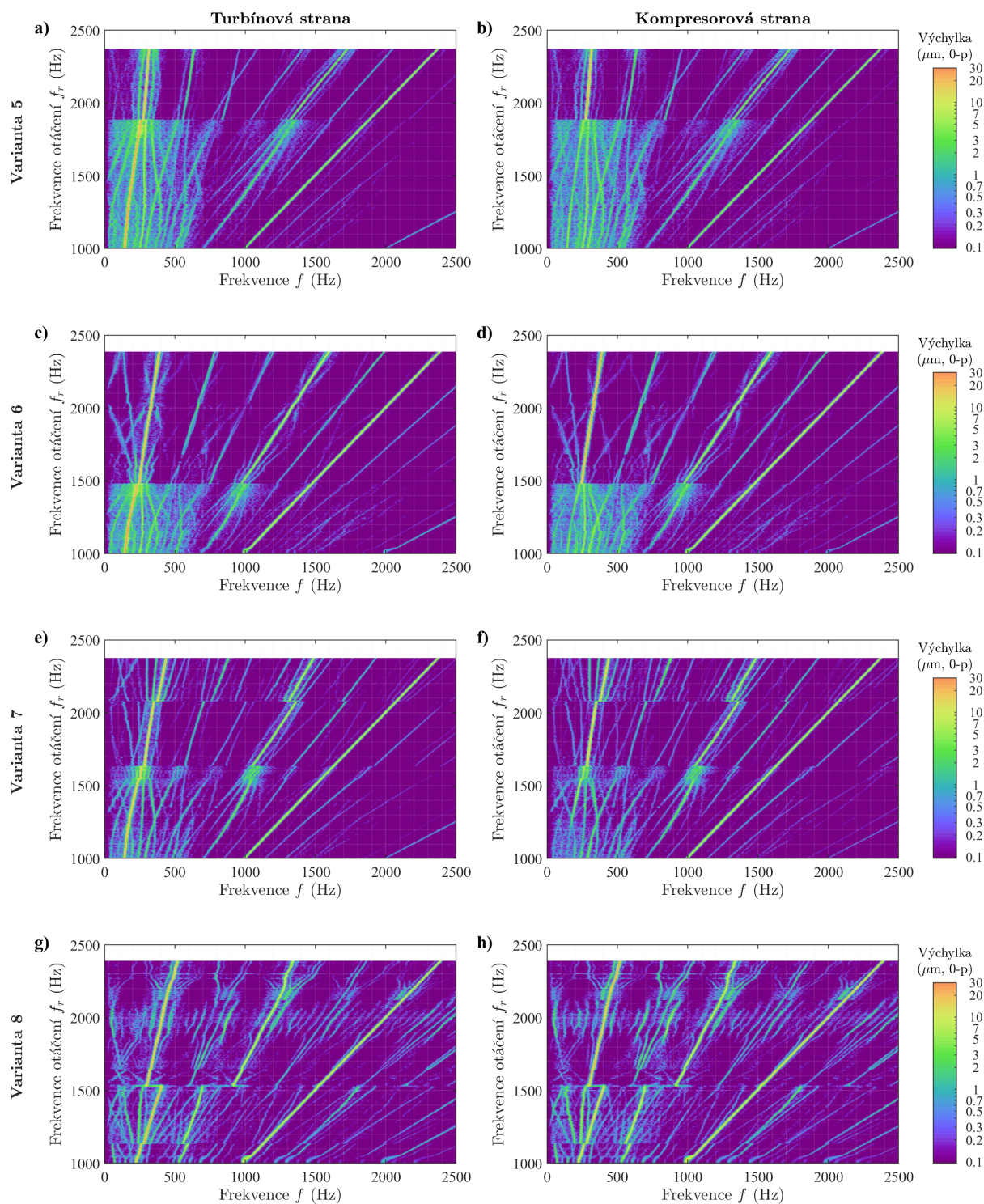




**Obrázek 7.13:** Porovnání odezvy čepu hřídele u turbínového ložiska během ustáleném provozu při frekvenci otáčení  $f_r = 2000$  Hz a při rozběhu. Velikost nevývažků je specifikována v tab. 7.2.



**Obrázek 7.14:** Porovnání odezvy čepu hřídele u turbínového i kompresorového ložiska při různých nevyváženostech rotoru. Pohon rotoru turbodmychadla je realizován *studným* vzduchem. Velikost nevyvážek je specifikována v tab. 7.2.



**Obrázek 7.15:** Porovnání odezvy čepu hřídele u turbínového i kompresorového ložiska při různých nevyváženostech rotoru. Pohon rotoru turbodmychadla je realizován *studným* vzduchem. Velikost nevyvážek je specifikována v tab. 7.2.



## 8 Závěr

Tato práce je věnována výzkumu v oblasti dynamiky rotorů turbodmychadel. V následujících odstavcích jsou shrnuty výsledky související s jednotlivými cíli definovanými v podkapitole 1.4.

### Návrh metodiky modelování rotorů turbodmychadel

V kapitole 2 jsou odvozeny koeficientové matice hřídelových prvků a oběžných kol, které autor využívá ve vlastním softwaru (viz Smolík (2013)). V kapitole 3 je odvozena Reynoldsova rovnice popisující rozložení hydrodynamického tlaku v radiálních ložiskách a jsou diskutovány jevy, ke kterým může dojít v ložiskách turbodmychadel. Jde o kavitaci a dále zahrnutí setrvačných sil v olejovém filmu a drsnosti kluzných povrchů.

Je odvozeno několik vztahů, které nejsou součástí citované literatury. Jde o odvození:

- **aerodynamických sil v turbínovém stupni** jako funkce výkonu tohoto stupně (2.49),
- **aerodynamických sil v kompresorovém stupni** jako funkce kompresního poměru tohoto stupně (2.55),
- **modelu laminárního proudění oleje mazacím otvorem v plovoucím pouzdru** v oddíle 3.5.1.

Model proudění oleje je testován v podkapitole 6.5. Zde je ukázáno, že pro účely simulování ohybového kmitání rotoru turbodmychadla je plně dostačující **laminární proudění oleje mazacími otvory** popsat rovností  $p_i = p_s - \frac{1}{2} \rho (h_p^2 + 2 r_i h_p) \omega_p^2$ , kde  $p_i$  je hydrodynamický tlak na vnitřní straně mazacího otvoru,  $p_s$  je mazací tlak na přívodu oleje do vnějšího filmu,  $\omega_p$  je úhlová rychlost pouzdra a zbylé parametry jsou vyznačeny na obr. 3.8. Použití uvedené rovnosti nemá v podstatě žádný vliv na simulovanou odezvu, ale je až o 40 % méně výpočetně náročné při porovnání s komplexnějším modelem (3.78).

### Implementace výpočtového modelu

V kapitole 4 je popsáno řešení Reynoldsovy rovnice pomocí metody konečných diferencí. Pro generování výpočtových sítí na kluzných plochách s mazacími drážkami byl vyvinut program `jourmesh`, který lze nalézt v Příloze A.

V podkapitole 5.3 byl hodnocen vliv použitého modelu hydrodynamických sil na výsledky simulace ohybového kmitání rotoru. Byl porovnán model využívající numerické řešení Reynoldsovy rovnice s modely postavenými na aproximativních analytických řešeních platných pro krátká ložiska. Aproximativní modely **nelze doporučit** pro přesné simulace, mohou ale najít uplatnění v **optimalizačních úlohách** díky nízkým nárokům na výpočtový čas (obr. 5.9b).

### Dynamická analýza turbodmychadla

Při formulaci úlohy dynamické analýzy rotoru turbodmychadla byly představeny postupy stanovení provozních vůlí radiálních ložisek (podkapitola 3.6) a pro respektování zvýšené ohybové tuhosti hřídele po nasazení kompresorového kola (oddíl 2.1.2).

Analýza výsledků simulace je provedena v souladu s podkapitolami 5.1 a 5.2. Pro hodnocení odezvy ve frekvenční oblasti byl vyvinut program `autofft`, který je veřejně dostupný na MATLAB Central File Exchange (Smolík, 2018). Při hodnocení odezvy v časové oblasti bylo přihlédnuto k faktu, že odezvové parametry nelineárního systému nejsou konstantní, ale jde o procesy. Při hodnocení úhlové rychlosti plovoucích pouzder a hydrodynamických ztrát jsou použity střední hodnoty příslušných procesů a konfidenční intervaly (viz podkapitola 6.3).

Dále byla v oddíle 4.3.2 představena metoda odhadu tuhosti ložiska na základě analýzy časové odezvy. Tato metoda je nicméně použitelná pouze pro stabilní ložiska a nelze ji aplikovat na ložiska s rozvinutou nestabilitou olejového filmu.

### Vliv vybraných parametrů na ohybové kmitání rotorů turbodmychadla

Byl posouzen vliv nevyváženosti a ložiskových vůlí na ohybové kmitání rotoru, hydrodynamické ztráty v ložiskách a úhlové rychlosti plovoucích pouzder. Z výsledku simulací vyplývá:

- **Statická nevyváženost** rotoru může způsobit skokové změny subharmonických složek odezvy a ovlivňuje také úhlovou rychlost plovoucích pouzder.
- **Ložiskové vůle** určují charakter odezvy. Stabilita vnějšího filmu závisí především na vnější vůli ložiska  $c_{r,o}$ , zatímco stabilita vnitřního filmu je určena poměrem vůlí  $c_{r,o}/c_{r,i}$ .
- **Hydrodynamické ztráty** závisí na nevyváženosti jen málo. Závislost na vůlích se liší podle toho, kterými subharmonickými složkami kmitá čep hřídele v posuzovaném ložisku. Obecně lze tvrdit, že výrazně nižší vůle zapříčiní vyšší ztráty. **Existují ale různé rozměry vůlí, při nichž jsou amplitudy kmitání stejné, ale ztráty se liší.**

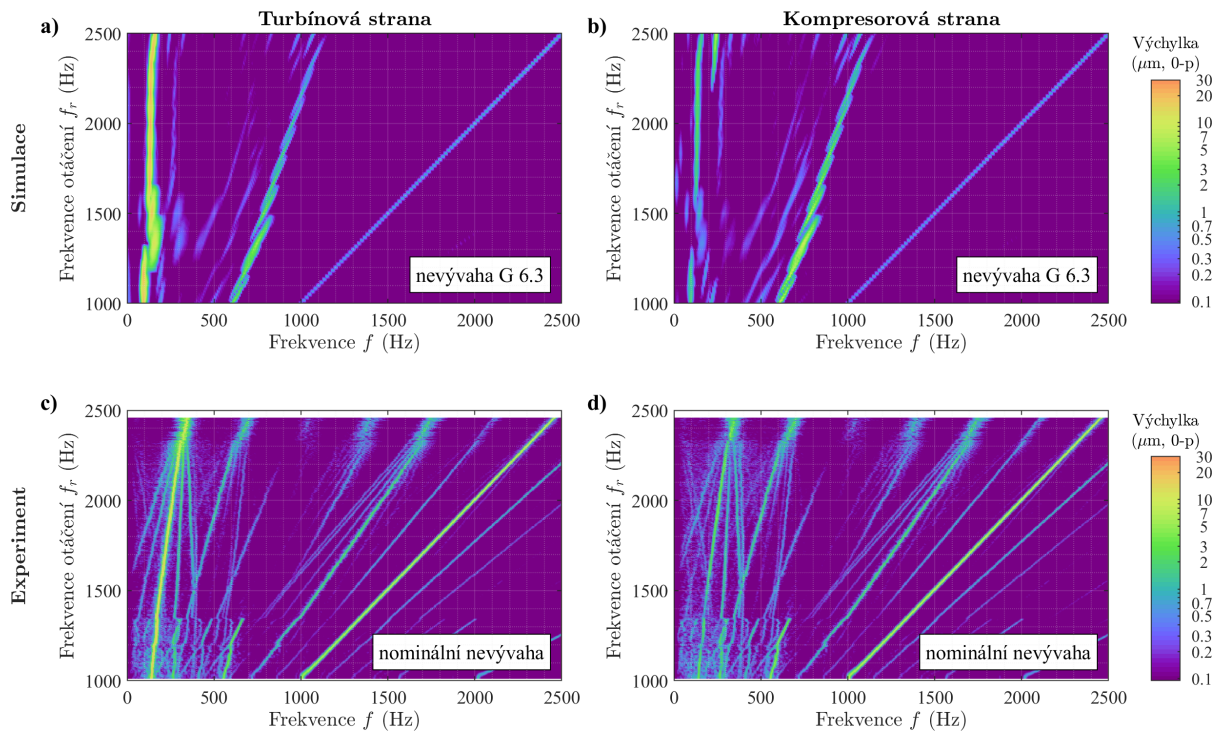
### Měření ohybového kmitání rotoru turbodmychadla

V kapitole 7 je popsán postup výroby zkušební ložiskové skříně, která umožňuje montáž snímačů výchylky do referenčních rovin u radiálních ložisek. Typicky se rotorové vibrace během zkoušek měří pouze na převislém konci za oběžným kolem kompresoru. Snímače v této konfiguraci zasahují do vstupního kanálu kompresoru a narušují rovnoměrnost vstupního tlakového pole. Pokud jsou snímače příliš blízko lopatek oběžného kola, může nerovnoměrnost tlakového pole způsobit přetažení kompresoru a v nejhorším případě i rubbing lopatek a kompresorové skříně.

Dále je představena metoda měření úhlové rychlosti plovoucích pouzder založená na snímání průchodu magnetu, který je připevněn k pouzdru, pomocí indukčního snímače. Měření touto metodou je za extrémních podmínek méně přesné než snímání průchodu drážek či otvorů v pouzdru snímačem výchylky na principu vířivých proudů. Nespornou výhodou je ale cena použitého řešení, která je asi desetkrát nižší v porovnání s výše uvedenou metodou.

Na základě prezentovaných výsledků zkoušky lze formulovat následující tvrzení:

- Přestože radiální ložiska dělí velmi malá vzdálenost (zde  $\sim 30$  mm), v každém se mohou projevit jiné složky odezvy.
- Při najíždění rotoru se složky odezvy projevují na stejných frekvencích a se srovnatelnými amplitudami jako při ustáleném provozu na konstantních otáčkách.
- Statická nevyváženost rotoru ovlivňuje úhlovou rychlost plovoucích pouzder a frekvence otáčení, při kterých dochází ke skokovým změnám odezvy rotoru. S rostoucí nevyvážeností jsou skokové změny významnější, což potvrzuje výsledky simulací.



Obrázek 8.1: Porovnání teoretické a), b) a naměřené odezvy c), d).

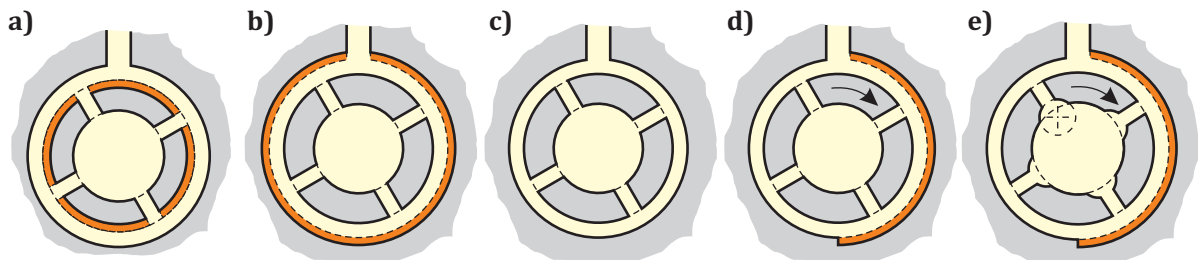
- Turbínu lze pohánět teplým, nebo studeným vzduchem. Při vysokých otáčkách rotoru (více než 80 % nominálních otáček) jsou odezva rotoru i úhlové rychlosti plovoucích pouzder srovnatelné pro oba typy pohonu.
- Simulovaná a měřená odezva jsou velmi podobné, viz obr. 8.1.

### Doporučení pro zlepšení dynamického chování rotorů turbodmychadel

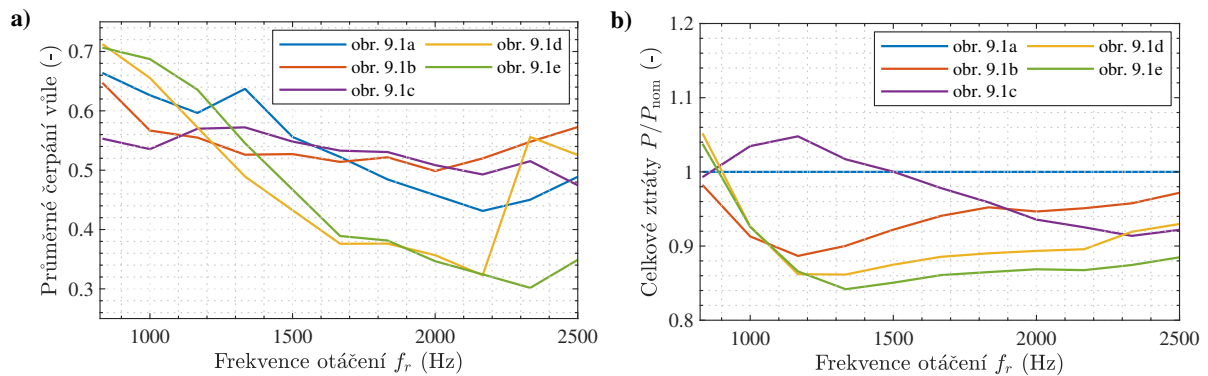
Největším přínosem této práce je návrh stabilního a efektivního radiálního ložiska s plovoucím pouzdem (podkapitola 6.6). Bylo zjištěno, že umístění obvodové mazací drážky ve vnějším filmu má zásadní vliv na odezvu rotoru:

**Obvodová drážka na povrchu pouzdra** (obr. 8.2a) zhoršuje stabilitu vnějšího filmu.

**Obvodová drážka na povrchu ložiskové pánve** (obr. 8.2b) zajišťuje, že vnější film ztratí stabilitu při vyšší frekvence otáčení rotoru než v případě konfigurace (obr. 8.2a).



Obrázek 8.2: Testované konfigurace geometrie radiálního ložiska.



**Obrázek 8.3:** Porovnání čerpání vřelí a) (jde průměr z maximálních hodnot) a porovnání celkových hydrodynamických ztrát b), kde  $P_{nom}$  jsou ztráty v konfiguraci z obr. 8.2a.

**V konfiguraci s hladkými povrchy** (obr. 8.2c) se nestabilita rozvíjí pouze ve vnitřním filmu.

**Částečná drážka na povrchu ložiskové pánve** (obr. 8.2d) zajišťuje stabilitu vnějšího filmu a akceptovatelné projevy nestability vnitřního filmu.

Pokud je navíc vnitřní povrch pouzdra opatřen podélnými drážkami kruhového průřezu (obr. 8.2e), dojde ke snížení hydrodynamických třecích ztrát v tomto filmu a navíc může být příznivě ovlivněna stabilita vnitřního i vnějšího filmu, což je ukázáno na obr. 8.3.

## 8.1 Doporučení pro další směry výzkumu

Problematiku popsanou v této práci lze dále rozvíjet. Mezi nejdůležitější směry patří:

- Formulace optimalizační úlohy designu radiálního ložiska s plovoucím pouzdrům zaměřená na optimalizaci tvaru drážek ve vnitřní ložiskové mezeře.
- Rozšíření modelu autorů [Trippett a Li \(1984\)](#) pro odhad provozních vřelí a efektivních teplot olejových filmů o kmitání čepu hřídele a pouzdra.
- Zpřesnění modelu aerodynamických sil, kosimulace proudění vzduchu turbínovým a kompresorovým stupněm a ohybového kmitání rotoru, příp. kmitání lopatek oběžných kol.
- Posouzení vlivu axiálního ložiska na ohybové kmitání rotoru.
- Implementace modelu turbulentního proudění oleje mazacími otvory plovoucího pouzdra.

## 8.2 Hlavní přínosy práce

Hlavní přínosy práce lze shrnout do následujících bodů:

- Byla navržena konstrukční řešení kluzného ložiska s plovoucími pouzdry, jehož použití teoreticky povede ke snížení amplitudy absolutních kmitů čepu hřídele v turbínovém ložisku o více než 40 % a v kompresorovém ložisku o více než 15 %. Zároveň dojde ke snížení hydrodynamických ztrát v ložiskách o více než 10 %.
- Byl navržen efektivní model **laminárního proudění oleje mazacími otvory v plovoucích pouzdrech**.
- Byla představena metoda pro odhad provozních vřelí radiálních ložisek.
- Teoretické výsledky byly experimentálně verifikovány.

# Literatura

## Publikace autora citované v dizertační práci

- SMOLÍK, L., 2013. *Analýza dynamických vlastností rotorů turbodmychadel*. Plzeň. Diplomová práce. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky.
- SMOLÍK, L., 2018. Autofft – FFT analyzer. In: *MATLAB Central File Exchange* [online]. Natick: MathWorks [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/69534>
- SMOLÍK, L. a M. HAJŽMAN, 2016. Dynamic behaviour of a turbocharger supported by full floating ring bearings with unbalanced bushings. In: *XIV. Mezinárodní konference Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2016, Sborník přednášek* [CD-ROM]. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně. ISBN: 978-80-7561-016-4.
- SMOLÍK L., Z. RENDLOVÁ Z. a M. BYRTUS, 2015. An analysis of the influence of the titanium compressor wheel on the dynamical properties of the particular turbocharger rotor. *Manuf Technol.* **15**(1), 93–99.
- SMOLÍK, L., R. KROFT, M. HAJŽMAN a M. BYRTUS, 2016. Methods for testing shaft vibrations and floating rings speed inside a turbocharger bearing housing. In: *VIRM 11 – Vibrations in Rotating Machinery*. London: Institution of Mechanical Engineers, s. 477–486. ISBN: 978-0-9572374-8-3.
- SMOLÍK, L., M. HAJŽMAN a M. BYRTUS, 2017. Investigation of bearing clearance effects in dynamics of turbochargers. *Int J Mech Sci.* **127**(July), 62–72.
- SMOLÍK, L., M. BYRTUS, Š. DYK a M. HAJŽMAN, 2018. Dynamic behaviour of rotors supported by fluid-film bearings operated close to fluid-induced instability. In: *MATEC Web of Conferences* [online]. Les Ulis: EDP Sciences, **148**, s. 1–6. Dostupné z: <http://doi.org/10.1051/mateconf/201814804003>
- SMOLÍK, L., J. RENDL, M. HARTL a P. POLACH, 2018. Limitations of finite difference methods in the computation of coupling forces prescribed by the Reynolds equation. In: *Proceedings of the fifth joint international conference on multibody system dynamics – IMSD 2018* [USB disk]. Lisabon: Técnico Lisboa, s. 1–7. ISBN neuvědno.
- SMOLÍK, L., J. RENDL, Š. DYK, P. POLACH a M. HAJŽMAN, 2019. Threshold stability curves for a nonlinear rotor-bearing system. *J Sound Vib.* **442**, 698–713.

## Publikace, na kterých se autor podílel a jsou citované v dizertační práci

- BUKOVNIK, S., G. OFFNER, A. DIEMATH a L. SMOLÍK, 2017. Turbocharger dynamic analysis: Advanced design simulation in time domain using CFD predicted thermal boundary conditions. *Technische Mechanik.* **37**(2–5), 409–421.



- DYK, Š., L. SMOLÍK a M. HAJŽMAN, 2018. Effect of various analytical descriptions of hydrodynamic forces on dynamics of turbochargers supported by floating ring bearings. *Tribol Int.* **168**, 65–79.
- DYK, Š., J. RENDL, M. BYRTUS a L. SMOLÍK, 2019. Dynamic coefficients and stability analysis of finite-length journal bearings considering approximate analytical solutions of the Reynolds equation *Tribol Int.* **130**, 229–244.

### Ostatní literatura

- ALFORD, J. S., 1965. Protecting turbomachinery from self-excited rotor whirl. *J Eng Power.* **87**(4), 333–343.
- BASTANI, Y. a M. DE QUEIROZ, 2010. A new analytic approximation for the hydrodynamic forces in finite-length journal bearings. *J Tribol-T ASME.* **132**(1), 014502-1–014502-8.
- BORGWARNER, ©2002-2016. Turbo Facts. In: *BorgWarner Turbo Systems* [online]. Kirchheimbolanden: BorgWarner [cit. 2016-01-15]. Dostupné z: <http://www.turbos.bwauto.com/products/turbofacts.aspx>
- BREWE, D. E., 1986. Theoretical modelling of vapor cavitation in dynamically loaded journal bearings. *J Lubr Technol.* **108**, 628–638.
- BYRTUS, M., M. HAJŽMAN a V. ZEMAN, 2010. *Dynamika rotujících soustav*. Plzeň: Západočeská univerzita. ISBN 978-80-7043-953-1.
- ČSN ISO 1940-1, 2005. *Vibrace - Požadavky na jakost vyvážení rotorů v konstantním (tuhém) stavu - Část 1: Stanovení vyvažovacích tolerancí a ověření nevyváženosti*. 2. vyd. Praha: Český normalizační institut.
- ČSN ISO 20816-1, 2017. *Vibrace - Měření a hodnocení vibrací strojů - Část 1: Obecné pokyny*. Praha: Český normalizační institut.
- DENG, D. a M. J. BRAUN, 2008. Taylor vortices induced instability and turbulence in journal bearing microscale flow. *Tribol T.* **50**(3), 415–426.
- DUPAL, J., 2008. *Mechanika stochastických systémů*. Plzeň: Západočeská univerzita. ISBN 978-80-7043-715-5.
- ELGER, D. F., B. A. LEBRET, C. T. CROWE a J. A. ROBERTSON, 2016. *Engineering Fluid Mechanics*. 11<sup>th</sup> Ed. Singapore: John Wiley. ISBN 978-1119249221.
- ELING, R., R. van OSTAYEN a D. RIXEN, 2015. Multilobe floating ring bearings for automotive turbochargers. In: *Proceedings of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*. Cham: Springer, s. 821–833. Mechanisms and Machine Science, vol. 21. ISBN 978-3-319-06589-2.
- EUROPEAN COMMISSION, 2018. *Reducing CO2 emissions from passenger cars* [online]. [cit. 2018-12-03]. Dostupné z: [http://ec.europa.eu/clima/policies/transport/vehicles/cars/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/clima/policies/transport/vehicles/cars/index_en.htm)
- GASCH, R. a H. PFÜTZNER, 1975. *Rotordynamik*. Berlin: Springer. ISBN 978-3540412403.

- GOLDMAN, P. a A. MUSZYŃSKA, 1999. Application of full spectrum to rotating machinery diagnostics. *Orbit*. **20**(1), 17–21.
- GREENWOOD, J. A. a J. H. TRIPP, 1970. The contact of two nominally flat rough surfaces. *P I Mech Eng J-J Eng*. **185**, 625–633.
- GTW TECHNIK, [2018]. *Výroba kluzných ložisek na míru — GTW* [online]. Příšov: GTW Technik [cit. 2018-07-18]. Dostupné z: <https://www.gtw.cz/>
- HIRANI, H., 2012. Tribology. *NPTEL: E-learning Courses from the IITs & IICs* [online]. Delhi: Indian Institute of Technology [cit. 2015-01-08]. Dostupné z: <http://nptel.ac.in/courses/112102015/>
- HIRS, G. G., 1974. A Systematic Study of Turbulent Film Flow. *J Lubr Technol*. **96**, 118–126.
- CHANDRAWAT, H. N. a R. SINHASAN, 1987. Nonlinear effects in a plain journal bearing: Part 1 – analytical study. *Wear*. **119**(1), 77–87.
- CHASALEVRIS, A., 2016. An investigation on the dynamics of high-speed systems using non-linear analytical floating ring bearing models. *Int J Rot Mach*. **2016**, 1–22.
- CHEN, CH.-H. a CH.-K. CHEN, 1989. The influence of fluid inertia on the operating characteristics of finite journal bearings. *Wear*. **131**(2), 229–240.
- JANICKI, G., A. PEZOUVANIS, B. MASON a M. K. EBRAHIMI, 2014. Turbine blade vibration measurement methods for turbochargers. *Am J Sensor Techn*. textbf2(2): 13-19.
- KOŘÁN, M., 2013. *CFD analýza turbodmychadla*. Praha. Diplomová práce. ČVUT, Fakulta strojní, Ústav procesní a zpracovatelské techniky.
- KÖHL, W., M. KRESCHEL a D. FILSINGER, 2014. Experimental and numerical investigations on an automotive turbocharger with a transparent bearing section. In: *Proceedings of the 11th International Conference on Turbochargers and Turbocharging*. London: Institution of Mechanical Engineers
- KRÄMER, E., 1993. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Berlin: Springer. ISBN: 978-3-662-02800-1.
- LARSEN, J. a I. SANTOS, 2015. Efficient solution of the non-linear Reynolds equation for compressible fluid using the finite element method. *J Braz Soc Mech Sci*. **37**(3), 945–957.
- LI, C. H., 1982. Dynamics of rotor bearing systems supported by floating ring bearings. *J Lubr Technol*. **104**: 469-476.
- LI, C. H. a S. M. ROHDE, 1981. On the steady state and dynamics performance characteristics of floating ring bearings. *J Lubr Technol*. **103**: 389-397.
- LUND J. W. a B. Sternlicht, 192 Rotor-bearing dynamics with emphasis on attenuation. *J Basic Eng-T ASM* **84**(4), 491–498.
- MOCK, P., ed., 2017. *European Vehicle Market Statistics: Pocketbook 2017/18*. Berlín: ICCT Europe. Dostupné také z: [https://www.theicct.org/sites/default/files/publications/ICCT\\_Pocketbook\\_2017\\_Web.pdf](https://www.theicct.org/sites/default/files/publications/ICCT_Pocketbook_2017_Web.pdf)

- MUSZYŃSKA, A., 2005. *Rotordynamics*. Boca Raton: Taylor & Francis. ISBN 0-8247-2399-6.
- NGUYEN-SCHÄFER, H., 2012. *Rotordynamics of Automotive Turbochargers: Linear and Non-linear Rotordynamics, Bearing Design, Rotor Balancing*. Berlin: Springer. ISBN 978-3-642-27517-3.
- NORTON, M. P. a D. G. KARCZUB, 2003. *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers* 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-49913-2.
- NOVOTNÝ, P., P. ŠKARA a J. HLINÍK, 2018. The effective computational model of the hydrodynamics journal floating ring bearing for simulations of long transient regimes of turbocharger rotor dynamics. *Int J Mech Sci.* **148**, 611–619.
- OBEID, V. K. a Ch. W. YEISER et al., 2013. *ARMD Version 5.8: User manual* [dokumentace počítačového programu]. Phoenixville: RBTS [cit. 2018-07-05]. Dostupné též z: <http://www.rbts.com/downloads/ARMD58UserManual.pdf>
- OCVIRK, F. W., 1952. *Short-Bearing Approximation for Full Journal Bearings*. Technical Note NACA-TN-2808. Washington: National Advisory Committee for Aeronautics.
- OFFNER, G. et al., 2018. *AVL EXCITE Power Unit v2018: Theory* [dokumentace počítačového programu]. Graz: AVL Group [cit. 2018-07-05].
- OKAZAKI T. a Y. HORI, 1955 The theory of oil-whip in journal bearings. *T Jpn Soc Mech E* **21**(102), 125–130.
- PATIR N. a H. S. CHENG, 1979. Application of average flow model to lubrication between rough sliding surfaces. *J Lubr Technol.* **101**(2), 220–229.
- PASTOR, J. V., J. R. SERRANO, V. DOLZ, M. A. LOPER a F. BOUFFAUD, 2012. Study of turbochargers shaft motion by means of non-invasive optical techniques: Application to the behavior analysis in turbocharger lubrication failures. *Mech Syst Signal Pr.* **32**: 292–305.
- PRAT, M., F. PLOURABÉ a N. LETALLEUR, 2002. Averaged Reynolds equation for flows between rough surfaces in sliding motion. *Transport Porous Med.* **48**(3), 291–313.
- PRATA, A. T., R. T. S. S. FERRIERA, D. E. B. MILE a M. G. BORTOLI, 1988. Dynamically loaded journal bearings: Finite volume method analysis. In: *Proceedings International Compressor Engineering Conference*. Indiana: Purdue University, 34–41.
- PROFITO, F., M. GIACOPINI, D. ZACHARIADIS a D. DINI, 2015. A general finite volume method for the solution of the Reynolds lubrication equation with a mass-conserving cavitation model. *Tribol Lett.* **60**(18): 1–21.
- RANDALL, R. B., 1987. *Frequency Analysis*. 3<sup>rd</sup> Ed. Naerum: Bruel & Kjaer. ISBN 978-8787355070.
- REINHARDT, E. a J. W. LUND, 1975. The influence of fluid inertia on the dynamic properties of journal bearings. *J Lubr Technol.* **97**(2), 159–165.
- RENDL, J., 2017. *Výpočtové modelování kluzných ložisek pro úlohy dynamiky rotorů*. Plzeň. Diplomová práce. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky.

- REYNOLDS, O., 1886. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Philos T R Soc.* **177**(i), 157–234.
- ROHDE, S. M. a H. A. EZZAT, 1980. Analysis of dynamically loaded floating-ring bearings for automotive applications. *J Lubr Technol.* **102**: 271–277.
- ROSENBERG, J., 2003. *Teoretická mechanika*. 2. upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita. ISBN 80-7082-938-9.
- SAN ANDRÉS, L., 2010. *Modern Hydrodynamic Lubrication Theory, Class Notes* [online]. College Station: Texas A&M University [cit. 2015-05-02]. Dostupné z: <http://oaktrust.library.tamu.edu/1969.1/93197>
- SAN ANDRÉS, L. a J. KERTH, 2004. Thermal effects on the performance of floating ring bearings for turbochargers. *P I Mech Eng J-J Eng.* **218**: 437-450.
- SAN ANDRÉS, L., J. C. RIVADENERIA, K. GJIKA, Ch. GROVES a G. LaRUE, 2007. Rotor-dynamics of small turbochargers supported on floating ring bearings - highlights in bearing analysis and experimental validation. *J Tribol-T ASME.* **129**(2): 391–397.
- SAWICKI, J. T. a T. V. V. L. N. RAO, 2004. Cavitation effects on the stability of a submerged journal bearing. *Int J Rot Machinery.* **10**(3), 227–232.
- SFYRIS, D. a A. CHASALEVRIS, 2012. An exact analytical solution of the reynolds equation for the finite journal bearing lubrication. *Tribol Int.* **55**, 46–58.
- SCHWEIZER, B., 2009. Oil whirl, oil whip and whirl/whip synchronization occurring in rotor systems with full-floating ring bearings. *Nonlinear Dyn.* **57**(4), 509–532.
- SCHWEIZER, B., 2010. Dynamics and stability of turbocharger rotors. *Arch Appl Mech.* **80**, 1017–1043.
- SCHWEIZER, B. a M. SIEVERT, 2009. Nonlinear oscillations of automotive turbocharger turbines. *J Sound Vib.* **321**(3-5), 955–975.
- SESTIERI, A. a R. PIVA, 1982. The influence of fluid inertia in unsteady lubrication films. *J Lubr Technol.* **104**(2), 180–186.
- SOMEYA, T., 1989. *Journal-Bearing Databook*. London: Springer. ISBN 978-3-642-52509-4.
- SOMMERFELD, A., 1904. Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. *Z Math Phys.* **50**(1–2), 97–155.
- SOROKES, J. M., D. F. MARSHALL a M. J. KUZDZAL, 2014. A review of aerodynamically induced forces acting on centrifugal compressors, and resulting vibration characteristics of rotors. In: *Proceedings of the 43rd Turbomachinery Symposium*. College Station: Texas A&M University, 1-23.
- SPURK, J. H. a N. AKSEL. *Fluid Mechanics*. 2<sup>nd</sup> Ed. Berlin: Springer. ISBN 978-3-540-73536-6.
- STACHOWIAK, G. W. a A. W. BATCHELOR, 2013. *Engineering Tribology*. 4<sup>th</sup> Ed. St. Louis: Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-12-397047-3.

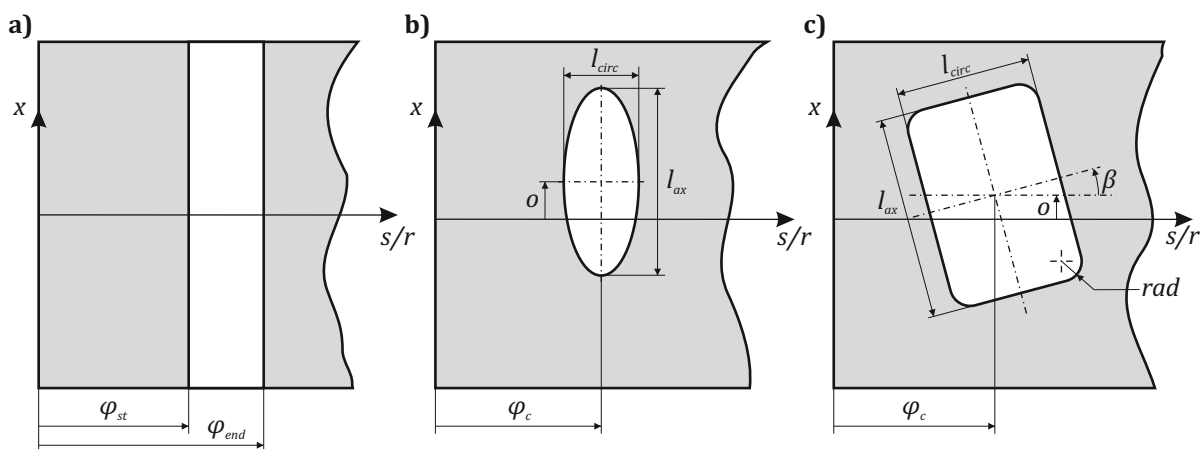
- SZERI, A. Z., 1980. *Tribology: Friction, Lubrication and Wear*. McGraw-Hill. ISBN 978-0070626638.
- ŠIMEK, J., 2008. *Kluzná ložiska a uložení rotorů* [online]. Praha: Techlab [cit. 2018-06-20]. Dostupné z: <http://www.techlab.cz/cs/loziska.html>
- TIAN, L., W. J. WANG a Z. J. PENG, 2011. Dynamic behaviours of a full floating ring bearing supported turbocharger rotor with engine excitation. *J Sound Vib.* **330**: 4851-4874.
- TIAN, L., W. J. WANG a Z. J. PENG, 2012. Effects of bearing outer clearance on the dynamic behaviours of the full floating ring bearing supported turbocharger rotor. *Mech Syst Signal Pr.* **31**, 155–175.
- TIAN, L., Y. LU, J. M. RAMAMOORTHY, M. WAKELIN a C. LANCASTER, 2018. Stability optimisation of turbocharger rotor-floating ring bearing system: a combination of linear and nonlinear approaches. In: *Proceedings of the 13th International Conference on Turbochargers and Turbocharging*. London: Institution of Mechanical Engineers
- TOWER, B., 1883. First Report on Friction Experiments. *P I Mech Eng.* **34**: 632-659.
- TRIPPETT, R. J. a D. F. LI, 1984. High-speed floating-ring bearing test and analysis. *ASLE Trans.* **27**(1), 73–81.
- VIMMR, J., 2008. *Modelování proudění tekutin s aplikacemi v biomechanice a ve vnitřní aerodynamice*. Plzeň. Habilitační práce. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky.
- VOHR, J. H. a C. CHOW, 1969. *Rotor-bearings Dynamics Design Technology: Part VIII: Spiral Grooved Floating Ring Journal Bearing*. Technical Report AFAPL-TR-65-45, part VIII. Wright-Patterson Air Force Base: Mechanical Technology.
- WACHEL, J. C. a W. W. von NIMITZ, 1981. Ensuring the reliability of offshore gas compression systems. *J Petrol Technol.* **33**(11), 2252–2260.
- WANG, J. K. a M. M. KHONSARI, 2006. Bifurcation analysis of a flexible rotor supported by two fluid-film journal bearings. *J Tribol-T ASME.* **128**(3), 594–603.
- WAUKESHA BEARINGS, 2012–2018. *Waukesha Bearings* [online]. Pewaukee: Waukesha Bearings [cit. 2018-07-18]. Dostupné z: <https://www.waukbearing.com/>
- WIKIMEDIA FOUNDATION, 2001–. Turbocharger. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco: Wikimedia Foundation [cit. 2016-01-15]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Turbocharger>
- ZAPOMĚL, J., 2007. *Počítačové modelování příčného kmitání rotorů uložených v hydrodynamických ložiskách a squeeze filmových tlumičích*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita. ISBN 978-80-248-1593-0.
- ZHANG, H., Z. SHI, F. GU a A. BALL, 2011. Modelling of outer and inner film oil pressure for floating ring bearing clearance in turbochargers. *J Phys Conf Ser.* **305**: 12-21.
- ZHANG, C., R. MEN, H. HE a W. CHEN, 2018. Effects of circumferential and axial grooves on the nonlinear oscillations of the full floating ring bearing supported turbocharger rotor. *P I Mech Eng J-J Eng.* 1–17.

## Příloha A: Program jourmesh

```

1 function [indMap,arcMap,lenMap] = jourmesh(rad, len, nLen, nArc, varargin)
2 % JOURMESH Vraťi mapu uzlu pokrývající valcové ložisko.
3 % [IND, ARC, AX] = JOURMESH(r, l, m, n, phi_st, phi_end) vytvoří síť na
4 % kluzné ploše o poloměru r, délce l, s m uzly v podélném a s n
5 % uzly v obvodovém směru s drážkou z obr. A.1a. IND je matice
6 % typu (m,n) s nenulovými prvky na místech, která odpovídají
7 % uzlům v mazací drážce. ARC a AX jsou matice typu (m, n)
8 % obsahující obvodové (rad) a podélné souřadnice uzlu.
9 % [...] = JOURMESH(r, l, m, n, d, offset, phi_s) vytvoří síť na kluzné
10 % ploše s kruhovým mazacím otvorem o průměru d.
11 % [...] = JOURMESH(r, l, m, n, l_ax, l_circ, o, phi_c) vytvoří síť na
12 % kluzné ploše s mazacím otvorem ve tvaru elipsy obr. A.1b.
13 % [...] = JOURMESH(r, l, m, n, l_ax, l_circ, rad, o, phi_c, beta)
14 % vytvoří síť na kluzné ploše s mazacím otvorem z obr. A.1c.
15 %
16 % v1.00 (c) Lubos Smolik, 2017
17 %
18 %% Parametry funkce
19 % Ve funkci jsou využity principy vnorených funkcí (nested function)
20 tol = 0.01; % parametr určující, jak se zachází s uzly
21 % u hranice mazacího otvoru či drážky
22 dAx = len / (nLen - 1); % podélná mezera mezi dvěma uzly
23 dArc = 2 * pi / (nArc - 1); % středový úhel oblouku mezi dvěma uzly
24 dCirc = dArc * rad; % délka oblouku mezi dvěma uzly
25
26 indMap = zeros(nLen, nArc);
27 [arcMap, lenMap] = meshgrid(0:dArc:2*pi, 0:dAx:len);

```



Obrázek A.1: Mazací drážky podporované programem jourmesh a jejich geometrické parametry.



---

```

28 switch nargin
29     case 6
30         splitLine(varargin{1}, varargin{2});
31     case 7
32         bore(varargin{1}/2, varargin{1}/2/rad, varargin{2}, varargin{3});
33         % deleni 2 – v rovnicich elipsy se pocita s poloosami
34         % deleni rad – ve funkci se pocita se stredovymi uhly oblouku
35     case 8
36         bore(varargin{1}/2, varargin{2}/2/rad, varargin{3}, varargin{4});
37         % deleni 2 – v rovnicich elipsy se pocita s poloosami
38         % deleni rad – ve funkci se pocita se stredovymi uhly oblouku
39     case 10
40         groove(varargin{1} / 2, varargin{2} / 2, varargin{3}, ...
41             varargin{4}, rad * varargin{5}, varargin{6});
42         % deleni 2 – v rovnicich obdelniku se pocita s polovinou strany
43         % nasobeni rad – ve funkci je pouzita obvodova delkova souradnice
44 end
45 %% Mazaci otvor tvaru kruhu nebo elipsy
46 function bore(saxAx, saxArc, offset, center)
47     % Nalezeni uzlu, jejichz polohu ma smysl overovat
48     % Podelny smer
49     indLenSt = ceil((len/2 + offset - saxAx * (1 + tol)) / dAx) + 1;
50     indLenSt = max(1, indLenSt); % zahodi uzly mimo sit
51     indLenEnd = ceil((len/2 + offset + saxAx * (1 + tol)) / dAx);
52     indLenEnd = min(nLen, indLenEnd); % zahodi uzly mimo sit
53     % Obvodovy smer
54     indArcSt = ceil((center - saxArc * (1 + tol)) / dArc) + 1;
55     indArcEnd = ceil((center + saxArc * (1 + tol)) / dArc);
56     % uzly mimo sit v obvodovem smeru nejsou zahazovany,
57     % je prepoctitana jejich poloha tak, aby lezely na siti
58     % Overeni polohy uzlu
59     for i = indLenSt:1:indLenEnd
60         for j = indArcSt:1:indArcEnd
61             % vygenerovani souradnic posuzovaneho uzlu
62             cooAx = dAx * (i - 1);
63             cooArc = dArc * (j - 1);
64
65             if (cooArc - center)^2 / saxArc^2 + ...
66                 (cooAx - len/2 - offset)^2 / saxAx^2 <= (1 + tol)^2
67
68                 col = mod(j - 1, nArc - 1) + 1; % posunuti indexu uzlu
69                 indMap(i, col) = 1; % do <1, nArc-1>
70             end
71         end
72     end
73
74     indMap(:, end) = indMap(:, 1); % splneni podminky periodicity
75 end
76 %% Obecna mazaci drazka
77 function groove(hAx, hCirc, radius, offset, center, alpha)
78     % hAx – polovina delky hCirc – polovina sirky
79     % radius – polomer zobleni rohu offset – podelne odsazeni stredu
80     % center – obv. sour. stredu alpha – natoceni vuci obv. smeru

```

```
81
82 % Geometrické tolerance (rozhodují o zahrnutí uzlu blízko hranice)
83 hCirc = (1 + tol) * hCirc;
84 hAx = (1 + tol) * hAx;
85 radius = (1 + tol) * radius;
86 % Nalezení uzlu, jejichž polohu má smysl overovat
87 % Podélný směr
88 axTol = (hCirc * sin(abs(alpha)) + hAx * cos(alpha));
89 indLenSt = ceil((len/2 + offset - axTol) / dAx) + 1;
90 indLenSt = max(1, indLenSt); % zahodí uzly mimo sit
91 indLenEnd = ceil((len/2 + offset + axTol) / dAx);
92 indLenEnd = min(nLen, indLenEnd); % zahodí uzly mimo sit
93 % Obvodový směr
94 arcTol = (hCirc * cos(alpha) + hAx * sin(abs(alpha)));
95 indArcSt = ceil((center - arcTol) / dCirc) + 1;
96 indArcEnd = ceil((center + arcTol) / dCirc);
97 % uzly mimo sit v obvodovém směru nejsou zahazovány,
98 % je přepočítána jejich poloha tak, aby ležely na síti
99 % Overení polohy uzlu
100 for i = indLenSt:indLenEnd
101     for j = indArcSt:indArcEnd
102         % Vygenerování souřadnic posuzovaného uzlu
103         cooAx = dAx * (i - 1);
104         cooCirc = dCirc * (j - 1);
105         % Overení na analytické rovnici aproximující obdelník
106         if (abs((cooCirc - center) * cos(alpha) + (cooAx - len/2 ...
107             - offset) * sin(alpha)) / hCirc)^(2 * hCirc / radius) ...
108             + (abs((cooCirc - center) * sin(alpha) - (cooAx - len/2...
109             - offset) * cos(alpha)) / hAx)^(2 * hAx / radius) <= 1
110
111             col = mod(j - 1, nArc - 1) + 1; % posunuti indexu uzlu
112             indMap(i, col) = 1; % do <1, nArc-1>
113         end
114     end
115 end
116
117 indMap(:, end) = indMap(:, 1); % splnění podmínky periodicity
118 end
119 %% Mazání drážky (po celé délce ložiska)
120 function splitLine(stArc, endArc)
121     arcTol = (endArc - stArc) * tol / 2; % geometrická tolerance
122     % (rozhoduje o zahrnutí uzlu blízko hranice)
123     indSt = ceil((stArc - arcTol) / dArc) + 1; % uzel na začátku drážky
124     indEnd = ceil((endArc + arcTol) / dArc); % uzel na konci drážky
125
126     for i = indSt:indEnd
127         col = mod(i - 1, nArc - 1) + 1; % posunuti indexu uzlu
128         indMap(:, col) = ones(nLen, 1); % do <1, nArc-1>
129     end
130
131     indMap(:, end) = indMap(:, 1); % splnění podmínky periodicity
132 end
133 end
```