

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

DIZERTAČNÍ PRÁCE

Plzeň, 2019

Ing. Radek Bulín

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

**Pokročilé výpočtové metody
pro vyšetřování dynamiky
vázaných mechanických systémů
s lany a poddajnými nosníky**

Dizertační práce
k získání akademického titulu doktor v oboru
Aplikovaná mechanika

Autor: Ing. Radek Bulín
Školitel: Ing. Michal Hajžman, Ph.D.

Plzeň 2019

Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto dizertační práci. Prohlašuji, že jsem ji zpracoval samostatně a využil jen uvedených pramenů a literatury.

V Plzni, únor 2019

Radek Bulín

Poděkování

Na tomto místě chci poděkovat svému školiteli Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph.D., za vedení práce, odborné konzultace a otevřený přístup během celého mého studia. Dále děkuji rodině za podporu během tvorby této práce a za projevenou důvěru, že toto dílo dokončím.

Radek Bulín

Abstrakt

Tato dizertační práce je věnována problematice modelování vázaných mechanických systémů, jejichž prvky mohou být tenká poddajná tělesa, mezi která se řadí nosníky, lana, kabely či vlákna. V rámci práce je navržena metodika pro řešení dynamických problémů těchto systémů, která využívá mimo jiné moderní formulaci konečných prvků s názvem *absolute nodal coordinate formulation* (ANCF).

Úvodní část se zabývá popisem nejpoužívanějších metod vhodných k tvorbě modelu tenkých poddajných těles. V kapitole 3 jsou shrnuty základní metody modelování lan jako součástí vázaných mechanických systémů a dále je popsána možnost využití komerčního programu MSC.Adams pro tento typ úloh.

Významná část této práce se nachází v kapitole 4, kde je uveden popis moderní formulace konečných prvků s názvem *absolute nodal coordinate formulation*. Oproti klasické formulaci nosníkových konečných prvků využívá přístup ANCF jako uzlové souřadnice složky polohových vektorů uzlů vyjádřených v globálním souřadnicovém systému a jejich parciální derivace podle lokálních parametrů prvku. V práci jsou odvozeny tři typy ANCF nosníkových prvků, popsány jejich výhody a nevýhody a uveden způsob vyčíslování elastických sil elementu včetně možných úprav pro zefektivnění výpočtu.

Mezi hlavní přínosy dizertační práce patří ucelený popis způsobu modelování kontaktu ANCF elementů s jiným tělesem. V kapitole 5 jsou představeny různé modely normálových kontaktních sil a tečných třecích sil. Součástí této kapitoly je také popis Lagrangeových rovnic smíšeného typu a jejich možných úprav vhodných pro numerické řešení odvozených pohybových rovnic.

Kapitola 6 se pak zabývá numerickými metodami pro řešení dané problematiky a je zaměřena hlavně na rozbor Newmarkovy metody pro řešení nelineárních algebrodiferenciálních rovnic s využitím zpřesňující Newtonovy metody či kvazi-Newtonovy metody.

Představené metody byly implementovány do vlastního programového vybavení v prostředí MATLAB. V praktické části v kapitole 7 je potom provedeno srovnání jednotlivých ANCF elementů na úloze pohybu poddajného kyvadla a dále numerické testování těchto prvků na reálných systémech obsahujících vlákno a kladku. Výsledky vybraných simulací jsou srovnány s experimentálními daty. Součástí této kapitoly je i popis modelu reálného vláknového mechanického systému Quadrosphere, který byl vytvořen v programu MSC.Adams. Dále je zde rozvedeno možné využití tohoto modelu pro výzkum algoritmů řízení.

Klíčová slova: dynamika, vázané mechanické systémy, poddajný nosník, absolute nodal coordinate formulation, kontaktní mechanika, numerické metody, mechanismy s lany a vlákny

Abstract

Advanced computational methods for the dynamical analysis of multibody systems with flexible beams and ropes

This dissertation thesis is dedicated to the modelling of multibody systems that include flexible thin bodies such as beams, ropes, cables and fibers. In this work, the methodology for the dynamical analysis of such systems is proposed and it is based on the modern finite elements formulation called *absolute nodal coordinate formulation* (ANCF).

In the introductory part common methods for modelling of thin flexible bodies are summarized and their advantages and disadvantages are discussed. The basic methods for cables modelling as parts of multibody systems are summarized in the chapter 3, also the possibility of using the well-known MSC.Adams software for such systems is summarized.

The important part of this work is chapter 4, where the modern finite element formulation called *absolute nodal coordinate formulation* is described. Compared with the classical formulation of finite elements, ANCF uses absolute positions of nodes and partial derivatives of these positions with respect to local beam parameters as nodal coordinates. Three most common ANCF beam elements are described, their advantages and disadvantages are pointed out and their elastic forces evaluation procedure focused on the effective calculations is developed.

One of the main contributions of the thesis is the description and implementation of various contact modelling approaches in order to simulate possible contact interaction between ANCF elements and other bodies. Several models of a normal contact force and a friction force are described in chapter 5. In this chapter, the Lagrange equations and their possible suitable modifications for a proper numerical treatment are discussed.

Chapter 6 is dedicated to numerical methods used for the solution of proposed problems and is mainly focused on the Newmark method. It can be used for numerical solving of a nonlinear set of differential-algebraic equations. The iterative Newton or quasi-Newton methods are used for the solution correction.

The in-house software implementation of the proposed methods was created in MATLAB environment. In the practical part of the work, the benchmark problem of a falling flexible pendulum is used in order to compare different ANCF beam models. The numerical testing of various elements and methods is performed using real mechanical systems containing a fibre and a pulley. The results of numerical analysis is then compared with the experimental data. The real cable robot called Quadrosphere is modelled using MSC.Adams software and the possible usage of the model is discussed.

Keywords: dynamics, multibody systems, flexible beam, absolute nodal coordinate formulation, contact mechanics, numerical methods, mechanisms with ropes and cables

Obsah

Prohlášení	2
Poděkování	3
Abstrakt	4
Obsah	6
Seznam důležitých symbolů	9
1. Úvod	12
1.1. Cíle dizertační práce	13
1.2. Struktura práce	13
2. Stav řešené problematiky	15
2.1. Modelování poddajných těles při vyšetřování dynamiky vázaných mechanických systémů	15
2.2. Modelování interakcí mezi tělesy	17
3. Základní metody modelování vláken, kabelů a lan	19
3.1. Silová reprezentace lana	20
3.2. Reprezentace lana pomocí hmotných bodů	20
3.3. Využití komerčního programu MSC.Adams pro modelování lan	22
4. Absolute nodal coordinate formulation	26
4.1. Plně parametrizovaný nosníkový ANCF element	26
4.1.1. Kinematický popis	27
4.1.2. Odvození elastických sil	29
4.1.3. Porovnání přístupů pro odvození elastických sil	34
4.1.4. Odvození setrvačných sil	37
4.1.5. Pohybové rovnice	37
4.2. Kabelový ANCF element nižšího řádu	38
4.2.1. Kinematický popis	39
4.2.2. Odvození elastických sil	40
4.3. Speciální případ tenkých rovinných ANCF nosníkových elementů	44
4.3.1. Kinematický popis	45
4.3.2. Model podélných elastických sil L2	45

4.3.3.	Model příčných elastických sil T2	47
5.	Vázané mechanické systémy a modelování kontaktů	49
5.1.	Lagrangeovy rovnice smíšeného typu	49
5.1.1.	Eliminace Lagrangeových multiplikátorů a převod na ODE	51
5.1.2.	Metoda rozšířených Lagrangianů	52
5.2.	Modelování kontaktních sil	53
5.2.1.	Obecně o kinematice kontaktu dvou těles	53
5.2.2.	Určení kontaktní kinematiky mezi lanem a kladkou	54
5.2.3.	Normálová kontaktní síla	56
5.2.4.	Třecí síla	58
5.2.5.	Rozložení kontaktních sil po délce nosníkového elementu	60
6.	Numerické metody pro řešení dynamiky nelineárních mechanických systémů	61
6.1.	Newmarkova metoda	61
6.1.1.	Numerické řešení pohybových rovnic nelineárních vázaných mechanických systémů	63
6.1.2.	Poznámky k implementaci metody	66
6.2.	Numerické určení Jacobiho iterační matice	69
6.3.	Kvazi-Newtonova metoda	70
6.3.1.	Algoritmus kvazi-Newtonovy metody	72
6.3.2.	Shrnutí přímého výpočtu aproximace Jacobiho matice	72
6.3.3.	Přímý výpočet aproximace inverzní Jacobiho matice	73
6.4.	Numerická integrace s využitím Gaussovy kvadratury	74
7.	Applikace představených postupů a metod při modelování tenkých poddajných struktur	76
7.1.	Pohyb poddajného kyvadla	77
7.1.1.	Simulace a výsledky pro různé ANCF prvky	78
7.1.2.	Porovnání výsledků pro různé integrační metody	81
7.1.3.	Energetická bilance	84
7.2.	Závaží kmitající na tenkém vlákně	88
7.2.1.	Výsledky simulace a srovnání s experimentem	90
7.3.	Detailní model interakce lana a kladky	92
7.3.1.	Analýza volně položeného lana na kladce	93
7.3.2.	Dynamická analýza interakce lana a kladky	94
7.3.3.	Srovnání s experimentem	97
7.4.	Modelování a dynamická analýza vláknového mechanického systému Quadrosphere	102
7.4.1.	Tvorba a verifikace modelu v programu MSC.Adams	103
7.4.2.	Možnosti využití multibody modelu Quadrosphere	106
7.5.	Modelování poddajných absorpčních proutků jaderných reaktorů	110

8. Závěr	115
8.1. Hlavní přínosy dizertační práce	118
8.2. Další možný rozvoj této práce	118
Literatura	120
Publikace autora k tématu dizertační práce	127
A. Přílohy	130
A.1. Výrazy pro matice tuhosti vybraných ANCF elementů	130
A.1.1. Matice tuhosti plně parametrizovaného ANCF elementu dle obecných postupů mechaniky kontinua	130
A.1.2. Matice tuhosti plně parametrizovaného ANCF elementu dle elastic line approach	131
A.1.3. Matice tuhosti ANCF elementu nižšího řádu	131
A.1.4. Matice tuhosti rovinného ANCF elementu typu L2T2	132
A.2. Výrazy pro matice hmotnosti vybraných ANCF elementů	133
A.2.1. Matice hmotnosti plně parametrizovaného ANCF elementu	133

Seznam důležitých symbolů

Následující seznam obsahuje popis důležitých symbolů a značek, které jsou používány v dizertační práci.

A_e	plocha průřezu elementu
\mathbf{B}, b	matice tlumení, koeficient tlumení
c_e	restituční koeficient
c_f	koeficient tření
c_s	statický koeficient tření
D	kontaktní koeficient tlumení
D_f	kontaktní tlumicí faktor
\mathbf{E}	matice elastických konstant
E	Youngův modul pružnosti v tahu
E_k	kinetická energie
E_p	potenciální energie
\mathbf{e}	vektor uzlových souřadnic prvku
\mathbf{F}	deformační gradient
\mathbf{F}_c	celkový vektor kontaktních sil
\mathbf{F}_N	vektor normálové kontaktní síly
\mathbf{F}_{sl}	složka skluzu vektoru třecí síly
\mathbf{F}_{st}	složka ulpívání vektoru třecí síly
\mathbf{F}_T	vektor třecí síly
G	modul pružnosti ve smyku
\mathbf{G}^r	iterační matice kvazi-Newtonovy metody
\mathbf{g}	vektor zobecněných sil
\mathbf{H}^r	inverze iterační matice kvazi-Newtonovy metody
h	velikost časového kroku integrace
I_e	kvadratický moment osově symetrického průřezu
I_y, I_z	kvadratický moment průřezu k dané ose
I_p	polární moment průřezu
\mathbf{J}^r	iterační matice Newtonovy metody
K	tuhost kontaktního modelu
\mathbf{K}, k	matice tuhosti, koeficient tuhosti

$\mathbf{K}_t, \mathbf{B}_t$	tečná matice tuhosti a tlumení
K_{st}, D_{st}	tuhost a tlumení třecího modelu ulpívání
k_x	smykový distribuční faktor
k_y, k_z	smykové faktory
l_e	délka nosníkového elementu
\mathbf{M}, m	matice hmotnosti, hmotnost
m_f	počet fyzikálních souřadnic
\mathbf{n}	normálový vektor
n	exponent z Hertzovy teorie rázu
n_G	počet uzlů Gaussovy kvadratury
n_{dof}	počet stupňů volnosti
\mathbf{p}_c	polohový vektor kontaktního bodu na tělese
\mathbf{p}_{st}	polohový vektor bodu statického tření
\mathbf{Q}_e	vektor elastických sil elementu
\mathbf{q}	vektor souřadnic popisujících daný systém
\mathbf{r}	polohový vektor
r	počet vazbových rovnic
\mathbf{r}_{res}	vektor residuí pohybových rovnic
\mathbf{S}	matice tvarových funkcí prvku
\mathbf{S}_t	Jacobiho matice vektoru residuí
S_t	torzní tuhost
s	tečný posuv kontaktního bodu vůči bodu statického tření
t	čas
\mathbf{t}	tečný vektor
U_{be}	deformační energie ohybových deformací elementu
U_e	celková deformační energie elementu
U_{lae}	deformační energie podélné deformace, deformací průřezu a zkosu elementu
U_{le}	deformační energie podélné deformace elementu
U_{se}	deformační energie příčných smykových deformací elementu
U_{te}	deformační energie torzní deformace elementu
v_0	charakteristická rychlost vyhlazeného Coulombova modelu tření
W	práce vnějších sil
w_i	váhový koeficient Gaussovy kvadratury
x_i	uzly Gaussovy kvadratury
α	parametr numerického tlumení Newmarkovy metody
α_B, β_B	kladné konstanty Baumgartovy stabilizace

α_m, β_k	konstanty proporcionality modelu tlumení
β, γ	parametry Newmarkovy metody
δ	penetrace těles v kontaktu
ε_G	Green-Lagrangeův tenzor deformace
$\varepsilon_{res}, \varepsilon_{constr}$	parametry zastavovací podmínky
κ	křivost střednice nosníku
λ	vektor Lagrangeových multiplikátorů
λ, μ	Laméovy konstanty
ν	Poissonova konstanta
ρ	hustota materiálu
Φ	vektor vazbových rovnic
$\Phi_{,q}$	Jacobiho matice vazbových rovnic
ϕ	soustava bázevých polynomů

Souřadnicové systémy při odvozování konečných prvků

X_1, X_2, X_3	globální souřadnicový systém pro ANCF prvky
x, y, z	lokální souřadnicový systém pro ANCF prvky

Indexy a další doplňující znaky

$\dot{\square}$	derivace podle času
$\square_{,\blacksquare}$	parciální derivace výrazu \square podle \blacksquare
$\Delta\square$	přírůstek (korekce) dané veličiny
$\square^{(i)}$	týkající se uzlového bodu i
\square^k, \square^{k+1}	vyjádření veličiny v iteraci k či $k + 1$
\square_n, \square_{n+1}	vyjádření veličiny v časovém kroku n či $n + 1$

1. Úvod

Chování mechanických systémů je předmětem aktivního výzkumu již několik stovek let. Během této doby došlo k velkému pokroku v dynamické analýze vázaných mechanických systémů (tzv. *multibody* systémů), kdy v počátcích odvozené analytické výrazy popisující danou problematiku byly nahrazeny složitými soustavami obyčejných diferenciálních rovnic, algebro-diferenciálních rovnic či parciálních diferenciálních rovnic.

Vázaný mechanický systém lze charakterizovat jako soubor tuhých či poddajných těles, která jsou vzájemně propojena různými typy vazeb a na která působí různé silové účinky. Tato tělesa navíc mohou konat velké posuvy a rotace. Tuhé těleso lze pak z hlediska mechaniky obecně popsat menším počtem rovnic než těleso poddajné, což vede k výpočtově méně náročným simulacím. Spolu s rozvojem výpočetní techniky je však kladen stále větší důraz i na přesné modelování poddajných struktur, které mohou být součástí *multibody* systémů. Vhodným nástrojem pro popis poddajných těles je metoda konečných prvků (MKP), jejíž implementace do simulací dynamiky vázaných mechanických systémů je často zkoumaná problematika. Cílem je přesná simulace dynamiky vzájemně propojených tuhých a deformovatelných těles podléhajících velkým posuvům a rotacím, což je v současnosti nedílná součást vývoje nových produktů v odvětví robotiky, automobilového a leteckého průmyslu, bioinženýrství a dalších. Navíc spojení metody konečných prvků a simulací vázaných mechanických systémů umožňuje detailní analýzy, které jsou využitelné například při optimalizaci daných systémů či při analýzách životnosti.

Klasická formulace MKP však není vhodná pro modelování poddajných těles, která konají velké posuvy a rotace. Proto byly představeny různé formulace MKP, které tento nedostatek odstraňují. Jednou z nejmodernějších formulací je tzv. *absolute nodal coordinate formulation* (ANCF), v možném překladu *formulace využívající absolutní uzlové souřadnice*. Tento přístup je specifický tím, že jako uzlové souřadnice využívá souřadnice polohových vektorů uzlů elementu vyjádřené v globálním (absolutním) souřadnicovém systému a jednotlivé složky gradientů polohových vektorů uzlů elementu. Zjednodušeně řečeno lze tedy tvar elementu popsat pomocí absolutních pozic uzlů a tečných vektorů v uzlech. Z hlediska vyšetřování dynamického chování *multibody* systémů je tento přístup výhodný, protože vede ke konstantní matici hmotnosti diskretizovaného poddajného tělesa a zároveň dokáže přesně zahrnout velké posuvy a rotace tělesa. Nevýhodou této formulace může být nelineární podoba vektoru elastických sil diskretizovaného tělesa. Nutno dodat, že s neustále rostoucím výkonem výpočtových systémů se tato nevýhoda snižuje.

Mezi poddajná tělesa nosníkového typu lze zařadit například lana, vlákna či kabely, které se stávají součástí moderních mechanismů a robotů za účelem snížení hmotnosti. Při řízení těchto mechanismů je často využíván nejjednodušší silový model vlákna. Ten však

nedokáže postihnout příčné kmitání vláken, které může mít vliv na přesnost a stabilitu řízených pohybů. Součástí vláknových mechanismů je často také kladka, a proto je nutné do dynamických modelů zahrnout kontaktní síly a dostatečně přesný model tření mezi vláknem a kladkou. Právě na detailní analýzu příčného kmitání a vliv interakce vlákna s kladkou je vhodné využít metodu ANCF.

Interakce poddajných těles nosníkového typu se dále vyskytuje například v problematice modelování pádu tenkých regulačních tyčí uvnitř vodou naplněné vodící trubky při nutnosti havarijního odstavení jaderného reaktoru, při modelování trolejí a jejich kontaktu s pantografy tramvajů, vlaků a trolejbusů, v neposlední řadě pak při navrhování moderních rychlovýtahů. Modelování poddajných struktur nosníkového typu a jejich interakce s jinými tělesy je tedy aktuální problematika se širokým spektrem využití.

1.1. Cíle dizertační práce

Cíle dizertační práce lze shrnout do následujících bodů:

- Navrhnout metodiku modelování tenkých poddajných struktur vhodnou pro detailní vyšetřování prvků vázaných mechanických systémů.
- Algoritmizovat a implementovat navrženou metodiku modelování.
- Popsat a zpracovat vhodné numerické metody pro řešení navržených modelů.
- Aplikovat navržené programové vybavení na modelových i reálných příkladech včetně porovnání s experimentálními daty.
- Formulovat závěry a doporučení pro použití navržené metodiky modelování a numerických metod.

V rámci splnění těchto cílů je nutné popsat, zpracovat a dále rozvinout pokročilé metody vhodné pro dynamické analýzy vázaných mechanických systémů obsahujících poddajné nosníky či lana. Součástí této problematiky je návrh a implementování různých modelů kontaktní interakce mezi tělesy, kdy důraz je dále kladen především na detailní a efektivní vyhodnocování kontaktních sil mezi tělesy. Vzhledem ke složitosti a nelineárnosti takových úloh je nutné zpracovat a otestovat efektivní numerické metody pro řešení pohybových rovnic. Aby byla podpořena věrohodnost implementované metodiky modelování tenkých poddajných struktur, je nutné aplikovat popsané algoritmy na testovací a reálné úlohy a verifikovat použité metody s využitím experimentálních dat.

1.2. Struktura práce

Tato práce se kromě úvodu skládá z dalších sedmi kapitol. V kapitole 2 je stručně popsán současný stav řešené problematiky. Předmětem kapitoly 3 je popis základních metod pro modelování poddajných lan, kabelů a vláken a také popis možnosti využití komerčního programu MSC.Adams pro simulace vázaných mechanických systémů v této

problematice. Kapitola 4 je věnována teoretickému popisu metody *absolute nodal coordinate formulation* a představení různých ANCF nosníkových elementů. V kapitole 5 jsou uvedeny Lagrangeovy rovnice smíšeného typu, jejich využití při matematickém modelování multibody systémů a dále různé způsoby modelování kontaktních sil. Kapitola 6 je pak věnována vybraným numerickým metodám pro řešení pohybových rovnic vázaných mechanických systémů s poddajnými tělesy a možnými interakcemi. Praktickou částí dizertační práce je kapitola 7, kde je provedeno porovnání jednotlivých ANCF nosníkových elementů a dále verifikace použité metodiky na dvou experimentálních mechanismech. V této kapitole je také popsáno modelování reálného mechanického systému Quadrosphere v programu MSC.Adams a jeho možné budoucí využití. Závěrečná kapitola shrnuje popsanou metodiku modelování tenkých poddajných těles a jejich interakcí vzhledem k vytyčeným cílům a stanovuje možnosti dalšího rozvoje dané problematiky.

2. Stav řešené problematiky

Předmětem této kapitoly je stručné shrnutí možností v oblasti modelování poddajných těles v dynamice vázaných mechanických systémů a dále popis současného stavu vývoje metody *absolute nodal coordination formulation*. Další řešenou problematikou je modelování možných interakcí mezi tělesy pomocí kontaktních sil.

2.1. Modelování poddajných těles při vyšetřování dynamiky vázaných mechanických systémů

Vázaný mechanický systém je obecně tvořen tělesy, vazbami a různými silovými účinky. Pokud poddajnost konkrétního tělesa může ovlivnit výsledky při vyšetřování dynamického chování celého systému, je nutné použít některou z metod, které jsou vhodné pro modelování poddajných těles [33]. Základní metoda pro popis poddajných těles nosníkového typu spočívá v rozdělení tělesa na hmotné body spojené pružinovou vazbou (*point mass model*) [38]. Vylepšením tohoto přístupu je zahrnutí ohybové tuhosti mezi jednotlivé hmotné body. V literatuře je pak tento přístup nazýván *finite segment method* [67] nebo *rigid finite elements* [80].

Komplexnější, avšak dnes již klasický přístup pro modelování poddajných těles, je metoda konečných prvků (MKP) [3]. Hlavním nedostatkem základní verze MKP je, že uvažuje nekonečně malé rotace jako uzlové souřadnice. Při libovolném „tuhém“ pohybu takového prvku pak není zachováno nulové přetvoření, což je dokázáno například v [64]. Pro popis velkých rotací elementu byla v minulosti formulována inkrementální podoba MKP, jejíž vysvětlení lze nalézt například v [18]. Základní myšlenka těchto formulací je rozdělení velkých rotací na posloupnost malých rotací, které jsou v každém kroku vyhodnoceny přesněji, a tím je snížena výsledná chyba. Více informací o problematice velkých rotací lze nalézt například v [1].

Další MKP formulace, která byla vytvořena pro popis velkých deformací, nese název *large rotation vector formulation* (LRVF). V této formulaci jsou pro popis elementu uvažovány absolutní souřadnice uzlů a konečné rotace v uzlech. To v důsledku znamená, že konečné natočení průřezu je aproximováno pomocí polynomů. Popis teorie tohoto přístupu a další jeho rozšíření lze nalézt například v [9]. Jednou z nevýhod tohoto přístupu je, že při jeho využití se vyskytuje jev známý jako *shear locking*, který se projevuje zvýšením tuhosti v ohybu. Podrobnosti o tomto jevu lze nalézt například v [78].

Známou a běžně využívanou metodou pro modelování poddajných těles v problémech dynamiky vázaných mechanických systémů je tzv. *floating frame of reference formulation* (FFRF), jejíž popis lze nalézt například v pracích [8, 64, 65]. Základní myšlenkou

tohoto přístupu je využití referenčních a elastických souřadnic pro popis poddajného tělesa. Referenční souřadnice definují polohu a orientaci tělesa, zatímco elastické souřadnice určují jeho deformaci. Výsledný stav tělesa je pak dán superpozicí těchto souřadnic.

Moderní metodou pro modelování poddajných těles v problémech dynamiky vázaných mechanických systémů je *absolute nodal coordinate formulation* (ANCF). Základy této formulace představil Ahmed Shabana v roce 1996 například v pracích [66, 67]. Jedná se o přístup k definování konečných prvků, který jako uzlové souřadnice elementu využívá složky polohových vektorů uzlů vyjádřených v globálním souřadnicovém systému a jejich gradienty. Výhody ANCF jsou dále diskutovány například v [63]. Patří mezi ně například konstantní matice hmotnosti elementu v jednoduchém tvaru a přesná reprezentace tuhého pohybu tělesa. Dále platí, že se ANCF elementy řadí mezi izoparametrické, což znamená, že jsou použity stejné tvarové funkce pro transformaci lokálních souřadnic na globální a pro aproximaci posuvů. Nevýhodou ANCF může být silně nelineární formulace elastických sil elementu.

Jednotlivé ANCF nosníkové elementy se liší právě ve způsobu vyjádření elastických sil. Například práce [4, 65] se zabývají obecnou formulací ANCF nosníkových elementů v rovině. Základním krokem při odvození vektoru elastických sil je rozdělení celkové deformační energie elementu na součet deformační energie podélné deformace vyjádřené pomocí podélného přetvoření a příčné (ohybové) deformace vyjádřené pomocí křivosti střednicové linie elementu. Na obecné formulace navazuje práce [5], kde jsou představeny konkrétní podoby vektoru elastických sil pro různé předpoklady (například předpoklad malých deformací, konstantní podélné deformace elementu a jiné), které vedou ke zjednodušení výrazů pro elastické síly. Přínosný je především zde popsán rovinný model *L2T2*, který při odvozování příčných elastických sil využívá jen předpokladu konstantního deformačního gradientu po celé délce elementu. Tento ANCF nosníkový model lze považovat za dostatečně přesný při modelování poddajných nosníků, vláken a lan v rovině a je využit například v práci [42].

Popis obecného prostorového ANCF nosníkového elementu lze nalézt například v pracích [68, 71, 81]. Jedná se o tzv. plně parametrizovaný (nebo též originální) ANCF element, který vychází z Timoshenkovy nosníkové teorie, zohledňuje smykovou deformaci a je vhodný pro modelování tlustých nosníků. Tento typ nosníkového elementu má celkem 24 stupňů volnosti. V pracích [70, 78] jsou přehledně popsány dva způsoby odvození vektoru elastických sil. První způsob je založen na obecných principech mechaniky kontinua, zatímco druhý způsob, nazývaný *elastic line approach* či *structural mechanics approach*, využívá obecné vztahy pro přetvoření (podélné, smykové, torzní a ohybové) vyjádřené na střednicové linii elementu. Pro modelování tenkých poddajných nosníků však tento typ elementu není z důvodu výpočtové náročnosti příliš vhodný. Zjednodušený ANCF element vycházející z Euler–Bernoulliho nosníkové teorie je popsán například v pracích [29, 15]. V případě [15] jsou uvažovány jen podélné elastické síly elementu, což omezuje použití pouze na tenká vlákna se zanedbatelnou ohybovou tuhostí. Práce [29] přidává k podélným elastickým silám i ohybové síly definované pomocí křivosti střednicové linie elementu, čímž dále rozšiřuje oblast použití tenkých nosníkových ANCF elementů. Oproti originálnímu ANCF elementu u obou těchto prvků je celkový počet stupňů volnosti redukován na 12. V článku [82] jsou elementu přidány i torzní elastické síly definované

pomocí zkrutu. Oproti předchozímu typu elementu jsou mezi uzlové souřadnice zařazeny i úhly torzního natočení v uzlech, což vede k navýšení počtu stupňů volnosti na 14.

Vývoj metody ANCF se nezastavil pouze u definice nosníkových elementů v rovině a prostoru. Pro potřeby dalších aplikací v problémech dynamiky vázaných mechanických soustav byly vyvinuty i deskové (či skořepinové) a prostorové objemové *solid* elementy. Základní článek věnující se tématu ANCF deskových prvků je například [69], kde autoři definují rovinný ANCF prvek a dávájí ho do souvislosti s ostatními metodami modelování poddajných těles (FFRF, inkrementální formulace MKP, LRVF). Podobně jako práce [5], která se věnuje nosníkovým prvkům, popisuje článek [14] zavedení konkrétních předpokladů vedoucích ke zjednodušení výrazu pro elastické síly v případě obdélníkových deskových ANCF prvků. Provedené numerické experimenty ukazují schopnost ANCF postihnout velké posuvy a deformace. Přesnost a konvergence výsledků je zde porovnávána s analytickými výpočty. V článku [45] autoři zobecňují deskové ANCF elementy na skořepinové, provádějí další testovací numerické simulace a výsledky porovnávají například s inkrementálním postupem výpočtu v programu ANSYS. Zjednodušení vektoru elastických sil pro případ tenkých skořepinových čtyřuzlových prvků vycházejících z teorie Kirchhoff-Love je popsáno v článku [17]. Popis trojúhelníkových tenkostěnných deskových elementů lze nalézt například v [13].

V nedávné době byla skupina ANCF elementů rozšířena také o prostorové prvky. Základní prostorový element tvaru kváдру uvažuje jako uzlové souřadnice pouze složky polohových vektorů uzlů vyjádřených v globálním souřadnicovém systému a je představen například v pracích [40, 83]. Rozšíření tohoto přístupu pak lze nalézt například v práci [49], kde jsou k uzlovým souřadnicím přidány ještě gradienty polohových vektorů uzlů.

2.2. Modelování interakcí mezi tělesy

Důležitým prvkem výpočtových modelů v dynamice multibody systémů je modelování kontaktu těles a tření mezi nimi. Touto problematikou se zabývali lidé již ve starověku. Příkladem je vynález kola, pomocí něhož bylo redukováno smykové tření vznikající při přesunu těžkých břemen. Základy dnešního pojetí interakce těles však položil Leonardo da Vinci v roce 1493 v díle Codex Madrid I [79], kde formuloval základní zákony tření:

- třecí síla je proporcionální k síle působící v normálovém směru ke kontaktní ploše,
- tření je nezávislé na velikosti kontaktní plochy.

Dále da Vinci použil jako první termín koeficient tření. Další rozvoj problematiky interakce těles probíhal od počátků klasické newtonovské mechaniky (17. století) a je spojen se jmény jako Robert Hooke, Leonard Euler či Charles Augustin Coulomb. Stěžejní je pak dílo Heinricha Hertze z roku 1881 [34], kde je vyřešen kontaktní problém dvou elastických zakřivených těles. Na jeho práci je pak založeno mnoho do dnes používaných metod.

Problematicou kontaktů těles se zabývá velké množství odborných publikací. Doporučit lze literaturu [58], která se obecně věnuje fyzikálním principům kontaktu těles a tření. Jsou zde kapitoly popisující Hertzovu kontaktní teorii, tečné kontaktní síly, různé

modely suchého tření, valivý odpor či otěr těles. Další publikací, která se zabývá modelováním kontaktních problémů, aplikací metod řešení a experimentům v oblasti kontaktů těles, je například [60].

Popisem a aplikací kontaktních modelů při vyšetřování dynamiky multibody systémů se zabývají například publikace [22, 52]. Nejčastěji se v problémech multibody systémů využívá tzv. *penaltový* či *silový* přístup, kdy je interakce dvou dokonale hladkých těles popsána silou působící ve směru normály k povrchu těles. Výchozím modelem je model Hertzův, který definuje kontaktní sílu jako součin kontaktní tuhosti s relativním průnikem (penetrací) interagujících těles. K nevýhodám tohoto modelu patří fakt, že nezohledňuje disipaci energie při kontaktu a není tedy realistický. Další dokonalejší modely normálových kontaktních sil založených na Hertzově modelu jsou popsány v [21, 43]. Problematikou při modelování kontaktních sil je určení kontaktních parametrů, například tuhosti. V případě kontaktu jednoduchých geometrií, jako jsou koule či válce, je určení kontaktních parametrů popsáno v [22, 58].

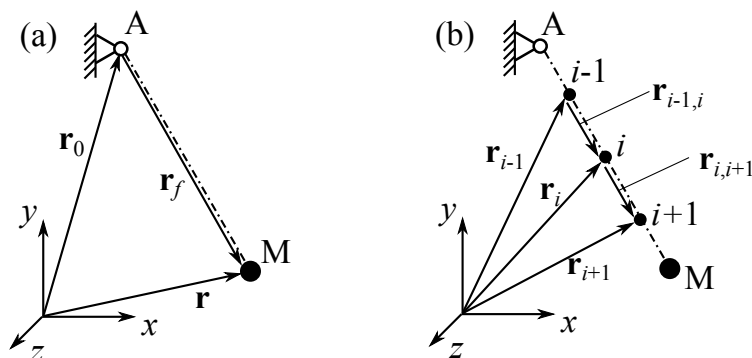
V případě, kdy interagující tělesa nelze považovat za dokonale hladká a může dojít k relativnímu tečnému posuvu těles v kontaktu, je nutné do dynamického modelu mechanického systému zavést i tečné třecí síly. Modelování třecích sil je složitá problematika, neboť při experimentálním pozorování průběhu tření bylo zjištěno mnoho zajímavých jevů [50], kupříkladu ulpívání těles (*stick-slip*), předskluzový posuv (*pre-sliding displacement*) či jev nazvaný *frictional lag*, kdy je tření odlišné pro rostoucí relativní tečnou rychlost (tedy kladné tečné zrychlení) a pro klesající tečnou rychlost (záporné tečné zrychlení – zpomalení). Aktuálně využívané modely třecích sil jsou přehledně shrnuty v článku [44]. Vzájemně se liší především komplexností a přesností popisu třecích jevů. Základní rozdělení modelů je na statické a dynamické. Statické modely jsou často používány pro jejich jednoduchost a menší výpočtovou náročnost. Dokáží však jen omezeně popsat jev ulpívání těles. Jejich hlavní nevýhodou je, že nedokáží popsat jevy *pre-sliding displacement* a *frictional lag*. Dynamické modely pak využívají dalších stavových veličin k popisu třecí síly a jsou tedy schopny popsat zmíněné jevy. V klasických inženýrských aplikacích se však nemusí vždy projevit všechny třecí jevy, je tedy vhodné volit přiměřeně komplexní model třecí síly. Výpočtová náročnost jednotlivých třecích modelů je shrnuta v článku [51].

3. Základní metody modelování vláken, kabelů a lan

V této kapitole jsou popsány základní zjednodušené metody pro modelování vláken, lan a kabelů, které mohou být aktivní součástí vázaných mechanických systémů. Zjednodušenými metodami jsou myšleny ty, které jsou snadno implementovatelné, vedou k rychlým a efektivním výpočtům, avšak nepostihují všechny možné vlastnosti lan. Jejich odvození pak spočívá v jistém inženýrském popsání problému a výsledný model zohledňuje především dominantní vlastnost lan - jejich axiální tuhost.

V kapitole 3.1 je popsána jednoduchá silová reprezentace lana, dále v kapitole 3.2 je vysvětlena metoda reprezentace lana pomocí silově propojených hmotných bodů. Oba tyto přístupy jsou demonstrovány na jednoduchém příkladu hmoty připojené pomocí poddajného lana k pevnému rámu, tedy případu poddajného kyvadla, viz obr. 3.1. Tento příklad byl zvolen z toho důvodu, že je dostatečně obecný na to, aby mohly být popsané metody následně použity na propojení libovolných těles vázaných mechanických systémů.

Vzhledem k tomu, že problematika modelování vláken, kabelů a lan se vyskytuje i v průmyslových aplikacích, je v kapitole 3.3 zmíněna možnost využití jednoho z celosvětově nejpoužívanějších výpočtových programů pro modelování a analýzu vázaných mechanických systémů *MSC.Adams*.



Obrázek 3.1.: Hmotný bod M připojený k rámu lanem modelovaným pomocí silové reprezentace lana (a) a s využitím metody propojených hmotných bodů (b).

3.1. Silová reprezentace lana

Základní a velmi efektivní metoda pro modelování lan jako součástí vázaných mechanických systémů spočívá v silové reprezentaci jejich chování. Tento přístup využívá nelineární síly, která popisuje axiální tuhost lana. Nelinearita spočívá v tom, že axiální síla je nenulová jen v případě natažení lana. V případě tlakového zatížení lana je axiální síla nulová, což odpovídá myšlenému vybočení lana do strany, v nosníkové terminologii obdobný stav jako vzpěrová ztráta stability.

Pohybová rovnice bodu M na obr. 3.1(a) je

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_e + b\dot{\mathbf{d}} + k\mathbf{d}, \quad (3.1)$$

kde m je hmotnost bodu M, k odpovídá koeficientu tuhosti lana v axiálním směru, b je koeficient tlumení lana v axiálním směru, vektor \mathbf{r} je polohový vektor bodu M, \mathbf{F}_e je vektor vnějších sil působících na bod M, vektor \mathbf{d} odpovídá axiálnímu prodloužení lana a vektor $\dot{\mathbf{d}}$ odpovídá relativní rychlosti bodu M a bodu A ve směru jejich spojnice. Aby byla zohledněna nulovost elastických sil v případě tlakového zatížení vlákna, je vektor \mathbf{d} vyjádřen ve tvaru

$$\mathbf{d} = \begin{cases} -(|\mathbf{r}_f| - l_0) \frac{\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}_f|} & \text{pro } |\mathbf{r}_f| \geq l_0, \\ \mathbf{0} & \text{pro } |\mathbf{r}_f| < l_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

kde $\mathbf{r}_f = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, \mathbf{r}_0 je polohový vektor místa A uchycení lana, l_0 je volná délka lana a výraz $\frac{\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}_f|} = \mathbf{e}_f$ odpovídá jednotkovému vektoru ve směru spojnice mezi bodem uchycení A a závažím M. Dále je nutné určit vektor relativní rychlosti $\dot{\mathbf{d}}$ mezi bodem M a A. Jedná se o rozdíl vektorů rychlosti těchto dvou bodů, který je promítnut na spojnici těchto bodů, což lze zapsat do tvaru

$$\dot{\mathbf{d}} = \begin{cases} -\left[(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0)^T \mathbf{e}_f\right] \mathbf{e}_f & \text{pro } |\mathbf{r}_f| \geq l_0, \\ \mathbf{0} & \text{pro } |\mathbf{r}_f| < l_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

kde v případě nehybného uchycení lana v místě A platí $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0}$.

Tento základní přístup k modelování lan nezohledňuje ohybové a setrvačnostní charakteristiky lana, je tedy vhodný pro modelování tenkých a lehkých vláken. Hlavní výhoda této metody je snadná implementace základního axiálního chování lana do modelu vázaných mechanických soustav, kdy důležitý je hlavně výpočet deformace (3.2) a rychlosti deformace vlákna (3.3). Další výhodou je, že i přes nelineární definici axiálního chování vlákna vede tento přístup na relativně rychlé simulace.

3.2. Reprezentace lana pomocí hmotných bodů

Reprezentace lana pomocí hmotných bodů, tzv. *point-mass* model, využívá diskretizace lana na hmotné body propojené nelineárními silami. Pro základní vysvětlení tohoto

přístupu je opět využít jednoduchý příklad poddajného kyvadla na obr. 3.1(b). Definiční sil mezi jednotlivými hmotnými body vlákna je podobná jako v kapitole 3.1. Je však nutné sestavit pohybové rovnice pro každý hmotný bod.

Pohybovou rovnici hmotného bodu i lze zapsat ve tvaru

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_{ei} + b_i \dot{\mathbf{d}}_i - b_{i+1} \dot{\mathbf{d}}_{i+1} + k_i \mathbf{d}_i - k_{i+1} \mathbf{d}_{i+1}, \quad (3.4)$$

kde m_i je hmotnost bodu i , $\ddot{\mathbf{r}}_i$ je druhá časová derivace polohové vektoru bodu i , \mathbf{F}_{ei} představuje vektor vnějších sil působících na bod i , koeficienty b_i a k_i odpovídají axiálnímu tlumení a tuhosti vlákna mezi body $i - 1$ a i , vektor \mathbf{d}_i odpovídá axiální deformaci úseku lana mezi body $i - 1$ a i , vektor $\dot{\mathbf{d}}_i$ odpovídá relativní rychlosti bodu i a $i - 1$ ve směru spojnice těchto bodů. Vektory mezi body $i - 1$, i a $i + 1$ z obr. 3.1(b) lze snadno vyjádřit jako

$$\mathbf{r}_{i-1,i} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}, \quad \mathbf{r}_{i,i+1} = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i, \quad (3.5)$$

a následně je možné definovat jednotkové vektory ve směru spojnic bodů $i - 1$, i a bodů i , $i + 1$ jako

$$\mathbf{e}_{f,i} = \frac{\mathbf{r}_{i-1,i}}{|\mathbf{r}_{i-1,i}|}, \quad \mathbf{e}_{f,i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i,i+1}}{|\mathbf{r}_{i,i+1}|}. \quad (3.6)$$

Vektory \mathbf{d}_i a \mathbf{d}_{i+1} jsou pak definovány podobně jako v rovnici (3.2), tedy

$$\mathbf{d}_i = \begin{cases} -(|\mathbf{r}_{i-1,i}| - l_{0,i}) \mathbf{e}_{f,i} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i-1,i}| \geq l_{0,i}, \\ \mathbf{0} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i-1,i}| < l_{0,i}, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{d}_{i+1} = \begin{cases} -(|\mathbf{r}_{i,i+1}| - l_{0,i+1}) \mathbf{e}_{f,i+1} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i,i+1}| \geq l_{0,i+1}, \\ \mathbf{0} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i,i+1}| < l_{0,i+1}, \end{cases}$$

kde $l_{0,i}$ a $l_{0,i+1}$ jsou volné délky daných úseků diskretizovaného lana. Vektory relativních rychlostí napínání daných úseků lana $\dot{\mathbf{d}}_i$ a $\dot{\mathbf{d}}_{i+1}$ lze zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{d}}_i = \begin{cases} -[(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_{i-1})^T \mathbf{e}_{f,i}] \mathbf{e}_{f,i} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i-1,i}| \geq l_{0,i}, \\ \mathbf{0} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i-1,i}| < l_{0,i}, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \begin{cases} -[(\dot{\mathbf{r}}_{i+1} - \dot{\mathbf{r}}_i)^T \mathbf{e}_{f,i+1}] \mathbf{e}_{f,i+1} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i,i+1}| \geq l_{0,i+1}, \\ \mathbf{0} & \text{pro } |\mathbf{r}_{i,i+1}| < l_{0,i+1}. \end{cases}$$

Tento přístup je implementačně velmi jednoduchý a sestavení pohybových rovnic všech hmotných bodů lze provést pomocí cyklu. Výhodou je také přibližné zahrnutí setrvačnosti lana. Přístup sice nepopisuje ohybovou tuhost lan, je tedy vhodný pro tenká vlákna, nicméně při simulacích může dojít k příčným kmitům vlákna. Tyto příčné kmity vláken pak můžou ovlivnit například přesnost pohybů řízených vázaných mechanických systémů. Nevýhoda tohoto přístupu spočívá ve větším počtu nelineárních sil, což může být z hlediska efektivity numerických integračních metod problematické a pokud je během simulace očekáváno, že dojde ke ztrátě napnutí lana, je nutné volit velmi malý časový integrační krok.

3.3. Využití komerčního programu MSC.Adams pro modelování lan

V inženýrské praxi je často kladen důraz na rychlost a efektivitu simulací reálných problémů. Proto mnoho průmyslových subjektů, jejichž produkty by se daly charakterizovat jako vázané mechanické systémy, potřebují globální a verifikované programové prostředky, s jejichž pomocí lze zefektivnit fázi vývoje a zdokonalení produktů. Nejznámější programy pro simulace dynamiky vázaných mechanických systémů jsou například *MSC.Adams*, *SIMPACK* či *RecurDyn*. Výhoda těchto programových balíčků spočívá především v jejich mnohaletém vývoji, takže obsahují velké množství předpřipravených funkcí pro sestavování modelů a pro numerické řešení dynamiky pohybu. Nevýhodou pak může být jistá komplexnost a uzavřenost těchto programů, kdy je běžnému uživateli odepřen přístup do teoretického pozadí programu.

Předmětem této kapitoly je popsat možnosti komerčního programu MSC.Adams z hlediska modelování poddajných nosníkových těles jako součástí vázaných mechanických systémů. Důvody pro volbu tohoto programu v této práci jsou následující:

- Jedná se o celosvětově nejrozšířenější software pro modelování a simulaci vázaných mechanických systémů ve vědě, výzkumu i praxi.
- Má v nabídce programový balíček *Adams Machinery*, který obsahuje modul pro snadné modelování a analýzu kabelů jako součástí mechanismů.

Kabelový modul programu MSC.Adams je primárně určen k automatizované tvorbě modelu vláken a kladek jako součástí mechanismů. Základní vlastnosti modulu jsou

- intuitivní uživatelské rozhraní,
- snadná definice kladek na základě rozměrových parametrů a materiálových vlastností,
- tvorba modelu kabelů na základě zadaného Youngova modulu, tuhostních a tlumicích parametrů,
- možnost zavést předeprnuté kabely,
- definice parametrů kontaktu mezi kladkou a kabelem,
- umožňuje vyšetřovat možný prokluz mezi kladkou a kabelem a sledovat zatížení kladek během simulace.

Nevýhodou pak je, že kabelový systém vytvořený tímto modulem musí vždy obsahovat alespoň jednu kladku, modul se tak nehodí pro modelování lan přímo spojujících tělesa. Uživatel má dále možnost volby ze dvou metod modelování kabelů, konkrétně

- *Simplified* (zjednodušený model),
- *Discretized* (diskretizovaný model).

Vzhledem k tomu, že tématem této dizertační práce je modelování poddajných těles nosníkového typu jako součástí vázaných mechanických systémů, bude ve zbytku této kapitoly nastíněno teoretické pozadí metod pro modelování kabelů v příslušném modulu programu MSC.Adams. Význam této části práce spočívá ve vlastním rozkrytí vnitřku kabelového modulu. Praktické využití jednotlivých modelů na vláknovém mechanismu je popsáno v kapitole 7.4.

Zjednodušený model

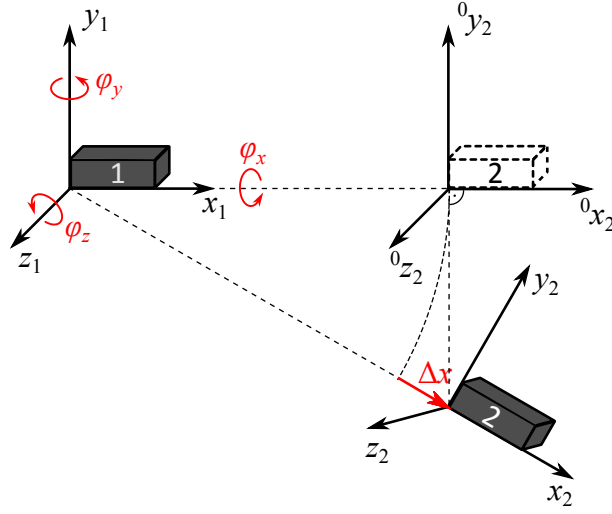
Dle dostupné dokumentace programu MSC.Adams [85] využívá zjednodušený model (*simplified*) silovou reprezentaci pro popsání kabelu, jak je uvedena v kapitole 3.1. Při použití tohoto modelu tedy platí obdobná omezení, tedy že je vhodný pro tenké kabely, jejichž hmotnost a ohybová tuhost je zanedbatelná. Program MSC.Adams neobsahuje možnost přímo definovat tzv. *floating marker*, tedy souřadnicové systémy s proměnnou polohou určenou na základě různých proměnných. Proto tento modul využívá fiktivní tělesa (*dummy parts*) svázané kinematickými vazbami ke kladkám, pomocí nichž je schopen definovat místo odvíjení vlákna od kladky a tečný směr v místě odvíjení. Vlastnosti těchto fiktivních těles a předpis použitých kinematických vazeb nejsou v dostupné dokumentaci [85] popsány, není tedy možné zhodnotit jejich vliv na simulace a výsledky.

Délka vlákna ovinutého kolem kladky je odvozena na základě poloměru kladky a úhlu opásání kladky mezi dvěma zmíněnými fiktivními tělesy. Aktuální délka vlákna mimo kladku je pak napočítána s využitím integrace úhlové rychlosti kladky. Axiální síla je následně napočítána z rozdílu aktuální a výchozí fyzikální délky vlákna při nezátíženém stavu s využitím Youngova modulu a průřezu vlákna.

Detailnější teoretické a implementační pozadí u tohoto zjednodušeného modelu není v dokumentaci [85] popsáno, nicméně vzhledem k relativní jednoduchosti vláknového modelu je předpokládáno, že je tvůrci programu dostatečně vyladěno, což je dále ověřeno v kapitole 7.4.

Diskretizovaný model

Při zvolení této metody je modelované lano rozděleno na jednotlivá tělesa, která jsou propojena silami a různými vazbami. Jedná se však o rozdílný přístup oproti reprezentaci pomocí hmotných bodů popsané v kapitole 3.2. Pro diskretizaci lana jsou použity prostorová tělesa tvaru koule, kdy každé má obecně šest stupňů volnosti. Dle nápovědy programu [85] jsou mezi jednotlivými diskretizovanými částmi kabelu (tělesy) definovány vazby typu *inline joint primitive*. Fungování této vazby mezi dvěma tělesy je schématicky znázorněno na obr. 3.2, kde těleso 1 je nehybné a na těleso 2 působí vertikální silový účinek, například gravitace. Červeně jsou znázorněny tři možné relativní rotace a jeden umožněný relativní posuv. Výchozí pozice tělesa 2 je dána souřadnicovým systémem 0x_2y_2z_2 , vlivem vertikální síly se těleso 2 posune směrem dolů, navíc se však i natočí. Rotace φ_x , φ_y , a φ_z označují natočení souřadnicového systému 2 vůči souřadnicovému systému 1. V praxi to znamená, že orientace osy x souřadnicového systému pevně spojeného s tělesem 2 je vždy ve směru spojnice souřadnicových systémů 1 a 2. Při řetězovém



Obrázek 3.2.: Znázornění vazby *inline joint primitive* programu MSC.Adams s červeně vyznačenými stupni volnosti.

propojení náhradních diskretizačních těles touto vazbou je pak možné snadno odečítat ohybové úhly a příčné posuny mezi propojenými kabelovými úseky. Nevýhoda tohoto přístupu však spočívá ve zvýšení počtu rovnic, kdy při rozdělení kabelu na n těles je potřeba $6n$ diferenciálních pohybových rovnic a dalších $2(n-1)$ algebraických vazbových rovnic.

Jednotlivá diskretizační tělesa jsou propojena silami, které jsou definovány na základě Euler-Bernoulliho nosníkové teorie. Dokumentace programu [85] obsahuje pouze stručný popis aplikovaných sil. Ty vyplývají ze symetrické matice tuhosti ve tvaru

$$\mathbf{K}_{dis} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & k_{26} \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & k_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{53} & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & k_{62} & 0 & 0 & 0 & k_{66} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Cílem této práce není detailně popsat fungování komerčního programu nebo popsat klasickou metodu konečných prvků, ale spíše nastínit teoretické pozadí výpočtového programu MSC.Adams a následně zhodnotit jeho možnosti pro modelování lanových mechanismů. Proto autor této dizertační práce doporučuje kapitolu 5.6 z literatury [59] týkající se maticové teorie ve strukturálních analýzách, kde je odvozena přesná podoba nenulových prvků matice tuhosti (3.9) a je shodná s dokumentací [85] programu MSC.Adams. V rámci definice diskretizovaného modelu kabelu je možné zadat parametry označené Rkx , Rkb a Rkt , kterými je násobena axiální tuhost (Rkx), ohybové tuhosti (Rkb) a torzní tuhosti (Rkt). Jejich účelem je snížit dané tuhostní vlastnosti, jejich hodnota by měla být menší nebo rovna jedné. Použití těchto parametrů vyplývá z faktu, že ohybová a torzní tuhost reálných kabelů je často daleko nižší než tuhost napočítaná podle

průřezových a materiálových charakteristik dle Euler-Bernoulliho teorie. To je způsobeno například spletením lan.

Kontakt kabelu s kladkou je řešen silově, kdy je využito kontaktní formulace mezi koulí (náhradní tělesa diskretizovaného kabelu) a válcem (idealizovaná kladka). Silové modelování kontaktů je obecně popsáno v kapitole 5.2 této práce, diskretizovaný model kabelu využívá zjednodušenou formulaci pro rovinný kontakt.

V podkapitole 7.4 je tento diskretizovaný model testován při modelování vláknového mechanismu a jsou zde popsány jeho výhody a nevýhody.

4. Absolute nodal coordinate formulation

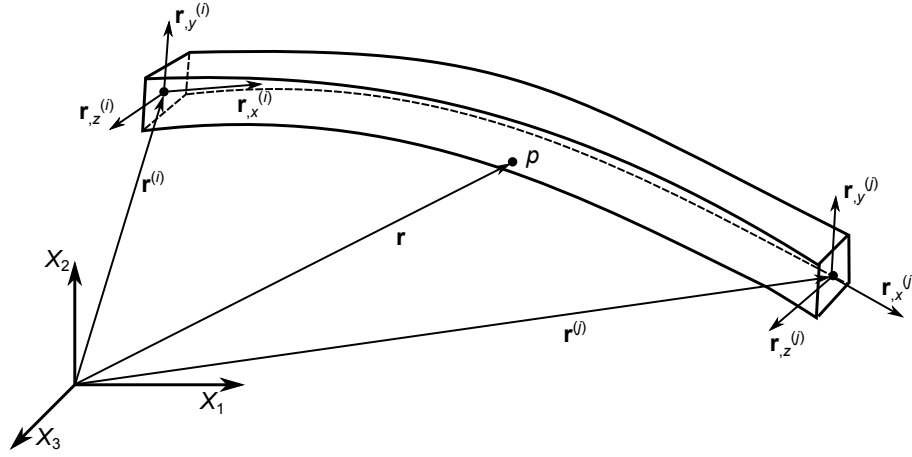
Jedna z nejběžnějších metod pro statickou a dynamickou analýzu mechanických systémů je metoda konečných prvků (MKP). Klasická formulace konečných prvků pro nosníky a skořepiny využívá posuvy a nekonečně malé rotace jako uzlové souřadnice. Výsledné nosníkové a skořepinové prvky nejsou obecně pokládány za izoparametrické [64] a nekonečně malé rotace jako uzlové souřadnice vedou na linearizaci pohybových rovnic. Při libovolném tuhém pohybu takového prvku (tzn. prvek se pohybuje jako tuhý, tedy bez deformací a nemění tvar) pak mohou vznikat nenulová přetvoření. Řešením tohoto problému je *absolute nodal coordinate formulation* (ANCF), což je neinkrementální formulace konečných prvků, která jako uzlové souřadnice elementu využívá polohové vektory v globálním souřadnicovém systému a jejich gradienty [64, 68, 46]. Tato formulace byla poprvé představena v roce 1996 a její využití je vhodné především pro analýzu velkých deformací a posuvů při vyšetřování dynamiky vázaných mechanických systémů.

Kromě různých druhů nosníkového ANCF elementu byly odvozeny skořepinové ANCF elementy a nedávno též prostorové elementy tvaru kvádrů či čtyřstěnu. V této kapitole jsou popsány základní známé nosníkové ANCF elementy, jejichž využití je dále testováno. Mezi ně patří plně parametrizovaný nosníkový ANCF element [70, 71, 78], kabelový element nižšího řádu [30, 82, 15] a dále speciální případ rovinných elementů [5, 20].

Přínos této dizertační práce spočívá především ve využití nosníkových ANCF prvků pro úlohy s kontakty a dále v otestování těchto prvků na reálných systémech. Přínosem této konkrétní kapitoly je pak souhrnný popis nejpoužívanějších ANCF nosníkových elementů, konkrétní vyjádření jejich elastických sil, rozbor rozdílnosti a vhodnosti použití jednotlivých typů prvků a dále popis možných úprav pro zefektivnění simulací při použití ANCF.

4.1. Plně parametrizovaný nosníkový ANCF element

Plně parametrizovaný nosníkový ANCF element, nebo též originální ANCF element [30], slouží především k popisu prostorových tlustých (*thick*) nosníků. Tento prvek využívá parciální derivace polohových vektorů uzlových souřadnic k popisu průřezových deformací.



Obrázek 4.1.: Deformovaný plně parametrizovaný ANCF nosníkový element.

4.1.1. Kinematický popis

Na obr. 4.1 je znázorněn deformovaný plně parametrizovaný ANCF nosníkový element. Jeho konfigurace je určena pozicí dvou koncových uzlů i a j . Každý uzel je popsán polohovým vektorem \mathbf{r} a jeho třemi derivacemi $\mathbf{r}_{,x}$, $\mathbf{r}_{,y}$, $\mathbf{r}_{,z}$, které jsou definovány v globálním souřadnicovém systému $X_1X_2X_3$. Pro derivace polohového vektoru platí

$$\mathbf{r}_{,x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{r}_{,y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{r}_{,z} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}, \quad (4.1)$$

kde souřadnice x odpovídá lokální axiální souřadnici na střednicové linii elementu, y a z odpovídají lokálním průřezovým souřadnicím. Definiční souřadnice vybraného uzlu i lze zapsat

$$\mathbf{e}^{(i)} = [\mathbf{r}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,x}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,y}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,z}^{(i)T}]^T, \quad (4.2)$$

z čehož vyplývá, že jeden uzel má tři polohové stupně volnosti a devět komponent gradientu polohového vektoru. Výsledný vektor uzlových souřadnic elementu má celkem 24 stupňů volnosti a lze ho zapsat

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}^{(i)T}, \mathbf{e}^{(j)T}]^T = [\mathbf{r}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,x}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,y}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,z}^{(i)T}, \mathbf{r}^{(j)T}, \mathbf{r}_{,x}^{(j)T}, \mathbf{r}_{,y}^{(j)T}, \mathbf{r}_{,z}^{(j)T}]^T. \quad (4.3)$$

Lokální souřadnice polohového vektoru uzlu i jsou $\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{r}^{(i)}(x = 0, y = 0, z = 0)$, pro uzel j pak platí $\mathbf{r}^{(j)} = \mathbf{r}^{(j)}(x = l_e, y = 0, z = 0)$, kde l_e je délka elementu nosníku.

Polohu libovolného bodu nosníku lze vyjádřit polohovým vektorem \mathbf{r} závislým na třech prostorových parametrech x , y a z . Interpolační funkce jsou charakterizovány následující soustavou bázových polynomů

$$\boldsymbol{\phi} = [1, x, y, z, xy, xz, x^2, x^3]. \quad (4.4)$$

Ze vztahu (4.4) je patrné, že axiální posuv ve směru souřadnice x elementu nosníku je aproximován pomocí kubického polynomu a příčné posuvy ve směrech průřezových

souřadnic y a z jsou aproximovány lineárně. Polohový vektor \mathbf{r} lze nyní zapsat pomocí těchto bázových polynomů jako

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6x^2 + a_7x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6x^2 + b_7x^3 \\ c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz + c_6x^2 + c_7x^3 \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(x, y, z) \cdot \mathbf{a}(t), \quad (4.5)$$

kde \mathbf{a} je vektor koeficientů $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_7, b_0, \dots, b_7, c_0, \dots, c_7]^T$ a pro matici $\mathbf{\Phi}$ platí

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi & \mathbf{0}_{1,8} & \mathbf{0}_{1,8} \\ \mathbf{0}_{1,8} & \phi & \mathbf{0}_{1,8} \\ \mathbf{0}_{1,8} & \mathbf{0}_{1,8} & \phi \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

kde $\mathbf{0}_{1,8}$ má význam nulového vektoru o rozměrech 1×8 .

Po dosazení známých lokálních souřadnic x, y a z krajních uzlů i a j do předpisu polohového vektoru (4.5) a jeho derivací lze vektor uzlových souřadnic (4.3) vyjádřit jako

$$\mathbf{e} = \mathbf{N}(x, y, z) \cdot \mathbf{a}(t), \quad (4.7)$$

kde \mathbf{N} je matice velikosti 24×24 . Odtud vyjádřený vektor koeficientů \mathbf{a} je

$$\mathbf{a} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{e}. \quad (4.8)$$

Dosazením výrazu (4.8) pro vektor koeficientů \mathbf{a} do vztahu pro polohový vektor libovolného bodu nosníku \mathbf{r} (4.5) je získán vztah

$$\mathbf{r} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{S}(x, y, z)\mathbf{e}, \quad (4.9)$$

kde \mathbf{S} je matice tvarových funkcí elementu, která má podobu

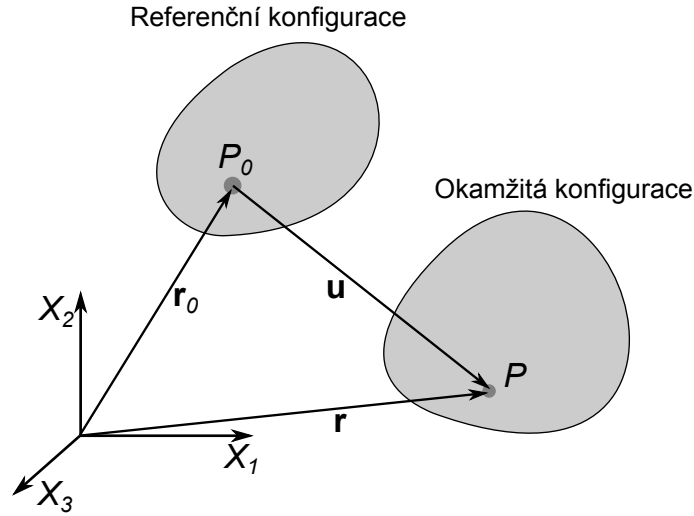
$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_1\mathbf{I}, \mathbf{S}_2\mathbf{I}, \mathbf{S}_3\mathbf{I}, \mathbf{S}_4\mathbf{I}, \mathbf{S}_5\mathbf{I}, \mathbf{S}_6\mathbf{I}, \mathbf{S}_7\mathbf{I}, \mathbf{S}_8\mathbf{I}]. \quad (4.10)$$

V této rovnici \mathbf{I} představuje jednotkovou matici o rozměrech 3×3 a pro tvarové funkce platí

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & S_2 &= l_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ S_3 &= l_e(1 - \xi)\eta, & S_4 &= l_e(1 - \xi)\zeta, \\ S_5 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & S_6 &= l_e(-\xi^2 + \xi^3), \\ S_7 &= l_e\xi\eta, & S_8 &= l_e\xi\zeta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde $\xi = x/l_e$, $\eta = y/l_e$ a $\zeta = z/l_e$ jsou bezrozměrné parametry.

Jak již bylo zmíněno, popisovaný element má celkem 24 nezávislých uzlových souřadnic, které mají svůj fyzikální význam. Fyzikální význam polohového vektoru \mathbf{r} je zřejmý, vektor $\mathbf{r}_{,x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ má význam tečny k axiálnímu směru nosníku, zatímco vektory $\mathbf{r}_{,y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ a $\mathbf{r}_{,z} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$ představují tečnu k průřezovým souřadnicím [73], jak je patrné v obr. 4.1, a určují tak natočení rovinného průřezu vůči střednicové linii. V nedeformovaném stavu mají tyto tři derivace polohového vektoru jednotkovou velikost a jsou na sebe kolmé. Při deformaci se jejich velikost liší od jednotkové velikosti a nemusí být na sebe kolmé. Z tvarových funkcí S_3, S_4, S_7, S_8 (4.11) dále vyplývá, že vektory $\mathbf{r}_{,y}$ a $\mathbf{r}_{,z}$ jsou aproximovány lineárně v x .



Obrázek 4.2.: Obecný pohyb poddajného tělesa.

4.1.2. Odvození elastických sil

Pro odvození elastických sil nosníkového elementu, respektive matice tuhosti elementu, lze postupovat dvěma způsoby [70]. První způsob využívá obecné postupy mechaniky kontinua, druhý způsob je označován jako *elastic line approach* [24] a spočívá v tom, že všechny deformace, prodloužení, smyk, torze a ohyb, jsou vyhodnoceny na střednicové linii nosníku. Bez ohledu na to, jaký způsob odvození elastických sil je použit, je výsledkem nelineární vektor elastických sil elementu, respektive nelineární matice tuhosti elementu. Vzhledem k tomu, že vyjádření elastických sil vede ke komplikovanému tvaru matice tuhosti elementu, je vhodné pro její konkrétní určení použít software pro symbolické zpracování matematických výrazů nebo příslušné integrály vyřešit numericky, například pomocí Gaussovy kvadratury.

Přístup dle obecných postupů mechaniky kontinua

Na obr. 4.2 je znázorněn obecný pohyb poddajného tělesa z referenční konfigurace, při které čas $t = 0$, do okamžité konfigurace v čase t . Poloha libovolného bodu P_0 v referenční konfiguraci je dána polohovým vektorem \mathbf{r}_0 . Během pohybu a deformace tělesa dojde k posunutí zkoumaného bodu o vektor \mathbf{u} do bodu P okamžité konfigurace, jehož poloha je určena polohovým vektorem \mathbf{r} . Při využití obecných principů mechaniky kontinua pro odvození elastických sil [81, 24, 70] je nejdříve nutné vyjádřit deformační gradient z Lagrangeova popisu kinematiky kontinua jako

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}_0^{-1}, \quad (4.12)$$

kde $\mathbf{r}_0 = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}_0$ odpovídá polohovému vektoru zkoumaného bodu P_0 v referenční konfiguraci, který je vyjádřen pomocí tvarových funkcí, a $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}$ odpovídá polohovému

vektoru zkoumaného bodu v okamžité konfiguraci po obecném pohybu a deformaci poddajného tělesa. Vektor \mathbf{x} je vektor lokálních souřadnic $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ a \mathbf{J}_0 je Jacobiho matice transformace souřadnic v bodě P_0 referenční konfigurace.

Green–Lagrangeův tenzor deformace má pak tvar [24]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad (4.13)$$

kde \mathbf{I} odpovídá jednotkové matici. Po dosazení vztahu pro deformační gradient (4.12) má tenzor deformace podobu

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \frac{1}{2} \left[\mathbf{J}_0^{-T} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{J}_0^{-1} - \mathbf{I} \right]. \quad (4.14)$$

Dosazením $\mathbf{r}_0 = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}_0$ a $\mathbf{r} = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}$ lze vztah (4.14) přepsat na tvar

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{,X_1}^T \mathbf{r}_{,X_1} - 1 & \mathbf{r}_{,X_1}^T \mathbf{r}_{,X_2} & \mathbf{r}_{,X_1}^T \mathbf{r}_{,X_3} \\ & \mathbf{r}_{,X_2}^T \mathbf{r}_{,X_2} - 1 & \mathbf{r}_{,X_2}^T \mathbf{r}_{,X_3} \\ & \text{sym.} & \mathbf{r}_{,X_3}^T \mathbf{r}_{,X_3} - 1 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Jak je zmíněno v článku [70], jako referenční konfigurace může být uvažována počáteční nezdeformovaná konfigurace, kdy centrální osa x nosníkového elementu splývá s globální osou X_1 a uzel i ANCF elementu leží v počátku globálního souřadnicového systému, který je uvažován jako kartézský. Uzlové souřadnice prvku takové referenční konfigurace jsou

$$\mathbf{e}_0 = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} l_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \right]^T. \quad (4.16)$$

Z porovnání těchto uzlových souřadnic referenční konfigurace a uzlových souřadnic elementu v obecném čase (4.3) je patrné, že jednotlivé parciální derivace polohových vektorů uzlů ANCF elementu v referenční konfiguraci jsou totožné s jednotkovými vektory os globálního souřadnicového systému $X_1 X_2 X_3$. Vynásobením matice tvarových funkcí (4.10) a vektoru uzlových souřadnic uvažované referenční konfigurace elementu (4.16) lze polohový vektor libovolného bodu elementu nosníku v referenční konfiguraci vyjádřit pomocí lokálních souřadnic elementu jako

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{e}_0 = [x, y, z]^T = \mathbf{x}. \quad (4.17)$$

Jacobiho matice \mathbf{J}_0 se v tomto případě stává jednotkovou \mathbf{I} maticí rozměru 3×3 , viz následující úprava

$$\mathbf{J}_0 = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}. \quad (4.18)$$

V případě modelování zalomených nosníkových struktur či nosníkových struktur obsahujících T-kusy již nemusí být Jacobiho matice ekvivalentní s jednotkovou maticí, referenční konfigurace nebude odpovídat vztahu (4.16). Více lze nalézt v [24].

Deformační tenzor z pravé strany rovnice (4.15) obsahuje celkem 6 nezávislých složek, které lze s využitím definované referenční konfigurace a vztahu pro Jacobiho matici \mathbf{J}_0 (4.18) zapsat do vektoru poměrných deformací $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz}], \quad (4.19)$$

jehož složky jsou

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x} - 1), & \varepsilon_y &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{,y}^T \mathbf{r}_{,y} - 1), & \varepsilon_z &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{,z}^T \mathbf{r}_{,z} - 1), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,y}, & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,z}, & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\mathbf{r}_{,y}^T \mathbf{r}_{,z}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pro deformační energii elementu o objemu V_e platí vztah

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV_e, \quad (4.21)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je vektor obsahující šest složek tenzoru napětí. Za předpokladu homogenního izotropního elastického materiálu lze uvažovat Hookeův zákon ve tvaru $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$ s maticí elastických konstant [71]

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

kde Laméovy konstanty mají tvar

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (4.23)$$

a E je Youngův modul pružnosti v tahu, ν je Poissonovo číslo a G je modul pružnosti ve smyku. Dosazením Hookeova zákona do rovnice (4.21) je deformační energie vyjádřena vztahem

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV_e = \\ &= \int_{V_e} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \lambda (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_z) + 2\mu (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2) \right] dV_e. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Vektor elastických sil elementu je vyjádřen jako parciální derivace deformační energie elementu podle vektoru uzlových souřadnic, což lze zapsat

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_e &= \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} = \\
 &= \int_{V_e} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} \left(2\varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \mathbf{e}} \right) + \right. \\
 &\quad + \lambda \left(\varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{e}} \varepsilon_y + \varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \mathbf{e}} \varepsilon_z + \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{e}} \varepsilon_z \right) + \\
 &\quad \left. + 2\mu \left(2\varepsilon_{xy} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{xz} \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{yz} \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial \mathbf{e}} \right) \right] dV_e.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Parciální derivace jednotlivých složek vektoru poměrných deformací ze vztahu (4.25) lze vyjádřit

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,i}^T \mathbf{r}_{,i} - 1) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,i}^T \mathbf{S}_{,i} \mathbf{e} - 1) = \mathbf{S}_{,i}^T \mathbf{S}_{,i} \mathbf{e}, \tag{4.26}$$

kde $i \in \{x, y, z\}$, a dále

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{r}_{,i}^T \mathbf{r}_{,j} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,i}^T \mathbf{S}_{,j} \mathbf{e}) = \mathbf{S}_{,i}^T \mathbf{S}_{,j} \mathbf{e}, \tag{4.27}$$

kde $i \in \{x, y, z\}$, $j \in \{x, y, z\}$ a $i \neq j$. Pokud je pro výpočet integrálu ve výrazu (4.25) použita numerická Gaussova kvadratura, která je popsána v kapitole 6.4, lze pro konkrétní Gaussovy body napočítat matice $\mathbf{S}_{,i}$ před samotnou simulací v rámci tzv. *preprocessingu*. Vektor elastických sil je pak možné v každém časovém kroku během simulace napočítat pomocí několika algebraických operací, což má pozitivní vliv na urychlení výpočtu.

Vektor elastických sil elementu (4.25) lze rozepsat jako součin

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{K}_{full}^{cma}(\mathbf{e}) \mathbf{e}, \tag{4.28}$$

kde $\mathbf{K}_{full}^{cma}(\mathbf{e})$ vyjadřuje nelineární matici tuhosti plně parametrizovaného nosníkového ANCF elementu závislou na vektoru uzlových souřadnic \mathbf{e} , která byla odvozena pomocí postupů mechaniky kontinua. Konkrétní vyjádření této matice je součástí přílohy A.1.

Elastic line approach

Tento přístup využívá stejný kinematický popis nosníkového prvku, ale všechny typy deformací jsou vyhodnoceny na střednicové linii nosníkového elementu [24, 29, 61]. Pro jednotlivé parciální derivace polohového vektoru na střednicové linii platí

$$\mathbf{r}_{0,x} = \mathbf{r}_{,x}(x, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{0,y} = \mathbf{r}_{,y}(x, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{0,z} = \mathbf{r}_{,z}(x, 0, 0). \tag{4.29}$$

Zde je nutné podotknout, že nejdříve je polohový vektor derivován a až následně jsou dosazeny nuly za parametry y a z . Pokud by to bylo naopak, v případě $\mathbf{r}_{0,y}$ a $\mathbf{r}_{0,z}$ by

výsledkem byly nulové vektory. Vektor $\mathbf{r}_{0,x}$ vyjadřuje tečnu ke střednicové linii elementu, zatímco vektory $\mathbf{r}_{0,y}$ a $\mathbf{r}_{0,z}$ definují tečny k průřezovým souřadnicím y a z vyjádřené na střednicové linii. Vzhledem k tomu, že ve směrech y a z jsou posuvy aproximovány lineární funkcí a že vektory $\mathbf{r}_{,y}$ a $\mathbf{r}_{,z}$ jsou lineárně závislé jen na souřadnici x (to plyne z funkcí S_3, S_4, S_7, S_8 výrazu (4.11)), bude platit $\mathbf{r}_{0,y} = \mathbf{r}_{,y}$ a $\mathbf{r}_{0,z} = \mathbf{r}_{,z}$, tedy že tečny k průřezovým souřadnicím budou pro dané x konstantní.

Pro plně parametrizovaný nosníkový ANCF element při použití přístupu elastic line approach je uvažováno celkem 9 obecných deformací [70, 61], konkrétně tři poměrná prodloužení $\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z}$, deformace (zkos) průřezu γ_{0yz} , dvě příčné smykové deformace γ_{0xy} a γ_{0xz} , torzní deformace κ_{0x} a dvě ohybové deformace κ_{0y} a κ_{0z} . Jejich obecné vyjádření pomocí parciálních derivací polohového vektoru je [70]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{0x} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{0,x}^T \mathbf{r}_{0,x} - 1), & \varepsilon_{0y} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{0,y}^T \mathbf{r}_{0,y} - 1), & \varepsilon_{0z} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{0,z}^T \mathbf{r}_{0,z} - 1), \\ \gamma_{0xy} &= \mathbf{r}_{0,x}^T \mathbf{r}_{0,y}, & \gamma_{0xz} &= \mathbf{r}_{0,x}^T \mathbf{r}_{0,z}, & \gamma_{0yz} &= \mathbf{r}_{0,y}^T \mathbf{r}_{0,z}, \\ \kappa_{0x} &= \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{0,z}^T \mathbf{r}_{0,xy} - \mathbf{r}_{0,y}^T \mathbf{r}_{0,xz}), & \kappa_{0y} &= \mathbf{r}_{0,z}^T \mathbf{r}_{0,xx}, & \kappa_{0z} &= -\mathbf{r}_{0,y}^T \mathbf{r}_{0,xx}.\end{aligned}\quad (4.30)$$

Celkovou deformační energii elementu U_e lze vyjádřit jako sumu deformačních energií jednotlivých obecných deformací definovaných ve vztahu (4.30). Deformační energie podélného prodloužení, deformací průřezu ve směru y a z a zkosu v případě prvku s konstantním průřezem má tvar

$$\begin{aligned}U_{lae} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \int_{V_e} \varepsilon_i E_{ij} \varepsilon_j dV_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \int_0^{l_e} A_e \varepsilon_i E_{ij} \varepsilon_j dx = \\ &= \int_0^{l_e} A_e \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} (\varepsilon_{0x}^2 + \varepsilon_{0y}^2 + \varepsilon_{0z}^2) + \lambda (\varepsilon_{0x} \varepsilon_{0y} + \varepsilon_{0y} \varepsilon_{0z} + \varepsilon_{0x} \varepsilon_{0z}) + \frac{\mu}{2} \gamma_{0yz}^2 \right] dx,\end{aligned}\quad (4.31)$$

kde $\varepsilon_i = \varepsilon_j = (\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z}, \gamma_{0yz})$, E_{ij} odpovídá vztahu (4.22) a A_e je plocha průřezu elementu, která vyplývá z vyjádření objemového integrálu. Energie ostatních deformací je následně odvozena pomocí obdobných úprav.

Energie příčných smykových deformací je vyjádřena vztahem

$$U_{se} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} (\mu A_e k_y \gamma_{0xy}^2 + \mu A_e k_z \gamma_{0xz}^2) dx,\quad (4.32)$$

kde k_y a k_z jsou smykové faktory charakterizující průřez [53]. Deformační energie torzní deformace elementu je

$$U_{te} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} S_t \kappa_{0x}^2 dx,\quad (4.33)$$

kde $S_t = \mu k_x I_p$ odpovídá torzní tuhosti [77]. Zde k_x je smykový distribuční faktor [77] a I_p je polární moment setrvačnosti průřezu. Zbývá vyjádřit deformační energii ohybových deformací elementu

$$U_{be} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} (I_y \kappa_{0y}^2 + I_z \kappa_{0z}^2) dx,\quad (4.34)$$

kde I_y a I_z jsou kvadratické momenty průřezu a $\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu} = E$.

Pro celkovou deformační energii platí

$$U_e = U_{lae} + U_{se} + U_{te} + U_{be}. \quad (4.35)$$

Vektor elastických sil elementu je pak roven

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial U_{le}}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial U_{se}}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial U_{te}}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial U_{be}}{\partial \mathbf{e}} = \\ &= \int_0^{l_e} \left\{ A_e \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} \left(2\varepsilon_{0x} \frac{\partial \varepsilon_{0x}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{0y} \frac{\partial \varepsilon_{0y}}{\partial \mathbf{e}} + 2\varepsilon_{0z} \frac{\partial \varepsilon_{0z}}{\partial \mathbf{e}} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda \left(\varepsilon_{0x} \frac{\partial \varepsilon_{0y}}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \varepsilon_{0x}}{\partial \mathbf{e}} \varepsilon_{0y} + \varepsilon_{0y} \frac{\partial \varepsilon_{0z}}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \varepsilon_{0y}}{\partial \mathbf{e}} \varepsilon_{0z} + \varepsilon_{0x} \frac{\partial \varepsilon_{0z}}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial \varepsilon_{0x}}{\partial \mathbf{e}} \varepsilon_{0z} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mu}{2} \left(2\gamma_{0yz} \frac{\partial \gamma_{0yz}}{\partial \mathbf{e}} + 2k_y \gamma_{0xy} \frac{\partial \gamma_{0xy}}{\partial \mathbf{e}} + 2k_z \gamma_{0xz} \frac{\partial \gamma_{0xz}}{\partial \mathbf{e}} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_t}{2} \left(2\kappa_{0x} \frac{\partial \kappa_{0x}}{\partial \mathbf{e}} \right) + \frac{(3\lambda + 2\mu)\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(I_y 2\kappa_{0y} \frac{\partial \kappa_{0y}}{\partial \mathbf{e}} + I_z 2\kappa_{0z} \frac{\partial \kappa_{0z}}{\partial \mathbf{e}} \right) \right\} dx = \\ &= \mathbf{K}_{full}^{ela}(\mathbf{e})\mathbf{e}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

kde $\mathbf{K}_{full}^{ela}(\mathbf{e})$ je nelineární matice tuhosti plně parametrizovaného nosníkového ANCF elementu, která byla odvozena přístupem *elastic line approach*. Tato matice je přehledněji rozepsána v příloze A.1.

4.1.3. Porovnání přístupů pro odvození elastických sil

Srovnáním přístupů pro odvození elastických sil se zabývá například článek [36], který se však věnuje pouze 2D ANCF elementům. Rozdílnost přístupů pro plně parametrizovaný 3D ANCF nosníkový element bude nově analyzována v této kapitole.

Za účelem porovnání zmíněných přístupů je polohový vektor obecného bodu nosníku s lokálními souřadnicemi $[x, y, z]^T$ (4.5) přepsán do podoby

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z}, \quad (4.37)$$

kde $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}(x, 0, 0)$ je polohový vektor bodu na střednicové linii nosníku. Parciální derivace \mathbf{r}_c podle y nebo z pak vede na nulový vektor. Výrazy $y\mathbf{r}_{,y}$ a $z\mathbf{r}_{,z}$ vyplývají mimo jiné z úpravy rovnice (4.5) nebo také z faktu, že je použita lineární aproximace v souřadnicích y a z . Parciální derivací vztahu (4.37) podle souřadnice y je získán ekvivalentní výraz

$$\mathbf{r}_{,y} = \mathbf{r}_{c,y} + \mathbf{r}_{,y} + y\mathbf{r}_{,yy} + z\mathbf{r}_{,zy} = \mathbf{r}_{,y}. \quad (4.38)$$

Druhé derivace polohového vektoru $\mathbf{r}_{,zy}$ a $\mathbf{r}_{,yy}$ vedou k nulovým vektorům kvůli lineární aproximaci ve směrech y a z . Nulovost vektoru $\mathbf{r}_{c,y}$ je popsána výše. Stejně ověření lze získat i pro parciální derivaci $\mathbf{r}_{,z}$.

Přístup dle obecných postupů mechaniky kontinua

Dosažením polohového vektoru (4.37) do vztahu pro poměrné deformace (4.20) lze zapsat výrazy pro jednotlivá přetvoření jako

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,x}^T (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,x} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1) + (y\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{,yx} + z\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{,zx}) + \varepsilon_{res},\end{aligned}\quad (4.39)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,y}^T (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,y} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,y}^T \mathbf{r}_{,y} - 1),\end{aligned}\quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,z}^T (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,z} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,z}^T \mathbf{r}_{,z} - 1),\end{aligned}\quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,y}^T (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,z} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,y}^T \mathbf{r}_{,z},\end{aligned}\quad (4.42)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,x}^T (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,y} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{,yx} + y\mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,yx} + z\mathbf{r}_{,zx}^T \mathbf{r}_{,yx}),\end{aligned}\quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,x}^T (\mathbf{r}_c + y\mathbf{r}_{,y} + z\mathbf{r}_{,z})_{,z} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{,z} + y\mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,z} + z\mathbf{r}_{,zx}^T \mathbf{r}_{,z}).\end{aligned}\quad (4.44)$$

Výraz ε_{res} ze vztahu (4.39) obsahuje složky přetvoření vyššího řádu a lze ho vyjádřit ve tvaru

$$\varepsilon_{res} = \frac{1}{2} (y^2 \mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,yx} + 2yz \mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,zx} + z^2 \mathbf{r}_{,zx}^T \mathbf{r}_{,zx}).\quad (4.45)$$

Elastic line approach

V případě odvození přístupem *elastic line approach* lze snadno dokázat, že

$$\mathbf{r}_{0,x} = \mathbf{r}_{c,x}.\quad (4.46)$$

Jednotlivé složky tenzoru přetvoření lze pak získat rozbořením vztahů (4.30) jako

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0x} + y\kappa_{0,z} + z\kappa_{0,y} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{c,x} - 1) + y\mathbf{r}_{,y}^T \mathbf{r}_{c,xx} - z\mathbf{r}_{,z}^T \mathbf{r}_{c,xx},\quad (4.47)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{0y} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,y}^T \mathbf{r}_{,y} - 1), \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{0z} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,z}^T \mathbf{r}_{,z} - 1), \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{0z} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_{,y}^T \mathbf{r}_{,z}, \quad (4.50)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (\gamma_{0xy} + z \kappa_{0x}^{(1)}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{,y} + z \mathbf{r}_{,zx}^T \mathbf{r}_{,y}), \quad (4.51)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} (\gamma_{0xz} + y \kappa_{0x}^{(2)}) = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{c,x}^T \mathbf{r}_{,z} + y \mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,z}), \quad (4.52)$$

Člen $\frac{1}{2} z \kappa_{0x}^{(1)} = \frac{1}{2} z \mathbf{r}_{,zx}^T \mathbf{r}_{,y}$ z výrazu (4.51) a člen $\frac{1}{2} y \kappa_{0x}^{(2)} = \frac{1}{2} y \mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,z}$ z výrazu (4.52) jsou příspěvky k daným přetvořením od torzní deformace $\kappa_{0x} = \frac{1}{2} (\kappa_{0x}^{(2)} - \kappa_{0x}^{(1)})$.

Porovnání přístupů

Porovnáním vztahů (4.39) až (4.52) lze dojít k následujícím závěrům:

1. Při odvození podélné složky přetvoření ε_x pomocí *elastic line approach* jsou zanedbány složky vyššího řádu ε_{res} , jejich vliv na ohyb nosníku je však v běžných aplikacích nevýznamný.
2. Ohybová složka podélného přetvoření ε_x má u obou přístupů jiný tvar, viz porovnání (4.39) a (4.47). Tyto tvary nejsou ekvivalentní kvůli rozdílné definici ohybového přetvoření, které do axiálního přetvoření přispívá, což může vést k rozdílné ohybové tuhosti prvků. Testovací simulace dokazující rozdílnost ohybové tuhosti jsou popsány například v článku [70].
3. Průřezová přetvoření ε_y , ε_z a ε_{yz} jsou u obou přístupů totožná.
4. V případě *elastic line approach* jsou zanedbány smykové deformace $y \mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,y}$ z výrazu pro ε_{xy} a dále $z \mathbf{r}_{,zx}^T \mathbf{r}_{,z}$ z výrazu pro ε_{xz} , viz vztahy (4.43), (4.51) a (4.44), (4.52).

Jak ukázaly četné studie, např. [36, 61, 70] při přístupu dle obecných principů mechaniky kontinua dochází při simulacích tenkých nosníků s vysokou tuhostí k tzv. *locking* problémům (uzamykání prvku), kdy prvek vykazuje větší tuhost, než by měl mít. Toto nerealistické chování je dále charakterizováno výskytem vysokých vlastních frekvencí spojených s průřezovými deformacemi, které mohou dále činit potíže při numerické integraci v čase. Důvodem vzniku uzamykání u prvku, jehož elastické síly byly odvozeny pomocí obecných přístupů mechaniky kontinua, je především výskyt výrazů ε_{res} (bod 1.), $y \mathbf{r}_{,yx}^T \mathbf{r}_{,y}$ a $z \mathbf{r}_{,zx}^T \mathbf{r}_{,z}$ (bod 4.), které zapříčiňují silnou vazbu mezi ohybem a průřezovými deformacemi. Přístup *elastic line approach* tyto výrazy neobsahuje, je tedy vhodnější pro tenké nosníky s vyšší tuhostí, kdy se zmíněné složky neuplatňují v takové míře. Zdroje [36, 61] uvádějí, že silná vazba mezi průřezovými deformacemi a ohybem může mít významný vliv v případě velmi poddajných nosníkových struktur (například lana, vlákna apod.),

proto v takových případech doporučují použití přístupu dle obecných principů mechaniky kontinua.

Literatura [61, 70] dále popisuje vylepšení přístupu *elastic line approach* pomocí Hellinger–Reissner principu, který dovoluje volnou definici pole pozic \mathbf{r} a distribuce napětí. U tohoto přístupu se vychází z předpokladu lineárního rozložení smykových napětí ve směru střednicové linie elementu a zavádí se lineární tvarové funkce pro vyjádření těchto smykových napětí v závislosti na smykových napětích v krajních uzlech elementu. Více o tomto vylepšení se lze dozvědět ve zmíněné literatuře.

4.1.4. Odvození setrvačných sil

Jedna z vlastností přístupu ANCF je, že po odvození setrvačných sil působících na element je získána konstantní matice hmotnosti prvku [72, 64], která je závislá jen na rozměrech a hustotě nosníkového prvku. Tato výhoda se projeví při numerické simulaci časově závislých problémů, kdy stačí matici hmotnosti napočítat pouze jednou.

Obecné vyjádření kinetické energie má tvar

$$E_{ke} = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV_e, \quad (4.53)$$

kde $\dot{\mathbf{r}}$ vyjadřuje časovou derivaci polohového vektoru \mathbf{r} a ρ je hustota materiálu. S využitím rovnice (4.9) lze psát $\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{e}}$. Dosazením do rovnice (4.53) a úpravou je získán vztah

$$E_{ke} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^T \int_{V_e} \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV_e \dot{\mathbf{e}}, \quad (4.54)$$

přičemž předpis pro matici hmotnosti je

$$\mathbf{M}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV_e. \quad (4.55)$$

Vektor setrvačných sil elementu je roven

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{e}}. \quad (4.56)$$

Konkrétní podobu konstantní matice tuhosti pro plně parametrizovaný nosníkový ANCF element lze nalézt v příloze A.2.

4.1.5. Pohybové rovnice

Celkový model ANCF elementu má podobu

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_e(\mathbf{e})\mathbf{e} = \mathbf{Q}_{ek}, \quad (4.57)$$

kde \mathbf{M}_e je konstantní matice hmotnosti elementu, $\mathbf{K}_e(\mathbf{e})$ je silně nelineární matice tuhosti elementu a \mathbf{Q}_{ek} odpovídá vektoru vnějších sil. Jelikož je ANCF založeno na absolutních

souřadnicích, je možné snadno sestavit celkovou pohybovou rovnici diskretizovaného poddajného tělesa ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{Q}_k, \quad (4.58)$$

kde \mathbf{q} je vektor všech uzlových souřadnic poddajného tělesa.

Důležitým prvkem modelů reálných systémů je tlumení. V případě ANCF se této oblasti věnují například autoři prací [15, 25], kteří při odvozování vnitřních sil elementu uvažují různé viskoelastické materiály, například Kelvin–Voightův, který předpokládá, že vnitřní napětí je lineární kombinací poměrné deformace a rychlosti poměrné deformace. Pro případ podélných deformací lze toto ilustrativně popsat vztahem

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}, \quad (4.59)$$

kde σ je napětí nosníku v podélném směru, E je Youngův modul, η je dynamická viskozita materiálu, ε je poměrná deformace v podélném směru a $\dot{\varepsilon}$ je její rychlost. Další možnost, jak respektovat tlumení, je využití proporciální matice tlumení ve tvaru

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \alpha_m \mathbf{M} + \beta_k \mathbf{K}(\mathbf{q}), \quad (4.60)$$

kde α_m a β_k jsou konstanty proporcionality. Tento přístup je dále diskutován v práci [41], kde je zmíněn též postup získání těchto konstant z experimentálně naměřených poměrných útlumů při kmitání tenkého nosníku.

Po zavedení tlumení je celková pohybová rovnice (4.58) modifikována na tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{Q}_k. \quad (4.61)$$

V případě, kdy je nosníkové těleso diskretizované pomocí ANCF přístupu součástí vázaného mechanického systému, jsou k pohybovým rovnicím (4.61) přidány pohybové rovnice dalších těles a dále vazbové rovnice. Více o pohybových rovnicích takového systému lze nalézt v kapitole 5.1.

Poznámka: Při numerickém řešení pohybových rovnic (4.61) využívají některé metody Jacobiho matice elastických sil, viz kapitola 6.1, kterou lze pro jeden element analyticky vyjádřit jako

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_e}{\partial \mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial e_1} & \frac{\partial Q_1}{\partial e_2} & \cdots \\ \frac{\partial Q_2}{\partial e_1} & \frac{\partial Q_2}{\partial e_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

4.2. Kabelový ANCF element nižšího řádu

Plně parametrizovaný ANCF element slouží především pro modelování tlustých nosníků, kde smykové síly mají nezanedbatelný vliv. Tento přístup je však kvůli nelineární matici tuhosti a celkem 24 stupňům volnosti připadajících na jeden element velmi výpočtově

náročný. Jelikož kabely a lana svým charakterem odpovídají především tenkým nosníkům, lze přijmout jisté předpoklady, které vedou k vypuštění některých stupňů volnosti plně parametrizovaného ANCF elementu [30]. Výsledkem je kabelový element nižšího řádu, který má menší počet stupňů volnosti a je tak méně výpočtově náročný.

Pro tento element je charakteristické, že je pro popis konfigurace využit v každém uzlu jeden polohový vektor a jedna jeho derivace podle parametru x odpovídajícího axiální souřadnici nosníku. Tento element je navržen tak, aby postihl ohybové chování nosníku, avšak zároveň nepostihuje torzní deformaci nosníku kolem střední osy a není tak vhodný pro modelování torzních efektů. Příklad podobného elementu, který navíc uvažuje torzní tuhost nosníku, lze nalézt např. v [82]. Odvození setrvačných sil působících na element je obdobné jako v podkapitole 4.1.4.

4.2.1. Kinematický popis

Kinematický popis kabelového elementu nižšího řádu je podobný jako v podkapitole 4.1.1. Rozdíl je v tom, že konfigurace nosníkového elementu je určena pomocí uzlových polohových vektorů \mathbf{r} a jejich derivací $\mathbf{r}_{,x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ vyjádřených v globálním souřadnicovém systému $X_1X_2X_3$. Zobecněné souřadnice vybraného uzlu i lze tedy zapsat [30]

$$\mathbf{e}^{(i)} = [\mathbf{r}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,x}^{(i)T}]^T, \quad (4.63)$$

z čehož vyplývá, že jeden uzel má tři polohové stupně volnosti a tři komponenty derivace polohového vektoru. Element má celkem 12 stupňů volnosti a vektor uzlových souřadnic je

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}^{(i)T}, \mathbf{e}^{(j)T}]^T = [\mathbf{r}^{(i)T}, \mathbf{r}_{,x}^{(i)T}, \mathbf{r}^{(j)T}, \mathbf{r}_{,x}^{(j)T}]^T. \quad (4.64)$$

V případě tohoto kabelového elementu je globální polohový vektor libovolného střednicového bodu nosníku \mathbf{r} závislý pouze na jednom prostorovém parametru x , který odpovídá lokální axiální souřadnici nosníku. Bázové polynomy použité pro interpolaci pole posunutí jsou následující

$$\boldsymbol{\phi}_c = [1, x, x^2, x^3]. \quad (4.65)$$

Je patrné, že axiální posuv ve směru souřadnice x je aproximován pomocí kubického polynomu. Z toho vyplývá, že axiální a ohybové deformace jsou aproximovány polynomem stejného řádu, jako tomu bylo v případě plně parametrizovaného ANCF nosníkového elementu. Polohový vektor \mathbf{r} lze s využitím neznámých koeficientů

$\mathbf{a}_c = [a_0, \dots, a_3, b_0, \dots, b_3, c_0, \dots, c_3]^T$ vyjádřit pomocí bázových polynomů jako

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \\ c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_c(x) \cdot \mathbf{a}_c(t), \quad (4.66)$$

kde matice $\boldsymbol{\Phi}_c$ má podobu

$$\boldsymbol{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_c & \mathbf{0}_{1,4} & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{1,4} & \boldsymbol{\phi}_c & \mathbf{0}_{1,4} \\ \mathbf{0}_{1,4} & \mathbf{0}_{1,4} & \boldsymbol{\phi}_c \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Dosažením lokální souřadnice $x = 0$ uzlu i a $x = l_e$ uzlu j do vztahu pro polohový vektor (4.66) a jeho derivace lze vektor uzlových souřadnic kabelového ANCF nosníku (4.64) vyjádřit jako

$$\mathbf{e} = \mathbf{N}_c(x) \cdot \mathbf{a}_c(t), \quad (4.68)$$

kde \mathbf{N}_c je matice velikosti 12×12 . Odtud vyjádřený vektor koeficientů \mathbf{a}_c je

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{N}_c^{-1} \cdot \mathbf{e}. \quad (4.69)$$

Po úpravě vztahu (4.66) lze polohový vektor zapsat

$$\mathbf{r} = \Phi_c \mathbf{N}_c^{-1} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{S}(x) \mathbf{e} = [S_1 \mathbf{I}, S_2 \mathbf{I}, S_3 \mathbf{I}, S_4 \mathbf{I}] \mathbf{e}. \quad (4.70)$$

Pro tvarové funkce platí

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & S_2 &= l_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ S_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & S_4 &= l_e(-\xi^2 + \xi^3), \end{aligned} \quad (4.71)$$

kde $\xi = x/l_e$ je bezrozměrný parametr.

4.2.2. Odvození elastických sil

Kabelový element nižšího řádu uvažuje pouze elastické síly vzniklé od ohybu a podélného přetvoření. Výhodné je rozdělit výpočet elastických sil do dvou částí [30], kdy v první části jsou určeny elastické síly od podélného přetvoření a v druhé části jsou určeny elastické síly od ohybu, které jsou založeny na vyjádření křivosti deformované střednicové linie nosníkového elementu.

Axiální přetvoření určené na základě Greenova tenzoru přetvoření má tvar

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x} - 1). \quad (4.72)$$

Deformační energii podélné deformace lze s využitím vztahu pro axiální přetvoření vyjádřit

$$U_{le} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} A_e E \varepsilon_x^2 dx. \quad (4.73)$$

Křivost κ střednice nosníku je odvozena ze Seret–Frenetových vztahů [5, 30] jako

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx}|}{|\mathbf{r}_{,x}|^3}. \quad (4.74)$$

Pokud je uvažována stejná ohybová tuhost pro oba příčné směry y a z (tzn. osově symetrický průřez kabelů či lan) [30], lze deformační energii ohybové deformace vyjádřit jako

$$U_{be} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} I_e E \kappa^2 dx, \quad (4.75)$$

kde I_e představuje kvadratický moment průřezu. Celková deformační energie elementu má tvar

$$U_e = U_{le} + U_{be} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} E (A_e \varepsilon_x^2 + I_e \kappa^2) dx. \quad (4.76)$$

Odtud lze vnitřní elastické síly elementu vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_e &= \frac{\partial U_e}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{Q}_{le} + \mathbf{Q}_{be} = \int_0^{l_e} E \left(A_e \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{e}} + I_e \kappa \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{e}} \right) dx = \\ &= \mathbf{K}_{low}(\mathbf{e}) \mathbf{e} = [\mathbf{K}_{le}(\mathbf{e}) + \mathbf{K}_{be}(\mathbf{e})] \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

kde symbolem $\mathbf{K}_{low}(\mathbf{e})$ je označena nelineární matice tuhosti ANCF nosníkového elementu nižšího řádu, kterou lze rozdělit na matici podélné tuhosti $\mathbf{K}_{le}(\mathbf{e})$ a matici ohybové tuhosti $\mathbf{K}_{be}(\mathbf{e})$. Vzhledem ke složitosti formulace křivosti (4.74) je analytické vyjádření nelineární matice tuhosti téměř nemožné, zejména pak analytický výpočet integrálu, který obsahuje součin křivosti a parciální derivace křivosti podle vektoru uzlových souřadnic. V analytickém určení selhaly i symbolické úpravy výrazů v programu MATLAB verze R2015b prováděné autorem této práce. Pro určení matice tuhosti je tedy vhodné použít numerické metody, například Gaussovu kvadraturu jak je popsána v kapitole 6.4.

Numerická integrace pro získání matice tuhosti v každém výpočetním kroku může být však pro takto složité a nelineární výrazy velmi časově náročná. Je tedy výhodné zabývat se úpravou integrandu výrazu (4.77) takovým způsobem, aby bylo možné co nejvíce výrazů předpočítat pro zadané Gaussovy body během fáze *preprocessingu*, tedy před samotným spuštěním výpočtu. Následující postup, který dále rozvádí úpravu sepsanou v článku [30], je jedním z hlavních přínosů této dizertační práce. Derivací křivosti podle vektoru uzlových souřadnic s užitím pravidla o derivaci podílu je získán vektor velikosti 12×1 ve tvaru

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} \frac{|\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx}|}{|\mathbf{r}_{,x}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}_{,x}|^6} \left(|\mathbf{r}_{,x}|^3 \frac{\partial |\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx}|}{\partial \mathbf{e}} - |\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx}| \frac{\partial |\mathbf{r}_{,x}|^3}{\partial \mathbf{e}} \right). \quad (4.78)$$

Pro zjednodušení zápisu je zavedena náhrada $\mathbf{v} = (\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx})$. V dalších úpravách jsou využity následující platné rovnosti

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{,x} &= \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e}, \\ \mathbf{r}_{,xx} &= \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e}, \\ |\mathbf{r}_{,x}| &= (\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x})^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{1}{2}}, \\ |\mathbf{v}| &= (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Problematické z hlediska vyjádření jsou především parciální derivace uvnitř závorky výrazu (4.78). Složku i vektoru $\frac{\partial |\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx}|}{\partial \mathbf{e}}$ lze vyjádřit jako parciální derivaci vektorového součinu $|\mathbf{v}|$ podle uzlové souřadnice e_i , tedy

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial |\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx}|}{\partial \mathbf{e}} \right)_i &= \frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial e_i} = \frac{\partial}{\partial e_i} (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}} \left[\mathbf{v}^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{,x}}{\partial e_i} \times \mathbf{r}_{,xx} + \mathbf{r}_{,x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{,xx}}{\partial e_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Ve vztahu (4.80) si lze povšimnout možné úpravy vektorových součinů. První vektorový součin lze s pomocí výrazů (4.79) zapsat

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{,x}}{\partial e_i} \times \mathbf{r}_{,xx} = \left(\frac{\partial \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e}}{\partial e_i} \right) \times (\mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e}) = \left(\mathbf{S}_{,x} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial e_i} \right) \times (\mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e}) = \mathbf{S}_{,x}^{(:,i)} \times (\mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e}). \quad (4.81)$$

V úpravě (4.81) bylo využito faktu, že parciální derivace vektoru uzlových souřadnic podle uzlové souřadnice e_i , tedy $\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial e_i}$, odpovídá vektoru, který má na pozici i jedničku a zbytek prvků jsou nuly. Skalární součin $\mathbf{S}_{,x} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial e_i}$ lze pak zapsat jako $\mathbf{S}_{,x}^{(:,i)}$, což odpovídá sloupci i parciální derivace matice tvarových funkcí, kde $i = 1, 2, \dots, 12$ a symbol $:$ v horním indexu značí výběr všech prvků daného sloupce i . Rozepsáním a další úpravou vektorového součinu (4.81) lze získat tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{,x}^{(:,i)} \times (\mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{,x}^{(2,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(3,:)} \mathbf{e} - \mathbf{S}_{,x}^{(3,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(2,:)} \mathbf{e} \\ \mathbf{S}_{,x}^{(3,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(1,:)} \mathbf{e} - \mathbf{S}_{,x}^{(1,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(3,:)} \mathbf{e} \\ \mathbf{S}_{,x}^{(1,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(2,:)} \mathbf{e} - \mathbf{S}_{,x}^{(2,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(1,:)} \mathbf{e} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left(\mathbf{S}_{,x}^{(2,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(3,:)} - \mathbf{S}_{,x}^{(3,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(2,:)} \right) \mathbf{e} \\ \left(\mathbf{S}_{,x}^{(3,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(1,:)} - \mathbf{S}_{,x}^{(1,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(3,:)} \right) \mathbf{e} \\ \left(\mathbf{S}_{,x}^{(1,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(2,:)} - \mathbf{S}_{,x}^{(2,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(1,:)} \right) \mathbf{e} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{,x}^{(2,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(3,:)} - \mathbf{S}_{,x}^{(3,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(2,:)} \\ \mathbf{S}_{,x}^{(3,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(1,:)} - \mathbf{S}_{,x}^{(1,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(3,:)} \\ \mathbf{S}_{,x}^{(1,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(2,:)} - \mathbf{S}_{,x}^{(2,i)} \cdot \mathbf{S}_{,xx}^{(1,:)} \end{bmatrix} \mathbf{e} = {}_1 \mathbf{A}_i \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

kde matice ${}_1 \mathbf{A}_i$ rozměru 3×12 je pro konkrétní Gaussovy body konstantní a lze ji tedy předpočítat před simulací. Obdobným postupem lze upravit druhý vektorový součin ze závorky ve vztahu (4.80) s využitím antikomutativní vlastnosti vektorového součinu, tedy

$$\mathbf{r}_{,x} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{,xx}}{\partial e_i} = -\frac{\partial \mathbf{r}_{,xx}}{\partial e_i} \times \mathbf{r}_{,x} = -\mathbf{S}_{,xx}^{(:,i)} \times (\mathbf{S}_{,x} \mathbf{e}) = -{}_2 \mathbf{A}_i \mathbf{e}. \quad (4.83)$$

Nyní lze rovnici (4.80) přepsat do tvaru

$$\frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial e_i} = (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}} [\mathbf{v}^T ({}_1 \mathbf{A}_i \mathbf{e} - {}_2 \mathbf{A}_i \mathbf{e})] = (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}^T {}_3 \mathbf{A}_i \mathbf{e}, \quad (4.84)$$

kde matice ${}_3 \mathbf{A}_i = {}_1 \mathbf{A}_i - {}_2 \mathbf{A}_i$. Rozborem jednotlivých částí výrazu (4.84) lze zjistit, že

- $\frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial e_i}$ je prvek i vektoru $\frac{\partial |\mathbf{v}|}{\partial \mathbf{e}}$, jehož rozměr je 12×1 ,
- $(\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}}$ je skalární veličina,
- \mathbf{v}^T je vektor o rozměrech 1×3 ,
- ${}_3 \mathbf{A}_i$ je matice s rozměry 3×12 ,

- \mathbf{e} je vektor uzlových souřadnic velikosti 12×1 .

Celkově lze vektor $\frac{\partial|\mathbf{v}|}{\partial\mathbf{e}}$ následně zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial|\mathbf{v}|}{\partial\mathbf{e}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_{comp} \cdot \mathbf{e}, \quad (4.85)$$

kde

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}^T & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & & (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{-\frac{1}{2}} \mathbf{v}^T \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

je matice velikosti 12×36 a matice

$$\mathbf{A}_{comp} = \begin{bmatrix} {}_3\mathbf{A}_1 \\ {}_3\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ {}_3\mathbf{A}_{12} \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

je matice o rozměrech 36×12 , kterou je možné kompletně předpočítat. Tímto byla upravena první parciální derivace uvnitř závorky pravé strany vztahu (4.78).

Druhý výraz uvnitř závorky pravé strany vztahu (4.78), který obsahuje parciální derivaci, lze upravit následujícím způsobem

$$\frac{\partial|\mathbf{r}_{,x}|^3}{\partial\mathbf{e}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{e}} (\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x})^{\frac{3}{2}} = 3 (\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial\mathbf{r}_{,x}}{\partial\mathbf{e}} \mathbf{r}_{,x} \right) = 3 (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e}). \quad (4.88)$$

Ve vztahu (4.88) je možné pro konkrétní Gaussovy body přepočítat součiny derivovaných tvarových matic $\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x}$.

Nyní může být parciální derivace křivosti podle vektoru uzlových souřadnic (4.78) přepsána na tvar

$$\frac{\partial\kappa}{\partial\mathbf{e}} = \frac{1}{(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^3} \left[(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{3}{2}} \mathbf{V} \mathbf{A}_{comp} - 3 (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \right] \mathbf{e}. \quad (4.89)$$

Nelineární matici ohybové tuhosti elementu pak lze vyjádřit jako

$$\mathbf{K}_{be}(\mathbf{e}) = IE \int_0^{l_e} \frac{(\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}}{(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{9}{2}}} \left[(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{3}{2}} \mathbf{V} \mathbf{A}_{comp} - 3 (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \right] dx. \quad (4.90)$$

Jak již bylo zmíněno dříve, výrazy $\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x}$, \mathbf{A}_{comp} je možné pro konkrétní Gaussovy body předpočítat. Navíc lze ve výrazu $\mathbf{v} = (\mathbf{r}_{,x} \times \mathbf{r}_{,xx}) = (\mathbf{S}_{,x} \mathbf{e}) \times (\mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e})$ předpočítat pro zvolené Gaussovy body i matice $\mathbf{S}_{,x}$ a $\mathbf{S}_{,xx}$.

Na základě předcházejících vztahů je možné Gaussovou kvadraturou numericky vyčíslit matici ohybové tuhosti elementu v každém integračním kroku pomocí několika algebraických operací s využitím předpočítaných matic, jejichž rozměry jsou malé (maximální rozměr je u matice \mathbf{A}_{comp} roven 36), takže zaberou zanedbatelné množství paměti počítače.

Celková podoba nelineární matice tuhosti $\mathbf{K}_{low}(\mathbf{e})$ ANCF nosníkového elementu nižšího řádu zohledňující podélnou a ohybovou tuhost je součástí přílohy A.1.

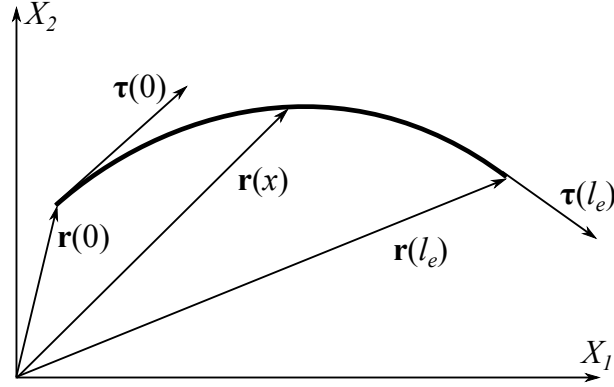
4.3. Speciální případ tenkých rovinných ANCF nosníkových elementů

Práce [5] detailně popisuje možnosti zjednodušení odvození elastických sil při modelování rovinných úloh. Metoda ANCF pro rovinný případ je pak efektivnější a lépe využitelná. Kinematický popis tenkého rovinného ANCF nosníkového elementu je obdobný jako v podkapitole 4.2.1 a postup pro získání setrvačných sil je stejný jako v podkapitole 4.1.4 [62]. V jednodušším případě rovinných elementů je však snazší odvodit konkrétní tvar matice tuhosti než u předchozích prostorových elementů, kdy pro výpočet elastických sil je nutné použít software pro symbolické zpracování matematických výrazů nebo využít numerickou Gaussovu integrační metodu.

Při odvození elastických sil je možno postupovat více způsoby [63, 4, 5]. V této práci je postupováno podobně jako v kapitole 4.2.2, tedy celková deformační energie je rozdělena na deformační energie podélné deformace a ohybové (příčné) deformace. Dále je uvažován předpoklad, že průřezy nosníkového elementu zůstávají rovinné a kolmé na střednici nosníku. Výchozími vztahy jsou rovnice pro axiální přetvoření (4.72) a rovnice pro vyjádření křivosti střednice nosníku (4.74). Tyto základní vztahy vedou ke stejnému obecnému vyjádření elastických sil jako v případě kapitole 4.2.2. Za jistých předpokladů lze však vyjádření elastických sil zjednodušit.

Práce [5] představila tři verze podélných elastických sil označených L1, L2 a L3. Model L1 uvažuje zjednodušující předpoklad, že axiální přetvoření je konstantní po celé délce elementu. Tento předpoklad vede k výraznému zjednodušení nelineární matice podélné tuhosti elementu a při simulacích dochází ke snížení výpočtového času. Model L2 uvažuje obecný případ podélných deformací a model L3 vychází z modelu L2, ale uvažuje jen malé podélné deformace. Dále byly představeny dva modely příčných sil T1 a T2. Model T1 uvažuje malé podélné deformace, což vede ke zjednodušení výrazu pro křivost střednice elementu a matice příčné tuhosti elementu je lineární. U modelu T2 je přijat předpoklad konstantního axiálního přetvoření pro odvození příčných sil.

Různé modely podélných a příčných sil pak společně tvoří celkem čtyři druhy rovinných ANCF nosníkových elementů, konkrétně L1T1, L2T1, L3T1 a L2T2 [5]. V této práci je popsán nejobecnější případ L2T2 elementu.



Obrázek 4.3.: Rovinný nosníkový ANCF element.

4.3.1. Kinematický popis

Na obrázku 4.3 je znázorněn rovinný nosníkový ANCF element délky l_e . Pozici libovolného bodu nosníku $\mathbf{r}(x) = [r_1(x), r_2(x)]^T$ danou parametrem x v globálním souřadnicovém systému lze vyjádřit

$$\mathbf{r}(x) = \mathbf{S}(x)\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_8]^T, \quad (4.91)$$

kde $x \in \langle 0, l_e \rangle$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{2 \times 8}$ je globální matice tvarových funkcí a \mathbf{e} je vektor absolutních uzlových souřadnic. Ten je tvořený posuvy v globálním souřadnicovém systému $X_1 X_2$

$$e_1 = r_1(0), \quad e_2 = r_2(0), \quad e_5 = r_1(l_e), \quad e_6 = r_2(l_e) \quad (4.92)$$

a složkami tečen $\boldsymbol{\tau}(x) = [\tau_1(x), \tau_2(x)]^T$ v uzlech elementu, které jsou definovány jako

$$\begin{aligned} e_3 = \tau_1(0) &= \frac{\partial r_1(0)}{\partial x}, & e_4 = \tau_2(0) &= \frac{\partial r_2(0)}{\partial x}, \\ e_7 = \tau_1(l_e) &= \frac{\partial r_1(l_e)}{\partial x}, & e_8 = \tau_2(l_e) &= \frac{\partial r_2(l_e)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Matice tvarových funkcí pro rovinný nosníkový element lze vyjádřit

$$\mathbf{S} = [s_1 \mathbf{I}, s_2 \mathbf{I}, s_3 \mathbf{I}, s_4 \mathbf{I}], \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.94)$$

kde funkce $s_i = s_i(x)$ mají tvar

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, & s_2 &= l_e(\xi - 2\xi^2 + \xi^3), \\ s_3 &= 3\xi^2 - 2\xi^3, & s_4 &= l_e(\xi^3 - \xi^2), \end{aligned} \quad (4.95)$$

kde $\xi = x/l_e$.

4.3.2. Model podélných elastických sil L2

Při odvození podélných elastických sil je vektor uzlových souřadnic \mathbf{e} zapsán jako suma dvou vektorů

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_f, \quad (4.96)$$

kde \mathbf{e}_r reprezentuje uzlové souřadnice při libovolném tuhém pohybu tělesa (pohyb, při kterém nedochází k deformaci) a lze jej vyjádřit jako

$$\mathbf{e}_r = [r_1, r_2, \cos \theta, \sin \theta, r_1 + l_e \cos \theta, r_2 + l_e \sin \theta, \cos \theta, \sin \theta]^T, \quad (4.97)$$

kde r_1 a r_2 jsou složky polohového vektoru $\mathbf{r}(x=0)$ a θ představuje rotaci tuhého tělesa.

Pro axiální přetvoření s využitím vztahu (4.91) platí

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x} - 1) = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_e^2} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} \mathbf{e} - 1 \right). \quad (4.98)$$

Zde bylo využito pravidlo derivace složené funkce $\mathbf{S}_{,x} = \mathbf{S}_{,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \mathbf{S}_{,\xi} \frac{1}{l_e}$. Derivace axiálního přetvoření podle vektoru uzlových souřadnic lze vyjádřit

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{l_e^2} \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} \mathbf{e}. \quad (4.99)$$

Deformační energie podélné deformace U_{le} lze zapsat vztahem (4.73) a vektor \mathbf{Q}_{le} elastických sil od podélné deformace má pak tvar

$$\mathbf{Q}_{le} = \frac{\partial U_{le}}{\partial \mathbf{e}} = \frac{1}{l_e} \int_0^1 EA_e \varepsilon_x \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} \mathbf{e} \, d\xi = \mathbf{K}_{le}^{L2}(\mathbf{e}) \mathbf{e}. \quad (4.100)$$

Výsledná nelineární matice podélné tuhosti elementu $\mathbf{K}_{le}^{L2}(\mathbf{e})$ s uvažováním konstantního průřezu A_e a konstantního modulu E je

$$\mathbf{K}_{le}^{L2}(\mathbf{e}) = \frac{EA_e}{l_e} \int_0^1 \varepsilon_x \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} \, d\xi. \quad (4.101)$$

Lze dokázat [5], že při tuhém pohybu je axiální přetvoření nulové a úpravou ze vztahu (4.98) platí

$$\frac{1}{l_e^2} \mathbf{e}_r^T \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} \mathbf{e}_r = 1. \quad (4.102)$$

Dosazením vztahu (4.96), kde je vektor uzlových souřadnic definován jako suma dvou vektorů, do obecného vztahu pro axiální přetvoření (4.98) a s využitím identity plynoucí z axiálního přetvoření tuhého tělesa (4.102) lze obecné axiální přetvoření napsat

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2l_e^2} (\mathbf{e} - \mathbf{e}_r)^T \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} (\mathbf{e} + \mathbf{e}_r). \quad (4.103)$$

Protože je v tomto vztahu vektor \mathbf{e}_r libovolný [5], může být vhodně zvolen jako $\mathbf{e}_r = [0, 0, 1, 0, l_e, 0, 1, 0]^T$. Výsledná matice podélné tuhosti elementu \mathbf{K}_{le}^{L2} má pak strukturu

$$\mathbf{K}_{le}^{L2}(\mathbf{e}) = \frac{EA_e}{l_e} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} & 0 \\ & \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} \\ & & \mathcal{D} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{E} & 0 \\ & & & \mathcal{D} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{E} \\ & & & & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} & 0 \\ & & & & & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} \\ & & & & & & \mathcal{F} & 0 \\ & & & & & & & \mathcal{F} \end{bmatrix}. \quad (4.104)$$

Tato matice je nelineární a předpis pro jejích šest koeficientů \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E} a \mathcal{F} lze nalézt v práci [5] nebo snadno odvodit pomocí softwaru pro symbolickou úpravu matematických výrazů. Tyto koeficienty jsou tvořeny kvadratickými funkcemi uzlových souřadnic. Výhodou této podoby matice tuhosti je, že některé její prvky jsou nulové. Pro kompletnost této dizertační práce je matice \mathbf{K}_{le}^{L2} včetně všech koeficientů rozepsána v příloze A.1.

Jiné odvození elastických sil od podélné deformace vychází z obecného vztahu pro matici podélné tuhosti (4.101), do kterého je dosazeno obecné vyjádření axiální přetvoření (4.98). Po úpravě v software pro symbolické operace je získána matice podélné tuhosti elementu, která je plná a v obecném případě nemá nulové prvky.

4.3.3. Model příčných elastických sil T2

Při odvození příčných (neboli ohybových) sil se vychází dle [5] ze vztahu pro infinitezimální délku oblouku

$$ds = \sqrt{\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x}} dx, \quad (4.105)$$

kde vztah $\sqrt{\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x}}$ představuje deformační gradient pro podélný směr $f = \frac{ds}{dx}$. Vyjádření příčných sil může být výrazně zjednodušeno, pokud se pro jejich odvození uvažuje konstantní podélná deformace. Za účelem dosažení tohoto předpokladu je vhodné rozdělit těleso na dostatečné množství elementů. Tento předpoklad vede ke konstantnímu deformačnímu gradientu ve tvaru

$$\bar{f} = \frac{ds}{dx} = konst. \quad (4.106)$$

Křivost dle Serret–Frenetových vztahů lze vyjádřit mimo jiné jako

$$\kappa = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \right|. \quad (4.107)$$

Druhou derivaci polohového vektoru podle oblouku lze s využitím vztahu (4.106) a znalosti pravidel derivací parametricky zadaných funkcí upravit

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\frac{d^2 \mathbf{r}}{dx^2} \frac{ds}{dx} - \frac{d\mathbf{r}}{dx} \frac{d^2 s}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dx^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{d\mathbf{r}}{dx} \frac{d^2 s}{dx^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^3. \quad (4.108)$$

Protože uvažujeme podélnou deformaci $\bar{f} = \frac{ds}{dx}$ konstantní, její derivace bude rovna nule, a proto na pravé straně vztahu (4.108) bude druhý člen nulový. Vztah pro křivost (4.107) lze přepsat

$$\kappa = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}}{dx^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \right| = \left| \mathbf{r}_{,xx} \frac{1}{f^2} \right| = \left| \frac{1}{l_e^2} \mathbf{S}_{,\xi\xi} \mathbf{e} \frac{1}{f^2} \right|. \quad (4.109)$$

Deformační energie příčné deformace U_{be} lze zapsat vztahem (4.75), pro konstantní E a I_e a po dosazení vztahu pro křivost (4.109) má pak tvar

$$U_{be} = \frac{EI_e}{2} l_e \int_0^1 \kappa^2 d\xi = \frac{EI_e}{2l_e^3} \frac{1}{f^4} \mathbf{e}^T \int_0^1 \mathbf{S}_{,\xi\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi\xi} d\xi \mathbf{e}. \quad (4.110)$$

Výsledný vektor příčných elastických sil elementu je pak roven

$$\mathbf{Q}_{be} = \frac{\partial U_{be}}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{K}_{be}^{T2}(\mathbf{e}) \mathbf{e}, \quad (4.111)$$

kde \mathbf{K}_{be} je matice příčné tuhosti elementu, jejíž konkrétní tvar podle [5] lze nalézt v příloze A.1 nebo snadno získat pomocí softwaru pro symbolickou úpravu matematických výrazů.

5. Vázané mechanické systémy a modelování kontaktů

Vázaný mechanický systém, tzv. *multibody system*, je tvořen tělesy propojenými kinematickými vazbami a zatíženými různými silovými účinky. Dynamická analýza takovýchto systémů je problematika s širokým využitím ve výzkumu i v inženýrské praxi, především pak v robotice, automobilovém průmyslu či biomechanice. Navíc je tento obor mechaniky neustále rozvíjen ve smyslu nových modelovacích technik, zejména pro zahrnutí poddajných těles do modelů, a zdokonalování numerických metod pro sestavení a řešení pohybových rovnic. Z publikací zabývajících se touto problematikou lze doporučit například [6, 27, 37, 64, 74]. V současnosti je možné využít i různé softwarové nástroje pro sestavení a řešení pohybových rovnic vázaných mechanických soustav, například MSC.Adams, SIMPACK či RecurDyn.

Obecně má metodika řešení dynamiky vázaných mechanických systémů tyto fáze:

- získání dat potřebných pro sestavení pohybových rovnic,
- sestavení pohybových rovnic,
- realizace výpočtových postupů za účelem analýzy, simulace a optimalizace pohybu systému.

Pro sestavení pohybových rovnic lze využít různé přístupy, například princip virtuálních prací, Newton-Eulerovu metodu či Lagrangeovy rovnice smíšeného typu. V této kapitole bude popsáno využití Lagrangeových rovnic smíšeného typu pro vázané mechanické soustavy a jejich možné úpravy pro simulace dynamiky těchto systémů. Následuje část zabývající se modelováním kontaktních sil, které se v dynamice multibody systémů objevují, jsou důležitým prvkem výpočtových modelů a je vhodné jim věnovat zvýšenou pozornost.

5.1. Lagrangeovy rovnice smíšeného typu

V této kapitole jsou popsány Lagrangeovy rovnice smíšeného typu, není zde však uvedeno jejich odvození, které lze nalézt v mnoha publikacích týkajících se teoretické mechaniky a multibody systémů. Z části tato kapitola vychází z diplomové práce autora této dizertační práce, nicméně ji významně rozšiřuje ve smyslu konkrétního vyjádření pohybových rovnic pro ANCF přístup, popsání postupu eliminace Lagrangeových multiplikátorů, použití stabilizace pro splnění vazbových rovnic či uvedení možnosti využití metody rozšířených Lagrangianů.

Pro sestavení pohybových rovnic systému těles o n_{dof} stupních volnosti pomocí m_f fyzikálních souřadnic ($m_f > n_{dof}$) slouží Lagrangeovy rovnice smíšeného typu [64] ve známém tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_i} = g_i, \quad (5.1)$$

kde E_k je celková kinetická energie soustavy, q_i je i -tá fyzikální souřadnice ($i = 1, \dots, m_f$), g_i značí zobecněné síly a λ_j jsou Lagrangeovy multiplikátory odpovídající vazbovým rovnicím Φ_j . Číslo r udává počet vazeb a platí $r = m_f - n_{dof}$. Pro snadnější práci je vhodné tyto rovnice přepsat do maticové formy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi^T}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}, \quad (5.2)$$

kde vektor fyzikálních souřadnic je zapsán $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_{m_f}]^T$, vektor zobecněných sil $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_{m_f}]^T$, vektor vazbových podmínek $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r]^T$ a vektor Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r]^T$. Fyzikální význam multiplikátorů spočívá v míře vnitřních sil potřebných ke splnění jednotlivých vazbových rovnic. Výraz $\frac{\partial \Phi^T}{\partial \mathbf{q}}$ představuje transponovanou Jacobiho matici vazeb, pro zjednodušení zápisu dále značenou jako $\Phi_{,\mathbf{q}}^T$. Kinetická energie je závislá na vektoru fyzikálních souřadnic a na jeho derivaci, tedy $E_k = E_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. K rovnici (5.2) je doplněna ještě maticová forma pro reonorní holonomní vazby

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

V případě neholonomních vazeb $\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}$ je situace složitější. Popis neholonomní mechaniky není cílem této práce, nicméně základy lze nalézt například v publikacích [27, 64].

Soustavu rovnic (5.2) je možné dále upravit. První člen lze pomocí pravidla o derivaci složené funkce přepsat do tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \ddot{\mathbf{q}}. \quad (5.4)$$

Za předpokladu, že kinetická energie soustavy má tvar $E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$, kde \mathbf{M} je symetrická a pozitivně definitní matice hmotnosti soustavy, lze druhý člen pravé strany rovnice (5.4) vyjádřit

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} \right) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}. \quad (5.5)$$

Nyní lze rovnici (5.2) přepsat na

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{,\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^T} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{g} = \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (5.6)$$

Pohybovou rovnici (5.6) lze zjednodušit pro většinu běžných vázaných mechanických systémů, kdy kinetická energie nezávisí na polohových souřadnicích, což se týká i těles diskretizovaných pomocí ANCF prvků s konstantní maticí tuhosti. Pro takovéto systémy je první a druhý člen pravé strany rovnice (5.6) nulový. Pohybové rovnice takového vázaného mechanického systému spolu s vazbovými rovnicemi (5.3) budou mít tvar

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{,\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}, \\ \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (5.7)$$

kde $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Pro těleso diskretizované pomocí ANCF prvků lze psát

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}), \quad (5.8)$$

kde $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ je vektor elastických sil diskretizovaného tělesa a vektor $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ odpovídá ostatním silovým účinkům (vnější síly, záporně vzaté tlumicí síly apod.).

Rovnice (5.7) jsou tzv. algebraicko-diferenciální rovnice s indexem 3 (v anglické literatuře nazvané *differential-algebraic system of equations*, DAE), tedy kombinace algebraických a diferenciálních rovnic. Pro jejich řešení lze užít numerické metody přímo určené pro DAE nebo rovnice (5.7) převést na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu (ODE) a řešit je například pomocí standardních numerických řešičů *ode* v prostředí MATLAB. V následující podkapitole 5.1.1 bude popsán převod rovnic (5.7) na soustavu ODE. V podkapitole 5.1.2 bude popsána modifikace soustavy rovnic (5.7) pro vylepšení numerické podmíněnosti.

5.1.1. Eliminace Lagrangeových multiplikátorů a převod na ODE

Před samotnou eliminací Lagrangeových multiplikátorů, jak je popsána například v [3, 32], je nutné převést DAE soustavu rovnic indexu 3 (5.7) na DAE soustavu rovnic indexu 1. Znamená to, že je nutné dvakrát derivovat vazbové rovnice (5.3), tedy

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0}, \\ \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Phi_{,\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{,t} = \mathbf{0}, \\ \ddot{\Phi} &= \Phi_{,\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{,\mathbf{q}\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}^2 + 2\Phi_{,\mathbf{q}t} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{,tt} = \Phi_{,\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nederivované vazbové rovnice z výrazu (5.7) jsou nahrazeny druhou derivací vazbových rovnic (5.9), čímž je získán následující maticový tvar pohybových rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{,\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{,\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

což je soustava algebraicko-diferenciálních rovnic indexu 1, ze které nyní bude eliminován vektor Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}$ následujícím postupem:

- Z první řádky maticového tvaru rovnice (5.10) je vyjádřen vektor $\ddot{\mathbf{q}}$ jako

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{g} - \Phi_{,\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}). \quad (5.11)$$

- Dosazením získaného vektoru $\ddot{\mathbf{q}}$ do druhého řádku maticového tvaru rovnice (5.10) lze získat vektor $\boldsymbol{\lambda}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{\lambda} = (\Phi_{,q} \mathbf{M}^{-1} \Phi_{,q}^T)^{-1} (\Phi_{,q} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{b}). \quad (5.12)$$

- Nyní zbývá dosadit vyjádřený vektor $\boldsymbol{\lambda}$ do rovnice (5.11) a je získán předpis pro vektor zrychlení

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{g} - \Phi_{,q}^T (\Phi_{,q} \mathbf{M}^{-1} \Phi_{,q}^T)^{-1} (\Phi_{,q} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{g} - \mathbf{b}) \right] = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (5.13)$$

Výsledná soustava diferenciálních rovnic druhého řádu (5.13) je při označení $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$ a $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$ převedena na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2, \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nyní je možné pro řešení pohybových rovnic v čase využít standardní řešiče pro integraci soustav obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

Tento přístup má však zásadní nevýhodu v tom, že nulovost druhé derivace vazbových rovnic $\ddot{\Phi} = \mathbf{0}$ nemusí znamenat nulovost první a nulté derivace vazbových rovnic (není zaručeno $\dot{\Phi} = \mathbf{0}$ a $\Phi = \mathbf{0}$). Tento jev bývá připisován tzv. numerickému *driftu*, kdy vlivem numerických nepřesností a zaokrouhlování výsledků dojde k nedodržení vazbových rovnic (5.3), tzv. *constraint violation*, což může mít za následek numerickou nestabilitu řešení. Metod, jak tomuto problému předejít, existuje větší množství [32]. Jednou z nejstarších a stále používaných je tzv. *Baumgartova stabilizace* [23]. Tato metoda spočívá v tom, že místo druhé derivace vazbových rovnic $\ddot{\Phi} = \mathbf{0}$ jsou použity rovnice ve tvaru

$$\ddot{\Phi} + 2\alpha_B \dot{\Phi} + \beta_B^2 \Phi = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

kde α_B a β_B jsou kladné konstanty. Volba těchto parametrů závisí především na uživateli, protože není znám optimální postup pro jejich určení. Jejich nesprávnou volbou může dojít například k destabilizaci numerického řešení. Ohledně určení těchto parametrů existují různá doporučení, viz [32]. Vektor $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ze vztahu (5.10) bude v případě použití Baumgartovy stabilizace zaměněn za výraz

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - 2\alpha_B \dot{\Phi} - \beta_B^2 \Phi. \quad (5.16)$$

5.1.2. Metoda rozšířených Lagrangiánů

Metoda rozšířených Lagrangiánů, v anglické literatuře *augmented Lagrangian method*, je metoda známá mimo jiné z problémů optimalizace s omezeními. V mechanice se pak používá k vylepšení numerické podmíněnosti Lagrangeových rovnic smíšeného typu přidáním penaltové funkce do pohybových rovnic, která je nulová v případě splnění vazbových rovnic [27]. Systém rovnic (5.7) je modifikován na tvar

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{,q}^T (p\Phi + k\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{g}, \\ \Phi(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (5.17)$$

kde p je penaltový koeficient a k je škálovací koeficient vazeb [27].

Výhody této metody se projeví při linearizaci pohybových rovnic (5.17), která se provádí při jejich numerickém řešení, více viz podkapitola 6.1.2 této práce.

5.2. Modelování kontaktních sil

Při vzájemné interakci těles vznikají v místě kontaktu silové účinky, které je nutné zahrnout do dynamického modelu soustavy. Modelování kontaktních sil se uplatňuje v mnoha oborech mechaniky a existují různé přístupy k této problematice [52]. V této části dizertační práce je popsán nejběžnější přístup modelování kontaktních sil v oboru dynamiky vázaných mechanických systémů.

Kontakt těles je komplexní jev, při kterém dochází k náhlým změnám v rychlosti interagujících těles a může dojít k iniciaci šíření vibrací v systému. V místě kontaktu pak dochází k lokálním elastickým nebo plastickým deformacím. Navíc dochází k disipaci energie, například ve formě tepla. Při simulacích dynamiky systému s kontakty je také důležité volit vhodný model třecích sil, aby bylo dosaženo konvergence numerického řešení a zároveň aby měly výsledky fyzikální smysl.

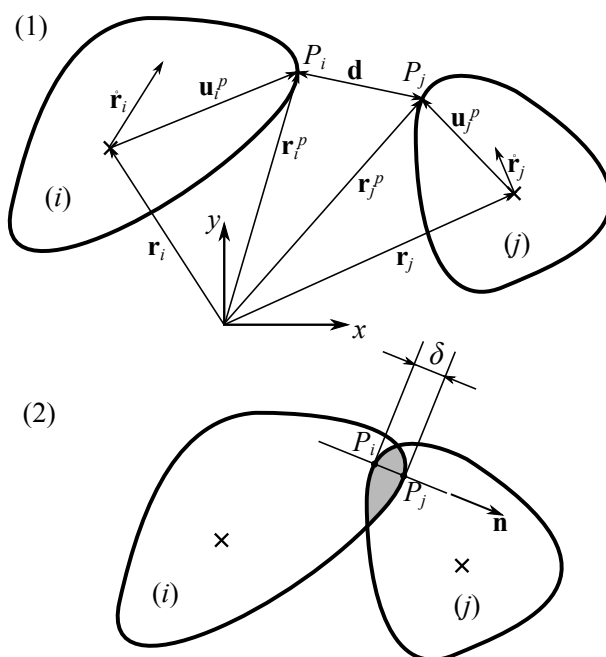
Dle [31] lze kontakt dvou těles obecně rozdělit do dvou fází:

- Fáze komprese či stlačení – relativní rychlost kontaktních ploch těles v kontaktu se snižuje až k nule, tělesa se deformují v místě dotyku, na konci této fáze je maximální průnik neboli penetrace těles.
- Fáze restituace – následuje po skončení fáze komprese, tělesa se mohou začít oddělovat. Pro popsání této fáze je zaveden koeficient restituace, který je nulový pro plně plastický kontakt (míč se neodrazí při pádu na pevnou nehybnou zem) a pro plně elastický kontakt je roven jedné (míč se odrazí při pádu na pevnou nehybnou zem se stejně velkou rychlostí, jako byla rychlost dopadová).

Základní postup řešení problému modelování kontaktních sil má několik navazujících kroků. Nejdříve je nutné zjistit, zda ke kontaktu dochází a kde se na jednotlivých tělesech nachází místo interakce. Na základě kinematických kontaktních veličin a materiálových vlastností těles se určí velikost normálové kontaktní síly (má směr normály k plochám v kontaktu). Na základě velikosti normálové síly a relativní rychlosti těles je dopočítána třecí síla, která působí v tečném směru ke kontaktním plochám.

5.2.1. Obecně o kinematice kontaktu dvou těles

Pro popis interakce těles je nutné určit kinematické veličiny definující kontakt. Těmito veličinami jsou hlavně penetrace, relativní rychlost penetrace těles a relativní tečná rychlost. Složitější modely třecích sil pak dále využívají relativní tečnou deformaci (tzv. *bristle deflection* nebo *bristle deformation*). Obecný postup určení kontaktní kinematiky lze nalézt například v [43, 16], při znalosti konkrétních tvarů těles je možné kontaktní kinematiku určit konkrétně pro daná tělesa. Obr. 5.1 je čerpán z [7] a znázorňuje stav



Obrázek 5.1.: Dvě tělesa bez kontaktu (1), dvě tělesa v kontaktu, nenulový průnik δ (2).

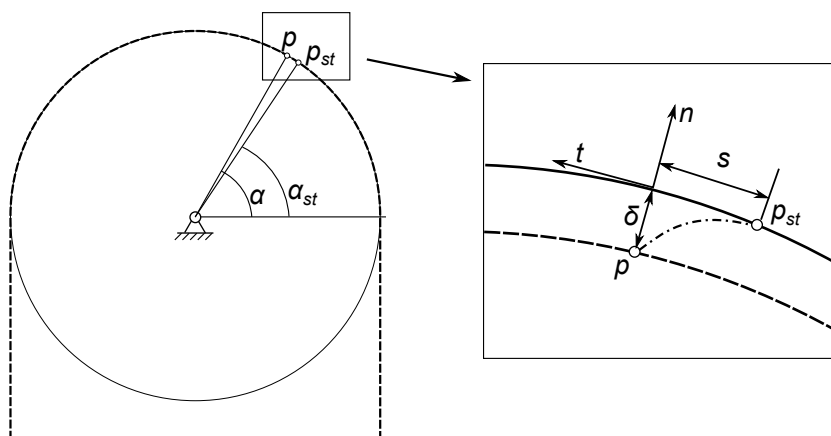
před kontaktem a v kontaktu. Při kontaktu je naznačen nenulový průnik δ a dále směr normály \mathbf{n} ke kontaktním plochám v místě maximálního průniku. Při definování kontaktních kinematických veličin je nutné sledovat polohy potenciálních kontaktních bodů P_i a P_j . Více informací lze nalézt v diplomové práci [7] autora této práce.

Některé složitější modely třecích sil uvažují zavedení polohy kontaktního bodu \mathbf{p}_c na jednom tělese a bodu statického tření \mathbf{p}_{st} na druhém tělese. Vzájemná poloha těchto bodů a relativní tečná rychlost mezi těmito body pak určuje stav ulpívání těles, tzv. *stiction*.

5.2.2. Určení kontaktní kinematiky mezi lanem a kladkou

Určením kontaktní kinematiky mezi lanem a kladkou se zabývali například autoři článků [76, 42, 39], které vychází z obecného odvození kontaktní kinematiky [16]. Na obrázku 5.2 je schéma interakce lana s kladkou a jsou zde znázorněny kontaktní kinematické veličiny, které dále určují normálové a třecí síly.

Kontaktní model je založen na sledování vzájemné polohy bodů lana a kladky. Pro popis je vybrán konkrétní bod p lana, který je nazván kontaktní bod. V okamžiku, kdy se tento bod poprvé dostane do interakce s kladkou, je na kladce určen bod p_{st} , neboli bod statického tření. Platí tedy, že počáteční poloha bodu p_{st} odpovídá poloze bodu p . Bod p je pevně spojen s lanem, zatímco bod p_{st} je pevně spojen s kladkou. Z toho plyne, že během simulace poloha bodů p a p_{st} nemusí být již identická, neboť může dojít k mikroskopickým prokluzům lana po kladce. Polohu sledovaných kontaktních bodů lze definovat také pomocí úhlů α a α_{st} , které jsou znázorněny na obr. 5.2.



Obrázek 5.2.: Schéma interakce lana s kladkou a zobrazení kontaktních kinematických veličin.

Na základě polohy bodů p a p_{st} lze definovat radiální penetraci δ jako

$$\delta = R - |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|, \quad (5.18)$$

kde R je poloměr kladky, \mathbf{r}_p je poloha bodu p v absolutních souřadnicích a \mathbf{r}_0 je pevná poloha středu kladky rovněž v absolutních souřadnicích. Tečný posuv s bodu p vzhledem k bodu p_{st} , v literatuře označený také jako *creep deformation*, lze jednoduše vyjádřit jako

$$s = R(\alpha - \alpha_{st}). \quad (5.19)$$

Rychlost penetrace $\dot{\delta}$ je

$$\dot{\delta} = -\dot{\mathbf{r}}_p^T \mathbf{n}, \quad (5.20)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový normálový vektor k povrchu kladky v místě bodu p . Rychlost tečného posuvu \dot{s} má tvar

$$\dot{s} = \dot{\mathbf{r}}_p^T \mathbf{t} - R\omega, \quad (5.21)$$

kde \mathbf{t} je tečný vektor k povrchu kladky v místě bodu p a ω vyjadřuje úhlovou rychlost kladky.

Normálový a tečný vektor je definovaný pomocí radiálního polohového vektoru $\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0$, konkrétně pro rovinný případ je normálový vektor vyjádřen jako

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0|} \quad (5.22)$$

a tečný vektor lze zapsat jako

$$\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{I}}\mathbf{n}, \quad (5.23)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Nyní je při znalosti potřebných kontaktních kinematických veličin možné určit působící kontaktní síly.

5.2.3. Normálová kontaktní síla

Základní představa pro modelování normálové kontaktní síly spočívá v myšleném vložení nelineární pružiny s tlumičem do místa kontaktu mezi dvěma tělesy. Pružina odpovídá elasticitě kontaktních těles, zatímco tlumič popisuje disipaci energie a utlumení nárazu. Základní model pro normálovou kontaktní sílu je dle článku [21] Kelvin-Voightův kontaktní model, kde velikost normálové kontaktní síly F_N je dána výrazem

$$F_N = \begin{cases} K\delta & \text{pro } \dot{\delta} > 0 \text{ (komprese),} \\ c_e K \dot{\delta} & \text{pro } \dot{\delta} < 0 \text{ (restituce),} \end{cases} \quad (5.25)$$

přičemž K představuje tuhost vložené pružiny (kontaktní tuhost), δ je průnik, neboli deformace vložené pružiny, c_e je restituční koeficient a $\dot{\delta}$ je relativní normálová rychlost těles v místě kontaktu. V tomto jednoduchém modelu je disipace energie popsána pomocí již zmíněného koeficientu restituce, kdy pro plně plastický kontakt je ve fázi restituce nulová normálová síla.

Nejznámější a zároveň stále používaný model kontaktních sil je Hertzův. Tento kontaktní model vychází z teorie pružnosti a popisuje normálovou sílu mezi dvěma kulovými, izotropními a dokonale pružnými tělesy. Tato síla je nelineárně závislá na relativní penetraci δ dle vztahu

$$F_N = K\delta^n. \quad (5.26)$$

Exponent n podle [43, 21] zohledňuje vliv geometrie a lokální kontaktní oblasti a v případě dotyku dvou kruhových či eliptických ploch je roven $n = 1,5$, pro jiné druhy kontaktů může být stanoven experimentálně. Hodnota tohoto exponentu je však většinou stanovena podle zkušeností uživatele. Například program MSC.Adams používá implicitní hodnotu $n = 2,2$, která dovozuje relativně velký vzájemný průnik těles, nicméně numerické metody při nastavení většího exponentu lépe konvergují. Konstanta proporcionality K (nebo také kontaktní tuhost) je závislá na materiálových vlastnostech a také na tvaru kontaktních ploch. Podle [21] platí pro K při kontaktu dvou koulí i a j vztah

$$K = \frac{4}{3(\sigma_i + \sigma_j)} \left[\frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.27)$$

kde R_i a R_j jsou poloměry koulí a parametry σ_i a σ_j jsou dány vztahem

$$\sigma_k = \frac{1 - \nu_k^2}{E_k}, \quad k = i, j. \quad (5.28)$$

Parametry ν_k a E_k jsou Poissonova konstanta a Youngův modul pružnosti materiálu jednotlivých koulí. Dále je v článku [43] popsána kontaktní tuhost při interakci koule i a rovné plochy j jako

$$K = \frac{4}{3(\sigma_i + \sigma_j)} \sqrt{R_i}. \quad (5.29)$$

V praxi však ke kontaktům takto ideálních těles nedochází a kontaktní geometrie jsou složitější. Hodnoty tuhosti vypočítané podle vztahů (5.27) a (5.29) pak poslouží jako základní odhad kontaktní tuhosti, nastavení konkrétní hodnoty se většinou řídí zkušeností či numerickými experimenty.

Nevýhoda Hertzova modelu je, že nebere v potaz disipaci energie a popisuje tedy dokonale elastický kontakt, kdy energie akumulovaná během první fáze je pak v druhé fázi plně využita. Pro věrohodnější popis silového působení v kontaktu se proto využívá disipační model. Síla je v něm závislá na relativním průniku těles δ a také na relativní rychlosti penetrace $\dot{\delta}$, konkrétně

$$F_N = K\delta^n + D\dot{\delta}. \quad (5.30)$$

První člen pravé strany odpovídá elastické síle a druhý člen reprezentuje vliv tlumení během kontaktu. Koeficient D je tlumení neboli hysterezní koeficient [21]. Tento model je velmi jednoduchý, má však i své nevýhody. Mezi ně patří například nespojitost kontaktní síly při počátečním dotyku, která je způsobena tlumicím členem. Může se tedy stát, že na samotném počátku kontaktu je elastický člen ještě téměř nulový a tlumicí člen už má vysokou hodnotu, což neodpovídá reálnému ději. Dalším příkladem nereálnosti modelu je fakt, že tlumicí člen D je při průběhu celého kontaktního děje konstantní, což znamená stejnoměrnou disipaci během fáze komprese i restituice.

Zdroje [43, 42] uvádí reálnější model Hunta a Crossleyho, který má koeficient tlumení závislý na průniku těles dle vztahu

$$D = \chi\delta^n, \quad (5.31)$$

přičemž χ je hysterezní faktor odpovídající [42]

$$\chi = D_f \cdot K, \quad (5.32)$$

kde D_f představuje tlumicí faktor, který je volen tak, aby splňoval podmínku $1 + D_f\dot{\delta} > 0$ pro všechny rychlosti penetrace v průběhu simulace. Ostatní koeficienty byly popsány dříve. Po úpravě výrazu (5.30) je získán vztah pro sílu ve tvaru

$$F_N = K\delta^n \left(1 + D_f\dot{\delta}\right). \quad (5.33)$$

Model Hunta a Crossleyho je dále více specifikován pro rázové děje, kde je použit hysterezní faktor ve tvaru

$$\chi = \frac{3K(1 - c_e)}{2\dot{\delta}^{(i)}}, \quad (5.34)$$

kde $\dot{\delta}^{(i)}$ odpovídá počáteční rychlosti rázu. Z popsaných modelů má Hunt Crossleyův model nejbližší k fyzikální podstatě kontaktního děje a průběh síly v obou fázích se liší.

Výsledný vektor normálové síly je dán vztahem

$$\mathbf{F}_N = F_N \mathbf{n}. \quad (5.35)$$

5.2.4. Třecí síla

Tření mezi dvěma povrchy je velmi složitý jev, který se však běžně vyskytuje v problémech vázaných mechanických systémů. Třecí síla při kontaktu vzniká v důsledku ulpíváním těles na sobě (*stick*, slepení těles) nebo relativního sklouznutí těles po sobě (*slip*) nebo kombinací obojího. Pro tuto sílu platí experimentálně zjištěné poznatky známé jako zákon suchého tření [7]:

- třecí síla působí v opačném směru vůči relativnímu pohybu těles v kontaktu,
- velikost třecí síly je úměrná normálové síle,
- třecí síla je nezávislá na velikosti kontaktní plochy.

Nezákladnější model tření mezi suchými povrchy se nazývá Coulombův, který vyjadřuje velikost třecí síly F_T přímo úměrnou velikosti normálové síly F_N podle koeficientu tření c_f , tedy

$$\mathbf{F}_T = \begin{cases} -c_f F_N \text{sgn}(\mathbf{v}_t) & \text{pro } |\mathbf{v}_t| \neq 0, \\ 0 & \text{pro } |\mathbf{v}_t| = 0, \end{cases} \quad (5.36)$$

kde \mathbf{v}_t značí relativní tečnou rychlost (pro kontakt lana s kladkou lze psát $\mathbf{v}_t = \dot{\mathbf{s}}\mathbf{t}$) a sgn značí funkci s předpisem

$$\text{sgn}(\mathbf{v}_t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} & \text{pro } |\mathbf{v}_t| \neq 0, \\ \mathbf{0} & \text{pro } |\mathbf{v}_t| = 0. \end{cases} \quad (5.37)$$

Koeficient tření je závislý na povrchové úpravě, materiálových parametrech a teplotě [21]. Hlavní výhodou tohoto modelu je jeho jednoduchost. Problém však nastává v případech, kdy se relativní tečná rychlost pohybuje v blízkém okolí nulové hodnoty, protože třecí síla je zde nespojitá. To může způsobovat problémy při numerické integraci pohybových rovnic. Proto je vhodné tento základní model upravit odstraněním nespojitosti v okolí nulové hodnoty tečné rychlosti. Upravených modelů je několik druhů [44], zde je uveden pro ilustraci Threlfallův model třecí síly [44, 21], který v okolí nulové relativní tečné rychlosti popisuje třecí sílu dle vztahu

$$\mathbf{F}_T = \begin{cases} -c_f F_N \left(1 - e^{-\frac{3|\mathbf{v}_t|}{v_0}}\right) \text{sgn}(\mathbf{v}_t) & \text{pro } |\mathbf{v}_t| \leq v_0, \\ -c_f F_N \text{sgn}(\mathbf{v}_t) & \text{pro } |\mathbf{v}_t| > v_0, \end{cases} \quad (5.38)$$

kde parametr v_0 představuje zvolenou malou charakteristickou rychlost. Snižováním tohoto parametru se Threlfallův model blíží modelu Coulombovu a zvyšuje se časová náročnost procesu integrace pohybových rovnic. Pomocí funkce $\left(1 - e^{-\frac{3|\mathbf{v}_t|}{v_0}}\right)$ je tedy vyhlazován průběh třecí síly v okolí nulové tečné rychlosti. Podobných modelů třecích sil je více, liší se právě vyhlazující funkcí.

Složitější model třecí síly vycházející z článků [42, 16, 44] uvažuje Coulombův model doplněný o modelování ulpívání těles pomocí tzv. *bristle contact model*. Základním

předpokladem je rozdělení výsledné třecí síly \mathbf{F}_T na ulpívající složku \mathbf{F}_{st} (*stiction*) a složku skluzovou \mathbf{F}_{sl} (*sliding*). V ideální případě tedy platí

$$\mathbf{F}_T = \begin{cases} \mathbf{F}_{sl} & \text{pro } |\mathbf{v}_t| > v_{st}, \\ \mathbf{F}_{st} & \text{pro } |\mathbf{v}_t| \leq v_{st}, \end{cases} \quad (5.39)$$

kde v_{st} je přechodová velikost relativní tečné rychlosti v kontaktu, která určuje působící složku tření. Aby byla odstraněna nespojitost takto definovaného třecího modelu, zavádí se vyhlazující parametr κ . Upravený model třecí síly (5.39) pak vypadá

$$\mathbf{F}_T = \kappa \mathbf{F}_{st} + (1 - \kappa) \mathbf{F}_{sl}. \quad (5.40)$$

Pro vyhlazující parametr platí $\kappa = \kappa(|\mathbf{v}_t|)$, tedy že je funkcí relativní tečné kontaktní rychlosti, a dále by se jeho hodnota měla v okolí přechodové rychlosti v_{st} měnit z 1 na 0. Jedním z možných předpisů je například [16]

$$\kappa = e^{-\left(\frac{|\mathbf{v}_t|}{v_{st}}\right)^2}. \quad (5.41)$$

Skluzová složka \mathbf{F}_{sl} vychází z Coulombova modelu, lze ji tedy vyjádřit vztahem (5.36). Třecí síla vzniklá od ulpívání těles \mathbf{F}_{st} je dána vložením soustavy pružiny a tlumiče mezi kontaktní bod určený polohovým vektorem \mathbf{p}_c a bod statického tření určený polohovým vektorem \mathbf{p}_{st} . Velikost této síly je

$$F_{st} = \begin{cases} K_{st}|\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}| + D_{st}|\mathbf{v}_t| & \text{pro } |\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}| > 0, \\ 0 & \text{pro } |\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}| = 0, \end{cases} \quad (5.42)$$

kde K_{st} a D_{st} jsou tuhost a tlumení modelu ulpívání. Výraz $|\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}|$ značí vzdálenost kontaktního bodu a bodu statického tření. Dále je v tomto modelu zaveden statický koeficient tření c_s . Pro maximální velikost třecí síly od ulpívání těles musí platit

$$F_{st} \leq c_s F_N. \quad (5.43)$$

V případě, že rovnice (5.43) nebude splněna, tedy velikost třecí síly od ulpívání těles přesáhne danou mez, bude rovnice (5.42) nahrazena rovnicí

$$F_{st} = \begin{cases} c_s F_N & \text{pro } |\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}| > 0, \\ 0 & \text{pro } |\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}| = 0 \end{cases} \quad (5.44)$$

a zároveň dojde ke změně polohy bodu statického tření \mathbf{p}_{st} dle předpisu [16]

$$\mathbf{p}_{st} = \mathbf{p}_c - \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} \eta_{st} \frac{c_s F_N}{K_{st}}, \quad (5.45)$$

kde η_{st} je parametr, který může vylepšit numerické chování modelu, obvykle je volen v blízkém okolí 1 a $\eta_{st} \leq 1$. Výsledný vektor třecí síly od ulpívání těles \mathbf{F}_{st} lze zapsat

$$\mathbf{F}_{st} = -F_{st} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{nn}^T) \frac{\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}}{|\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_{st}|}, \quad (5.46)$$

kde \mathbf{I}_3 představuje jednotkovou matici řádu 3.

5.2.5. Rozložení kontaktních sil po délce nosníkového elementu

Celkový vektor kontaktních sil v daném bodě lze zapsat

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_T. \quad (5.47)$$

Pokud působí celková kontaktní síla pouze v jednom bodě elementu, který je definovaný konkrétní lokální axiální souřadnicí elementu x , lze vektor zobecněných kontaktních sil vyjádřit jako

$$\mathbf{Q}_{Ce} = \mathbf{F}_C(x)^T \mathbf{S}(x). \quad (5.48)$$

Kontaktní síly jsou však při interakci nosníkového elementu s jiným tělesem (např. kontakt vlákna s kladkou) distribuovány podél délky elementu l_e . Vektor zobecněných kontaktních sil působících na daný element e je tedy získán integrací přes délku elementu, což vede k výrazu

$$\mathbf{Q}_{Ce} = \int_0^{l_e} \mathbf{F}_C(x)^T \mathbf{S}(x) dx = l_e \int_0^1 \mathbf{F}_C(\xi)^T \mathbf{S}(\xi) d\xi, \quad (5.49)$$

kde \mathbf{S} je matice tvarových funkcí nosníkového elementu a $\xi = \frac{x}{l_e}$. Pro vyčíslení integrálu ze vztahu (5.49) je vhodné použít Gaussovu kvadraturu, kdy kontaktní síly jsou vypočítány jen pro n konkrétních bodů elementu, jejichž poloha je definována parametry ξ_i , $i = 1, \dots, n$. Vektor zobecněných kontaktních sil je tedy vyjádřen jako

$$\mathbf{Q}_{Ce} \approx \frac{l_e}{2} \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{F}_C(\xi_i)^T \mathbf{S}(\xi_i), \quad (5.50)$$

kde w_i jsou Gaussovy váhové koeficienty a pro ξ_i platí

$$\xi_i = \frac{x_i + 1}{2}. \quad (5.51)$$

Zde hodnoty x_i odpovídají Gaussovým uzlům, viz kapitola 6.4.

6. Numerické metody pro řešení dynamiky nelineárních mechanických systémů

V rámci této dizertační práce byly zkoumány vhodné numerické metody pro řešení dynamiky nelineárních mechanických systémů. Výpočtový systém Matlab sice nabízí kvalitní funkce pro numerickou integraci soustav diferenciálních rovnic prvního řádu, nicméně aby mohly být využity, je nutné upravit pohybové a vazbové rovnice podle postupu popsaného v podkapitole 5.1.1. Tyto dostupné funkce mají adaptivní časový krok a jsou určené i pro řešení nelineárních problémů, u nichž však často dochází až k přílišnému zjemnění integračního kroku a tím i k prodloužení výpočtového času. Při vyšetřování dynamiky nelineárních vázaných mechanických systémů je tedy vhodné použít metody určené pro řešení soustav algebro-diferenciálních rovnic. Jedna z nejznámějších metod v oboru dynamiky mechanismů je Newmarkova metoda, jejíž využití pro vázané mechanické systémy je souhrnně popsáno v kapitole 6.1. Tento postup využívá Newtonovu metodu pro zpřesnění výsledku v rámci jednoho časového kroku. Numerické určení Jacobiho iterační matice Newtonovy metody je popsáno v kapitole 6.2. Dále je v kapitole 6.3 popsána možnost využití tzv. *kvazi-Newtonovy* metody pro zefektivnění výpočtu. Nakonec je v kapitole 6.4 zmíněn numerický výpočet určitých integrálů pomocí Gaussovy kvadratury, která byla použita pro numerický výpočet vnitřních elastických sil ANCF elementů.

Cílem této kapitoly je shrnout numerické metody vhodné pro simulaci dynamiky nelineárních vázaných mechanických systémů a vhodnou implementací těchto metod získat efektivní a přesný nástroj pro výpočet řešení v časové oblasti. Přínosem kapitoly a tedy i dizertační práce je zejména ucelené propojení klasické Newmarkovy metody s možnostmi Newtonovy a kvazi-Newtonovy metody. Popsané metody jsou pak využity při simulacích v kapitole 7.

6.1. Newmarkova metoda

Newmarkova integrační metoda byla původně určena pro řešení úloh strukturální dynamiky systémů s proměnným zatížením typu zemětřesení, náraz, vibrace nebo výbuch nukleární zbraně (to je dáno obavami před ničivou silou nukleárních zbraní v roce 1959, kdy byla metoda poprvé publikována [48]). Tato metoda byla dále rozvíjena a modifikována, stala se podkladem pro několik složitějších metod, nicméně ve své základní podobě je velmi využívána dodnes. Newmarkova metoda je určena pro řešení soustav

obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, odpadá tedy nutnost převádět soustavy na ODE prvního řádu. Tato metoda může být využita v explicitní i implicitní podobě.

Základními vztahy Newmarkovy metody jsou aproximace posuvů (v případě ANCF absolutních poloh) a rychlostí v časovém kroku $n + 1$ dle následujících formulí

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}], \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + h[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}],\end{aligned}\tag{6.1}$$

kde \mathbf{q}_{n+1} značí vektor polohové kinematické veličiny v kroku $n + 1$, $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ značí vektor rychlosti v témže kroku, $h = t_{n+1} - t_n$ je velikost časového kroku a konstanty β a γ jsou parametry Newmarkovy metody. Odvození Newmarkových formulí lze nalézt například v literatuře [28] a vychází z Taylorova rozvoje.

Pro ukázání jednoduchosti a snadné použitelnosti Newmarkovy metody pro klasický případ lineární strukturální dynamiky je využita soustava lineárních pohybových rovnic ve tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t),\tag{6.2}$$

kde \mathbf{M} , \mathbf{B} a \mathbf{K} jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti, vektor $\mathbf{f}(t)$ je vektor vnějších sil závislý na čase a $\mathbf{q}(t)$ odpovídá vektoru zobecněných souřadnic. Rovnice (6.2) musejí být splněny v každém časovém kroku, tedy i v kroku t_{n+1} . Vyjádřením těchto rovnic ve zmíněném časovém kroku a dosazením aproximačních vztahů (6.1) je odvozena soustava ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{B}\{\dot{\mathbf{q}}_n + h[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}]\} + \\ + \mathbf{K}\left\{\mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2}[(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}]\right\} = \mathbf{f}_{n+1}.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Cílem je získat z rovnice (6.3) předpis pro vektor zrychlení v časovém kroku t_{n+1} . Jednoduchými úpravami lze výraz (6.3) přepsat na tvar

$$\begin{aligned}[\mathbf{M} + \gamma h\mathbf{B} + \beta h^2\mathbf{K}]\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{B}[\dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma)h\ddot{\mathbf{q}}_n] - \\ - \mathbf{K}\left[\mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{\mathbf{q}}_n\right].\end{aligned}\tag{6.4}$$

Z rovnice (6.4) lze snadno vypočítat vektor zrychlení $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ a jeho dosazením do aproximačních formulí (6.1) dále určit ostatní kinematické veličiny v časovém kroku t_{n+1} .

Při řešení lineárního problému (6.2) a při volbě konstantního kroku h je matice $[\mathbf{M} + \gamma h\mathbf{B} + \beta h^2\mathbf{K}]$ konstantní a lze napočítat její inverzi či faktorizaci v rámci *preprocessingu*, čímž dojde k výraznému zrychlení výpočtu. Na volbě Newmarkových parametrů β a γ pak závisí chování metody. Rozmezí těchto parametrů se obecně uvádí

$$0 \leq \gamma \leq 1, \quad 0 \leq 2\beta \leq 1,\tag{6.5}$$

nicméně podmínka pro nepodmíněnou numerickou stabilitu metody pro lineární systémy dle [28] je

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}. \quad (6.6)$$

Nejběžnější nastavení parametrů pro lineární systémy je

$$\gamma = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{4}, \quad (6.7)$$

kdy je získána nepodmíněně stabilní numerická metoda centrovaného zrychlení druhého řádu přesnosti.

Jak uvádí například monografie [27], vhodnou úpravou Newmarkových parametrů lze do metody zavést numerické tlumení pomocí parametru $\alpha > 0$. Newmarkovy parametry pak budou vyjádřeny ve tvaru

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha, \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (6.8)$$

Dosazením těchto parametrů do podmínky nepodmíněné stability (6.6) lze snadno dokázat, že je tato podmínka splněna ve tvaru

$$\frac{1}{2} + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 \geq \frac{1}{2} + \alpha \geq \frac{1}{2}. \quad (6.9)$$

Při tomto zadání parametrů však metoda ztrácí druhý řád přesnosti [27] a má pouze první řád přesnosti.

6.1.1. Numerické řešení pohybových rovnic nelineárních vázaných mechanických systémů

V problémech dynamiky nelineárních mechanických systémů již nelze použít jednoduchý postup popsany v kapitole 6.1, protože nelineární členy často závisí na zobecněných kinematických veličinách, a nelze tak využít tvar (6.4) pohybových rovnic. Pro numerické řešení pohybových rovnic nelineárních vázaných mechanických systémů se tak využívají implicitní integrační schémata, která jsou založena na Newmarkových formulích (6.1) a prediktor-korektor algoritmu. Postup popsany v této kapitole je inspirován převážně publikacemi [10, 27, 47, 28]. V navazujících kapitolách je pak dále rozvinut využitím kvazi-Newtonovy metody.

Nelineární vázaný mechanický systém lze obecně popsat rovnicemi (5.7). Jejich drobnou úpravou lze získat předpis pro vektor residuí $\mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda})$ pohybových rovnic jako

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{,\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \\ \Phi(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

V případě použití ANCF elementů je možné vektor \mathbf{g} rozepsat podle rovnice (5.8) jako rozdíl vektoru elastických sil $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ a vektoru ostatních sil $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$. Cílem integrace pohybových rovnic je, aby bylo s jistou tolerancí v každém časovém kroku nulové residuum a zároveň aby byly v každém kroku splněny vazbové rovnice.

Před dalšími úpravami rovnice (6.10) je vhodné zmínit inverzní tvar Newmarkových formulí. Z aproximačního výrazu pro posuvy v kroku $n+1$ (6.1) je snadno vyjádřen vektor zrychlení v tomtéž kroku jako

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} \left[\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - h\dot{\mathbf{q}}_n - \frac{1}{2}(1-2\beta)h^2\ddot{\mathbf{q}}_n \right]. \quad (6.11)$$

Dosazením tohoto vztahu do Newmarkovy formule pro aproximaci vektoru rychlosti (6.1) je získán předpis

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + (1-\gamma)h\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\gamma}{\beta h} \left[\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - h\dot{\mathbf{q}}_n - \frac{1}{2}(1-2\beta)h^2\ddot{\mathbf{q}}_n \right]. \quad (6.12)$$

Rovnice (6.11) a (6.12) vyjadřují závislost vektoru zrychlení a rychlosti v kroku $n+1$ na polohovém vektoru v kroku $n+1$, vektory předešlého kroku n jsou známé hodnoty. Rovnice (6.10) musí být splněna v každém časovém kroku, tedy i v kroku $n+1$. Dosazením inverzních Newmarkových formulí (6.11) a (6.12) do rovnice residuálního vektoru a vektoru vazbových rovnic (6.10) vyjádřené v časovém kroku $n+1$ je získána soustava algebraických rovnic s nezávislými proměnnými \mathbf{q}_{n+1} a $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}$, tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}_{n+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}) &= \mathbf{0}, \\ \Phi(\mathbf{q}_{n+1}) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Algoritmus prediktor-korektor využívá rozepsání přesného řešení rovnic (6.13) v čase t_{n+1} jako součet odhadnutého řešení (predikce) a vektoru oprav (korekce). Obecně je možné dle [27, 28] zvolit jako prediktor nulový vektor zrychlení. S využitím Newmarkových formulí (6.1) lze pak vyjádřit predikci řešení v časovém kroku $n+1$ jako

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^0 &= \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^0 &= \dot{\mathbf{q}}_n + (1-\gamma)h\ddot{\mathbf{q}}_n, \\ \mathbf{q}_{n+1}^0 &= \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{\mathbf{q}}_n. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Predikce vektoru Lagrangeových multiplikátorů není v literatuře příliš diskutována. V této práci byl použit jednoduchý prediktor ve tvaru $\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^0 = \boldsymbol{\lambda}_n$ nebo je také možné vyjádřit tento vektor z rovnice (6.10), kam jsou dosazeny predikce (6.14). Po fázi predikce následuje iterační fáze korekce, kterou lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} &= \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \Delta\ddot{\mathbf{q}}^k = \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta h^2}\Delta\mathbf{q}^k, \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} &= \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \Delta\dot{\mathbf{q}}^k = \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta h}\Delta\mathbf{q}^k, \\ \mathbf{q}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{q}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{q}^k, \\ \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k+1} &= \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k + \Delta\boldsymbol{\lambda}^k, \end{aligned} \quad (6.15)$$

kdy výsledky z iterace k jsou změněny o přírůstky vektorů řešení (korekce, vektory se symbolem Δ), čímž je získáno opravené řešení pohybových rovnic v iteraci $k+1$. Rovnosti $\Delta\ddot{\mathbf{q}}^k = \frac{1}{\beta h^2}\Delta\mathbf{q}^k$ a $\Delta\dot{\mathbf{q}}^k = \frac{\gamma}{\beta h}\Delta\mathbf{q}^k$ vyplývají z výrazů (6.11) a (6.12) [27, 28].

Nyní zbývá určit korekce polohového vektoru a vektoru Lagrangeových multiplikátorů. Za tímto účelem je soustava algebraických rovnic (6.13) linearizována kolem bodu $(\mathbf{q}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)_{n+1}$ pomocí prvních dvou členů Taylorova rozvoje na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k+1}) &\approx \mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}_{n+1}^k, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k) + \mathbf{S}_t(\mathbf{q}_{n+1}^k, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k) \Delta\mathbf{q}^k + \Phi_{,\mathbf{q}}^T \Delta\boldsymbol{\lambda}^k, \\ \Phi(\mathbf{q}_{n+1}^{k+1}) &\approx \Phi(\mathbf{q}_{n+1}^k) + \Phi_{,\mathbf{q}} \Delta\mathbf{q}^k, \end{aligned} \quad (6.16)$$

kde \mathbf{S}_t je Jacobiho matice vektoru residuí ve tvaru

$$\mathbf{S}_t = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{res}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n+1}^k \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k}} = \left(\mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\Phi_{,\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}) - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \right) \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n+1}^k \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k}}. \quad (6.17)$$

Jacobiho matice vazeb $\Phi_{,\mathbf{q}}$ v posledním členu Taylorova rozvoje residuálního vektoru (6.16) vplynula z platnosti vztahu

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}_{res}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n+1}^k \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k}} = \Phi_{,\mathbf{q}}^T \Big|_{\substack{\mathbf{q}=\mathbf{q}_{n+1}^k \\ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k}}. \quad (6.18)$$

Na základě vztahů (6.11) a (6.12) lze pak snadno odvodit následující rovnosti

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{I}, \quad (6.19)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice, jejíž oba rozměry odpovídají počtu uvažovaných souřadnic popisujících soustavu. Zavedením tečné matice tuhosti \mathbf{K}_t a tečné matice tlumení \mathbf{B}_t ve tvaru

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\Phi_{,\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}) - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{B}_t = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (6.20)$$

a s využitím rovností (6.19) lze Jacobiho matici vektoru residuí zapsat ve tvaru

$$\mathbf{S}_t = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{B}_t + \mathbf{K}_t \quad (6.21)$$

Nyní lze rovnice (6.16) pro iteraci $k+1$ přepsat do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_t & \Phi_{,\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{,\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q}^k \\ \Delta\boldsymbol{\lambda}^k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}_{n+1}^k, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k) \\ \Phi(\mathbf{q}_{n+1}^k) \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Řešením algebraických rovnic (6.22) jsou získány korekce polohového vektoru a korekce Lagrangeových multiplikátorů pro iterační krok $k+1$. Iterační proces (6.15) se

pro jeden časový krok opakuje do té doby, než je splněna podmínka pro přesnost získaného residua, které by v ideálním případě mělo být nulové. Základní podmínka pro zastavení iteračního procesu a pro postup k dalšímu časovému kroku je [27]

$$|\mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k+1})| < \varepsilon_{res}, \quad |\Phi(\mathbf{q}_{n+1}^{k+1})| < \varepsilon_{constr}, \quad (6.23)$$

kde ε_{res} a ε_{constr} jsou uživatelem zvolené konstanty definující požadovanou přesnost řešení residuů a splnění vazbových rovnic. Jiná běžná zastavovací podmínka iteračního procesu dává do souvislosti normu residua a normu sil dle výrazu

$$\frac{|\mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}_{n+1}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^{k+1})|}{|\mathbf{g}_{n+1}^{k+1}|} < \varepsilon_{res}, \quad (6.24)$$

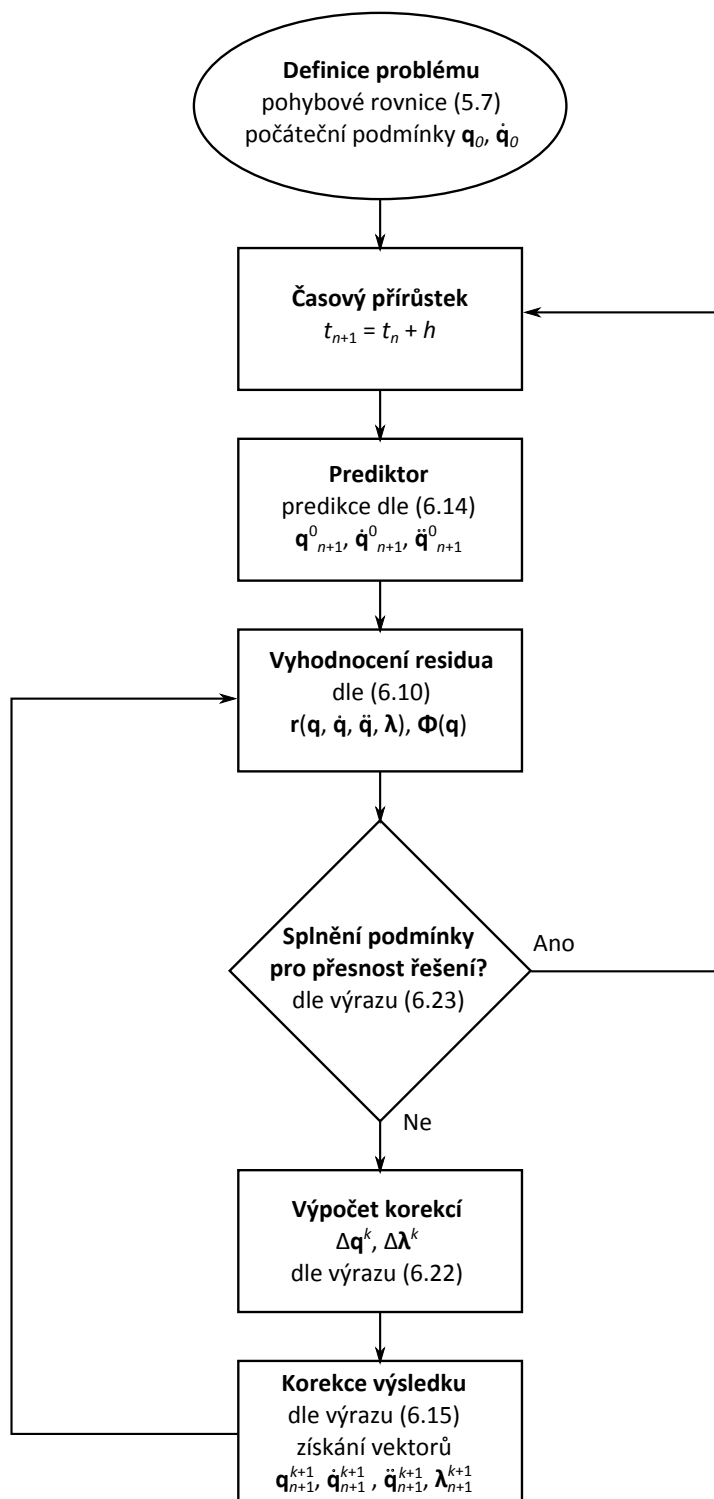
kde \mathbf{g}_{n+1}^{k+1} představuje vnitřní a vnější síly v daném kroku. Další komplexnější zastavovací podmínky iteračního procesu jsou zmíněny například v literatuře [28, 47].

Algoritmus popsané Newmarkovy integrační metody pro řešení nelineárních systémů je ukázán na obr. 6.1. Newmarkovy formule jsou použity pro předpis predikovaného řešení a dále pro vyjádření vektoru rychlosti a zrychlení v časovém kroku $n + 1$ v závislosti na polohovém vektoru v témže kroku. Celý algoritmus je tedy implicitní a v rámci každého časového kroku dochází k iteračnímu procesu zpřesnění predikovaného řešení. Rovnice (6.22) odpovídají Newton-Raphsonově numerické metodě pro hledání kořenů nelineárních algebraických rovnic.

6.1.2. Poznámky k implementaci metody

Vzhledem k tomu, že zmíněná numerická metoda je určena pro řešení nelineárních algebrodiferenciálních rovnic, je stále citlivá na volbu časového integračního kroku. V rámci každého časového kroku sice dochází k iteračnímu zpřesňování řešení, nicméně pro správnou funkci iterační Newtonovy metody je nutné, aby odhadnuté řešení nebylo příliš vzdálené od přesného řešení. Při příliš velkém časovém kroku tak může dojít ke ztrátě konvergence metody a numerické nestabilitě iterační procedury. Díky této nestabilitě pak dochází k velkému růstu chyby řešení, což má za následek získání řešení postrádajícího fyzikální smysl. Vypořádat se s tímto problémem je možné zavedením proměnného (adaptivního) časového kroku integrace. Obecný popis zavedení proměnného kroku je zmíněn v literatuře [28]. Ta uvádí, že základem pro volbu velikosti časového kroku je odhad integrační chyby, která vyplývá z použitých Newmarkových formulí (6.1). Detailnější popisy komplexnějších metod pro adaptivní časový krok lze pak nalézt například v [27, 35].

Další problematikou, kterou je nutné zmínit, je výpočet iterační matice v rovnici (6.22). Jedná se o první matici ve zmíněné rovnici, která obsahuje Jacobiho matici residua a Jacobiho matice vazeb. Pro určení korekcí je pak nutné tuto soustavu rovnic vyřešit. Je možné použít například LU faktorizaci či matici invertovat. Problém však nastává především v přesném určení matice \mathbf{S}_t , kterou je možné analyticky vyjádřit jen ve velmi speciálních případech. Například kvůli silné nelinearitě vektoru elastických sil ANCF prvků je Jacobiho matici těchto sil velmi obtížné vyjádřit v uzavřeném tvaru. Nicméně, jak je uvedeno například v [27], přesnost určení iterační matice ovlivní hlavně



Obrázek 6.1.: Schéma algoritmu Newmarkovy integrační metody pro řešení nelineárních systémů.

rychlost konvergence Newtonovy metody v rámci iteračního procesu ve smyslu počtu potřebných iterací, neovlivní však znatelně přesnost samotného řešení.

Jak uvádí literatura [28], některé součásti matice \mathbf{S}_t jsou často vynechány. Vektor všech působících sil \mathbf{g} pohybových rovnic (5.7) lze rozdělit na součet vektoru vnitřních sil \mathbf{g}_{int} a vektoru vnějších sil \mathbf{g}_{ext} . Vzhledem k tomu, že závislost vnějších sil na vektoru posuvů, tzn. výraz $\frac{\partial \mathbf{g}_{ext}}{\partial \mathbf{q}}$, může mít obecně podobu nesymetrické matice, bývá tato součást tečné matice tuhosti zanedbána. Obdobně je tomu i u závislosti vnějších sil na rychlostech.

Matice tečné tuhosti \mathbf{K}_t (6.20) obsahuje parciální derivace Lagrangeových multiplikátorů podle jednotlivých souřadnic, konkrétně výraz $\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{q}}$, jehož analytické vyjádření může být problematické. Zajímavé zjednodušení v tomto směru je zmíněno v literatuře [27]. Při použití metody rozšířených Lagrangiánů, která je popsána v podkapitole 5.1.2, je pohybová rovnice modifikována do tvaru (5.17) přidáním penaltové funkce, která má v případě nesplnění vazbových podmínek vysokou hodnotu a v případě splnění podmínek je nulová. Tečná matice tuhosti má pak podobu

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [\Phi_{,q}^T (p\Phi + k\lambda)] - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.25)$$

Úpravou prvního členu této rovnice lze psát

$$\mathbf{K}_t = p \frac{\partial (\Phi_{,q}^T \Phi)}{\partial \mathbf{q}} + k \frac{\partial (\Phi_{,q}^T \lambda)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.26)$$

Vzhledem k tomu, že při rovnovážném stavu platí $\Phi = \mathbf{0}$, lze matici tečné tuhosti dobře aproximovat vztahem

$$\mathbf{K}_t = p \Phi_{,q}^T \Phi_{,q} + k \frac{\partial (\Phi_{,q}^T \lambda)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (6.27)$$

První člen této rovnice odpovídá příspěvku penaltové funkce do matice tečné tuhosti a zvyšuje její pozitivní definitnost [27]. Jak bylo uvedeno dříve, vyjádření derivace v druhém členu rovnice (6.27) může být složité. Při volbě dostatečně velkého penaltového koeficientu p však může být vliv druhého členu rovnice (6.27) upozaděn. Pro tečnou matici tuhosti pak může být použit zjednodušený výraz

$$\mathbf{K}_t = p \Phi_{,q}^T \Phi_{,q} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (6.28)$$

kde první člen je možné pro běžné základní vazbové rovnice napočítat předem.

Poslední poznámka k implementaci metody se týká efektivního řešení iterační rovnice (6.22). V případě lineárního problému by bylo možné iterační matici z rovnice (6.22) napočítat pouze jednou, spočítat její inverzi a následně snadno určit přírůstky. V případě nelineárních problémů je získání analytického předpisu iterační matice složité až nemožné. Je však možné ji napočítat numericky, čemuž se věnuje následující kapitola 6.2. Další možností je využití tzv. kvazi-Newtonovy metody, která je popsána v kapitole 6.3.

6.2. Numerické určení Jacobiho iterační matice

Cílem této podkapitoly je popsat způsob, jakým je možné numericky vyjádřit iterační matici v rovnici (6.22). Po použití inverzních Newmarkových formulí (6.11) a (6.12) lze rovnice (6.10) přepsat do zjednodušeného tvaru

$$\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{res} \\ \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (6.29)$$

kde vektor $\mathbf{x} = [\mathbf{q}_{n+1}^T, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^T]^T$. Využitím Newton-Raphsonovy metody pro řešení nelineární soustavy algebraických rovnice lze získat následující předpis

$$\mathbf{J}^r(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}^k} \Delta \mathbf{x}^k = -\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k), \quad (6.30)$$

jehož struktura odpovídá rovnicím (6.22). Matice \mathbf{J}^r je Jacobiho matice obsahující parciální derivace jednotlivých složek vektoru $\tilde{\mathbf{r}}$ podle jednotlivých proměnných vektoru \mathbf{x} . Pro Jacobiho matici platí

$$\mathbf{J}^r(\mathbf{x}) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{r}_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \tilde{r}_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial x_2}, \cdots \right]. \quad (6.31)$$

Pro úplnost je uvedeno konkrétní vyjádření jednotlivých matic a vektorů ve tvaru

$$\mathbf{J}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_t & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{,\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}^k \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{res}(\mathbf{q}_{n+1}^k, \boldsymbol{\lambda}_{n+1}^k) \\ \Phi(\mathbf{q}_{n+1}^k) \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Pro přibližné vyjádření derivací ve výrazu (6.31) je možné využít numerické derivace. Zavedením malého perturbačního parametru ε_{pert} lze definovat vektor proměnných \mathbf{x} perturbovaný v i -té souřadnici jako

$${}^i \mathbf{x}_{pert} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i + \varepsilon_{pert} \\ \vdots \\ x_{m_f+r} \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Nyní lze sloupec i Jacobiho matice (6.31) aproximovat numerickou derivací ve tvaru

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial x_i} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}({}^i \mathbf{x}_{pert}) - \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x})}{\varepsilon_{pert}}. \quad (6.34)$$

Rozdíl mezi analyticky a numericky určenou Jacobiho maticí lze nejlépe vysvětlit na případě funkce jedné proměnné. Jacobiho matice takové funkce je skalár odpovídající

směrnici tečny. V případě použití numerické derivace pro výpočet Jacobiho matice je získána směrnice sečny. Numerická derivace je obecně špatně podmíněná, což znamená, že malá změna či zaokrouhlovací chyba vstupu může způsobit velkou změnu výstupu. Je tedy vhodné volit perturbační parametr velmi malý, například $\varepsilon_{pert} = 10^{-7}$.

Hlavní výhodou numerického určení Jacobiho matice je snadná implementace a relativně dobrý odhad této matice. Nevýhodou, která převažuje nad všemi výhodami, je velká časová náročnost výpočtu, pokud má být Jacobiho matice numericky sestavována v každé iteraci každého časového kroku. Výhodnější je použít kombinaci numerického určení Jacobiho matice a tzv. kvazi-Newtonovy metody, která je popsána v kapitole 6.3.

6.3. Kvazi-Newtonova metoda

Jak již bylo zmíněno dříve v rámci kapitoly 6, u mnoha nelineárních problémů je obtížné získat analytický předpis iterační Jacobiho matice \mathbf{J}^r . Základní myšlenka kvazi-Newtonovy metody spočívá v aproximování iterační Jacobiho matice \mathbf{J}^r maticí \mathbf{G} , která je určena s využitím napočítaných $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ v předchozích iteračních krocích [12]. Aproximační matice \mathbf{G}^{k+1} v kroku $k+1$ je pak napočítána modifikací aproximační matice \mathbf{G}^k v kroku k podle výrazu

$$\mathbf{G}^{k+1} = \mathbf{G}^k + \Delta\mathbf{G}^k. \quad (6.35)$$

Podle podoby a hodnoty matice $\Delta\mathbf{G}^k$ se rozlišují jednotlivé kvazi-newtonské metody. Odvození bude provedeno jen pro základní Broydenovu metodu [26], aby bylo ukázáno, s jakými předpoklady a odvozeními kvazi-newtonské metody pracují. První důležitou rovnicí je rovnice (6.30), kde místo Jacobiho matice bude použita aproximační matice, tedy

$$\mathbf{G}^k \Delta\mathbf{x}^k = -\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k), \quad (6.36)$$

kde $\Delta\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k$. Další důležitá rovnice se nazývá sečná rovnice (*secant equation*) nebo též kvazi-Newtonova rovnice a má tvar

$$\mathbf{G}^{k+1} \Delta\mathbf{x}^k \cong \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1}) - \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{y}^k. \quad (6.37)$$

Tuto rovnici lze odvodit pomocí Taylorova rozvoje $\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ v bodě \mathbf{x}^{k+1} a zanedbáním vyšších členů [26]. Aproximace (6.37) se stává přesnější, pokud se vzdálenost bodů \mathbf{x}^{k+1} a \mathbf{x}^k snižuje. Odečtením rovnice (6.36) od rovnice (6.37) lze získat rovnici

$$(\mathbf{G}^{k+1} - \mathbf{G}^k) \Delta\mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1}). \quad (6.38)$$

Při odvozování Broydenovy metody je dále předpokládáno, že platí rovnice

$$\mathbf{G}^{k+1} \mathbf{z} = \mathbf{G}^k \mathbf{z}, \quad (6.39)$$

kde \mathbf{z} je libovolný kolmý vektor k $\Delta\mathbf{x}^k$, tedy že platí $(\Delta\mathbf{x}^k)^T \mathbf{z} = 0$. Výraz (6.39) vypovídá o tom, že není důvod, aby byl mezi maticemi \mathbf{G}^k a \mathbf{G}^{k+1} rozdíl při jejich aplikování na všechny vektory \mathbf{z} ortogonální na $\Delta\mathbf{x}^k$ [11]. Rovnici (6.39) lze upravit na tvar

$$(\mathbf{G}^{k+1} - \mathbf{G}^k) \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (6.40)$$

Rozdíl matic $(\mathbf{G}^{k+1} - \mathbf{G}^k)$ z rovnice (6.40) lze vyjádřit jako součin dvou vektorů ve tvaru

$$(\mathbf{G}^{k+1} - \mathbf{G}^k) = \mathbf{u} (\Delta \mathbf{x}^k)^T, \quad (6.41)$$

kde \mathbf{u} je vektor stejné dimenze jako $\Delta \mathbf{x}^k$. Rovnice (6.41) vyplývá z nulovosti skalárního součinu ortogonálních vektorů, dosazením (6.41) do (6.40) lze psát $\mathbf{u} (\Delta \mathbf{x}^k)^T \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Rovnici (6.38) lze pomocí (6.41) přepsat do tvaru

$$\mathbf{u} (\Delta \mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1}) \quad (6.42)$$

a následně vyjádřit vektor \mathbf{u} jako

$$\mathbf{u} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1})}{(\Delta \mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k}. \quad (6.43)$$

Přenosobním rovnice (6.43) vektorem $(\Delta \mathbf{x}^k)^T$ zprava, dosazením vztahu (6.41) a úpravou lze vyjádřit matici \mathbf{G}^{k+1} jako

$$\mathbf{G}^{k+1} = \mathbf{G}^k + \frac{\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1}) (\Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\Delta \mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k}. \quad (6.44)$$

Dosazením rovnice (6.36) do rovnice $\mathbf{y}^k = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1}) - \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k)$ z (6.37) je získán vztah

$$\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{y}^k - \mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k. \quad (6.45)$$

Po dosazení rovnice (6.45) do (6.44) je odvozen finální Broydenův předpis pro matici \mathbf{G}^{k+1} ve tvaru

$$\mathbf{G}^{k+1} = \mathbf{G}^k + \frac{(\mathbf{y}^k - \mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k) (\Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\Delta \mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k} = \mathbf{G}^k + \Delta \mathbf{G}^k. \quad (6.46)$$

Jak je dokázáno v publikaci [12], takto definovaná matice \mathbf{G}^{k+1} je nejbližší aproximací Jacobiho matice $\mathbf{J}^{r,k+1}$ z hlediska minimální hodnoty Frobeniovy normy rozdílu těchto matic. Důkazy konvergence a dalších vlastností této metody nejsou předmětem této disertační práce, nicméně je možné je dohledat v publikacích [11, 12]. Obecně však tato metoda potřebuje více kroků k získání řešení než Newton-Raphsonova metoda, nicméně odpadá nutnost složitého analytického odvození Jacobiho matice či jejího časově náročného numerického výpočtu.

V následující podkapitole 6.3.1 je shrnut základní algoritmus kvazi-Newtonovy metody. V podkapitole 6.3.2 jsou kromě Broydenovy metody popsány i další používané metody pro přímý výpočet matice \mathbf{G}^{k+1} . Podkapitola 6.3.3 se zabývá popisem přímého výpočtu aproximace inverzní Jacobiho matice $(\mathbf{G}^{k+1})^{-1}$.

6.3.1. Algoritmus kvazi-Newtonovy metody

Základní algoritmus kvazi-Newtonovy metody potřebuje k inicializaci počáteční odhad řešení \mathbf{x}^0 a odhad iterační matice \mathbf{G}^0 , kterou je možné získat například numerickou derivací, tedy postupem popsáním v kapitole 6.2. Následuje cyklus pro $k = 0, 1, 2, \dots$ složený z těchto bodů:

1. Výpočet přírůstků $\Delta \mathbf{x}^k$ z rovnice

$$\mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k = -\tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k). \quad (6.47)$$

2. Určení řešení v kroku $k + 1$ podle rovnice

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k. \quad (6.48)$$

3. Výpočet vektoru rozdílu residuí dvou po sobě jdoucích kroků

$$\mathbf{y}^k = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^{k+1}) - \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k). \quad (6.49)$$

4. Výpočet aproximace Jacobiho matice pro následující krok, například dle Broydenovy metody (6.46)

$$\mathbf{G}^{k+1} = \mathbf{G}^k + \Delta \mathbf{G}^k. \quad (6.50)$$

V prvním bodě je řešena soustava algebraických rovnic. Usnadnění tohoto řešení je možné využitím matice $(\mathbf{G}^k)^{-1}$, viz podkapitola 6.3.3. Různé předpisy pro přírůstkovou matici $\Delta \mathbf{G}^k$ ze čtvrtého bodu jsou shrnuty v následující podkapitole 6.3.2

6.3.2. Shrnutí přímého výpočtu aproximace Jacobiho matice

V kapitole 6.3 je provedeno odvození Broydenovy metody pro výpočet aproximace Jacobiho matice v kroku $k + 1$. Jak uvádí například článek [26], způsobů pro výpočet této matice je více, následuje tedy seznam nejčastěji používaných metod.

- Broydenova metoda

$$\mathbf{G}^{k+1} = \mathbf{G}^k + \frac{(\mathbf{y}^k - \mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k) (\Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\Delta \mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k}. \quad (6.51)$$

Nezachovává případnou symetrii matice \mathbf{G}^k .

- Davidonova metoda

$$\mathbf{G}^{k+1} = \mathbf{G}^k + \frac{(\mathbf{y}^k - \mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k) (\mathbf{y}^k - \mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\mathbf{y}^k - \mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k}. \quad (6.52)$$

Zachovává případnou symetrii pro aproximační matici v následujícím kroku.

- Davidon-Powell-Fletcherova (DPF) metoda

$$\mathbf{G}^{k+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}^k (\Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k} \right) \mathbf{G}^k \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{x}^k (\mathbf{y}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k} \right) + \frac{\mathbf{y}^k (\mathbf{y}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k}. \quad (6.53)$$

Zachovává případnou symetrii pro aproximační matici v následujícím kroku, zajišťuje pozitivní definitnost aproximační matice.

- Broyden-Fletcher-Goldfard-Shanno (BFGS) metoda

$$\mathbf{G}^{k+1} = \mathbf{G}^k + \frac{\mathbf{y}^k (\mathbf{y}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k} - \frac{\mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k \Delta \mathbf{x}^{kT} \mathbf{G}^k}{(\Delta \mathbf{x}^k)^T \mathbf{G}^k \Delta \mathbf{x}^k}. \quad (6.54)$$

Zachovává případnou symetrii pro aproximační matici v následujícím kroku, zajišťuje pozitivní definitnost aproximační matice.

6.3.3. Přímý výpočet aproximace inverzní Jacobiho matice

Výpočet přírůstků $\Delta \mathbf{x}^k$ z rovnice (6.47) je možné provést s využitím inverzní aproximační matice, tedy

$$\Delta \mathbf{x}^k = - (\mathbf{G}^k)^{-1} \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^k). \quad (6.55)$$

Jak uvádí například [11, 26], s využitím Sherman-Morrison-Woodburyho formule o výpočtu inverzní matice lze získat vztahy pro přímý výpočet inverzní aproximační matice $(\mathbf{G}^{k+1})^{-1} = \mathbf{H}^{k+1}$ na základě inverzní aproximační matice z předchozího kroku. Tímto způsobem se výrazně sníží výpočtová náročnost.

Vztahy z kapitoly 6.3.2 mají po převedení do inverzní podoby tvar [26]:

- Broydenova metoda

$$\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + \frac{(\Delta \mathbf{x}^k - \mathbf{H}^k \mathbf{y}^k) (\Delta \mathbf{x}^k)^T \mathbf{H}^k}{(\Delta \mathbf{x}^k)^T \mathbf{H}^k \mathbf{y}^k}. \quad (6.56)$$

- Davidonova metoda

$$\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + \frac{(\Delta \mathbf{x}^k - \mathbf{H}^k \mathbf{y}^k) (\Delta \mathbf{x}^k - \mathbf{H}^k \mathbf{y}^k)^T}{(\Delta \mathbf{x}^k - \mathbf{H}^k \mathbf{y}^k)^T \mathbf{y}^k}. \quad (6.57)$$

- Davidon-Powell-Fletcherova (DPF) metoda

$$\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + \frac{\Delta \mathbf{x}^k (\Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\Delta \mathbf{x}^k)^T \mathbf{y}^k} - \frac{\mathbf{H}^k \mathbf{y}^k (\mathbf{y}^k)^T \mathbf{H}^k}{(\mathbf{y}^k)^T \mathbf{H}^k \mathbf{y}^k}. \quad (6.58)$$

- Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) metoda

$$\mathbf{H}^{k+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta \mathbf{x}^k (\mathbf{y}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k} \right) \mathbf{H}^k \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{y}^k (\Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k} \right) + \frac{\Delta \mathbf{x}^k (\Delta \mathbf{x}^k)^T}{(\mathbf{y}^k)^T \Delta \mathbf{x}^k}. \quad (6.59)$$

Odvozování těchto vztahů není předmětem této dizertační práce, neboť se jedná o vztahy již známé a jsou popsány v literatuře [11, 12, 26]. Přínosem této kapitoly je hlavně ucelený přehled o možnostech využití Newmarkovy metody v kombinaci s efektivní kvazi-Newtonovou metodou pro řešení nelineárních problémů z oboru vázaných mechanických systémů. Další přínos spočívá v uvedení konkrétních postupů pro zefektivnění numerických výpočtů.

6.4. Numerická integrace s využitím Gaussovy kvadratury

U nelineárních konečně prvkových formulací je často velmi složité analyticky integrovat výrazy definující vnitřní elastické síly. Proto jsou tyto určité integrály vypočítávány numericky. Jedna z běžných numerických metod integrace je Gaussova kvadratura [2], která je vyjádřena vztahem

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n_G} w_i f(x_i), \quad (6.60)$$

kde w_i jsou váhové koeficienty a x_i jsou Gaussovy body. Výpočet složitého určitého integrálu tak přechází v problém několikanásobného vyčíslení integrandu ve specifických bodech. To umožňuje napočítat si některé výrazy už v rámci *preprocessingu* a tím zefektivnit výpočtový proces. Pro interval integrace $[-1, 1]$ jsou váhové koeficienty a Gaussovy body shrnuty v tab. 6.1. Při nutnosti výpočtu na obecném intervalu $[a, b]$ je výraz (6.60) modifikován na tvar

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n_G} w_i f\left(\frac{b-a}{2} x_i + \frac{a+b}{2}\right). \quad (6.61)$$

Jak je uvedeno a dokázáno například v [2], Gaussova kvadratura je navržena tím způsobem, aby byl při numerické integraci polynomiálních funkcí řádu $2n_G - 1$ získán přesný výsledek v případě použití n_G Gaussových bodů. Vzhledem k tomu, že tvarové funkce konečných prvků jsou běžně polynomiální funkce, je tato metoda hojně využívána.

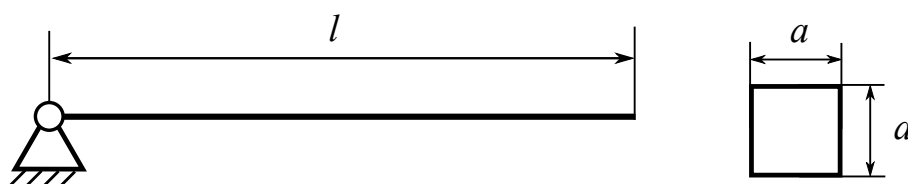
Počet bodů n_G	Gaussovy body x_i	Váhové koeficienty w_i
1	0	2
2	$\pm 0,5773503$	1
3	$\pm 0,7745967$	0,5555556
	0	0,8888889
4	$\pm 0,8611363$	0,3478548
	$\pm 0,3399810$	0,6521452
5	$\pm 0,9061798$	0,2369269
	$\pm 0,5384693$	0,4786287
	0	0,5688889

Tabulka 6.1.: Hodnoty bodů a váhových koeficientů Gaussovy kvadratury.

7. Aplikace představených postupů a metod při modelování tenkých poddajných struktur

Předmětem této kapitoly je aplikace představených metod pro modelování mechanických systémů s tenkými poddajnými členy. Software pro numerické simulace mechanických systémů s ANCF elementy byl vytvořen v programu MATLAB. Stejně tak byl v programu MATLAB implementován numerický řešič algebro-diferenciálních rovnic indexu 3 využívající Newmarkovu metodu. Vzhledem k časově náročnému vyčíslování matice tuhosti ANCF prvků v každém časovém kroku byly příslušné funkce převedeny do formátu *.mex* s využitím tzv. *MATLAB Coder*, což je obecně *kompilátor* (neboli překladač) z jazyka programu MATLAB do programovacího jazyka C a C++. Následným využíváním takto přeložených funkcí pro výpočet matice tuhosti bylo docíleno snížení výpočtového času více než desetkrát. Z tohoto důvodu byl stejný postup překladač použit i pro funkce počítající kontaktní síly, které jsou z hlediska výpočtového času také velmi náročné.

Tato kapitola obsahuje několik aplikací. V prvním případě je analyzován volný pohyb poddajného kyvadla modelovaného pomocí plně parametrizovaného prostorového ANCF elementu, prostorového kabelového ANCF elementu a rovinného elementu L2T2. Tento problém je často využívaným testovacím příkladem (tzv. *benchmark*) v dynamice soustav poddajných těles [5, 84]. Jsou zde shrnuty přednosti a nedostatky různých typů elementů, dále je zkoumána jejich efektivita a výpočetní náročnost. Tento problém je také využit ke zkoumání efektivit Newmarkovy a kvazi-Newtonovy metody a samotná podkapitola 7.1 je uzavřena energetickou bilancí při použití různě nastavených numerických řešičů. Druhý případ se zabývá modelováním tenkého vlákna, na jehož konci je zavěšeno závaží, které se pohybuje po nakloněné rovině. Výsledky jsou pak porovnány s experimentem a je zde zmíněna možnost vynulování axiálních sil vlákna v případě tlakového zatížení. Významnou částí této kapitoly je třetí aplikace, která se zabývá detailním modelováním interakce kladky a lana modelovaného pomocí přístupu ANCF. Jsou zde analyzovány normálové kontaktní síly mezi lanem a kladkou, popsána dynamická analýza interakce lana a kladky se zaměřím na zkoumání vlivu různého nastavení modelu třecích sil a nakonec je provedeno srovnání s experimentem. Pro toto srovnání posloužily výsledky měření pohybu mechanismu složeného z vlákna vedeného přes kladku, kdy na jednom konci vlákna je závaží pohybující se po nakloněné rovině a na druhém konci je pak řízený lineární posuvný motor. Čtvrtá aplikace se týká modelování a dynamické analýzy vláknového mechanického systému Quadrosphere v programu MSC.Adams s důrazem na popis modelu a jeho následného možného využití. Poslední pátá aplikace



Obrázek 7.1.: Schéma poddajného kyvadla, jeho počáteční pozice a uvažovaný průřez.

je zaměřena na popis modelování poddajných absorpčních proutků jaderných reaktorů s využitím ANCF elementů a kontaktních sil. Jedná se příklad využití představených postupů v oblasti energetiky.

7.1. Pohyb poddajného kyvadla

Pohyb poddajného kyvadla, na které působí pouze vlastní tíha, je standardní srovnávací typ úlohy, na kterém lze testovat implementované ANCF elementy. V tomto případě byly testovány verze plně parametrizovaného prostorového ANCF nosníkového elementu (model označen *Thick*), jehož elastické síly byly odvozeny přístupem *elastic line approach*, dále verze prostorového kabelového ANCF elementu (*Thin*) a rovinného L2T2 elementu. Do modelu nebylo zavedeno žádným způsobem tlumení, pohybové rovnice tedy odpovídají tvaru (4.58).

Matice tuhosti u výpočtového modelu *Thick* byla přímo analyticky odvozena pomocí symbolických operací v programu MATLAB. Postup *elastic line approach* pro odvození elastických sil byl zvolen z důvodu jeho snazší implementace, protože je nutné vypočítat pouze integrály po délce střednicové linie, s čímž narozdíl od přístupu dle obecných postupů mechaniky kontinua neměly funkce z programu MATLAB Symbolic math toolbox problém. Výpočet s konkrétním vyjádřením matice tuhosti $\mathbf{K}_{full}^{ela}(\mathbf{e})$ (A.2) je rychlejší a přesnější než tři vnořené cykly Gaussovy kvadratury pro numerický výpočet trojného integrálu matice \mathbf{K}_{full}^{cma} (A.1). V modelu *Thin* byla matice tuhosti \mathbf{K}_{low} určena dle výrazu (A.3), který však symbolické operace programu MATLAB nebyly schopné upravit do použitelného tvaru pro numerické simulace kvůli složitému integrálu. Pro vyčíslení matice \mathbf{K}_{low} v každém kroku je tedy použita Gaussova kvadratura a derivace matice tvarových funkcí $\mathbf{S}_{,x}$ jsou pro konkrétní Gaussovy body předpočítány v rámci *preprocessingu*. Pro výpočet integrálu ohybové tuhosti byly použity tři Gaussovy body, pro podélnou tuhost pak bodů pět, což odpovídá doporučení [30].

Na obr. 7.1 je znázorněno poddajné kyvadlo v počáteční poloze a jeho uvažovaný čtvercový průřez. Parametry kyvadla jsou shrnuty v tab. 7.1. Určení průřezových charakteristik bylo provedeno na základě literatury [53, 77].

Při řešení pohybových rovnic pomocí funkcí ode programu MATLAB byla rotační vazba v modelu zavedena odebráním všech posuvných stupňů volnosti v místě krajního uzlu, což je realizováno vypuštěním prvních třech rovnic ze soustavy diferenciálních rovnic popisujících daný problém. Tímto způsobem se lze vyhnout nutnosti eliminace Lagranžových multiplikátorů a zavedení stabilizace.

V případě řešení problému poddajného kyvadla pomocí Newmarkovy metody byla rotační vazba realizována zavedením jednoduchých algebraických vazbových podmínek, jejichž předpis je

$$\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{rot} = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

kde $\mathbf{r}^{(1)}$ vyjadřuje polohový vektor prvního uzlu kyvadla, ve kterém se má nacházet rotační vazba, a \mathbf{r}^{rot} je polohový vektor vyjadřující polohu rotační vazby v pevném globální souřadnicovém systému. Celý mechanický systém je tedy popsán soustavou algebro-diferenciálních rovnic, na kterém je možné testovat přístupy popsané v kapitole 6. Samozřejmě by bylo možné postupovat stejně jako v případě použití funkcí ode programu MATLAB, tedy odebrat příslušné rovnice z řešení, nicméně smyslem tohoto přístupu je ukázat možnosti přímého řešení soustavy algebro-diferenciálních rovnic.

7.1.1. Simulace a výsledky pro různé ANCF prvky

Pro porovnání různých ANCF prvků a integračních metod byla provedena simulace pohybu kyvadla po dobu dvou vteřin. Ve výchozím případě je použito 10 ANCF elementů. V případě výpočtu s použitím funkcí ode programu MATLAB, které jsou založeny na různých integračních metodách s adaptivním integračním krokem, bylo ponecháno implicitní nastavení relativní chyby ($RelTol = 10^{-3}$) a absolutní chyby ($AbsTol = 10^{-6}$). Při řešení algebro-diferenciálních rovnic pomocí Newmarkovy metody byl nastaven konstantní časový krok $h = 0,0005$ s a parametr numerického tlumení $\alpha = 0$. Pro zastavení iteračního procesu byly využity podmínky (6.23), kde konstanty ε_{res} a ε_{constr} mají shodnou hodnotu 10^{-6} . Vzhledem k tomu, že analytické určení Jacobiho matice elastických sil

Základní parametry

Délka kyvadla	l	2 m
Délka hrany čtvercového průřezu	a	0,01 m
Hustota materiálu kyvadla	ρ	4000 kg·m ⁻³
Youngův modul pružnosti materiálu	E	10 ⁸ Pa
Tíhové zrychlení	g	9,81 m·s ⁻²
Poissonova konstanta	ν	0.3

Dopočítané parametry

Modul pružnosti ve smyku	$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	3,85 · 10 ⁷ Pa
Moment setrvačnosti průřezu k ose y a z [53]	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$	8,33 · 10 ⁻¹⁰ m ⁴
Polární moment setrvačnosti	$I_p = I_z + I_y$	1,67 · 10 ⁻⁹ m ⁴
Smykové faktory [53]	$k_y = k_z = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$	0,8497
Smykový distribuční faktor (torzní) [77]	k_x	0,8436
Torzní tuhost [77]	$S_t = GI_p k_x$	0,5408 N·m·rad ⁻¹

Tabulka 7.1.: Parametry kyvadla.

některých ANCF elementů může být složité, je pro srovnání u všech použitých elementů Jacobiho matice vypočítávána numericky způsobem popsáným v kapitole 6.2. Iterace v rámci jednoho časového kroku jsou prováděny s využitím kvazi-Newtonovy metody. Nevýhoda kvazi-Newtonových metod spočívá ve velkém počtu nutných iterací v případě, kdy predikované řešení není dostatečně blízko přesnému řešení. Z tohoto důvodu bylo do algoritmu zaneseno numerické přepočítání celé iterační matice v případě, kdy řešení nezkonvergovalo během daného počtu iterací. Konkrétně bylo zvoleno přepočítání iterační matice po překročení 10 iterací v rámci jednoho časového kroku.

Časová náročnost výpočtu jednotlivých metod při simulaci 2 vteřin pohybu kyvadla je shrnuta v tab. 7.2. V případě nejméně komplexních rovinných prvků L2T2 a prostoro-
vých prvků Thin byly testovány všechny zmíněné metody numerické integrace dostupné v programu MATLAB, zatímco v případě komplexních prvků typu Thick bylo testováno jen pět nejrychlejších metod, protože u metod `ode23tb` a `ode23s` výpočet běžel více než 20 hodin bez získání výsledku. Z tab. 7.2 je tedy patrné, že volba vhodné metody numerické integrace může vést k výraznému zrychlení výpočtu. Především použití Newmarkovy metody spolu s kvazi-Newtonovou metodou se ukázalo jako výhodné z hlediska výpočtového času pro všechny typy testovaných prvků.

Na obr. 7.2 je ukázán tvar poddajného kyvadla ve vybraných časových okamžicích. Na obr. 7.3 jsou znázorněny výsledky třech testovaných ANCF prvků při použití numerické iterační metody `ode23t`. Vlevo je zobrazen časový průběh vertikální pozice volného konce kyvadla. Je zde patrné, že pro všechny tři modely je výsledná křivka téměř stejná. Vpravo jsou pak znázorněny jednotlivé rozdíly mezi modely v čase. V nejlepší

Prvek ANCF	MATLAB funkce ode						
	<code>ode15s</code>	<code>ode23t</code>	<code>ode23</code>	<code>ode113</code>	<code>ode45</code>	<code>ode23tb</code>	<code>ode23s</code>
L2T2	21,5	10,1	5,3	9,4	14,1	11,8	237,5
Thin	28,5	11,5	7,1	11,9	19,1	34,5	705,3
Thick	455,9	375,6	311,0	221,3	332,0	n/a ⁽¹⁾	n/a ⁽¹⁾

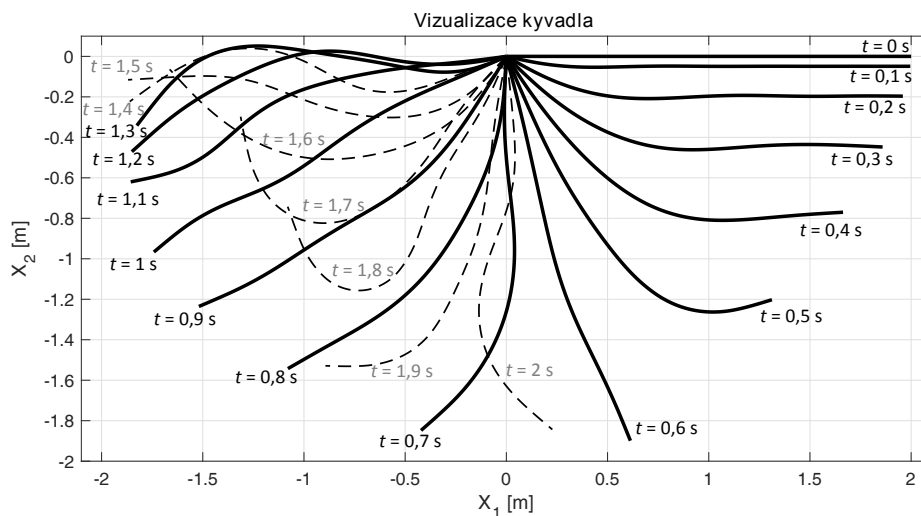
Prvek ANCF	Newmarkova metoda			
	Broyden	Davidon	DPF	BFGS
L2T2	3,69	1,69	3,06	2,96
Thin	7,22	2,96	6,32	6,14
Thick	19,20	10,49	20,24 ⁽²⁾	27,61 ⁽²⁾

Poznámka:

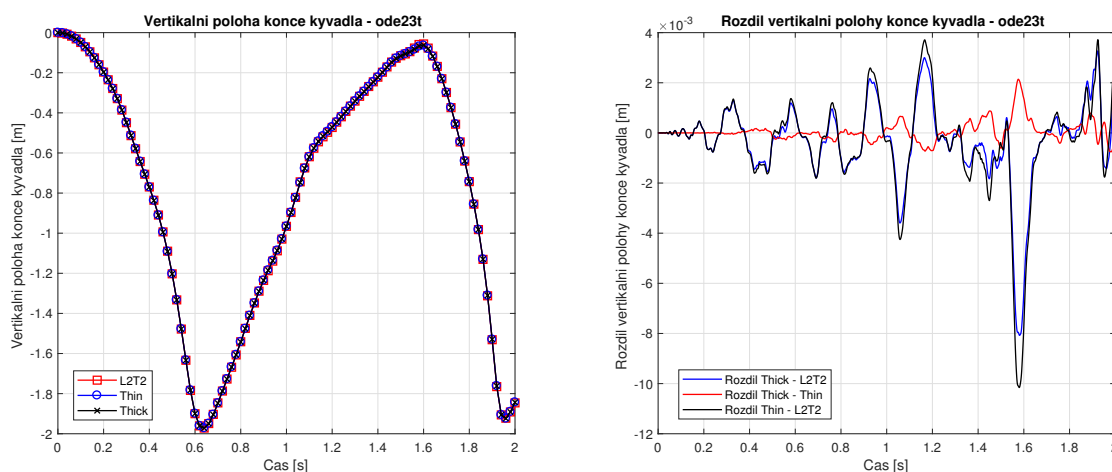
(1) Výsledky nebyly získány v rozumném čase.

(2) Pro dané parametry nebylo dosaženo konvergence, výsledky byly získány až po přidání malého numerického tlumení v podobě $\alpha = 0,01$.

Tabulka 7.2.: Výpočtové časy [s] pro různé ANCF prvky a numerické iterační metody při simulaci 2 vteřin pohybu kyvadla.



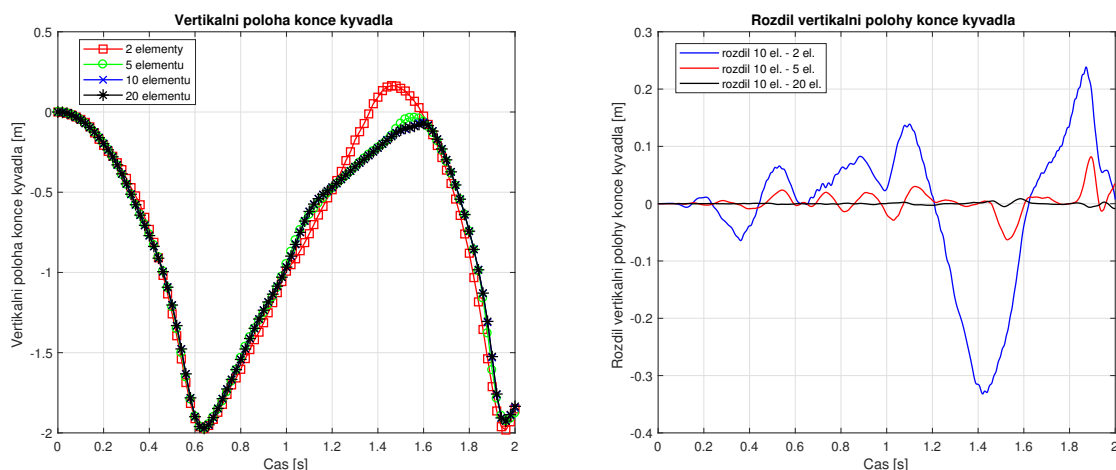
Obrázek 7.2.: Tvar poddajného kyvadla ve vybraných časových okamžicích.



Obrázek 7.3.: Časový průběh vertikální polohy konce kyvadla pro různé modely při použití ode23t (vlevo) a výsledné rozdíly mezi jednotlivými modely (vpravo).

shodě jsou modely Thick a Thin, kde je maximální rozdíl přibližně 2 mm. Rovinný model L2T2 pak vykazuje vůči ostatním modelům maximální rozdíl přibližně 10 mm. Ten je způsoben hlavně zjednodušujícími předpoklady při odvození elastických sil. Je zde nutné ještě podotknout, že výsledné rozdíly jsou stále relativně malé, protože pohyb takto velmi poddajného dvoumetrového kyvadla je možné považovat za špatně podmíněnou úlohu v tom smyslu, že nepatrný rozdíl parametrů kyvadla vede k časově rychle vzrůstající odchylce.

Na obr. 7.4 je ukázán časový průběh vertikální polohy konce kyvadla modelovaného



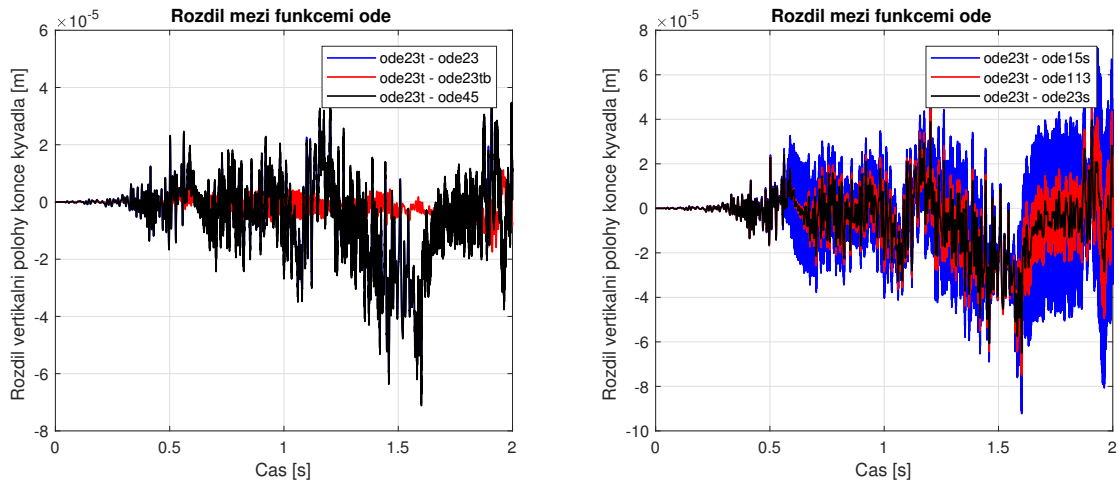
Obrázek 7.4.: Časový průběh vertikální polohy konce kyvadla pro různý počet elementů typu Thin (vlevo) a rozdíly mezi jednotlivými diskretizacemi (vpravo).

pomocí prostorových Thin prvků pro různý počet elementů diskretizace. Zkoumán byl rozdíl při použití 20, 10, 5 a extrémní případ použití pouze 2 ANCF elementů pro diskretizaci celého kyvadla. Z výsledků je patrné, že v případě použití 20 a 10 elementů jsou výsledné průběhy v dobré shodě (maximální rozdíl přibližně 8,6 mm), zatímco při použití pouze 2 elementů je výsledný časový průběh už velmi odlišný.

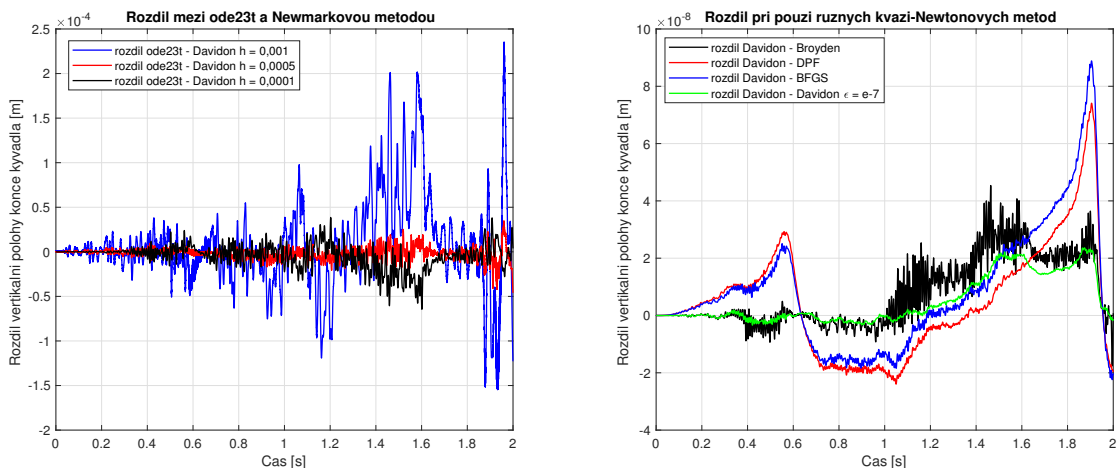
7.1.2. Porovnání výsledků pro různé integrační metody

Na obr. 7.5 jsou pro model Thin znázorněny rozdíly mezi časovými průběhy vertikální pozice konce kyvadla při užití různých numerických integračních metod. Jako srovnávací funkce pro numerickou integraci byla použita `ode23t`, která dle dokumentace programu MATLAB využívá lichoběžníkové pravidlo a je vhodná pro výpočty, kde je vyžadováno nulové numerické tlumení. To je výhodné, neboť použité nastavení Newmarkovy metody také uvažuje nulové numerické tlumení. Z grafů je patrné, že maximální rozdíly jsou v řádu 10^{-5} m, přičemž na levém grafu z obr. 7.5 modrý a černý průběh splývají. Na obr. 7.6 vlevo jsou znázorněny časové průběhy rozdílů mezi řešením získaném pomocí funkce `ode23t` a řešením získaném pomocí Newmarkovy metody s různými velikostmi časového kroku. Z grafu je patrné, že při konstantním kroku $h = 0,001$ s se rozdíl pohybuje v řádu 10^{-4} , zatímco při krocích $h = 0,0005$ s a $h = 0,0001$ s je výsledný rozdíl již v řádu 10^{-5} , tedy srovnatelný s výsledky z grafů na obr. 7.5. Na obr. 7.6 vpravo je pak ukázán rozdíl časových průběhů vertikální pozice konce kyvadla pro Newmarkovu metodu při použití různých kvazi-Newtonových metod. Z tab. 7.2 vyplývá, že nejvíce časově efektivní metoda v tomto případě je Davidonova, nicméně použití jiné metody vede k maximálnímu rozdílu výsledků v řádu 10^{-8} , což je zanedbatelné. Lze konstatovat, že jednotlivé předpisy kvazi-Newtonovy metody vedou ke stejně přesnému výsledku. Navíc je na pravém grafu z obr. 7.6 ukázáno zelenou křivkou, že při zpřísnění zastavo-

7. Aplikace představených postupů a metod při modelování tenkých poddajných struktur



Obrázek 7.5.: Rozdíly mezi časovými průběhy vertikální pozice konce kyvadla při užití různých numerických integračních metod programu MATLAB pro model Thin.



Obrázek 7.6.: Rozdíly mezi časovými průběhy vertikální pozice konce kyvadla při použití funkce ode23t a Newmarkovy metody s různým nastavením konstantního časového kroku (vlevo) a rozdíly při použití různých kvazi-Newtonových metod v rámci zpřesňujících iterací Newmarkovy metody.

vací podmínky vnitřních iterací Newmarkovi metody, tedy při nastavení ϵ_{res} a ϵ_{constr} na hodnotu 10^{-7} , nebyla získána výrazná změna v přesnosti metody.

Pro tento testovací typ úlohy bylo prokázáno, že na přesnost výsledků získaných pomocí Newmarkovy metody má především vliv velikost časového integračního kroku. Volba Newtonovy nebo kvazi-Newtonovy metody má pak vliv hlavně na rychlost konvergence iteračního procesu a také na časovou náročnost, která v tomto základním srovnávacím příkladu souvisí s počtem vyčíslení elastických sil prvků.

Sledovaný parametr	Broyden	Davidon	DPF	BFGS
Průměr iterací	7,70	4,19	4,73	4,46
Přepočítání Jacob. mat.	31	0	238	144
Sestavení vektoru elast. sil	32911	16842	34707	27406
Čas výpočtu [s]	7,22	2,96	6,32	6,14

Tabulka 7.3.: Porovnání efektivity uvažovaných kvazi-Newtonových metod.

V rámci vyšetřování efektivity jednotlivých kvazi-Newtonových metod byly provedeny simulace s různými parametry a byl sledován počet sestavení celkového vektoru elastických sil, průměrný počet iterací v rámci jednoho časového kroku a také počet, kolikrát byla numericky přepočítána Jacobiho matice. Pro výchozí nastavení parametrů z kapitoly 7.1.1 (nulové numerické tlumení, $h = 0,0005$ s, dovolená maximální chyba ε_{res} a ε_{constr} s hodnotou 10^{-6} a přepočítání Jacobiho matice v případě překročení deseti iterací) jsou výsledky pro prvek typu Thin shrnuty v Tab. 7.3. Ze sledovaných parametrů je patrné, že výsledný čas výpočtu záleží především na počtu sestavení vektoru elastických sil, jak bylo zmíněno dříve, méně pak na průměrném počtu iterací. Každé numerické přepočítání Jacobiho matice pak přispívá do počtu sestavení vektoru elastických sil hodnotou odpovídající počtu stupňů volnosti úlohy. Ze sledovaných výstupních parametrů je zřejmé, že nejefektivnější je v tomto případě Davidonova metoda.

V tab. 7.4 jsou uvedeny sledované výstupní veličiny při různém nastavení parametrů simulace a při použití Davidonovy kvazi-newtonské metody. Pro uvedená nastavení nikdy nedošlo k překročení deseti iterací v rámci jednoho časového kroku, Davidonova metoda se tedy jeví jako velmi efektivní. Dále je z výsledků patrné, že přidání numerického tlumení do simulace pohybu netlumeného poddajného kyvadla má za následek lepší konvergenci iterací, snížení celkového počtu sestavení vektoru elastických sil a tím i snížení času výpočtu. Naopak zdvojnásobení počtu prvků pro diskretizaci kyvadla vedlo k přibližnému zdvojnásobení výpočtového času. Vzrostl také průměrný počet iterací, protože do normy residua dle (6.23) přispívá více rovnic a je tedy potřeba více kroků k jejímu snížení pod uvažovanou mez 10^{-6} . S tím je spojeno také mírné zvýšení počtu sestavení celkového vektoru elastických sil. Zdvojnásobení výpočtového času je mimo jiné dáno ještě tím, že jedno sestavení vektoru elastických sil trvá déle pro více elementů.

Poslední analýza se týká vlivu zvolené zastavovací podmínky. V předcházejících případech byla vždy použita nejjednodušší zastavovací podmínka dle výrazu (6.23) s přesností 10^{-6} . Stejná přesnost je nastavena i pro podmínku (6.24). Testována byla Davidonova a BFGS metoda, kdy pro diskretizaci kyvadla bylo použito 20 ANCF tenkých prvků, časový krok simulace $h = 0,0005$ a nulové numerické tlumení. Výsledky simulací jsou shrnuty v tab. 7.5. Je zde patrné, že při použití podmínky (6.24) byl v obou případech získán výsledek v lepším čase a počet sestavení celkového vektoru elastických sil byl nižší. Dále se opět potvrdila dobrá konvergence Davidonovy kvazi-newtonské metody. Zajímavý je však fakt, že při použití podmínky (6.24) pro metodu BFGS se zvýšil počet přepočítání Jacobiho matice, zatímco výpočtový čas se snížil. Z těchto výsledků se mimo jiné dá usu-

Nastavení metody							
Časový krok h	0,0005	0,0005	0,0001	0,001	0,001	0,0005	0,0005
Numerické tlumení α	0	0,05	0	0	0,05	0	0,05
Počet prvků Thin	10	10	10	10	10	20	20
Sledovaný parametr							
Průměr iterací	4,19	3,83	3,00	5,38	4,99	5,03	4,45
Přepočítání Jacob. mat.	0	0	0	0	0	0	0
Sestavení vekt. elast. sil	16842	15387	60027	10827	10052	20262	17916
Čas výpočtu [s]	2,96	2,59	10,05	1,84	1,69	6,08	5,48

Tabulka 7.4.: Vliv různého nastavení parametrů integrace při použití Davidonovy kvazi-newtonské metody na sledované parametry.

Sledovaný parametr	Davidon	Davidon	BFGS	BFGS
Zastavovací podm.	(6.23)	(6.24)	(6.23)	(6.24)
Průměr iterací	5,03	4,49	5,05	4,48
Přepočítání Jacob. mat.	0	0	69	76
Sestavení vekt. elast. sil	20262	18069	29010	27631
Čas výpočtu [s]	6,08	5,46	16,45	14,55

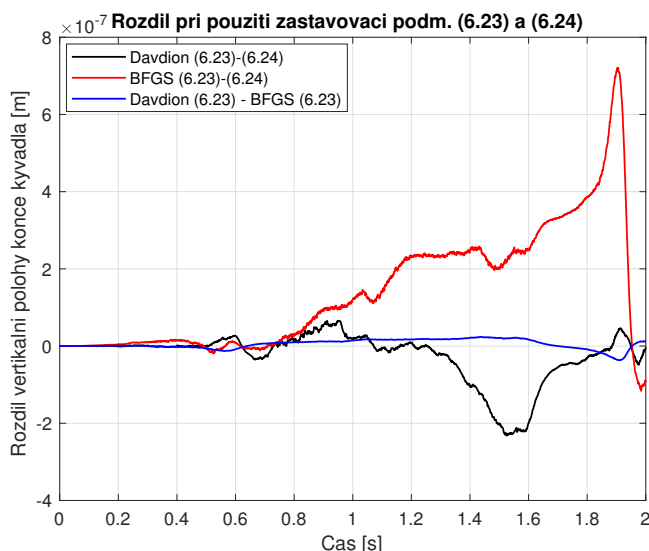
Tabulka 7.5.: Vliv různé zastavovací podmínky na efektivitu výpočtu.

zovat, že v případě, kdy predikované řešení je více vzdálené od přesného řešení, přibližuje se metoda BFGS k řešení pomaleji a je nutné přepočítat Jacobiho matici. Jelikož je však stále průměr iterací pro podmínku (6.24) u BFGS nižší než pro podmínku (6.23), lze usoudit, že k přepočítání Jacobiho matice opravdu došlo jen v některých ojedinělých časových krocích. Na obr. 7.7 je znázorněn časový průběh rozdílu vertikální pozice konce kyvadla při použití dvou zastavovacích podmínek a také rozdíl mezi Davidonovou a BFGS metodou. Z průběhů je patrné, že volba zastavovací podmínky má zanedbatelný vliv na přesnost výpočtu.

7.1.3. Energetická bilance

Sestavení energetické bilance je často využíváno pro zhodnocení správnosti použitých numerických postupů a to hlavně z hlediska samovolného nárůstu či poklesu (disipace) celkové energie vlivem numerického výpočtu. V obecném případě je součet kinetické energie E_k , deformační energie U a potenciální energie gravitačního silového pole E_p roven práci vnějších sil W , tedy

$$E_k + U + E_p = W. \quad (7.2)$$



Obrázek 7.7.: Rozdíly mezi časovými průběhy vertikální polohy konce kyvadla při použití různých zastavovacích podmínek iterace.

V případě pohybu poddajného kyvadla je práce sil nulová, neboť kromě objemové gravitační síly na kyvadlo nejsou aplikovány žádné vnější síly. Navíc model volného pádu poddajného kyvadla představuje konzervativní systém, neboť není uvažováno žádné tlumení. Pro takový konzervativní systém pak platí energetická bilance ve tvaru

$$E_c = E_k + U + E_p = konst, \quad (7.3)$$

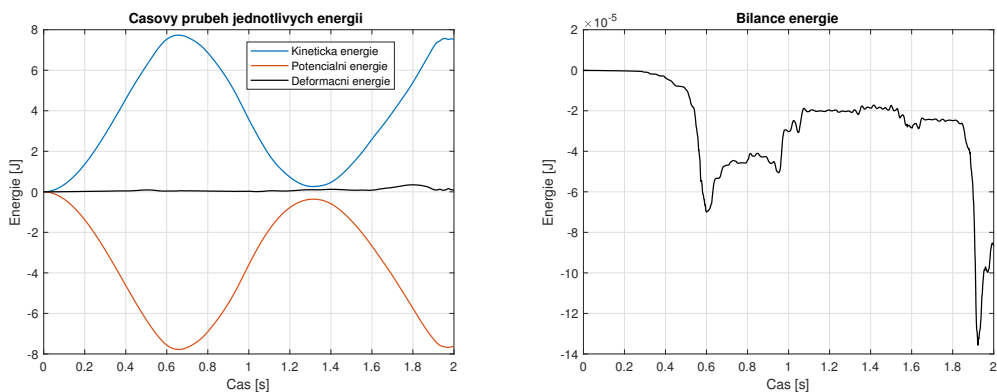
tedy celková energie systému je neměnná.

V určitém časovém okamžiku je kinetická energie E_k dána součtem kinetických energií jednotlivých ANCF prvků E_{ke} vyjádřených obecně dle výrazu (4.54). Celková deformační energie U v případě kyvadla modelovaného pomocí Thin prvků je dána součtem deformačních energií elementů U_e , které jsou vyjádřeny podle vztahu (4.76). Potenciální energie jednoho elementu je dána vztahem

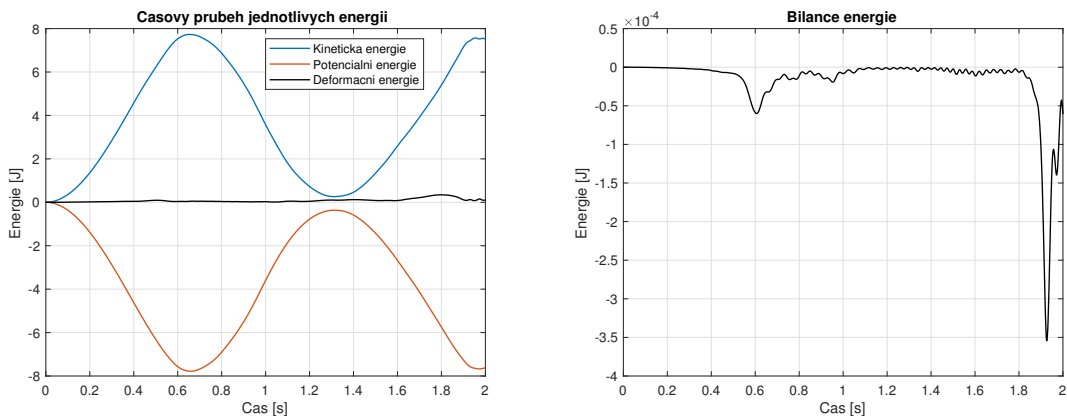
$$E_{pe} = \rho A_e \int_0^{l_e} \mathbf{r}^T \mathbf{g} dx = \rho A_e \int_0^{l_e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{g} dx, \quad (7.4)$$

kde $\mathbf{g} = [0, 9, 81, 0]^T$, tedy tíhové zrychlení má hodnotu $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a působí ve svislém směru.

Nejdříve je analyzována energetická bilance pro dvě vteřiny simulace modelu nastaveného tak, jak je popsáno v kapitole 7.1. Na obr. 7.8 jsou ukázány časové průběhy kinetické, potenciální a deformační energie systému a součet všech energií při použití funkce `ode23t` programu MATLAB. Z výsledků je patrné, že deformační energie je relativně nízká. Vzhledem k tomu, že v počáteční poloze je vertikální souřadnice všech bodů kyvadla nulová, součet všech energií by měl být rovný nule ve všech časových krocích. V případě použití zmíněné integrační funkce programu MATLAB byla nulovost součtu



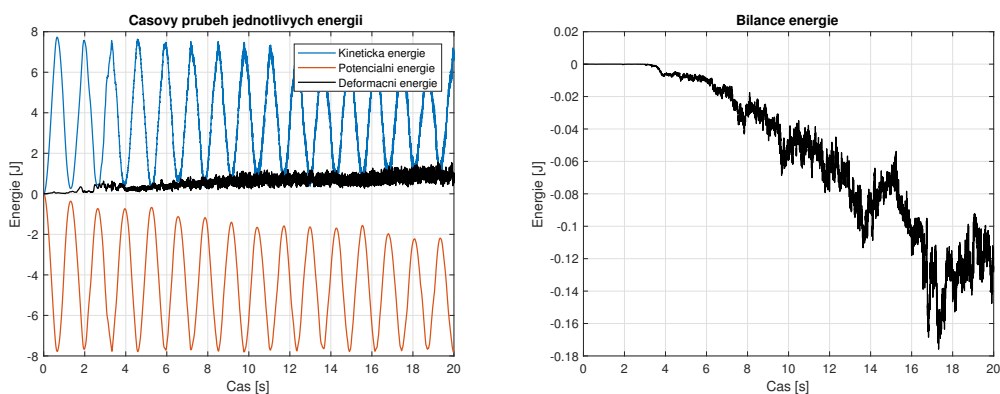
Obrázek 7.8.: Časový průběh kinetické, deformační a potenciální energie (vlevo) a součet všech energií (vpravo) při použití integrační metody ode23t programu MATLAB.



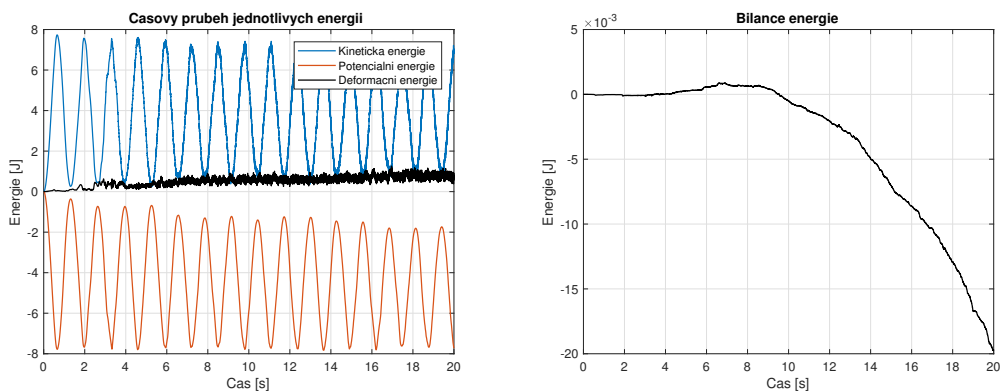
Obrázek 7.9.: Časový průběh kinetické, deformační a potenciální energie (vlevo) a součet všech energií (vpravo) při použití Newmarkovy integrační metody s nulovým parametrem numerického tlumení.

energií přibližně splněna s tolerancí v řádu 10^{-4} J. Na obr. 7.9 jsou pak ukázány obdobné časové průběhy energií při použití Newmarkovy metody s nulovým parametrem numerického tlumení. Z výsledků je patrné, že při použití Newmarkovy metody je maximum disipované energie přibližně 2,5krát větší, nicméně stále v řádu 10^{-4} J.

Na obr. 7.10 je ukázána bilance energie při simulaci celkem 20 vteřin pohybu kyvadla pomocí Newmarkovy metody s nulovým parametrem numerického tlumení. Z průběhů je patrné, že i přes nulový parametr numerického tlumení dochází k disipaci energie, která s časem narůstá. Pro srovnání je na obr. 7.11 zobrazen časový průběh energií v případě integrace pomocí funkce ode23t programu MATLAB. I zde dochází k disipaci energie, která je však menší než v případě Newmarkovy metody. V tomto případě není zcela zřejmé, co může být příčinou numerického tlumení. Možná příčina spočívá v numerické chybě při vyčíslování elastických sil pomocí Gaussovy kvadratury. Navíc v případě



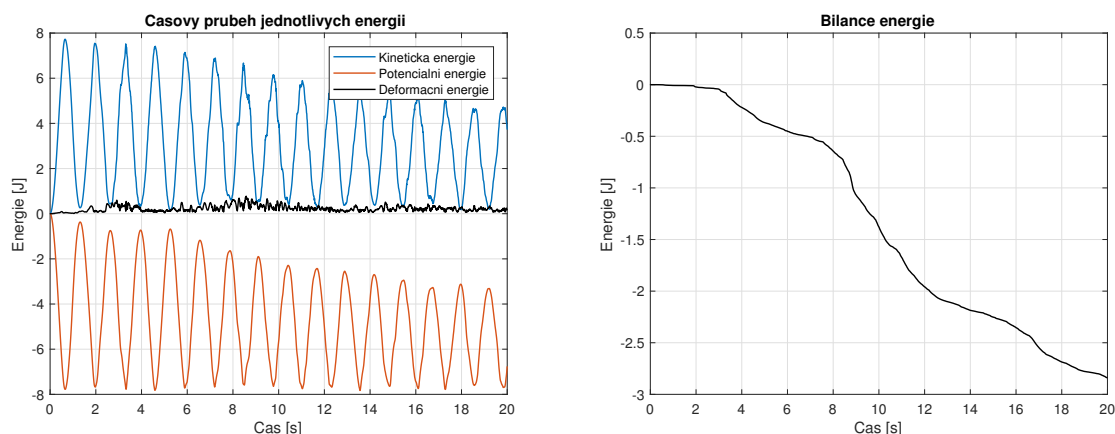
Obrázek 7.10.: Časový průběh kinetické, deformační a potenciální energie (vlevo) a součet všech energií (vpravo) při použití Newmarkovy integrační metody s nulovým parametrem numerického tlumení (simulace 20 vteřin pohybu).



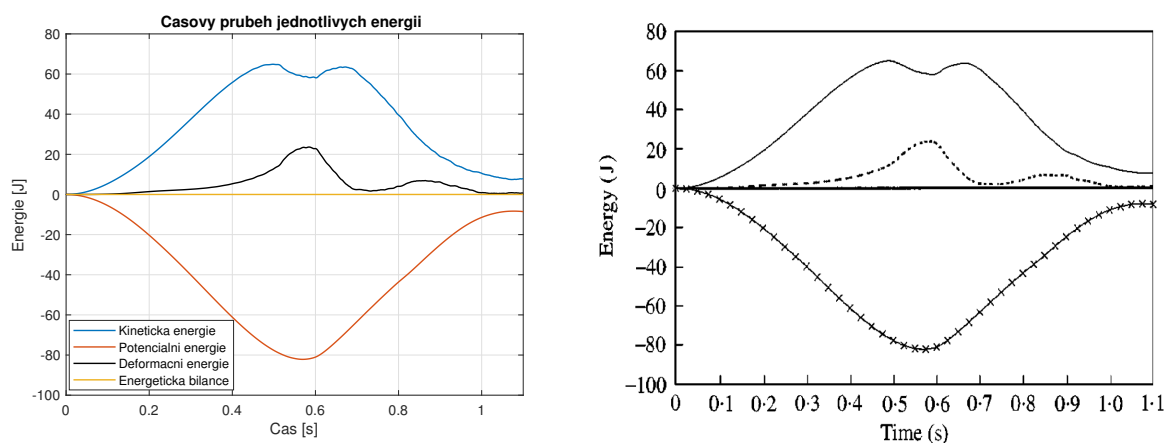
Obrázek 7.11.: Časový průběh kinetické, deformační a potenciální energie (vlevo) a součet všech energií (vpravo) při použití integrační metody ode23t programu MATLAB (simulace 20 vteřin pohybu).

Newmarkovy metody dochází k oscilacím celkové bilance energie. Nepodmíněná stabilita Newmarkovy metody při $\gamma = 1/2$ a $\beta = 1/4$ platí pouze pro lineární systémy, takže existuje podezření, že zvyšující se energetické oscilace mohou vést až ke ztrátě numerické stability. Jak je uvedeno například v literatuře [27], nenulovým parametrem numerického tlumení lze docílit zlepšení numerické stability řešení. Na obr. 7.12 jsou ukázány časové průběhy energií a celková energetická bilance při použití Newmarkovy metody s parametrem numerického tlumení $\alpha = 0,05$. Disipace energie je zde již velmi výrazná.

Aby bylo možné získané energetické bilance porovnat s výsledky z literatury, byla provedena simulace pohybu poddajného kyvadla s parametry nastavenými dle článku [5], konkrétně délka kyvadla $l = 1,2$ m, průřez $A = 0,0018$ m², kvadratický moment průřezu $I = 1,21 \cdot 10^{-8}$ m⁴, hustota $\rho = 5540$ kg·m⁻³ a Youngův modul pružnosti $E = 0,7 \cdot 10^6$ Pa. Výsledná bilance energií je zobrazena na obr. 7.13 a je ve výborné vizuální shodě s výsledky z článku [5], kde byl však použit rovinný ANCF prvek L2T2.



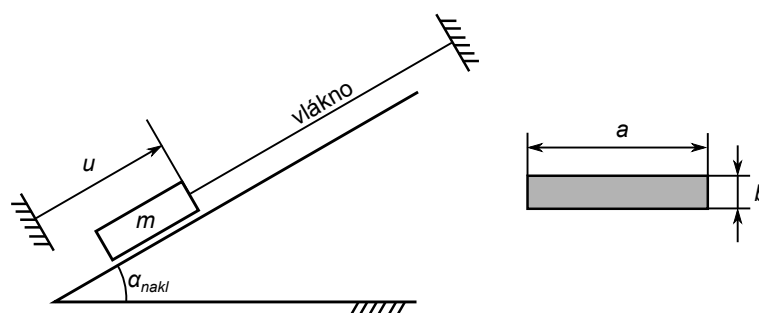
Obrázek 7.12.: Časový průběh kinetické, deformační a potenciální energie (vlevo) a součet všech energií (vpravo) při použití Newmarkovy integrační metody parametrem numerického tlumení $\alpha = 0,05$ (simulace 20 vteřin pohybu).



Obrázek 7.13.: Časový průběh kinetické, deformační a potenciální energie a součet všech energií při použití Newmarkovy metody s nulovým parametrem numerického tlumení (pravý graf a parametry kyvadla převzaty z [5]).

7.2. Závaží kmitající na tenkém vlákně

Druhá aplikace ANCF elementů se týká modelování tenkého uhlíkového vlákna, na jehož konci je zavěšeno závaží, které se pohybuje po nakloněné rovině. Tento případ kmitání závaží na vlákně byl zkoumán také experimentálně [56], proto je možné výsledné časové průběhy pohybu závaží porovnat s naměřenými daty. Experiment probíhal tím způsobem, že nejdříve bylo závaží vychýleno po nakloněné rovině vzhůru o $u_0 = 0,01$ m a následně puštěno volným pádem. Pomocí snímačů pak byla měřena poloha závaží v čase. Na obr. 7.14 je schéma řešeného problému s rozměry průřezu vlákna a na obr. 7.15 je fotografie experimentálního zařízení a použitého vlákna. V simulacích je uvažováno vetkutní



Obrázek 7.14.: Schéma řešeného problému a obdélníkový průřez vlákna.



Obrázek 7.15.: Fotografie experimentálního zařízení a fotografie použitého vlákna [56].

horního konce vlákna do rámu a vetknutí spodního konce vlákna k závaží. Závaží je v modelu respektováno pomocí hmotného bodu. Pro numerické řešení pohybových rovnic byly použity funkce ode programu MATLAB. Všechny vazby jsou do modelu zavedeny pomocí vazebních podmínek a pro zabránění porušení vazeb je použita Baumgartova stabilizace [23, 32].

Jelikož se jedná o rovinnou úlohu, pro modelování vlákna byl zvolen rovinný ANCF element L2T2, který se v předchozím případě osvědčil jako nejefektivnější z hlediska výpočtového času simulací a dostatečně přesný v porovnání s ostatními komplexnějšími ANCF elementy. Pro diskretizaci vlákna bylo použito 5 elementů. S ohledem na výsledky předchozího testovacího příkladu a skutečné délky vlákna je tato diskretizace dostatečná. Dále bylo v modelu uvažováno tření mezi závažím a nakloněnou rovinou. Pro popis tření byl zvolen základní Threlfallův model třecí síly (5.38), jehož parametry jsou malá charakteristická rychlost v_0 a koeficient tření c_f . Úhel nakloněné roviny je ve všech simulacích

a v experimentu roven $\alpha_{nakl} = \frac{\pi}{4}$ rad.

Na tomto příkladě byl dále zkoumán vliv chování vlákna v tlaku. Tenké vlákno zatížené v osovém směru tlakem neklade téměř žádný odpor. Aby bylo toto chování v modelu alespoň přibližně respektováno, je zavedeno „vypínání“ podélných elastických sil v případě, kdy je celková aktuální délka vlákna l menší než jeho volná délka l_0 . Při výpočtu délky vlákna v čase t se vychází ze vztahu pro diferenciál délky oblouku (4.105). Integrací tohoto vztahu přes celou délku elementu l_e je získán vztah

$$l_e = \int_0^{l_e} ds = \int_0^{l_e} \sqrt{\mathbf{r}_{,x}^T \mathbf{r}_{,x}} dx. \quad (7.5)$$

Odtud je možné v každém kroku určit délku l_e každého elementu s využitím Gaussovy kvadratury. Délka modelovaného vlákna l je

$$l = \sum_{e=1}^n l_e, \quad (7.6)$$

kde n je počet elementů. Celkový vektor podélných elastických sil \mathbf{Q}_l vlákna lze následně vyjádřit

$$\mathbf{Q}_l = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pro } l < l_0 \quad (\text{tlak}), \\ \mathbf{K}_l(\mathbf{q})\mathbf{q} & \text{pro } l \geq l_0 \quad (\text{tah}). \end{cases} \quad (7.7)$$

Toto nespojitě přepínání podélných elastických sil může způsobit problémy při numerickém řešení, proto je zavedena kubická skoková funkce ve tvaru

$$\text{STEP}(l; x_1; y_1; x_2; y_2) = \begin{cases} y_1 & \text{pro } l \leq x_1, \\ y_1 + (x_2 - x_1) \cdot z^2 \cdot (3 - 2z) & \text{pro } x_1 < l < x_2, \\ y_2 & \text{pro } l \geq x_2, \end{cases} \quad (7.8)$$

kde $z = \frac{l-x_1}{x_2-x_1}$. Tato funkce zajišťuje plynulý přechod funkční hodnoty z y_1 na y_2 v oblasti $x_1 < l < x_2$. Konkrétně pro podélné síly je tato funkce použita v tomto tvaru

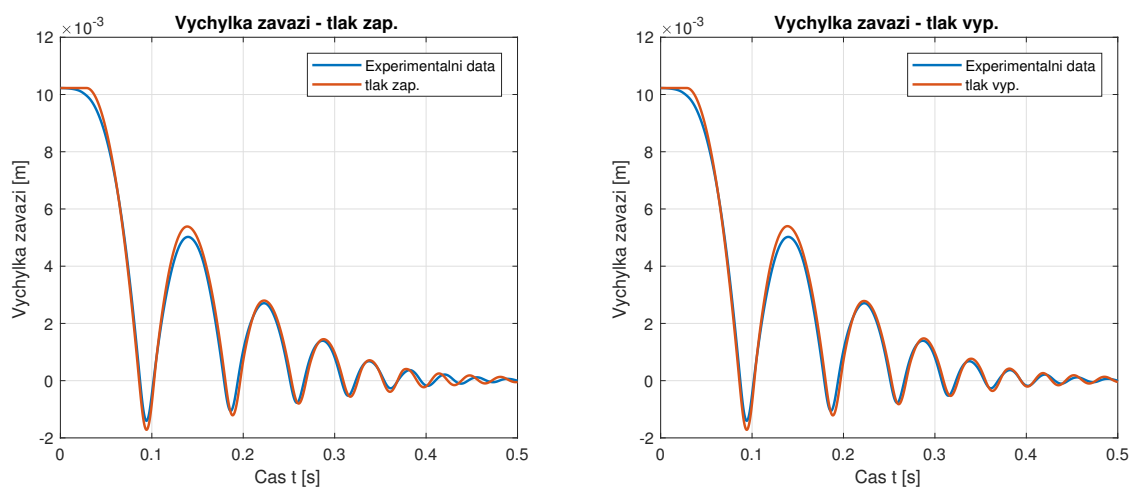
$$\mathbf{Q}_l = \mathbf{K}_l(\mathbf{q})\mathbf{q} \cdot \text{STEP}(l; 0,99 \cdot l; 0; l; 1), \quad (7.9)$$

což znamená, že v rozmezí od $0,99 \cdot l$ do l dochází k zapínání/vypínání podélných elastických sil.

V modelu vlákna bylo uvažováno proporciální tlumení dle vztahu (4.60), kde konstanta α_m je nulová a $\beta_k = 10^{-4}$. Parametry modelu jsou shrnuty v tab. 7.6.

7.2.1. Výsledky simulace a srovnání s experimentem

Základní materiálová data byla čerpána ze záznamů experimentu a článků [56, 57]. První analýzy se týkaly naladění modelu tření za účelem získání přibližné shody mezi experimentálními daty a výsledky numerické simulace. Sledovanou veličinou je výchylka závaží. Pro simulaci jsou použity dva modely vlákna L2T2 — první model uvažuje podélné síly



Obrázek 7.16.: Časový průběh výchylky závaží – model se zapnutými podélnými silami v tlaku (vlevo) a model s vypnutými podélnými silami v tlaku (vpravo).

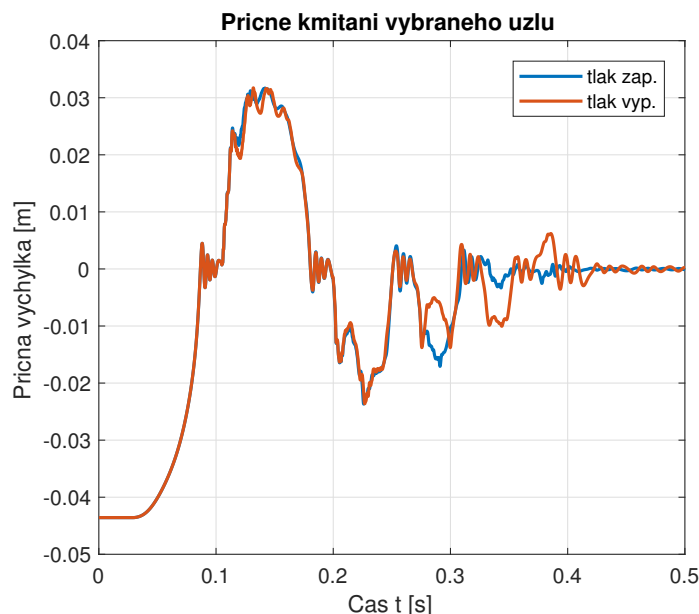
v tlaku a v druhém modelu jsou podélné elastické síly v tlaku vypínány. Výsledky obou modelů jsou velmi podobné, nejlepší shoda s experimentálními daty byla pozorována pro součinitel tření $c_f = 0,156$. Na obr. 7.16 jsou časové průběhy výchylky závaží obou modelů pro naladěný součinitel tření. Na obr. 7.17 je zobrazen časový průběh příčného kmitání vybraného uzlu dvou numerických modelů.

Z výsledků je patrné, že model tření byl naladěný tak, že časové průběhy výchylky závaží získané pomocí numerických simulací přibližně odpovídají experimentálním datům. Dále se ukázalo, že zahrnutí podélných sil v tlaku nemá v tomto případě na výsledky

Parametry modelu

Délka vlákna	l_f	0,599 m
Rozměr průřezu (šířka)	a	0,01 m
Rozměr průřezu (výška)	b	0,001 m
Hustota materiálu vlákna [56]	ρ_f	272 kg·m ⁻³
Youngův modul pružnosti materiálu vlákna [56]	E	6,23 · 10 ⁹ Pa
Tíhové zrychlení	g	9,81 m·s ⁻²
Poissonova konstanta	ν	0,3
Hmotnost závaží	m	3,096 kg
Úhel nakloněné roviny	α_{nakl}	$\frac{\pi}{4}$ rad
Charakteristická rychlost pro tření (5.38)	v_0	0,1 m·s ⁻¹
Výchozí součinitel tření	c_f	0,155
Počáteční nadzvednutí závaží	u_0	0,01 m
Moment setrvačnosti průřezu [53]	$I = \frac{ab^3}{12}$	8,33 · 10 ⁻¹³ m ⁴

Tabulka 7.6.: Parametry modelu závaží kmitajícího na tenkém vlákně.



Obrázek 7.17.: Časový průběh příčného kmitání vybraného uzlu pro dva numerické modely.

numerických simulací dominantní vliv, protože vlákno se vlivem působení vlastní tíhy prohne a je následně namáháno na ohyb. Zahrnutí podélných sil v tlaku by mělo vliv v případě, že by závaží kmitalo ve svislém směru. Hlavním přínosem této aplikace je experimentální verifikace ANCF modelu vlákna pro jednoduchý mechanický systém.

7.3. Detailní model interakce lana a kladky

Následující aplikace ANCF elementů je zaměřena na vyšetřování dynamického chování lana, které je v kontaktu s kladkou. Tento druh soustavy těles je často součástí rozsáhlejších vláknových a lanových struktur, mezi které patří i roboti. Lana v této aplikaci mohou mít několik funkcí, například vyztužení vázaného mechanického systému pomocí předpjatých lanových členů či přímo aktivní funkci z hlediska řízení pohybu robotické struktury. Všeobecnou výhodou použití lan jako členů vázaných mechanických soustav je pak jejich nízká hmotnost v porovnání s tuhými členy. Pro dosažení požadovaných vlastností mechanické soustavy jsou lana často vedena přes kladky, které mohou být rotačně uložené v prostoru rámu či přímo součástí robotické struktury. Detailní model interakce lana a kladky pak umožňuje analyzovat možný prokluz lana, odlehnutí lana při rychlém pohybu či příčné rozkmitání lana vlivem pohybu kladky.

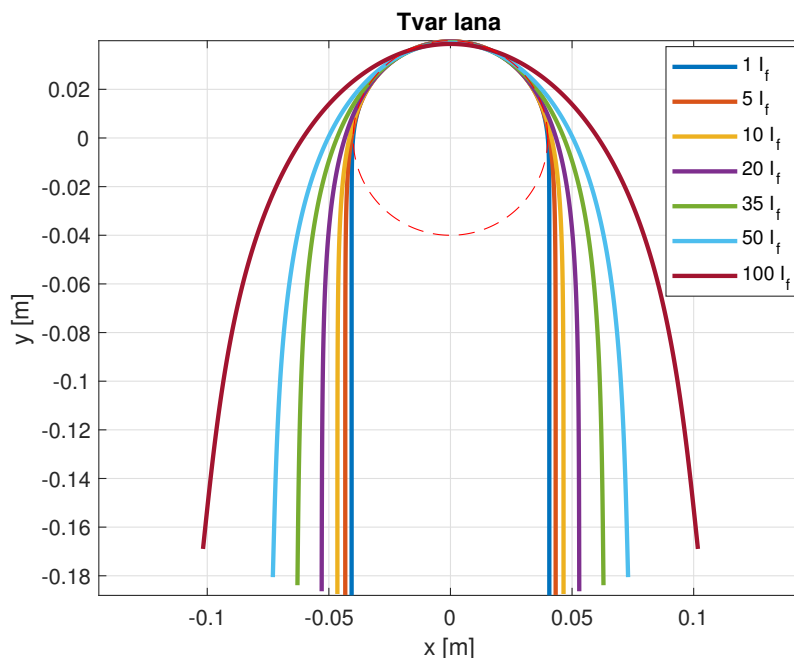
V této podkapitole jsou využity mimo jiné postupy pro modelování kontaktních sil popsané v kapitole 5.2. Nejdříve je popsána jednoduchá statická analýza volně položeného lana na kladce, tedy případ, kde se projeví především normálová kontaktní síla mezi lanem a kladkou. Dále je vyšetřován pohyb soustavy složené z kladky a lana se dvěma

závažími. Zde se již projevuje vliv třecích sil. Na konci této podkapitoly je ukázána verifikace popsaných postupů s využitím modelu reálného mechanismu obsahujícího kladku a vlákno.

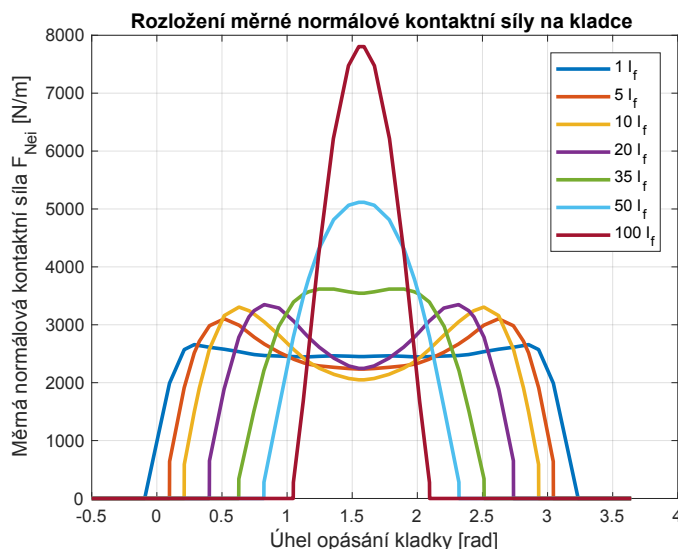
7.3.1. Analýza volně položeného lana na kladce

První výpočet je zaměřen na aplikaci modelu normálové kontaktní síly mezi pevnou kladkou a poddajným lanem. Výchozí průřezové a materiálové parametry lana jsou shodné s parametry v tab. 7.6. Lano má celkovou délku $l_f = 0,5$ m a na jeho koncích jsou uvažována závaží o hmotnosti 10 kg. Toto lano je volně symetricky položeno na kladku o poloměru 4 cm. Pro modelování normálové kontaktní síly je použit model Hunta a Crossleyho (5.33), kde výchozí kontaktní tuhost je $K = 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^{-n}$, exponent $n = 1,5$ a kontaktní tlumicí faktor je $D_f = 0,5 \text{ s}\cdot\text{m}^{-n}$. Na lano a závaží působí tíhová síla a kladka je uvažována jako nehybná. Jelikož se jedná o rovinnou úlohu, pro jednoduchost byl použit ANCF nosníkový element typu L2T2.

Na obr. 7.18 je ukázán výsledný tvar lana přehozeného přes kladku pro různé násobky kvadratického modulu průřezu. Celkem bylo použito 30 nosníkových elementů. Se vzrůstajícím modulem roste také ohybová tuhost, lano se proto více rozevívá. Takovýto druh analýzy má především význam z hlediska návrhu vhodného poloměru kladky a tuhosti lana tak, aby při různých provozních stavech bylo dosaženo požadovaného úhlu opásání, tedy aby nebylo příliš tuhé lano ohýbáno na příliš malé kladce. S těmito výsledky



Obrázek 7.18.: Tvar lana volně položeného na kladce pro různé násobky kvadratického momentu průřezu.



Obrázek 7.19.: Rozložení měrné normálové kontaktní síly v závislosti na úhlu kladky pro různé násobky kvadratického momentu průřezu.

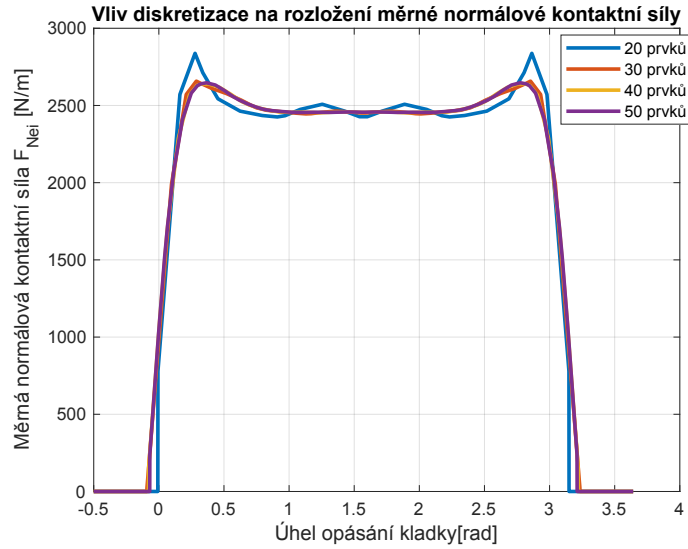
souvisí i obr. 7.19, kde je ukázáno rozložení měrné normálové kontaktní síly mezi kladkou a lanem v závislosti na úhlu kladky, kdy úhel $\frac{\pi}{2}$ odpovídá hornímu vrcholu kladky. Měrná normálová síla představuje kontaktní sílu \mathbf{F}_C vyjádřenou v Gaussových bodech z výrazu (5.50). Rozložení měrné normálové kontaktní síly se pro různé násobky kvadratického průřezového modulu liší, nicméně vždy je výsledné rozložení symetrické kolem středu kladky. Pro kontrolu správnosti výpočtu byla napočítána suma svislých složek všech normálových kontaktních sil \mathbf{Q}_{Ce} (5.50), která v každém výpočtu odpovídala vlastní tíze závaží a lana, takže bylo dosaženo silové rovnováhy ve vertikálním směru.

Poslední statická analýza se týká vlivu počtu prvků diskretizace lana na rozložení měrné normálové kontaktní síly. Na obr. 7.20 je ukázán průběh měrné normálové kontaktní síly na kladce pro různý celkový počet prvků diskretizace lana. Jednoduchým přepočtem lze určit počet prvků na polovinu obvodu kladky, tedy na opásanou část kladky. V případě 20 prvků je opásání tvořeno 5 prvky, v případě 40 prvků diskretizace lana je pak opásání tvořeno 10 prvky. Z obr. 7.20 je patrné, že v případě použití 20 prvků je výsledek mírně rozdílný především v krajní oblasti opásání a s vyšším počtem elementů se průběh postupně vyhlazuje.

7.3.2. Dynamická analýza interakce lana a kladky

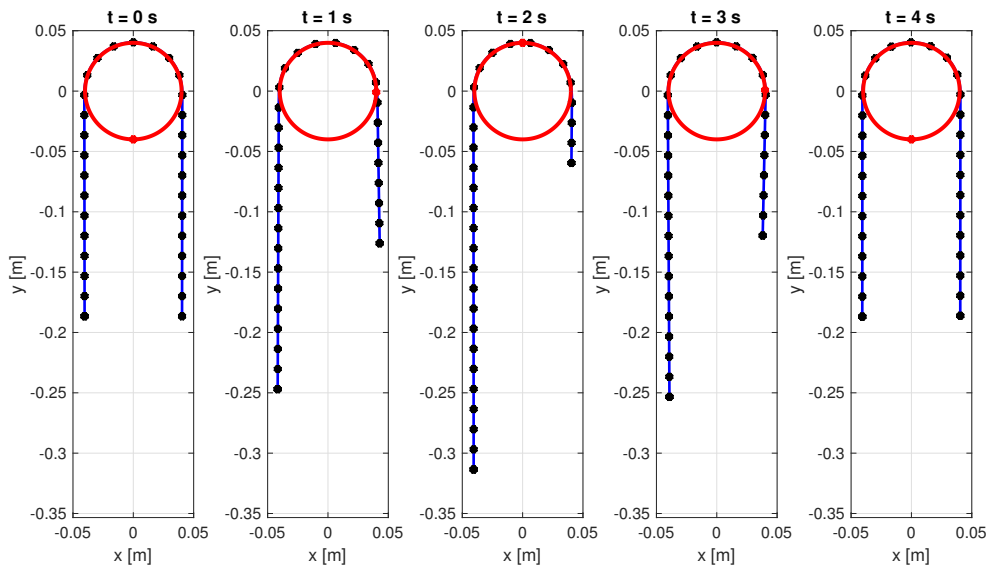
V této podkapitole je popsána analýza interakce lana a kladky při předepsané rotaci kladky. V tomto případě již dochází k možnému relativnímu pohybu mezi lanem a opásanou částí kladky, projeví se tedy zvolený model tření a jeho nastavení.

Jako testovací příklad byl použit mechanický systém z předchozí podkapitoly, tedy půlmetrové lano s materiálovými parametry z tab. 7.6 symetricky přehozené přes kladku o poloměru 4 cm. Na každém konci lana je závaží předepsané hmotnosti. Třecí síly mezi

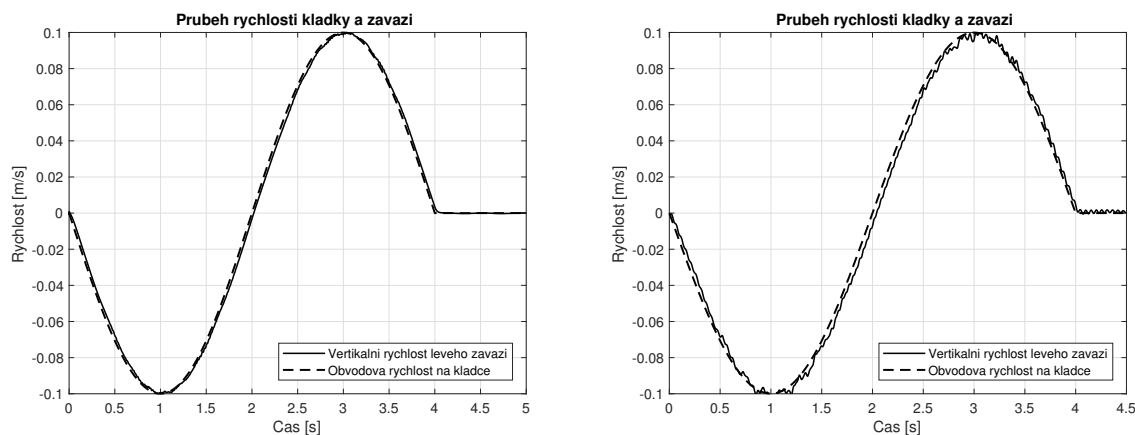


Obrázek 7.20.: Rozložení měrné normálové kontaktní síly v závislosti na úhlu kladky pro různý počet prvků diskretizace lana.

lanem a kladkou byly vypočítány na základě vyhlazeného Coulombova modelu podle vztahu (5.38). Důležitými parametry tohoto třecího modelu jsou součinitel tření c_f a malá charakteristická relativní rychlost v_0 , která definuje oblast vyhlazení třecí síly kolem nulové relativní rychlosti.



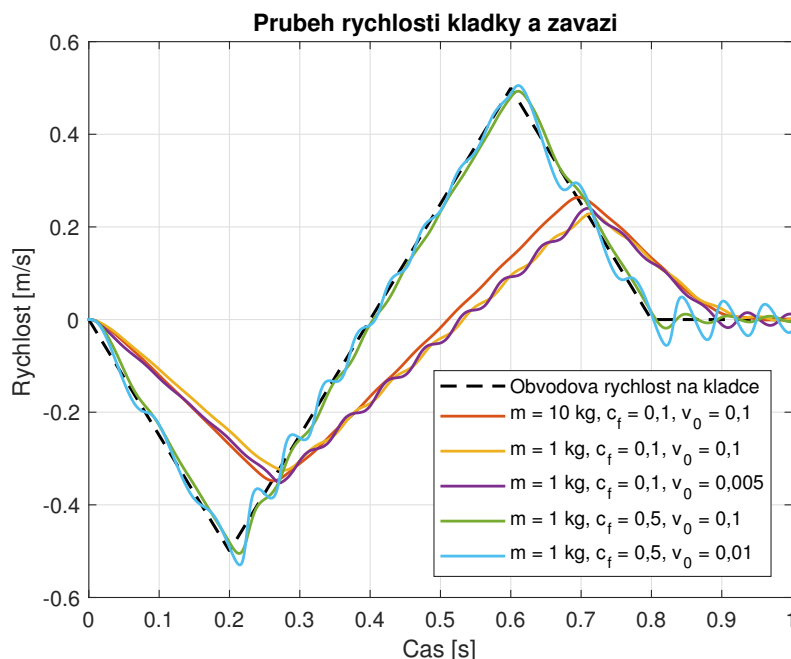
Obrázek 7.21.: Tvar lana a natočení kladky v jednotlivých časových okamžicích při pomalém pohybu kladky.



Obrázek 7.22.: Časový průběh obvodové rychlosti kladky a vertikální rychlosti levého závaží pro hmotnost závaží 10 kg (vlevo) a pro hmotnost závaží 1 kg (vpravo).

Spojení konců lana s jednotlivými závažími je realizováno zavedením vazbových rovnic. Lano je v tomto případě diskretizováno pomocí 30 prostorových kabelových ANCF elementů nižšího řádu. Pro sestavení pohybových rovnic byla využita metoda rozšířených Lagrangiánů, jak je popsána v podkapitole 5.1.2. Penaltový koeficient byl nastaven $p = 10^6$ a škálovací koeficient vazeb jako $k = 1$. Pro numerické řešení pohybu mechanické soustavy byla použita Newmarkova metoda kombinovaná s kvazi-Newtonskou Davidonovou metodou. Tečná matice tuhosti \mathbf{K}_t byla určena dle zjednodušeného tvaru (6.28). Jak je zmíněno v podkapitole 6.1.2, v Jacobiho matici vektoru residuí \mathbf{S}_t bývá často zanedbán příspěvek od Jacobiho matice vnějších sil, což bylo využito i v simulacích v rámci této podkapitoly. Důvodem je silná nelinearita kontaktních sil a z té plynoucí složitost vyjádření tvaru Jacobiho matice. I přes tato zjednodušení, které mohou vést k mírně nepřesné iterační matici, bylo dosaženo celkem rychlé konvergence kvazi-Newtonovy metody. Časový krok simulace byl zvolen s ohledem na nelineární kontaktní síly jako $h = 0,0001$ s a bylo uvažováno numerické tlumení pomocí parametru $\alpha = 0,05$ Newmarkovy integrační metody.

V prvním výpočtu jsou uvažována dvě závaží s hmotností 10 kg a relativně pomalý pohyb kladky, která se během čtyř vteřin pootočí o 180 stupňů proti směru hodinových ručiček a zpět se sinovým průběhem rychlosti rotace. Parametry třecího modelu jsou nastaveny na $c_f = 0,1$ a $v_0 = 0,1$ m·s⁻¹, což odpovídá relativně nízkému tření mezi kladkou a lanem. Na obr. 7.21 je ukázán tvar lana a natočení kladky v jednotlivých časových okamžicích při pomalém pohybu kladky a na obr. 7.22 vlevo je ukázán časový průběh obvodové rychlosti kladky a vertikální rychlosti levého závaží příslušné simulace s relativně pomalým předepsaným pohybem kladky. Je patrné, že i přes zadané parametry tření dochází pouze k minimálnímu prokluzu mezi kladkou a lanem. Lano se na konci simulace nachází téměř přesně ve výchozí konfiguraci. Výpočtový čas této čtyř a půl vteřinové simulace se pohybuje do 70 vteřin. Průměrný počet iterací kvazi-Newtonovy metody v jednom časovém integračním kroku byl pouze 2,96. Lze tedy usoudit, že použité



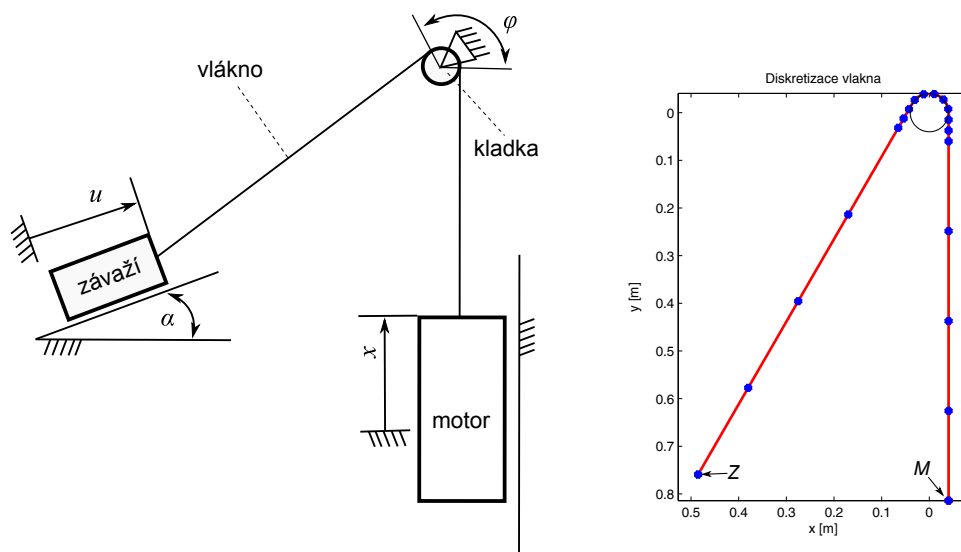
Obrázek 7.23.: Časový průběh obvodové rychlosti kladky a vertikální rychlosti levého závaží pro různé nastavení modelu.

metody dobře konvergují k řešení. Na obr. 7.22 vpravo je pak obdobná simulace pouze s rozdílnou hmotností obou závaží, která činí 1 kg. V tomto případě je prokluz mírně znatelnější a celkový průběh vertikální rychlosti závaží je více rozkmitaný, což je způsobeno mimo jiné houpáním lehkého závaží v horizontálním i vertikálním směru.

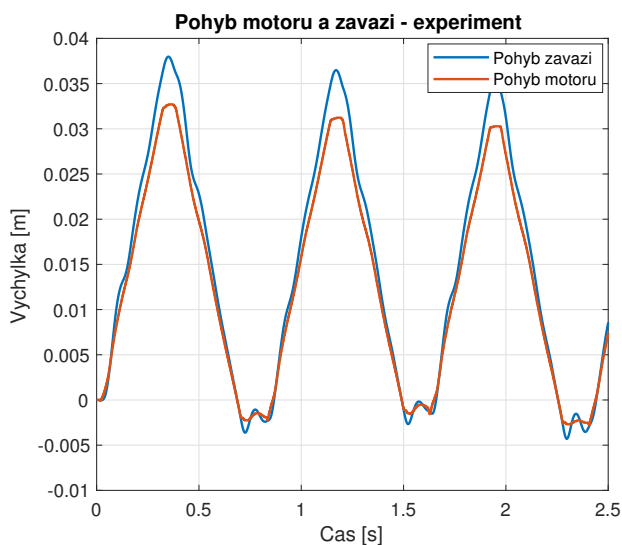
V dalším výpočtu je uvažován rychlejší pohyb kladky, jejíž rotační rychlost má předepsaný pilovitý charakter. Na obr. 7.23 je ukázán časový průběh obvodové rychlosti na kladce a rychlosti levého závaží pro různé nastavení hmotnosti a parametrů tření. Při výchozích parametrech tření $c_f = 0,1$ a $v_0 = 0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je patrné, že pro obě nastavené hmotnosti závaží dochází k výraznému prokluzu, v případě menšího kilového závaží je prokluz opět větší. Při zmenšení charakteristické relativní rychlosti na $v_0 = 0,005 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ se třecí model více přibližuje ideálnímu Coulombovu modelu tření. Maximální hodnota tření mezi lanem a kladkou je dosažena při menší relativní rychlosti, takže se model více blíží k postihnutí efektu ulpívání. Vyšší nastavení parametru v_0 tak vede k většímu vyhlazení rychlosti pohybu závaží. Při nastavení většího součinitele tření $c_f = 0,5$ je dosaženo minimálního prokluzu.

7.3.3. Srovnání s experimentem

Následující aplikace metod a postupů pro modelování interakce vlákna a kladky je zaměřena na simulaci dynamiky reálného mechanismu, jehož schéma je vlevo na obr. 7.24. Uvažovaný mechanismus je složen z motoru, závaží a kladky. Popis experimentálního standu lze nalézt v pracích [56, 57]. Lineární motor pohybuje ve vertikálním směru s kon-



Obrázek 7.24.: Schéma mechanismu a znázornění diskretizace vlákna pomocí ANCF elementů.



Obrázek 7.25.: Vstupní pohyb motoru a výsledný pohyb závaží při experimentálním měření.

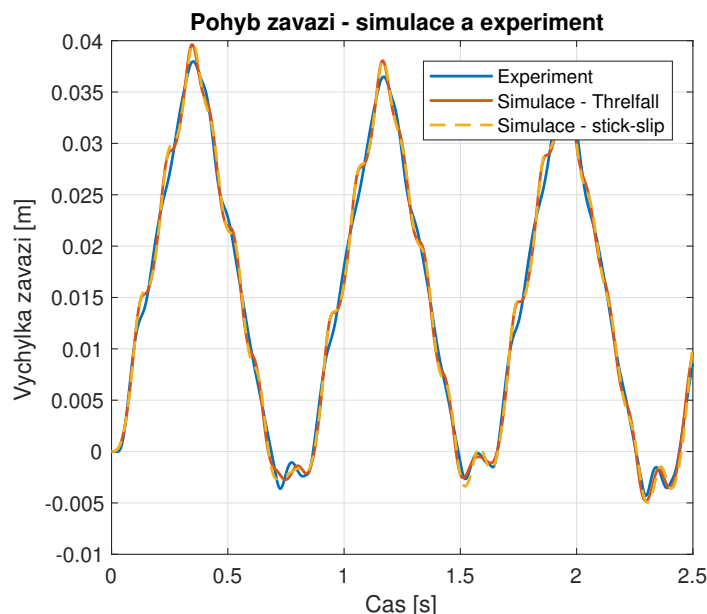
cem vlákna. To je vedeno přes kladku a na jeho druhém konci je uchyceno závaží, které se pohybuje po nakloněném vedení. Na obr. 7.25 jsou časové průběhy pohybu motoru a závaží při experimentálním měření. Pohyb motoru pak sloužil jako vstup do numerických simulací a výsledný pohyb závaží byl použit ke srovnání výsledků simulace s experimentem.

Pro modelování vlákna byl použit rovinný ANCF element L2T2. Na obr. 7.24 vpravo je znázorněna diskretizace vlákna. Rovné úseky mezi motorem a kladkou a mezi

Parametry vlákna		
Délka vlákna	l_f	1,82 m
Rozměr průřezu (šířka)	a	0,01 m
Rozměr průřezu (výška)	b	0,001 m
Hustota materiálu vlákna [56]	ρ_f	272 kg·m ⁻³
Youngův modul pružnosti materiálu vlákna [56]	E	6,23 · 10 ⁹ Pa
Poissonova konstanta	ν	0,3
Moment setrvačnosti průřezu [53]	$I = \frac{ab^3}{12}$	8,33 · 10 ⁻¹³ m ⁴
Parametry kladky		
Poloměr kladky	r_p	0,04 m
Šířka kladky	t_p	0,01 m
Moment setrvačnosti kladky	I_p	5,852 · 10 ⁻⁴ m ⁴
Počáteční úhel opásání	φ_p	$\frac{5}{6}\pi$ rad
Parametry závaží		
Hmotnost závaží	m	5,083 kg
Sklon nakloněného vedení	α	$\frac{1}{6}\pi$ rad
Součinitel tření kontaktu závaží/vedení	c_{fw}	0,15
Charakteristická rychlost pro tření (5.38)	v_0	0,1 m·s ⁻¹
Parametry kontaktu vlákno/kladka		
Normálová kontaktní tuhost	K	1,5 · 10 ⁷ N·m ⁻ⁿ
Tlumicí faktor — model Hunt–Crossley (5.33)	D_f	0,5 s·m ⁻ⁿ
Kontaktní exponent (5.33)	n	1,5
Dynamický součinitel tření při skluzu	c_f	0,5
Statický součinitel tření	c_s	0,7
Tuhost modelu ulpívání těles	K_{st}	10 ⁵ N·m ⁻¹
Tlumení modelu ulpívání těles	D_{st}	3 · 10 ² N·s·m ⁻¹
Ostatní parametry		
Tíhové zrychlení	g	9,81 m·s ⁻²

Tabulka 7.7.: Parametry uvažovaného mechanismu.

kladkou a závažím byly modelovány pomocí čtyř elementů. V okolí kladky bylo vlákno rozděleno na deset elementů, aby bylo postihnuto zakřivení vlákna kolem kladky. Kladka byla modelována jako tuhé těleso s jedním rotačním stupněm volnosti. Závaží je v modelu reprezentováno hmotným bodem. Vazba mezi závažím a vedením a mezi závažím a vláknem byla realizována pomocí vazebních podmínek. Pohyb motoru je v modelu reprezentován předepsaným pohybem (kinematickým buzením) uzlu M ve směru osy y



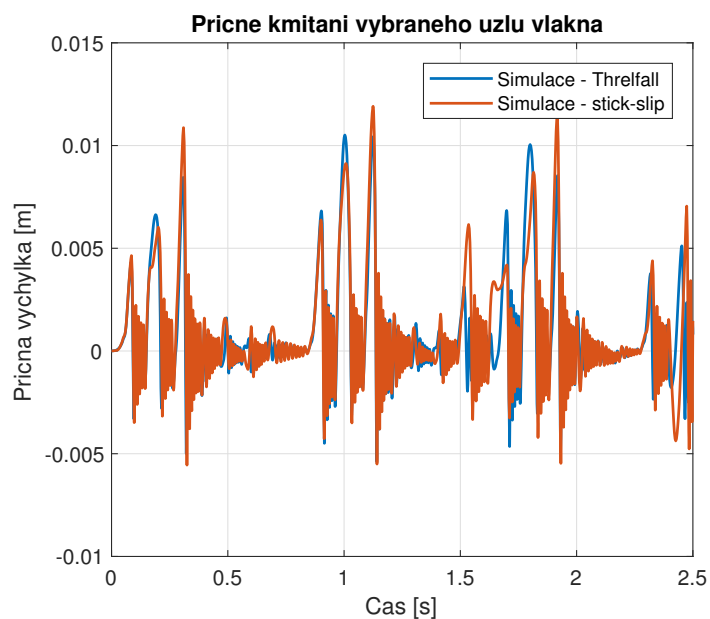
Obrázek 7.26.: Časový průběh pohybu závaží získaný při experimentu a při simulaci.

a nulovým pohybem ve směru osy x . K numerickému řešení pohybových rovnic byla použita funkce `ode23t` programu MATLAB. Pro stabilizaci numerického řešení byla použita Baumgartova stabilizace [23, 32]. Vyhodnocení kontaktu mezi kladkou a elementem vlákna probíhá v každém časovém okamžiku v pěti bodech elementu, jejichž rozmístění je dáno numerickou integrační Gaussovou metodou. Pro popis tření mezi závažím a vedením byl použit Threlfallův model (5.38) a pro popis tření mezi vláknem a kladkou byl testován model uvažující ulpívání a skluz 5.40 (stick-slip model) a také jednodušší Threlfallův model.

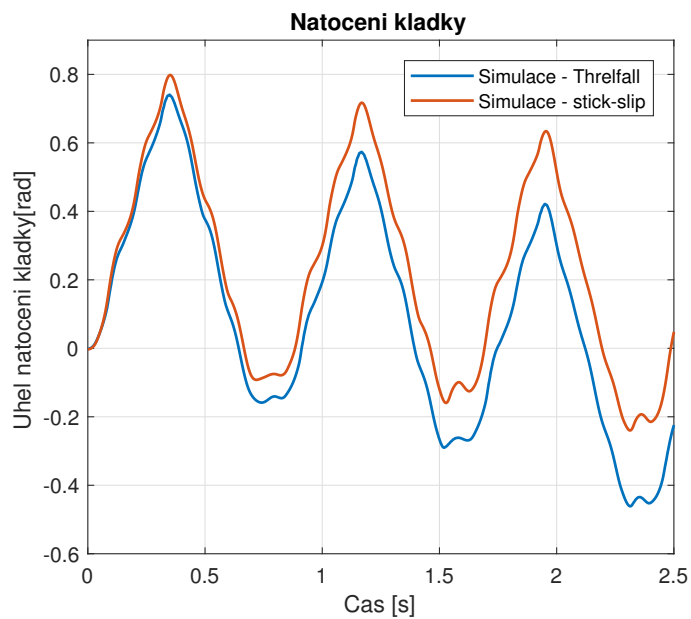
Uvažované parametry modelu jsou shrnuty v tab. 7.7. V modelu vlákna bylo uvažováno proporciální tlumení dle vztahu (4.60), kde konstanta α_m je nulová a $\beta_k = 10^{-4}$.

Vypočtená dynamická odezva závaží při použití ANCF elementů pro dva modely tření mezi kladkou a vláknem je ukázána na obr. 7.26. Výsledky simulací mohou být použity pro další zkoumání chování vláken, například na obr. 7.27 je znázorněn časový průběh příčného kmitání v prostředním uzlu mezi kladkou a motorem. Výsledné příčné kmitání vláken může způsobovat problémy při přesném řízení mechanismů. Z výsledků je patrné, že pro oba modely tření bylo dosaženo dobré shody s experimentálními daty.

Na obr. 7.28 je ukázán časový průběh úhlu natočení kladky při použití dvou různých modelů tření. I když výsledný pohyb závaží, viz obr. 7.26, je pro obě simulace téměř shodný, úhel natočení kladky se již znatelně liší. Dle očekávání je v případě Threlfallova modelu tření pozorován větší prokluz, zatímco v případě stick-slip modelu tření, který postihuje ulpívání těles, je prokluz menší. Pokud by během experimentu bylo zaznamenáváno i natočení kladky, umožňovalo by to přesněji naladit příslušné parametry třecích modelů pro získání reálnějšího pohybu kladky.



Obrázek 7.27.: Příčné kmitání uzlu mezi motorem a kladkou pro dva modely tření mezi vláknem a kladkou.

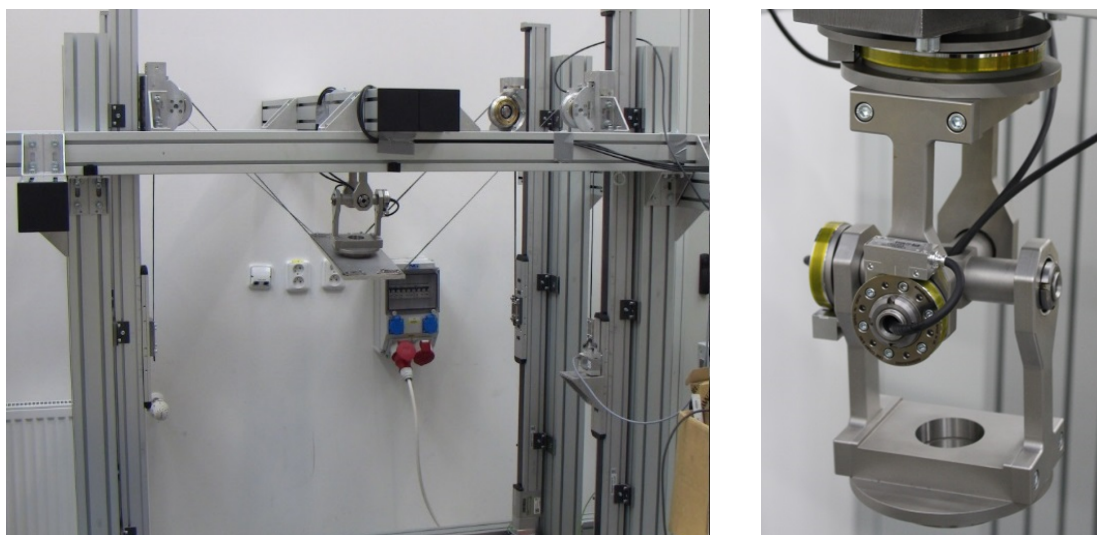


Obrázek 7.28.: Časový průběh úhlu natočení kladky.

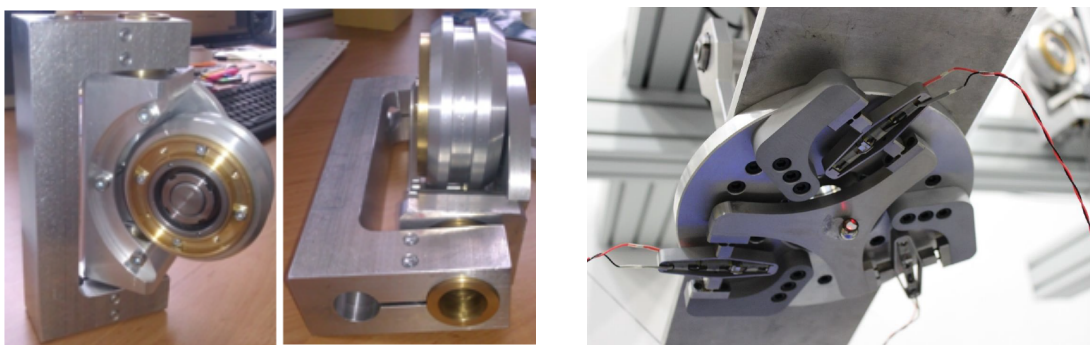
7.4. Modelování a dynamická analýza vláknového mechanického systému Quadrosphere

Vláknový mechanický systém pojmenovaný Quadrosphere vznikl na Fakultě strojní Českého vysokého učení technického v Praze v rámci projektu GAP101/11/1627 Naklápěcí mechanismy založené na vláknové paralelní kinematické struktuře s bezvůlovým řízením. Jedná se o robotický systém s tzv. redundantní paralelní kinematickou strukturou [75]. Paralelní struktury jsou charakterizovány tím, že koncový pohyblivý bod zájmu je se základním rámem propojen uzavřenými mechanickými řetězci. Oproti sériové struktuře, která využívá otevřený mechanický řetězec mezi koncovým bodem a rámem, vykazují paralelní struktury větší tuhost a tím i lepší dynamické vlastnosti. Výraz redundantní vyjadřuje fakt, že počet pohonů dané struktury je vyšší než počet stupňů volnosti koncového bodu. Více o výhodách a nevýhodách různých kinematických struktur lze nalézt v [75].

Mechanický systém Quadrosphere je ukázán na obr. 7.29 vlevo. Skládá se z obdélníkové platformy spojené pomocí sférického kloubu k pevnému rámu. Sférický kloub je na obr. 7.29 vpravo a tvoří ho kardanův kloub, jehož horní vidlice je rotačně uložena k rámu. Toto uložení umožňuje rotaci kolem vertikální osy. Natočení sférického kloubu ve třech navzájem kolmých směrech (tedy kardanovy úhly) je měřeno pomocí snímačů. Systém obsahuje celkem čtyři vláknové podsystémy. V každém ze čtyř rohů obdélníkové platformy je uchyceno jedno lehké kompozitové vlákno. Každé vlákno je vedeno přes jednu kladku rotačně uloženou k naklápěcímu držáku, který může rotovat kolem svislé osy, čímž je zajištěno, že kladka sleduje směr vlákna. Naklápěcí klapka je ukázána na obr. 7.30 vlevo. Druhý konec vlákna je uchycen k pohonu. Každý ze čtyř pohonů se skládá z vertikálně vedeného pohyblivého vozíku a pevně uloženého servomotoru. Mezi rotací servomotoru



Obrázek 7.29.: Mechanický systém Quadrosphere (vlevo) a sférický kloub s odměřováním třech úhlů natočení (vpravo).



Obrázek 7.30.: Naklápěcí kladka (vlevo) a vybraná aktivní struktura instalovaná na platformě (vpravo).

a posuvem vozíku je šroubový převod, vertikální poloha daného vozíku je tedy dána rotací servomotoru. Detailnější popis jednotlivých komponent mechanismu lze nalézt v práci [75].

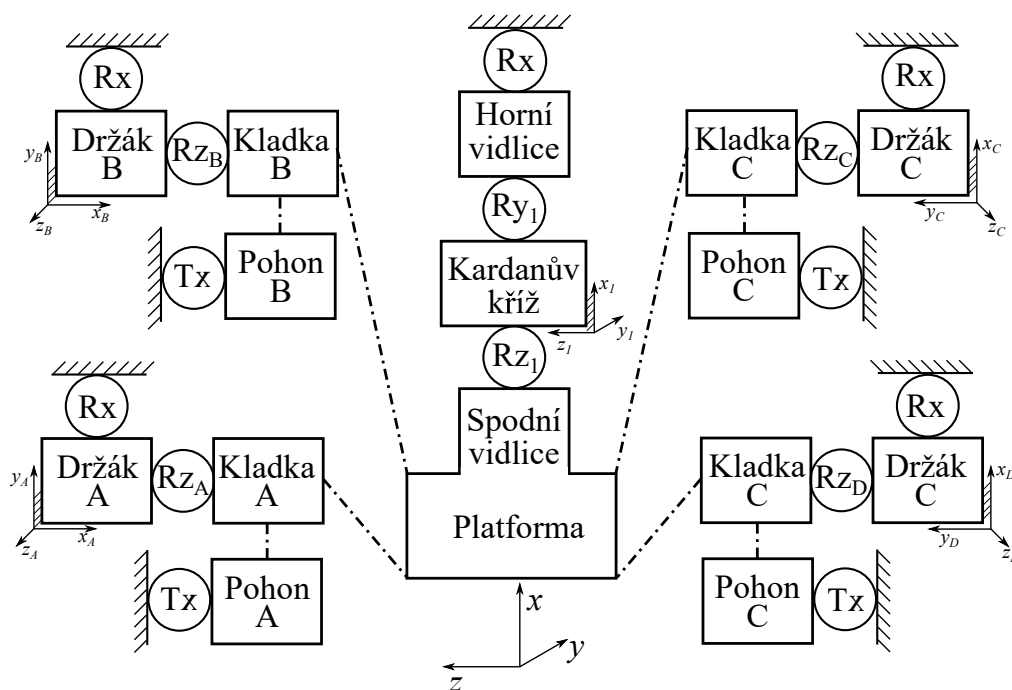
Koncový sledovaný bod je součástí platformy. Za předpokladu tuhých vidlic a kříže sférického kloubu je poloha sledovaného bodu určena třemi kardanovými úhly, tedy třemi stupni volnosti. Výsledné natočení sférického kloubu a tedy i poloha koncového bodu je dána vertikální polohou čtyř pohonů a vzniklými silami v jednotlivých vláknech. Tím je splněna podmínka pro redundantní kinematickou strukturu.

Systém Quadrosphere vznikl za účelem zkoumání vlastností vláknových mechanických systémů s redundantní paralelní kinematickou strukturou a dále pro výzkum a aplikaci pokročilých řídicích algoritmů vhodných pro tento typ soustav. Cílem je přesně řídit pohyb vybraného bodu platformy. V přesnosti řízení se pak projeví mimo jiné i tuhost použitých vláken, jejich předpětí a setrvačnost naklápění kladek. Za účelem zpřesnění polohování vybraného bodu je dále do systému Quadrosphere zakomponována aktivní struktura složená z různých piezoelektrických aktuátorů. Ukázka takové struktury je na obr. 7.30 vpravo. Takto vylepšený systém Quadrosphere pak slouží k výzkumu a aplikaci vícestupňových řídicích algoritmů, neboť kromě řízení čtyř pohonů je nutné vhodnými metodami ovládat i aktuátory.

Pro zkoumání dynamických vlastností systému Quadrosphere i pro testování řídicích algoritmů je účelné použít virtuální výpočtový model. V tomto případě byl pro modelování použit program MSC.Adams.

7.4.1. Tvorba a verifikace modelu v programu MSC.Adams

Před samotným sestavením výpočtového modelu Quadrosphere v programu MSC.Adams bylo vytvořeno kinematické schéma, viz obr. 7.31, které znázorňuje propojení jednotlivých těles (obdélníky) vazbami (kružnice). Označení R představuje rotační vazbu, T reprezentuje posuvnou vazbu mezi tělesy. Písmeno za označením vazby znamená volný stupeň volnosti. Čerchovaná čára v kinematickém schématu naznačuje vedení lan. Po tomto rozboru mechanického systému byla do prostředí programu MSC.Adams importována CAD

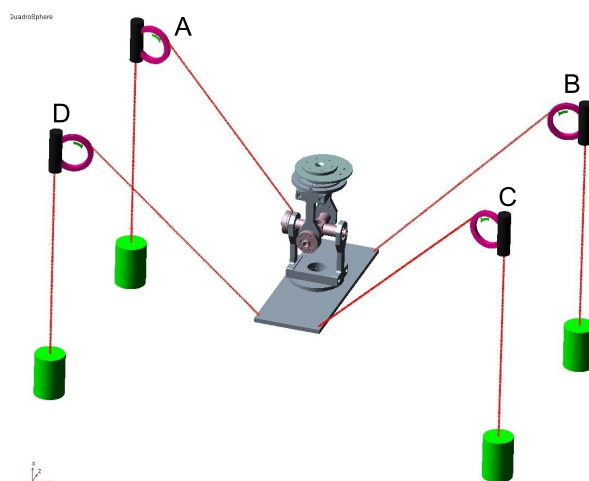


Obrázek 7.31.: Kinematické schéma Quadrosphere.

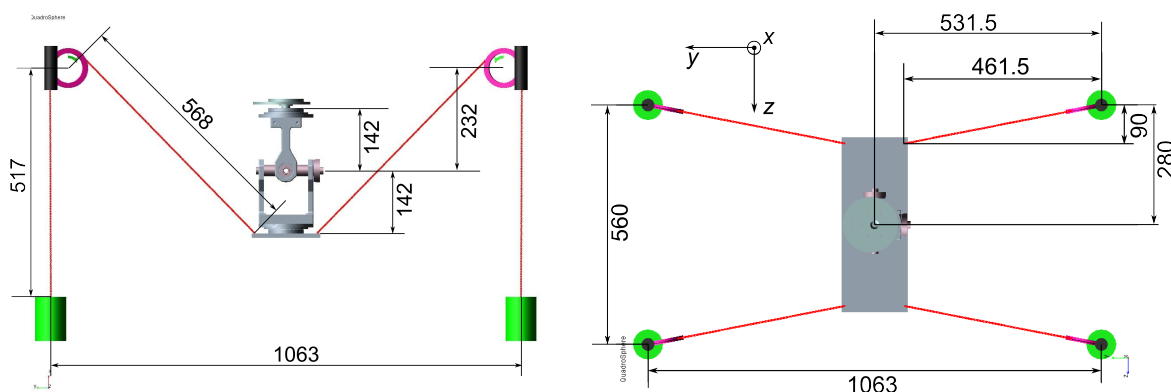
data pro horní vidlici, kardanův kříž, spodní vidlici a platformu. Hmotnost a momenty setrvačnosti těchto těles byly určeny programem MSC.Adams na základě importované geometrie a zadané hustoty materiálu. Držáky kladek a vozíky pohonů byly do modelu zahrnuty pomocí náhradních těles. Ty měly nastaveny hodnoty hmotnosti a momentů setrvačnosti podle výpočtu z CAD modelačního nástroje SpaceClaim s využitím jejich geometrie a hustoty materiálu. Všechna zmíněná tělesa jsou uvažována jako tuhá.

Pro modelování vlákna a kladky byl použit kabelový modul programu MSC.Adams, který je stručně popsán v kapitole 3.3. Vizualizace celkového modelu s vyznačenými kabelovými podsystémy je na obr. 7.32. Celkově byly vytvořeny čtyři modely. Model 1 využívá zjednodušený model vlákna kabelového modulu. Modely 2 a 3 jsou založeny na diskretizovaném modelu vlákna a liší se ve velikosti kabelového elementu, neboli vzdálenosti dvou sousedních náhradních hmotných bodů. Model 2 má nastaven kabelový element délky 16 mm, model 3 pak 40 mm. Předchozí tři modely mají koncové body vláken pevně uchyceny s příslušnými pohony a rohy ovládané platformy. Celková délka jednoho vlákna je 1,2 m. Hlavní výhodou modelu 1 spočívá v jeho jednoduchosti a tudíž i výpočetní rychlosti, nepostihne však případné příčné kmitání vlákna. Modely 2 a 3 by měly toto kmitání teoreticky postihnout, jsou však velmi výpočtově náročné.

Proto byl navrhnout a vytvořen model 4, který představuje snahu kombinovat výhody obou základních typů modelů a současně zachovat potřebnou jednoduchost. V místě opásání kladky a v jejím blízkém okolí je použit zjednodušený model vlákna definovaný pomocí kabelového modulu, protože ten má jednodušeji analyticky vyjádřenou interakci vlákna s kladkou. Délka opásání v počátečním stavu mechanismu je přibližně 115 mm.



Obrázek 7.32.: Vizualizace celkového modelu s označením jednotlivých kabelových pod-systémů.



Obrázek 7.33.: Vizualizace celkového modelu se základními rozměry v [mm].

Celková délka vlákna modelovaného pomocí kabelového modulu však byla zvolena jako 300 mm za účelem zahrnutí dostatečné rezervy při pohybu vláken. Zbylé úseky vláken, tzn. od kladky svisle k pohonu a od kladky šikmo k rohu platformy, jsou do modelu zahrnuty pomocí point-mass přístupu dle kapitoly 3.2. Vzdálenost dvou sousedních hmotných bodů je 100 mm a celkově na jeden vláknový podsystem bylo použito 9 hmotných bodů, 4 pro svislý úsek a 5 pro delší šikmý úsek. Hmotné body jsou propojeny pouze nelineárními silami, které představují podélnou tuhost vláken, a nejsou uvažovány žádné ohybové či torzní tuhosti. Tento model základním způsobem postihuje možné příčné kmitání a zároveň je výpočtově velmi efektivní. Nevýhoda modelu 4 spočívá v omezení pracovního prostoru platformy, neboť v případě, že jeden z konců 300 mm úseku vlákna modelovaného pomocí kabelového modulu dorazí až k samotné kladce, dojde k přerušení a selhání výpočtu. Ve všech modelech je uvažována tuhost jednoho metru vlákna jako $1,16 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ dle práce [54]. Základní rozměry mechanického systému jsou znázorněny na obr. 7.33.

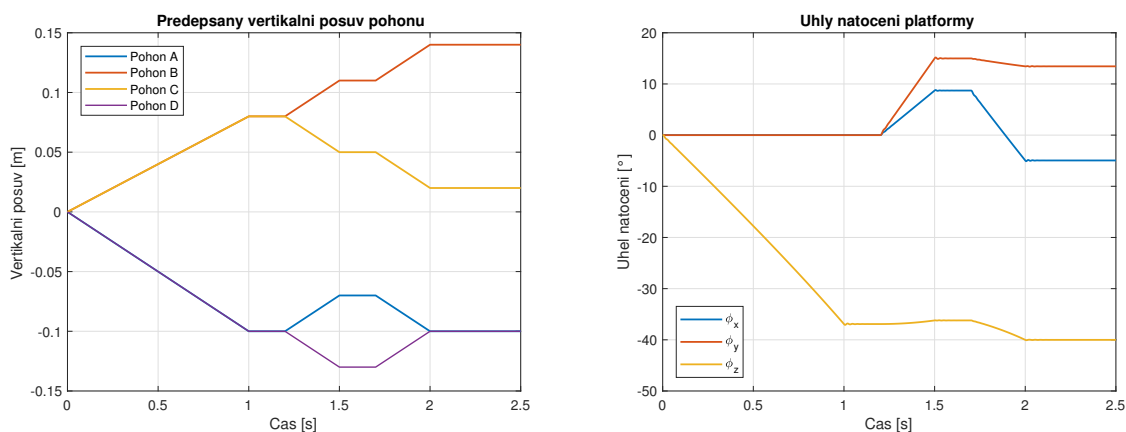
Vlastní tvar	Vlastní frekvence [Hz]				
	Experiment	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4
Rotace φ_y	36,1	40,0	40,5	38,7	40,4
Rotace φ_z	42,7	42,8	43,2	43,0	43,4
Rotace φ_x	48,1	46,2	48,2	57,5	46,8

Tabulka 7.8.: Výsledky modální analýzy.

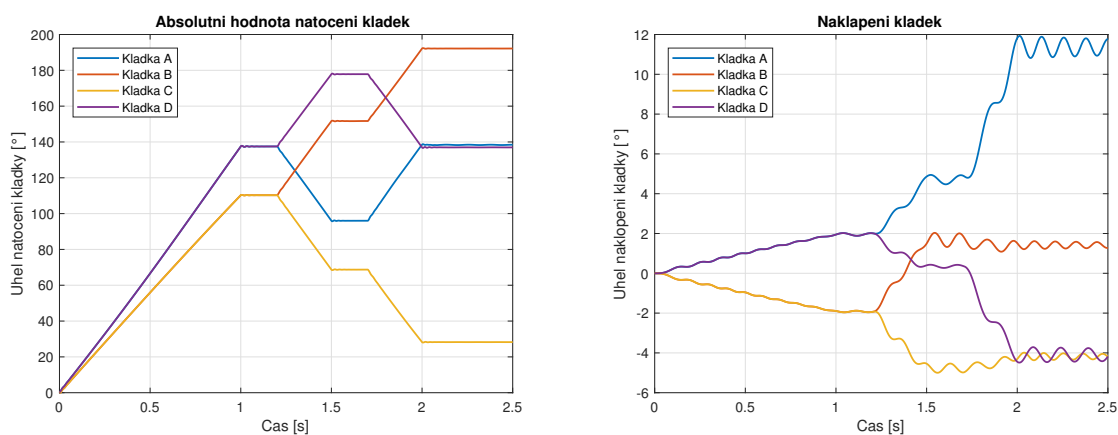
Verifikace vytvořených modelů spočívá v porovnání výsledků modální analýzy s experimentálně naměřenými modálními vlastnostmi. Ty byly změřeny na reálném zařízení v laboratoři Fakulty strojní ČVUT. Při modální analýze výpočtových modelů bylo uvažováno předpětí vláken silou 50 N, tedy stejně jako při experimentu. Pro výpočet byl použit MSC.Adams Vibration plugin. Protože má mechanický systém tři rotační stupně volnosti φ_x , φ_y , a φ_z definující polohu koncového bodu, jsou porovnány vlastní frekvence dominantních vlastních tvarů, při nichž dochází k pohybu právě těchto stupňů volnosti. Výsledky experimentální a výpočtové modální analýzy jsou shrnuty v tab. 7.8. Z uvedených hodnot je patrné, že modely 1, 2 a 4 jsou v relativně dobré shodě s experimentem bez nutnosti jakéhokoliv dalšího ladění hmotnostních či tuhostních parametrů. Model 3 se výrazně liší ve frekvenci vlastního tvaru, při němž dochází k rotaci kolem svisté osy. Tato nepřesnost je připisována příliš hrubé diskretizaci vlákna. Celkově však výpočet v případě modelů 2 a 3 trval mnohonásobně déle a byl velmi neefektivní. Navíc ve výsledcích modální analýzy těchto modelů nebyly úspěšně identifikovány módy příčného kmitání vláken a nebyl ani identifikován tvar kmitavého naklápění kladek. Tyto problémy jsou nejspíše způsobeny špatnou linearizací těchto silně nelineárních modelů pro účel výpočtu modálních vlastností. V modelu 1 a 4 byl identifikován vlastní tvar naklápění kladek s vlastní frekvencí 3,9 Hz. Příčné kmitání vláken v modelu 4 bylo pozorováno na frekvenci 101 Hz pro delší úsek mezi kladkou a rohem platformy a na frekvenci 112 Hz pro kratší úsek mezi kladkou a pohonem. Frekvence těchto vlastních tvarů nebyly měřeny během experimentu.

7.4.2. Možnosti využití multibody modelu Quadrosphere

Modely 2 a 3, jejichž vlákna využívají diskretizovaný model z kabelového modulu programu MSC.Adams, vykazují velké problémy při numerické simulaci v časové oblasti. Testovány byly všechny numerické řešiče programu MSC.Adams a žádný z nich nebyl dostatečně efektivní z hlediska rychlosti výpočtu, aby mohly být zmíněné modely dále využity. Navíc většina numerických řešičů měla dokonce problém s konvergencí řešení, takže výpočty končily předčasně. Ukázalo se, že diskretizovaný model stručně popsáný v kapitole 3.3 není příliš vhodný pro simulaci tenkých vláken. Avšak po testovacím zvětšení plochy průřezu vlákna bylo pozorováno zrychlení numerického řešení i zlepšení konvergence. Toto chování vede k podezření, že pro tenká vlákna modelovaná



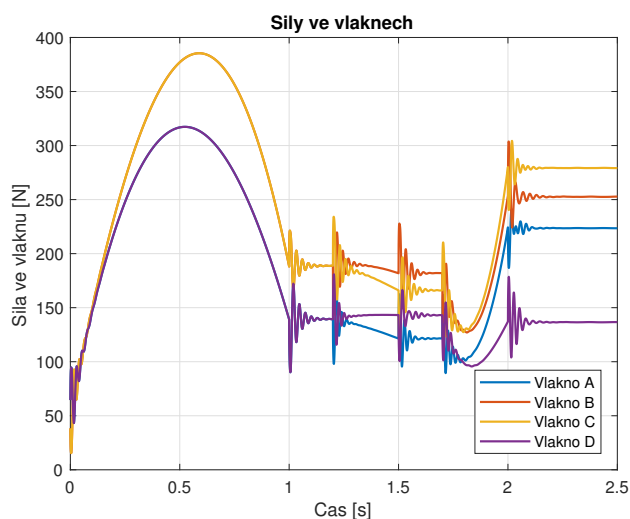
Obrázek 7.34.: Předepsané vertikální posuvy jednotlivých pohonů a výsledné úhly natočení platformy.



Obrázek 7.35.: Absolutní hodnoty úhlů natočení kladek a úhly naklápění kladek.

pomocí diskretizovaného modelu je výsledná úloha špatně podmíněná a numerické řešení je tak téměř nemožné získat. Z tohoto důvodu byly ve všech dalších analýzách používány pouze modely 1 a 4, které nevykazují žádné problémy při numerickém řešení dynamiky systému Quadrosphere.

Bylo provedeno několik testovacích simulací, při nichž byl předepsán různý vertikální posuv jednotlivých pohonů. Na obr. 7.34 vlevo je ukázán vybraný předepsaný vertikální pohyb pohonů, vpravo na stejném obrázku je pak výsledné natočení platformy, neboli časový průběh rotačních stupňů volnosti. Ve výsledných úhlech natočení bylo pozorováno mírné rozkmitání v řádu 0,1 stupňů při náhlých změnách posunu pohonů. Na obr. 7.35 jsou vykresleny absolutní hodnoty rotací jednotlivých kladek a dále úhel naklápění kladek. Simulace startuje s předpjatými vlákny na 50 N. Tomu odpovídá vlastní frekvence naklápění kladek přibližně 3,9 Hz. V průběhu simulace se síly v jednotlivých vláknech mění, což je dokumentováno na obr. 7.36. S různým napínáním vláken se mění i vlastní frekvence naklápění kladek. Na konci simulace je síla v každém vlákne jiná. V ta-

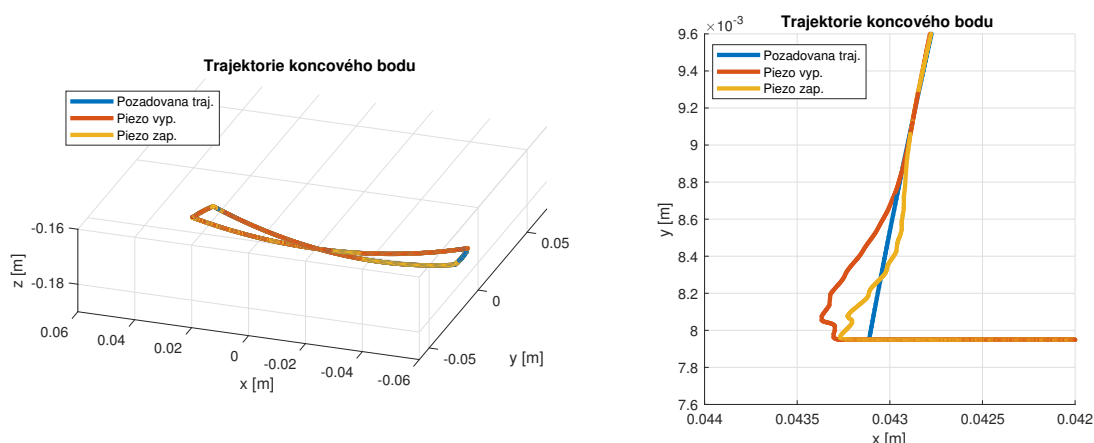


Obrázek 7.36.: Axiální síly v jednotlivých vláknech.

kovéto konfiguraci byla provedena modální analýza a byly identifikovány vlastní frekvence naklápění jednotlivých kladek, konkrétně kladka A má vlastní tvar naklápění na 8,2 Hz, B na 8,7 Hz, pro kladku C byla identifikována vlastní frekvence naklápění 9,2 Hz a pro kladku D nejnižší frekvence 6,6 Hz. Těmto frekvencím odpovídá průběh naklápění na obr. 7.35 na konci simulace. Provedené testovací simulace pomohly podrobněji prozkoumat dynamické vlastnosti mechanické soustavy Quadrosphere.

Popsaný a analyzovaný multibody model Quadrosphere byl dále rozšířen o servomotory pro zahrnutí jejich setrvačností a také o šroubový převod s jeho vnitřním třením. Následně byl model použit k testování různých aktivních struktur obsahujících piezoaktuátory. Finální rovinná aktivní struktura je ukázána na obr. 7.30 vpravo a její vývoj byl proveden na pracovišti Fakulty strojní ČVUT ve spolupráci s autorem této dizertační práce a jeho školitelem. Tato struktura obsahuje jednu kruhovou platformu, ke které jsou přišroubovány tři piezoaktivní členy. Ty dále nesou třícípou hvězdicovitou platformu, na kterou je přibližně ve středu instalován tzv. koutový odražeč sloužící jako sledovaný bod. Poloha koutového odražeče může být snadno dopočítána při znalosti tří úhlů natočení sférického kloubu, které jsou během simulací měřeny snímači. Navíc je koutový odražeč sledován laserovým zařízením, které dokáže určit jeho polohu vůči pevnému souřadnicovému systému.

Jednotlivé použité piezoaktuátory APA 400MML (Cedrat Technologies) jsou složeny z hranolu z piezomateriálu a ocelového kosočtverečného rámečku. Princip fungování tohoto aktuátoru je takový, že při roztahení piezomateriálu vlivem přivedeného napětí dojde ke stažení (kontrakci) aktuátoru v požadovaném podélném směru. Maximální posuv aktuátoru je 368 mikrometrů. Aby nedocházelo k nežádoucímu pnutí v aktuátoru, byly vždy mezi kruhovou platformu a aktuátor a mezi hvězdicovou platformu a aktuátor vloženy poddajné krčky umožňující relativní natočení mezi osou roztahování aktuátoru a oběma platformami.



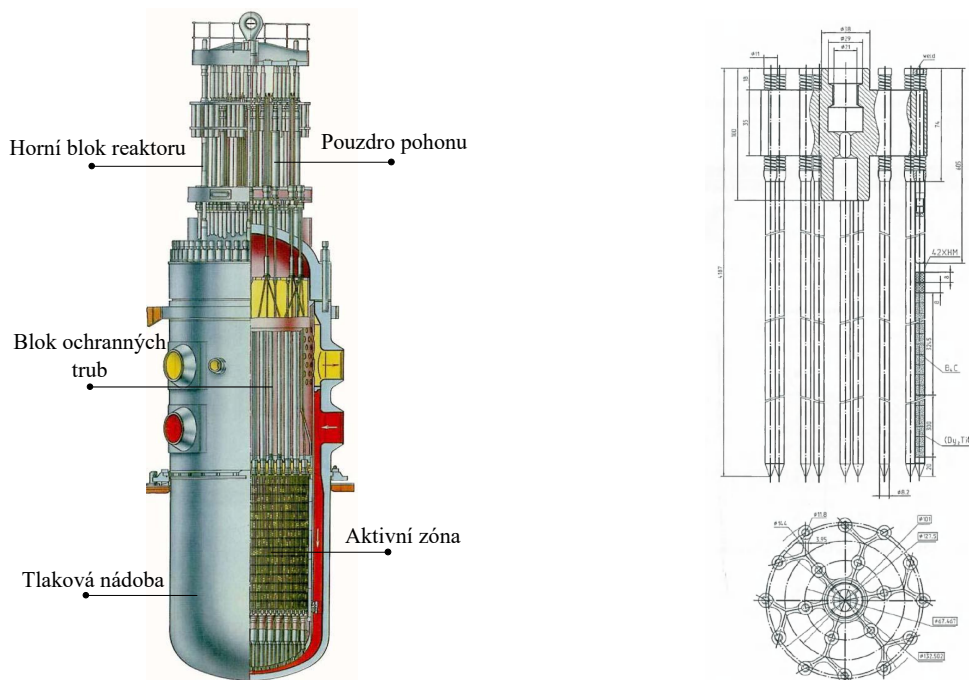
Obrázek 7.37.: Ukázka požadované trajektorie a výsledné trajektorie s vypnutým a zapnutým řízením aktivní struktury.

Vzhledem k tomu, že aktivní struktura obsahuje více relativně poddajných členů, nelze ji do multibody modelu zahrnout pouze pomocí tuhých těles. Proto byl jeden aktuátor společně s poddajnými krčky modelován metodou MKP v programu ANSYS a následně exportován spolu s důležitými modálními vlastnostmi do multibody modelu v programu MSC.Adams. Výsledky modální analýzy MKP modelu byly srovnány s experimentem v práci [19] a bylo dosaženo relativně dobré shody. Výsledný multibody model Quadrosphere s poddajnou aktivní strukturou byl použit pro testování různých řídicích algoritmů, které mají za cíl řídit čtyři pohony a napětí ve třech piezoaktuátorech tak, aby se získala požadovaná trajektorie koncového bodu a aby se zachovala tahová síla ve všech vláknech. Toto víceúrovňové řízení je vyvíjeno na Fakultě strojní ČVUT. K řízení výpočtového modelu byl použit program Simulink, do kterého byl nelineární multibody model Quadrosphere exportován pomocí MSC.Adams Controls plugin. Na obr. 7.37 je ukázána testovací požadovaná trajektorie a výsledná trajektorie s vypnutým a zapnutým řízením aktivní struktury. Z detailu rohové části trajektorie je patrné, že při zapnutém řízení aktivní struktury dochází ke zdatelnému zmenšení odchylky od požadované polohy a tím i zpřesnění pohybu sledovaného koncového bodu.

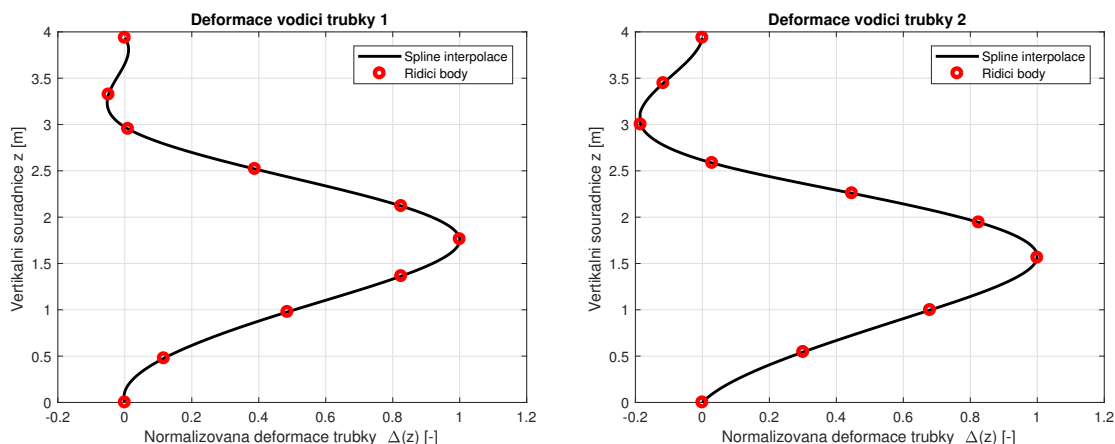
Vývoj víceúrovňového řízení mechanického systému Quadrosphere na Fakultě strojní ČVUT stále pokračuje a pro ověření jeho funkčnosti je používán popsáný komplexní multibody model. Výhoda použití virtuálního modelu spočívá v možnosti sledovat kinematické veličiny různých těles a silové poměry ve všech vláknech a vazbách během řízení pohybu, což u reálného zařízení nemusí být zcela možné. Dále se může řízení na virtuálním modelu odladit tak, aby na reálném modelu nedocházelo k možnému poškození například vlivem přílišného napínání vláken či přivedením vysokého napětí na piezoaktuátory.

7.5. Modelování poddajných absorpčních proutků jaderných reaktorů

Pro dynamickou analýzu různých komponent v jaderném průmyslu mohou být kromě klasické metody konečných prvků úspěšně využity i přístupy z oboru dynamiky vázaných mechanických soustav. Zajímavou aplikací v tomto ohledu je analýza dynamiky regulačních orgánů (RO), které hrají v provozu jaderného reaktoru důležitou roli spočívající v řízení a případném zastavení jaderné reakce. V různých částech světa se využívají rozličné druhy reaktorů se specifickými regulačními orgány. Problematika regulačního orgánu pro nejrozšířenější typ reaktoru ve střední Evropě, kterým je tlakovodní reaktor využívající vodu jako moderátoru neutronů, spočívá v zasouvání součásti z absorpčního materiálu do aktivní zóny reaktoru skrz omezený prostor. Konkrétně pro jaderný reaktor typu VVER 1000, viz obr. 7.38, jsou do aktivní zóny zasouvány dlouhé a tenké absorpční proutky skrz úzké vodící trubky. V případě mimořádných událostí, jako je například zemětřesení či únik chladiva, je bezpodmínečně nutné havarijně zastavit jadernou reakci uvolněním regulačních orgánů a jejich volným pádem do aktivní zóny, čímž dojde k absorpci volných neutronů a přerušení řetězové štěpné reakce. Vlivem vysokých teplot, tlakových pulsací či účinků radiace na materiál dochází k malým permanentním deformacím vodících trubek. V případě nutnosti rychlého odstavení reaktoru pak tyto deformace mohou zbrzdit hladký průběh pádu RO na dno reaktoru, či dokonce mohou způsobit zaseknutí RO před dopadem na dno, což je z hlediska bezpečnosti provozu problémový stav. Bezpečný časový



Obrázek 7.38.: Schéma reaktoru VVER 1000 a schéma absorpčních proutků uchycených ve hvězdicovité sestavě.



Obrázek 7.39.: Definované normalizované tvary deformace vodičích trubek.

limit pro pád RO na dno reaktoru činí 3,5 s, při ideálním průběhu pádu je dosahováno doby pádu přibližně 1,4 s.

Regulační orgán jaderného reaktoru typu VVER 1000 se skládá z několika částí, jejichž konkrétní popis lze nalézt v práci [7]. Horní část RO tvoří závěsná tyč sloužící jako spojovací člen RO a lineárního krokového pohonu, který zajišťuje vertikální pohyb RO a tím i regulaci výkonu reaktoru. Na závěsnou tyč je bajonetovým záchytem připevněna hvězdicovitá sestava nesoucí celkem 18 absorpčních proutků, viz schéma na obr. 7.38 vpravo. Proutky jsou dlouhé přibližně 4,2 m s poloměrem 4,1 mm. Těchto 18 proutků se zasouvá do stejného množství vodičích trubek s vnitřním poloměrem 5,5 mm, které jsou součástí palivového souboru. Uvnitř vodičích trubek proudí voda vzhůru proti směru volného pádu RO.

Komplexní multibody model RO reaktoru typu VVER 1000 byl vytvořen v rámci práce [55]. Regulační orgán je v této práci reprezentován celkem 22 tuhými tělesy propojenými 22 kinematickými vazbami. Poddajnost proutků je zde zjednodušena sdružením proutků do trojic a následně je každá trojice modelovaná dvěma tělesy, mezi nimiž je vazba s ohybovou tuhostí. Tento přístup je konzervativní, neboť náhradní tělesa jsou tuhá a dlouhá přibližně 2 m, takže snadněji může dojít ke vzpříčení v deformovaných vodičích trubkách. Kromě hydrostatické vztlakové síly je v práci [55] zohledněn vliv proudící kapaliny pomocí Newtonova vztahu pro odpor v tekutém prostředí, kdy součinitel odporu byl naladěn dle výsledků na experimentálním zařízení. Dále jsou v modelu uvažovány možné kontakty RO se všemi relevantními obklopujícími konstrukčními součástmi reaktoru. Tento komplexní model byl využit pro zkoumání vlivu seizmického buzení a deformovaných vodičích trubek na dobu pádu.

V publikaci [A19] jsou uvedeny tvary dvou typových deformací vodičích trubek specifikovaných výrobcem zařízení. Horizontální deformace trubky $\delta(z)$ je popsána parametricky jako funkce vertikální souřadnice z ve tvaru

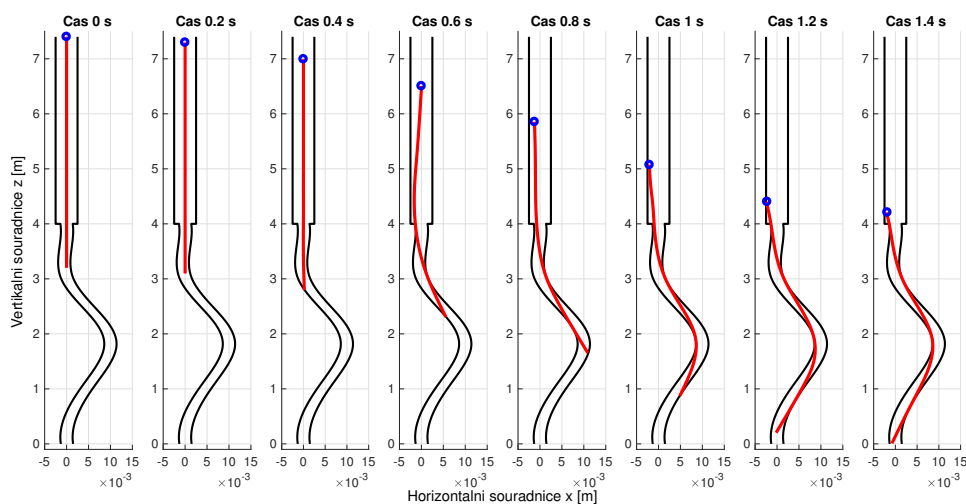
$$\delta(z) = P\Delta(z), \quad (7.10)$$

kde $\Delta(z)$ je normalizovaná křivka deformace vodičí trubky a P je parametr, jehož hodnota

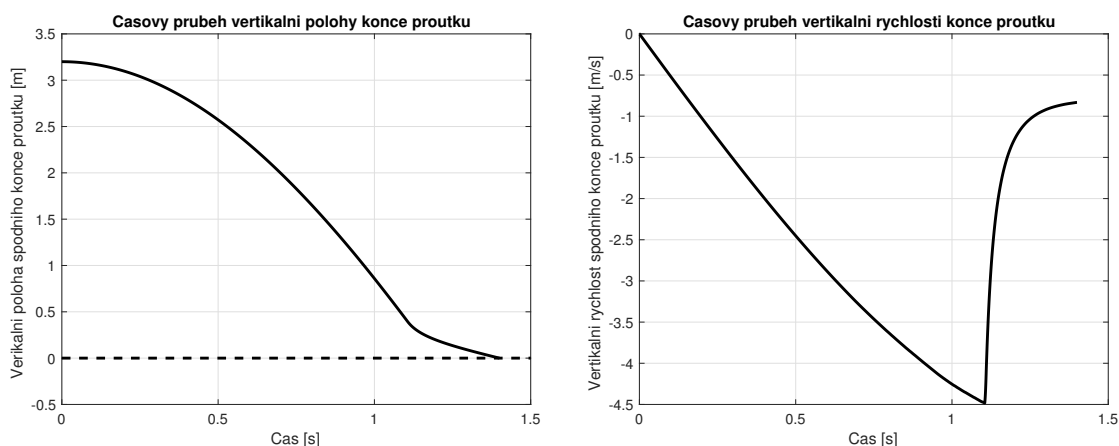
odpovídá maximální deformaci. Na obr. 7.39 jsou znázorněny dvě typové normalizované křivky deformace. Ty byly získány spline interpolací červených řídicích bodů, které zadal výrobce a které souvisejí s reálným provozním stavem reaktoru.

Předmětem této podkapitoly je popsat možnost aplikace metody ANCF pro modelování absorpčních proutků. Za tímto účelem byl vytvořen zjednodušený model s využitím materiálových parametrů a také s uvažováním vlivu kapaliny dle [55]. Samotný proutek byl tvořen celkem dvaceti ANCF elementy nižšího řádu, viz podkapitola 4.2, protože není očekáváno torzní zatížení proutků během pádu RO. Aby byla přibližně zachycena dynamika hvězdicovité sestavy a závěsné tyče bez nutnosti tvorby nového komplexního modelu, jsou tyto části uvažovány jako tuhé, rotace těchto částí je zanedbána z důvodu malých vůlí s okolními částmi reaktoru a jsou reprezentovány pomocí hmotného bodu. Tento hmotný bod má tři posuvné stupně volnosti a jeho hmotnost odpovídá 1/18 skutečné hmotnosti závěsné tyče a hvězdicovité sestavy, protože RO obsahuje 18 proutků. Výsledný model pro zkoumání doby pádu absorpčního proutku tak obsahuje tenký poddajný proutek a hmotný bod s redukovanou hmotností ostatních padajících těles. V modelu je uvažován kontakt, počáteční vůle mezi proutkem a vodicí trubicou je 1,4 mm. Nad vstupem do vodicích trubek se nachází blok ochranných trub. Vůle mezi hvězdicovitou sestavou a konstrukcí bloku ochranných trub je uvažována jako 2,5 mm dle [55]. Tření je zahrnuto s využitím Threlfalova modelu (5.38) s charakteristickou rychlostí $v_0 = 0,01 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a součinitelem tření $c_f = 0,3$. Toto nastavení kontaktu je relativně konzervativní, nicméně z důvodu minimalizování bezpečnostních rizik je v oblasti jaderné energetiky obecně uplatňován konzervativní přístup během výpočtů.

Na obr. 7.40 je znázorněn pád modelu absorpčního proutku ve vybraných časových okamžicích. Během tohoto pádu byl uvažován tvar deformace 1 s parametrem maximální



Obrázek 7.40.: Pád modelu absorpčního proutku ve vybraných časových okamžicích (červeně je vyznačena střednicová linie proutku, černě jsou značeny tuhé kontaktní meze a modrá reprezentuje hmotný bod) při uvažování deformace 1 vodicí trubky a maximální deformace $P = 10 \text{ mm}$.



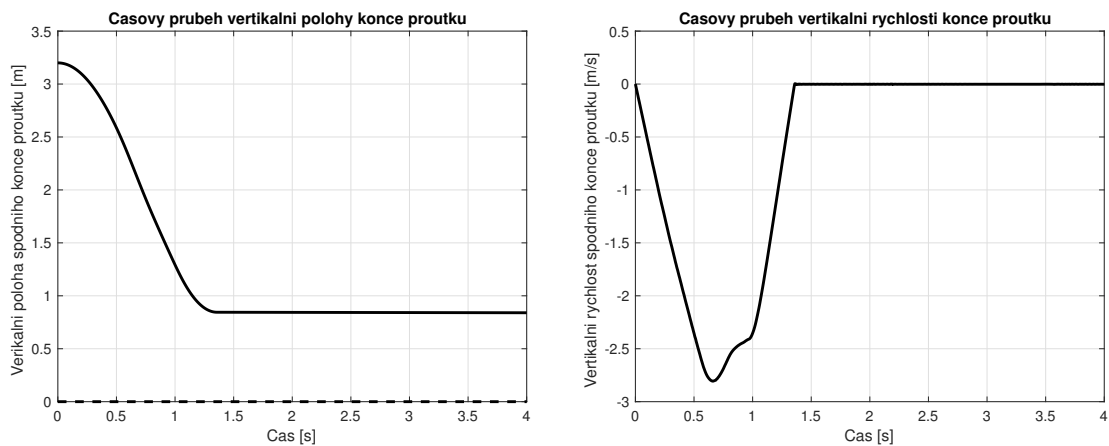
Obrázek 7.41.: Časový průběh vertikální polohy (vlevo) a vertikální rychlosti (vpravo) spodního konce absorpčního proutku (deformace 1, $P = 10$ mm).

deformace $P = 10$ mm. Pro srozumitelnost zde musí být uvedeno, že na 4 metry vodící trubky je maximální deformace pouhých 10 mm, proto pro přehlednost nejsou osy na obr. 7.40 ve stejném měřítku. Na obr. 7.41 je ukázán časový průběh vertikální polohy a rychlosti spodního konce absorpčního proutku pro stejně nastavenou deformaci vodící trubky. Jedná se o případ, kdy došlo u úspěšnému dopadnutí proutku na dno reaktoru. Před samotným dopadem dochází k náhlému poklesu rychlosti proutku, protože na dně je umístěn tzv. hydraulický tlumič dopadu, jehož parametry byly převzaty z práce [55]. Doba pádu na dno reaktoru je v tomto případě kolem 1,4 s.

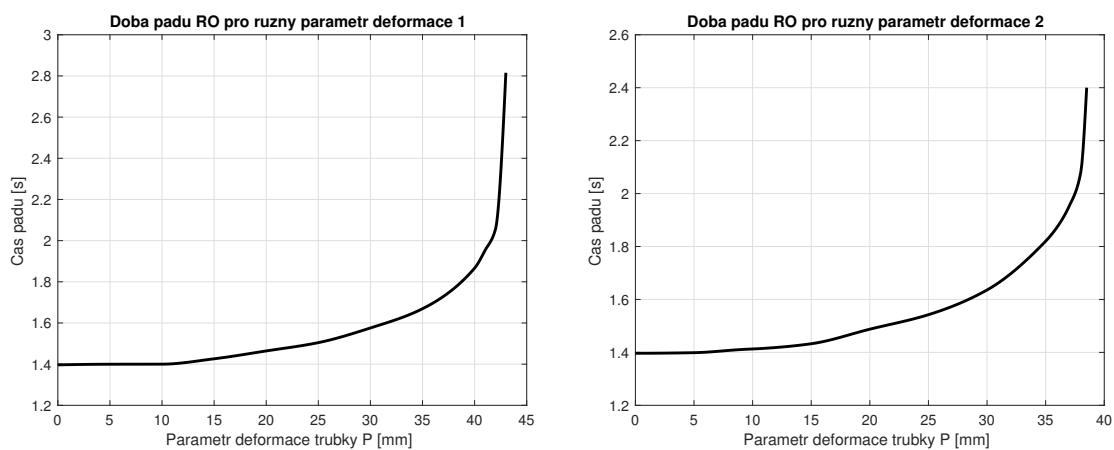
Na obr. 7.42 jsou časové průběhy polohy a rychlosti při neúspěšném pádu. Vlivem větší deformace trubky ($P = 60$ mm) dojde v tomto případě k zaseknutí proutku v trubce vlivem kontaktních sil a tření. Model proutku tak nedopadl až na dno reaktoru (doba pádu překročila mez bezpečnosti 3,5 s). Na obr. 7.43 jsou pak ukázány výsledky parametrických studií, kdy byl zkoumán vliv parametru P maximální deformace vodící trubky na výslednou dobu pádu absorpčního proutku na dno reaktoru pro oba typy deformace trubky. Z výsledků je patrné, že limitní maximální deformace pro tvar 1 je přibližně 43 mm a pro tvar 2 přibližně 38,5 mm. Při větší deformaci dochází k zaseknutí proutku a neúspěšnému pádu proutku.

Cílem této aplikace bylo ukázat možnosti využití metody ANCF v oblasti energetiky. Popsaný zjednodušený model může být v budoucnu rozšířen tím způsobem, že bude kombinovat tuhá i poddajná tělesa a všech 18 absorpčních proutků sestavy. Zkoumán pak může být i vliv nestejných prostorových deformací vodících trubek na pád RO. Výsledky úspěšného pádu zjednodušeného modelu jsou však už nyní v dobré shodě s výsledky z prací [55, A19]. Oproti těmto pracím bylo však s popsáním modelem dosaženo větší limitní deformace vodící trubky, protože je využita kompletní poddajnost absorpčního proutku, kdežto v [55, A19] jsou pro modelování proutku použita tuhá tělesa.

Závěry z provedených analýz mohou sloužit k posouzení bezpečnosti při provozu jaderného reaktoru VVER 1000 s ohledem na provozní deformace v aktivní zóně.



Obrázek 7.42.: Časový průběh vertikální polohy (vlevo) a vertikální rychlosti (vpravo) spodního konce absorpčního proutku při neúspěšném pádu (deformace 2, $P = 60$ mm).



Obrázek 7.43.: Závislost doby pádu absorpčního proutku na parametru maximální deformace P .

8. Závěr

Tato práce se věnuje různým metodám pro vyšetřování dynamiky vázaných mechanických systémů obsahujících poddajná tenká tělesa. Následuje shrnutí popsaných metod a výsledků, které souvisejí s cíli definovanými v úvodní podkapitole 1.1.

Návrh metodiky modelování tenkých poddajných struktur v problémech VMS

Tato práce popisuje různé metody pro vyšetřování dynamiky vázaných mechanických systémů obsahujících tenké poddajné struktury. Kapitola 2 se zabývá popisem nejpoužívanějších metod vhodných k tvorbě modelů těchto těles. Jsou zde popsány nedostatky klasické formulace konečných prvků, která jako uzlové souřadnice používá nekonečně malé rotace. Tyto nedostatky jsou částečně odstraněny použitím přístupů *large rotation vector formulation* či *floating frame of reference formulation*. Kapitola 3 obsahuje popis základních metod pro modelování lan v problémech dynamiky vázaných mechanických systémů, jimiž jsou silová reprezentace a tzv. *point-mass* reprezentace lana. Tyto přístupy jsou velmi jednoduché a snadno aplikovatelné, nicméně popisují vlastnosti lan spíše fenomenologicky na základě pozorovaných jevů, kterými jsou například axiální tuhost, příčné kmitání a podobně. Součástí zmíněné kapitoly je i popis možného využití komerčního programu MSC.Adams pro vyšetřovaný typ mechanických systémů.

Stěžejní kapitola 4 dizertační práce se pak věnuje moderní metodě pro odvození konečných prvků s názvem *absolute nodal coordinate formulation* (ANCF), na kterou je upřena relativně velká pozornost světové vědecké komunity zabývající se problémy dynamiky multibody systémů. Přístup ANCF se oproti klasické formulaci liší ve výběru uzlových souřadnic, přičemž využívá složky polohových vektorů uzlů vyjádřených v absolutním (globálním) souřadnicovém systému. Další sada uzlových souřadnic odpovídá parciálním derivacím polohových vektorů uzlů podle lokálních parametrů prvku. Mezi hlavní výhody ANCF patří schopnost přesně popsat velké posuvy a rotace, jednoduchý tvar matice hmotnosti prvku a fakt, že se ANCF prvky řadí mezi izoparametrické.

V práci jsou představeny celkem tři druhy prvků. První typ nazvaný plně parametrizovaný nosníkový ANCF element vychází z Timoshenkovy teorie, je vhodný pro tlusté nosníky a má celkem 24 stupňů volnosti. Druhý typ označený jako kabelový element nižšího řádu je vhodný pro modelování tenkých nosníků, nezohledňuje torzní efekty a má poloviční počet stupňů volnosti. Třetí typ odpovídá rovinnému nosníku. U všech těchto typů jsou popsány kinematické veličiny a odvozeny setrvačné síly. Dále je proveden rozbor různých způsobů vyjádření elastických sil, které jsou ve všech případech nelineární. V příloze této práce se pak nacházejí jednotlivé uvažované předpisy pro vektory elastických sil různých prvků, které je možné následně vhodnou numerickou metodou vyčíslit.

Algoritmizace a implementace navržené metodiky modelování

V kapitole 5 se nachází stručný popis Lagrangeových rovnic smíšeného typu. Ty jsou velmi často používány pro odvození pohybových rovnic vázaných mechanických systémů, které jsou obvykle ve formě soustavy algebro-diferenciálních rovnic (DAE) indexu 3. Je zde popsán převod DAE na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a nutnost použití tzv. stabilizačních technik, z nichž je přímo uvedena Baumgartova stabilizace. Pro vylepšení numerické podmíněnosti je uvedena tzv. *augmented Lagrangian method*, z problematiky optimalizace s omezeními známá jako metoda rozšířených Lagrangianů.

Další důležitá část kapitoly 5 je věnována popisu modelování kontaktních sil, neboť lanové mechanické systémy často obsahují i kladky, s nimiž jsou lana v kontaktu. Interakce mezi tělesy v kontaktu je definována normálovou a třecí silou. V práci jsou zmíněny různé modely těchto sil a to, jakým způsobem vstupují do výsledných pohybových rovnic.

V rámci implementace ANCF nosníkových prvků byla provedena doposud nepublikovaná úprava nelineárního výrazu pro vektor elastických sil tenkého ANCF elementu, aby bylo možné co nejvíce výrazů předpočítat před samotným numerickým řešením a tím ušetřit výpočtový čas nutný k sestavení zmíněného vektoru elastických sil. Samotná implementace ANCF a algoritmů pro vyhledávání kontaktů a výpočet kontaktních sil byla provedena v programu MATLAB s využitím funkce *MATLAB Coder* pro překlad vytvořených funkcí do formátu *.mex*. Tím bylo dosaženo výrazného zrychlení výpočtů. Vzniklo tak relativně obecné vlastní programové vybavení využitelné v různých problémech vázaných mechanických systémů.

Popis a zpracování vhodných numerických metod pro řešení navržených modelů

Popis vhodných numerických metod je součástí kapitoly 6. Práce se zaměřuje na možnost využití Newmarkovy metody pro řešení algebro-diferenciálních rovnic indexu 3. Vzhledem k tomu, že výše popsaná teoretická část vede vždy na nelineární pohybové rovnice, je v každém časovém kroku numerického řešení prováděno iterační zpřesnění výsledků pomocí Newtonovy metody. Ta však vyžaduje Jacobiho matici elastických sil, kterou může být obtížné analyticky vyjádřit. Proto je v práci diskutována možnost použití numerického vyhodnocení Jacobiho matice či použití kvazi-Newtonovy metody. Je zde uveden kompletní algoritmus kvazi-Newtonovy metody a také různé její podoby, které byly v aplikační části testovány a vyhodnoceny jako velmi efektivní z hlediska výpočtového času.

V dostupné literatuře nebyla zaznamenána aplikace kvazi-Newtonových metod na problematiku vázaných mechanických systémů obsahujících tělesa diskretizovaná pomocí ANCF, která navíc mohou být v kontaktu s jinými tělesy. V rámci řešení těchto silně nelineárních problémů se ukázalo výhodné použití zmíněné metody rozšířených Lagrangianů.

Součástí kapitoly 6 je také popis Gaussovy kvadratury, což je metoda pro numerické vyčíslení integrálů. Tato metoda je použita v případě vyčíslování vektoru elastických sil ANCF elementů a také pro výpočet kontaktních sil působících na daný element.

Aplikace navržené metodiky na modelových i reálných příkladech, formulace závěrů a doporučení

Aplikací popsaných metod a postupů se zabývá kapitola 7. Za účelem testování a verifikace navržené metodiky bylo využito celkem pět úloh. Úloha v podkapitole 7.1 se týká modelování pohybu poddajného kyvadla. Nejprve bylo ukázáno, že pro tři typy ANCF nosníkových elementů použitých k diskretizaci kyvadla bylo dosaženo téměř shodného časového průběhu pohybu kyvadla. Dále bylo provedeno testování funkcí ode pro numerickou integraci programu MATLAB a porovnání rychlostí výpočtu při použití vlastní implementace Newmarkovy metody s kvazi-Newtonovými iteracemi. Bylo ukázáno, že na stejném příkladě byly výsledky pomocí Newmarkovy metody získány až třikrát rychleji oproti funkcím ode programu MATLAB při zachování shodné přesnosti výpočtu. Z kvazi-Newtonových metod se nejvíce osvědčila Davidonova metoda, která k výsledku konvergovala nejrychleji. Dále byl ukázán významný vliv velikosti časového integračního kroku Newmarkovy metody na výslednou přesnost výpočtů, kdy pro časový krok 0,0005 s byla pozorována velmi dobrá shoda s funkcemi ode programu MATLAB a se zvětšujícím se krokem se výsledný rozdíl v pohybu kyvadla postupně zvyšoval. Vliv konkrétní zvolené podoby kvazi-Newtonovy metody na výsledný pohyb kyvadla byl zanedbatelný. Provedená energetická analýza ukázala zanedbatelnou ztrátu celkové energie způsobenou numerickým výpočtem při neuvažování tlumících účinků u všech testovaných integračních metod. V případě dodání numerického tlumení do Newmarkovy metody pak bylo dosaženo pozvolného snižování celkové energie systému.

V podkapitole 7.2 byla ukázána dobrá shoda vypočítaného a naměřeného pohybu závaží, které se pohybovalo na nakloněné rovině a bylo zavěšeno na tenkém vlákně.

V rámci detailního modelování interakce lana a kladky v podkapitole 7.3 byly provedeny statické a dynamické analýzy na testovacím příkladě a pak byla provedena verifikace použitých přístupů s využitím výsledků z experimentu. Byl ukázán vliv ohybové tuhosti lana na výsledný tvar lana přehozeného přes kladku a také na rozložení měrné kontaktní síly na kladce. V dynamické analýze na testovacím příkladu byl ukázán různý vliv parametrů tření na výsledný prokluz mezi kladkou a lanem, kdy pro vyšší součinitel tření a pro nižší charakteristickou rychlost vyhlazeného Coulombova modelu tření bylo dosaženo pevnějšího třecího spojení a zanedbatelného prokluzu. V této aplikaci se také osvědčila Newmarkova metoda jako velmi efektivní z hlediska výpočtového času. V rámci srovnání s experimentálními výsledky byly použité metody verifikovány a také bylo ukázáno, že prokluz mezi vláknem a kladkou při použití kontaktního modelu uvažujícího ulpívání (*stiction*) byl menší než při uvažování vyhlazeného Coulombova modelu tření.

Modelování a analýzy reálného vláknového mechanického systému Quadrosphere s využitím programu MSC.Adams, viz podkapitola 7.4, ukázaly, že diskretizovaný model vlákna definovaný pomocí tohoto programu není pro daný typ analýz vhodný. Jako výhodný se ukázal model vlákna kombinovaný z předdefinovaného zjednodušeného modelu vlákna dostupného v tomto softwaru a z ručně sestavené *point-mass* reprezentace vlákna. Modální analýza vytvořených modelů byla v relativně dobré shodě s experimentálními výsledky.

Model absorpčního proutku jaderného reaktoru v kapitole 7.5 byl využit pro analýzu

pádu regulačního orgánu do aktivní zóny a vlivu deformace vodicích trubek na dobu pádu. Byly zjištěny limitní maximální deformace vodicích trubek, při nichž dojde k zaseknutí proutku ve vodicí trubce. Tato aplikace ANCF prvků pro analýzu regulačních orgánů jaderných reaktorů má široké možnosti dalšího využití.

8.1. Hlavní přínosy dizertační práce

Hlavní přínosy této dizertační práce lze shrnout do následujících bodů:

- Komplexní popis a porovnání nejpoužívanějších nosníkových prvků definovaných pomocí přístupu ANCF.
- Nové úpravy vektoru elastických sil kabelového ANCF elementu nižšího řádu vedoucí k možnosti předpočítání některých výrazů před samotným výpočtem v rámci *preprocessingu*.
- Implementace ANCF nosníkových prvků v rámci prostředí programu MATLAB, které umožňuje jejich využití pro mnoho praktických aplikací.
- Implementace Newmarkovy metody využívající iterační kvazi-Newtonovu metodu, která se ukázala jako velice efektivní pro numerické simulace vázaných mechanických systémů s poddajnými členy a možnými interakcemi.
- Popis interakce mezi tělesy a vývoj vlastních programových prostředků v prostředí MATLAB pro zahrnutí kontaktů včetně různých druhů tření do výpočtových modelů.
- Validace vyvinutých modelů a popsáných modelovacích přístupů pomocí experimentálních dat.

8.2. Další možný rozvoj této práce

Další možný rozvoj řešené problematiky spočívá především v těchto bodech:

- Implementace adaptivního časového kroku do Newmarkovy metody.
- Implementace Hilber-Hughes-Taylorovy (HHT) integrační metody, která vychází z Newmarkovy metody.
- Vývoj dalších ANCF prvků vhodných pro konkrétní aplikace, např. v rotordynamice.
- Vytvoření komplexního modelu regulačního orgánu jaderného reaktoru, který bude zohledňovat všechna možná tuhá a poddajná tělesa a také možné interakce s ostatními částmi reaktoru. Zahrnutí poddajnosti vodicích trubek do komplexního modelu.

- Výzkum interakce poddajných těles modelovaných pomocí ANCF s okolním prostředím (např. vodní prostředí v reaktoru).

Literatura

- [1] Argyris, J.: An excursion into large rotations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 32, pp. 85–155, 1982.
- [2] Bathe, K.-J., Wilson, E.L.: *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976. ISBN 0-13-627190-1.
- [3] Bauchau, O.A.: *Flexible multibody dynamics*. Springer, New York, 2011. ISBN 978-94-007-0334-6.
- [4] Berzeri, M., Campanelli, M., Shabana, A.A.: Definition of the Elastic Forces in the Finite-Element Absolute Nodal Coordinate Formulation and the Floating Frame of Reference Formulation. *Multibody System Dynamics*, Vol. 5, pp. 21–54, 2001.
- [5] Berzeri, M., Shabana, A.A.: Development of simple models for the elastic force in the absolute nodal co-ordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 235, pp. 539–565, 2000.
- [6] Blekta, J.: *K problematice multibody simulací*. Dizertační práce, Fakulta strojní, Technická univerzita v Liberci, Liberec, 2005.
- [7] Bulín, R.: *Problematika počítačových simulací dynamiky regulačních orgánů jaderných reaktorů*. Diplomová práce, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2013.
- [8] Canavin, J.R., Likins, P.W.: Floating Reference Frames for Flexible Spacecraft. *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 14, No. 12, pp. 724–732, 1977.
- [9] Cardona, A., Geradin, M.: A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 26, pp. 2403–2438, 1988.
- [10] Cuadrado, J., Gutiérrez, R., Naya, M.A., González, M.: Experimental Validation of a Flexible MBS Dynamic Formulation through Comparison between Measured and Calculated Stresses on a Prototype Car, *Multibody System Dynamics*, Vol. 11, pp. 147–166, 2004.
- [11] Dennis, J., Moré, J.: Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory. *SIAM Review, Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 19 (1), pp. 56–89, 1977.

-
- [12] Dennis, J.E., Schnabel, R.B.: *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996. ISBN 978-0-89871-364-0.
- [13] Dmitrochenko, O.: Finite elements using absolute nodal coordinates for large-deformation flexible multibody dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 215, pp. 368–377, 2008.
- [14] Dmitrochenko, O.N., Pogorelov, D.Y.: Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Multibody System Dynamics*, Vol. 10, pp. 17–43, 2003.
- [15] Dmitrochenko, O., Yoo, W.-S., Pogorelov, D.Y.: Helicoseir as Shape of a Rotating String (II): 3D Theory and Simulation Using ANCF. *Multibody Systems Dynamics*, Vol. 15, pp. 181–200, 2006.
- [16] Dopico, D., Luaces, A., Gonzalez, M., Cuadrado, J.: Dealing with multiple contacts in a human-in-the-loop application. *Multibody System Dynamics*, Vol. 25, 2011, pp. 167–183.
- [17] Dufva, K., Shabana, A.A.: Analysis of thin plate structure using the absolute nodal coordinate formulation. *Proc. IMechE Vol. 219 Part K: J. Multi-body Dynamic*, pp. 345–355, 2005.
- [18] Dvorkin, E.N., Onate, E., Oliver, J.: On a non-linear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 26, pp. 1597–1613, 1988.
- [19] Dvořák, L.: *Modelování a identifikace poddajného mechanismu s mechanicky zesílenými piezoaktuátory*. Bakalářská práce, Fakulta strojní, České vysoké učení technické, Praha, 2018.
- [20] Escalona, J.L., Hussien, H.A., Shabana, A.A.: Application of the Absolute Nodal Co-ordinate Formulation to Multibody System Dynamics. *Journal of Sound and Vibrations*, Vol. 214(5), pp. 833–851, 1998.
- [21] Flores, P., Ambrósio, J., Claro, J. C. P., Lankarani, H. M.: Influence of the contact-impact force model on the dynamic response of multi-body systems. *Proc. IMechE, Part K: J. Multi-body Dynamics*, Vol. 220, pp. 21–34, 2006.
- [22] Flores, P., Lankarani, H.M.: *Contact Force Models for Multibody Dynamics*. Springer International Publishing AG Switzerland, 2016.
- [23] Flores, P., Machado, M., Seabra, E., Tavares da Silva, M.: A Parametric Study on the Baumgarte Stabilization Method for Forward Dynamics of Constrained Multibody Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 6, 011019, pp. 1–9, 2011.

- [24] García-Vallejo, D., Mayo, J., Escalona, J.L., Domínguez, J.: Efficient Evaluation of the Elastic Forces and the Jacobian in the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 35, pp. 313–329, 2004.
- [25] García-Vallejo, D., Valverde, J., Domínguez, J.: An Internal Damping Model for the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 42, Springer, pp. 347–369, 2005.
- [26] Geradin, M., Idelsohn, S., Hogge, M.: Computational Strategies for the Solution of Large Nonlinear Problems via Quasi-Newton Methods. *Computers and Structures*, Vol. 13, Pergamon Press Ltd., pp. 73–81, 1981.
- [27] Géradin, M., Cardona, A.: *Flexible Multibody Dynamics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2001. ISBN 0-471-48990-5.
- [28] Géradin, M., Rixen, D.J.: *Mechanical Vibrations, Theory and Application to Structural Dynamics*. Third Edition, John Wiley & Sons, Chichester, 2015. ISBN 978-1-118-90020-8.
- [29] Gerstmayr, J., Irschik, H.: On the correct representation of bending and axial deformation in the absolute nodal coordinate formulation with an elastic line approach. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 318, pp. 461–487, 2008.
- [30] Gerstmayr, J., Shabana, A.A.: Analysis of Thin Beams and Cables Using Absolute Nodal Co-ordinate Formulation. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 45, pp. 109–130, 2006.
- [31] Gilardi, G., Sharf, I.: Literature survey of contact dynamics modelling. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 1213–1239, 2002.
- [32] Hajžman, M., Polach, P.: Application of stabilization techniques in the dynamic analysis of multibody systems. *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 479–488, 2007.
- [33] Hajžman, M., Polach, P.: Modelling of flexible bodies in the framework of multibody systems. *Proceedings of 6th International Conference Dynamics of Rigid and Deformable Bodies 2008*, Ústí nad Labem, pp. 33–42, 2008.
- [34] Hertz, H.: Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 92, pp. 156–171, 1881.
- [35] Hussein, B., Negrut, D., Shabana, A.A.: Implicit and explicit integration in the solution of the absolute nodal coordinate differential/algebraic equations. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 54, pp. 283–296, 2008.
- [36] Hussein, B.A., Sugiyama, H., Shabana, A.A.: Coupled Deformation Modes in the Large Deformation Finite-Element Analysis: Problem Definition. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 2, pp. 146–154, 2007.

-
- [37] Jalón, J.G., Bayo, E.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems — the Real-Time Challenge*. Springer-Verlag, New York, 1993. ISBN 0-387-94096-0.
- [38] Kamman, J., Huston, R.: Multibody dynamics modeling of variable length cable systems. *Multibody System Dynamics*, Vol. 5, pp. 211–221, 2001.
- [39] Kerkkänen, K.S., García-Vallejo, D., Mikkola, A.M.: Modeling of Belt-Drives Using a Large Deformation Finite Element Formulation. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 43, pp. 239–256, 2006.
- [40] Kübler, L., Eberhard, P., Geisler, J.: Flexible Multibody Systems with Large Deformations and Nonlinear Structural Damping Using Absolute Nodal Coordinates. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 34, pp. 34–52, 2003.
- [41] Lee, J.W., Kim, H.W., Ku, H.Ch., Yoo, W.S.: Comparison of external damping models in a large deformation problem. *Journal of sound and vibration*, Vol. 325, pp. 722–741, 2009.
- [42] Lugrís, U., Escalona, J.L., Dopico, D., Cuadrado, J.: Efficient and accurate simulation of the rope–sheave interaction in weight-lifting machines. *Proceedings of IMechE Vol. 225 Part K: J. Multi-body Dynamics*, 2011, pp. 331–343.
- [43] Machado, M., Moreira, P., Flores, P., Lankarani, H. M.: Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory. *Mechanism and Machine Theory*, 53, pp. 99–121, 2012.
- [44] Marques, F., Flores, P., Lankarani, M.H.: On the Frictional Contacts in Multibody System Dynamics. *Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics*, pp. 565–576, 2015.
- [45] Mikkola, A.M., Shabana, A.A.: A Non-Incremental Finite Element Procedure for the Analysis of Large Deformation of Plates and Shells in Mechanical System Applications. *Multibody System Dynamics*, Vol. 9, pp. 283–309, 2003.
- [46] Nachbagauer, K.: State of the Art of ANCF Elements Regarding Geometric Description, Interpolation Strategies, Definition of Elastic Forces, Validation and the Locking Phenomenon in Comparison with Proposed Beam Finite Elements. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 293–319, 2014.
- [47] Negrut, D., Rampalli, R., Ottarsson, G., Sajdak, A.: On an Implementation of the Hilber-Hughes-Taylor Method in the Context of Index 3 Differential-Algebraic Equations of Multibody Dynamics (DETC2005-85096), *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 2, No. 1, pp. 73–85, 2007.
- [48] Newmark, N.M.: A method of computation for structural dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, EM3, Proceeding paper 2094, pp. 67–94, 1959.

- [49] Olshevskiy, A., Dmitrochenko, O., Kim, Ch.-W.: Three-Dimensional Solid Brick Element Using Slopes in the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 9, 2014.
- [50] Olsson, H., Åström, K.J., Canudas de Wit, C., Gäfvert, M., Lischinsky, P.: Friction Models and Friction Compensation. *European Journal of Control*, Vol. 4, pp. 176–195, 1998.
- [51] Pennestrì, E., Rossi, V., Salvini, P., Valentini, P.P.: Review and comparison of dry friction force models. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 83, pp. 1785–1801, 2016.
- [52] Pfeiffer, F., Glocker, Ch.: *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. WILEY–VCH, Weinheim, 2004.
- [53] Pilkey, W.D.: *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*. John Wiley and Sons, New Jersey, 2005. ISBN 0-471-03221-2.
- [54] Plecháček, J.: *Modelování a řízení poddajných mechanismů robotů*. Diplomová práce, Fakulta strojní, České vysoké učení technické, Praha, 2015.
- [55] Polach, P., Hajžman, M.: Multibody model of the VVER 1000 nuclear reactor control assembly and simulation of its moving parts drop. *Mechanisms and Machine Science*, Vol. 54, pp. 254–263, 2018.
- [56] Polach, P., Hajžman, M., Václavík, J.: Experimental and Computational Investigation of a Simple Fibre-mass System. *Proceedings of the 19th International Conference Engineering Mechanics 2013*, CD-ROM, Svratka, 2013
- [57] Polach, P., Hajžman, M., Václavík, J., Šika, Z., Svatoš, P.: Model parameters influence of a simple mechanical system with fibre and pulley with respect to experimental measurements. *Proceedings of ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics 2013 on Advances in Computational Multibody Dynamics*, CD-ROM, Zagreb, 2013
- [58] Popov, V.L.: *Contact Mechanics and Friction, Physical Principles and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. ISBN 978-3-642-10802-0.
- [59] Przemieniecki, J.S.: *Theory of matrix structural analysis*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1968. ISBN 978-0-486-64948-1.
- [60] Sextro, W.: *Dynamical Contact Problems with Friction, Models, Methods, Experiments and Applications*. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 2007. ISBN 978-3-540-69535-6.
- [61] Shabana, A.A.: *Computational Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

- [62] Shabana, A.A.: Computer Implementation of the Absolute Nodal Coordinate Formulation for Flexible Multibody Dynamics. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 16, pp. 293–306, 1998.
- [63] Shabana, A.A.: Definition of the Slopes and the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, pp. 339–348, 1997.
- [64] Shabana, A.A.: *Dynamics of Multibody Systems*. Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [65] Shabana, A.A., Schwertassek, R.: Equivalence of the floating frame of reference approach and finite element formulation. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 33, No. 3, pp. 417–432, 1998.
- [66] Shabana, A.A.: Finite Element Incremental Approach and Exact Rigid Body Inertia. *Journal of Mechanical Design*, Vol 118, pp. 171–178, 1996.
- [67] Shabana, A.A.: Flexible multibody dynamics: Review of past and recent developments. *Multibody System Dynamics*, Vol. 1, pp. 189–222, 1997.
- [68] Shabana, A.A., Yakoub, R.Y.: Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Theory. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, pp. 606–613, 2001.
- [69] Shabana, A.A., Christensen, A.P.: Three-dimensional absolute nodal co-ordinate formulation: Plate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 2775–2790, 1997.
- [70] Schwab, A.L., Meijaard, J.P.: Comparison of Three-Dimensional Flexible Beam Elements for Dynamic Analysis: Finite Element Method and Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Proceeding of IDETC/CIE*, pp. 1–9, 2005.
- [71] Sapanen, J.T., Mikkola, A.M.: Description of Elastic Forces in Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 34, pp. 53–74, 2003.
- [72] Sugiyama, H., Escalona, J.L., Shabana, A.A.: Formulation of Three-Dimensional Joint Constraints Using the Absolute Nodal Coordinates. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 31, pp. 167–195, 2003.
- [73] Sugiyama, H., Gerstmayr, J., Shabana, A.A.: Deformation modes in the finite element absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 298, pp. 1129–1149, 2006.
- [74] Stejskal, V., Valášek, M.: *Kinematics and dynamics of machinery*. Marcel Dekker, New York, 1996. ISBN 0-8247-9731-0.
- [75] Svatoš, P.: *Optimalizace a řízení pohybu vláknově ovládaných paralelních mechanismů*. Dizertační práce, Fakulta strojní, České vysoké učení technické, Praha, 2016.

- [76] Takehara, S., Kawarada, M., Hase, K.: Contact Analysis of Rope and Sheave Using ANCF. *Proceeding of the 3rd Joint International Conference on Multibody System Dynamics, The 7th Asian Conference on Multibody Dynamics*, Busan, Korea, 2014.
- [77] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N.: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [78] Valkeapää, A.: *Development of Finite Elements for Analysis of Biomechanical Structures Using Flexible Multibody Formulations*. Dizertační práce, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, 2014.
- [79] da Vinci, L.: *Codex Madrid I. Tratado de Estatica y Mechanica En Italiano*. 1493.
- [80] Wittbrodt, E., Adamiec–Wójcik, I., Wojciech, S.: *Dynamics of Flexible Multibody Systems. Rigid Finite Element Method*. Springer, Berlin, 2006.
- [81] Yakoub, R.Y., Shabana, A.A.: Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Implementation and Applications. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 123, pp. 614–621, 2001.
- [82] Yoo, W.-S., Dmitrochenko, O., Park, S.-J., Lim, O-K.: A New Thin Spatial Beam Element Using the Absolute Nodal Coordinates: Application to a Rotating Strip. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 33, pp. 339-422, 2005.
- [83] Yu, L., Zhao., Z., Tang, J., Ren, G.: Integration of absolute nodal elements into multibody system. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 62, pp. 931–943, 2010.
- [84] Zhao, Ch., Yu, H., Lin, Z., Zhao, Y.: Dynamic model and behavior of viscoelastic beam based on the absolute nodal coordinate formulation. *Proc. IMechE Part K: J Multi-body Dynamics*, Vol. 0(0), pp. 1–13, 2014.
- [85] Nápověda a uživatelská příručka programu MSC.Adams 2017.

Publikace autora k tématu dizertační práce

- [A1] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P.: Nonlinear dynamics of a cable–pulley system using absolute nodal coordinate formulation. *Mechanics Research Communications*, Vol. 82, pp. 21–28, 2017. ISSN 00936413
- [A2] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P.: Complex modelling and dynamical analysis of parallel cable mechanisms. *Mechanisms and Machine Science*, Vol. 54, pp. 193–202, 2018. ISBN 978-331967566-4
- [A3] Bulín, R., Hajžman, M.: Various strategies of elastic forces evaluation in the absolute nodal coordinate formulation. *Mechanism and Machine Science*, Vol. 44, pp. 179–784, 2017. ISBN 978-331944086-6
- [A4] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P.: Investigation of falling control rods in deformed guiding tubes in nuclear reactors using multibody approaches. *Proceedings of The 5th Joint International Conference on Multibody System Dynamics*, Técnico Lisboa, Portugalsko. Dostupné on-line http://imsd2018.tecnico.ulisboa.pt/Web_Abstracts_IMSD2018/about.html
- [A5] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P., Šika, Z., Zavřel, J.: Computational modelling of the parallel cable mechanism with the added active . *Proceedings of the 8th EC-COMAS Thematic Conference on MULTIBODY DYNAMICS 2017, MBD 2017*, Praha: ČVUT, pp. 465–472, 2017. ISBN 978-800106174-9
- [A6] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P.: Analysis of vibrations of a cable–pulley system using the absolute nodal coordinate formulation. *Dynamical Systems; Mechatronics and Life Sciences, DSTA 2015 proceedings*, Lodž, Polsko, pp. 111–120, 2015. ISBN: 978-83-7283-707-3
- [A7] Bulín, R.: Dynamic analysis of nonlinear flexible multibody systems using Newmark integration scheme . *Applied Mechanics 2018 - Conference Proceedings*, FAV ZČU, Plzeň, pp. 15–18, 2018. ISBN 978-80-261-0766-8
- [A8] Bulín, R., Hajžman, M.: On the Performance of Various Integration Schemes with the Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Applied Mechanics 2017 - Conference Proceedings*, Ústav fyziky materiálů AV ČR, Brno, pp. 11–14, 2017. ISBN 978-80-87434-08-6

- [A9] Bulín, R., Hajžman, M.: Basic Rope–Sheave Interaction Analysis Using Absolute Nodal Coordinate Formulation. *Applied Mechanics 2015 - Book of Abstracts*, ČVUT v Praze, pp. 17–18, 2015. ISBN 978-80-01-05708-7
- [A10] Bulín, R., Hajžman, M.: On the Modelling of Contact Forces in the Framework of Rigid Body Dynamics. *Manufacturing Technology*, Vol. 14, No. 2, pp. 136–141, 2014. ISSN 1213-2489
- [A11] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P., Šika, Z., Zavřel, J.: Dynamical analysis of a cable manipulator using multibody approaches. *Manufacturing Technology*, Vol. 17, No. 2, pp. 152–157, 2017. ISSN 1213-2489
- [A12] Bulín, R.: Problematika počítačových simulací dynamiky regulačních orgánů jaderných reaktorů. *Bezpečnost jaderné energie*, Vol. 22, No. 1–2, pp. 34–38, 2014. ISSN 1210-7085
- [A13] Bulín, R., Hajžman, M.: The influence of elastic force models on the numerical simulations of control rod drop. *Applied Mechanics 2014 - proceedings of extended abstracts*, Gliwice: Silesian University of Technology, pp. 1–6, 2014. ISBN 978-83-60102-67-1
- [A14] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P.: Nonlinear dynamic analysis of a single control rod in nuclear reactors. *Dynamika strojů 2014 = Dynamics of Machines 2014*, Praha, pp. 23–30, 2014. ISBN 978-80-87012-50-5
- [A15] Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P.: Basic model of a control assembly drop in nuclear reactors. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské Technické univerzity Ostrava*, Vol. 59, No. 1, pp. 1–6, 2013. ISSN 1804-0993
- [A16] Bulín, R., Hajžman, M.: Contact force modelling in the multibody dynamics. *Dynamika tuhých a deformovatelných těles 2013*, Univerzita J. E. Purkyně, Ústí nad Labem, 2013. ISBN 978-80-7414-607-7
- [A17] Hajžman, M., Bulín, R., Polach, P.: Nonlinear analysis of the cable–pulley interaction. *Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015*, Barcelona: CIMNE, pp. 554–564, 2015. ISBN 978-84-944244-0-3
- [A18] Polach, P., Hajžman, M., Bulín, R., Byrtus, M., Dupal, J.: Computational Modelling of Dynamics of Cables and Fibres. *Proceedings of Abstracts of The 12th World Congress on Computational Mechanics WCCM XII & The 6th Asia-Pacific Congress on Computational Mechanics APCOM VI*, The Korean Society of Mechanical Engineers, Seoul, Korea, 2016.
- [A19] Polach, P., Hajžman, M., Bulín, R.: Determination of Deformation Limit of Fuel Assembly Guide Tubes of the VVER 1000 Nuclear Reactor. *Proceedings of The 8th Asian Conference on Multibody System Dynamics ACMD 2016*, The Japan Society of Mechanical Engineers, Kanazawa, Japonsko, pp. 208–209, 2016.

- [A20] Polach, P., Bulín, R., Beneš, P., Šika, Z., Hajžman, M.: Approaches to the computational modelling of the mechanical systems with cables. *Proceedings of Extended Abstracts of 32nd Conference with International Participation Computational Mechanics 2016*, Západočeská univerzita v Plzni, Špičák, 2016.
- [A21] Polach, P., Hajžman, M., Bulín, R.: Simulation of Two Types of the Control Assembly Drop in the VVER 1000 Nuclear Reactor at Seismic Event. *Program and Abstract Book of the 9th Asian Conference on Multibody Dynamics*, Shanghai Jiaotong University, Xi'an, Čína, pp. 114–115, srpen 2018.
- [A22] Šika, Z., Beneš, P., Valášek, M., Volech, J., Kraus, K., Bulín, R., Hajžman, M., Polach, P.: Cable driven spherical mechanism quadrosphere enhanced by 3 dof piezo-Actuated platform. *Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on MULTIBODY DYNAMICS 2017, MBD 2017*, Praha: ČVUT, pp. 551–558, 2017. ISBN 978-800106174-9

A. Přílohy

A.1. Výrazy pro matice tuhosti vybraných ANCF elementů

A.1.1. Matice tuhosti plně parametrizovaného ANCF elementu dle obecných postupů mechaniky kontinua

Rozepsáním výrazu (4.25) lze získat nelineární matici tuhosti plně parametrizovaného ANCF nosníkového elementu, která byla odvozena využitím obecných postupů mechaniky kontinua, ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{full}^{cma} = & \int_{V_e} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} (\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z}) + \right. \\ & + \frac{\lambda}{2} (\mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} + \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} + \\ & + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x}) + \\ & + 2\mu (\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,z} + \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,z}) - \\ & \left. - \frac{3\lambda + 2\mu}{2} (\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z}) \right] dV_e. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

A.1.2. Matice tuhosti plně parametrizovaného ANCF elementu dle elastic line approach

Dosazením výrazů pro deformace (4.30) do (4.36) lze vyjádřit nelineární matici tuhosti plně parametrizovaného ANCF nosníkového elementu ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{full}^{ela} = & \int_0^{l_e} \left\{ A_e \left[\frac{\lambda + 2\mu}{2} (\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z}) + \right. \right. \\
 & + \frac{\lambda}{2} (\mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} + \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} + \\
 & + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x}) + \\
 & + 2\mu (k_y \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,y} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,z} + k_z \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,z} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,z}) - \\
 & \left. - \frac{3\lambda + 2\mu}{2} (\mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} + \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,y} + \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,z}) \right] + \\
 & + \frac{S_t}{2} (\mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,xy} - \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,xz}) \mathbf{e} \mathbf{e}^T (\mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,xy} - \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,xz}) + \\
 & \left. + \frac{2(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + \mu} (I_y \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,z}^T \mathbf{S}_{,xx} + I_z \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,y}^T \mathbf{S}_{,xx}) \right\} dx.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Vzhledem k tomu, že k odvození nelineární matice tuhosti ANCF nosníkového elementu (A.2) byl použit *elastic line approach*, kde všechny deformace jsou vyhodnoceny na střednicové linii elementu, jsou příslušné derivace matice tvarových funkcí \mathbf{S} vyjádřeny v bodech střednicové linie elementu $(x, 0, 0)$.

A.1.3. Matice tuhosti ANCF elementu nižšího řádu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{low} = \mathbf{K}_{le} + \mathbf{K}_{be} = & \\
 = & \frac{1}{2} EA_e \int_0^{l_e} [\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e} \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} - \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x}] dx + \\
 & + I_e E \int_0^{l_e} \frac{(\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}}{(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{9}{2}}} \left[(\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{3}{2}} \mathbf{V} \mathbf{A}_{comp} - \right. \\
 & \left. - 3 (\mathbf{v}^T \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e}^T \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \mathbf{e})^{\frac{1}{2}} \mathbf{S}_{,x}^T \mathbf{S}_{,x} \right] dx,
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

kde $\mathbf{v} = (\mathbf{S}_{,x} \mathbf{e}) \times (\mathbf{S}_{,xx} \mathbf{e})$, matice \mathbf{V} viz (4.86), matice \mathbf{A}_{comp} viz (4.87).

A.1.4. Matice tuhosti rovinného ANCF elementu typu L2T2

Matice podélné tuhosti $\mathbf{K}_{l_e}^{L2}$ má tvar [5]

$$\mathbf{K}_{l_e}^{L2}(\mathbf{e}) = \frac{EA_e}{l_e} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} & 0 \\ & \mathcal{A} & 0 & \mathcal{B} & 0 & -\mathcal{A} & 0 & \mathcal{C} \\ & & \mathcal{D} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{E} & 0 \\ & & & \mathcal{D} & 0 & -\mathcal{B} & 0 & \mathcal{E} \\ & & & & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} & 0 \\ & & & & & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} \\ & & & & & & \mathcal{F} & 0 \\ & & & & & & & \mathcal{F} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Při definici

$$\begin{aligned} d_x &= e_5 - e_1, & d_y &= e_6 - e_2, & d &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2}, \\ a_x &= l_e e_3, & a_y &= l_e e_4, & a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \\ b_x &= l_e e_7, & b_y &= l_e e_8, & a &= \sqrt{b_x^2 + b_y^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

lze koeficienty z (A.4) vyjádřit

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{3}{70l_e^2} (a^2 + b^2 - 14l_e^2 - 6a_x d_x - 6b_x d_x - 6a_y d_y - 6b_y d_y + 24d^2), \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{280l_e} (b^2 - a^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y - 14l_e^2 - 24a_x d_x - 24a_y d_y + 36d^2), \\ \mathcal{C} &= \frac{1}{280l_e} (a^2 - b^2 + 2a_x b_x + 2a_y b_y - 14l_e^2 - 24b_x d_x - 24b_y d_y + 36d^2), \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{420} (12a^2 + b^2 - 3a_x b_x - 3a_y b_y - 28l_e^2 + 3a_x d_x - 3b_x d_x + 3a_y d_y - 3b_y d_y + 18d^2), \\ \mathcal{E} &= \frac{-1}{840} (3a^2 + 3b^2 - 4a_x b_x - 4a_y b_y - 14l_e^2 + 6a_x d_x + 6b_x d_x + 6a_y d_y + 6b_y d_y), \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{420} (a^2 + 12b^2 - 3a_x b_x - 3a_y b_y - 28l_e^2 - 3a_x d_x + 3b_x d_x - 3a_y d_y + 3b_y d_y + 18d^2). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Matice příčné tuhosti rovinného L2T2 nosníkového elementu [5] má tvar

$$\mathbf{K}_{b_e}^{T2}(\mathbf{e}) = \mathbf{K}_{b_1}^{T2}(\mathbf{e}) + \mathbf{K}_{b_2}^{T2}(\mathbf{e}), \quad (\text{A.7})$$

kde

$$\mathbf{K}_{b_1}^{T2}(\mathbf{e}) = \frac{EI}{l_e^3 f^4} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6l_e & 0 & -12 & 0 & 6l_e & 0 \\ & 12 & 0 & 6l_e & 0 & -12 & 0 & 6l_e \\ & & 4l_e^2 & 0 & -6l_e & 0 & 2l_e^2 & 0 \\ & & & 4l_e^2 & 0 & -6l_e & 0 & 2l_e^2 \\ & & & & 12 & 0 & -6l_e & 0 \\ & & & & & 12 & 0 & -6l_e \\ & & & & & & 4l_e^2 & 0 \\ & & & & & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{K}_{b2}^{T2}(\mathbf{e}) = -2 \frac{EI\bar{\kappa}^2}{l_e \bar{f}^2} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{l_e}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{l_e}{10} & 0 \\ & \frac{6}{5} & 0 & \frac{l_e}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{l_e}{10} \\ & & \frac{2l_e^2}{15} & 0 & -\frac{l_e}{10} & 0 & -\frac{l_e^2}{30} & 0 \\ & & & \frac{2l_e^2}{15} & 0 & -\frac{l_e}{10} & 0 & -\frac{l_e^2}{30} \\ & & & & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{l_e}{10} & 0 \\ & & & & & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{l_e}{10} \\ & & & & & & \frac{2l_e^2}{15} & 0 \\ & & & & & & & \frac{2l_e^2}{15} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Průměrný deformační gradient \bar{f} a průměrná křivost $\bar{\kappa}$ z výrazů (A.8) a (A.9) mají tvar

$$\bar{f} = \frac{1}{l_e} \sqrt{\mathbf{e}^T \int_0^1 \mathbf{S}_{,\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi} d\xi} \mathbf{e}, \quad (\text{A.10})$$

$$\bar{\kappa} = \sqrt{\int_0^1 \kappa^2 d\xi} = \frac{1}{l_e \bar{f}^2} \sqrt{\mathbf{e}^T \int_0^1 \mathbf{S}_{,\xi\xi}^T \mathbf{S}_{,\xi\xi} d\xi} \mathbf{e}. \quad (\text{A.11})$$

A.2. Výrazy pro matice hmotnosti vybraných ANCF elementů

A.2.1. Matice hmotnosti plně parametrizovaného ANCF elementu

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} \frac{13}{35} m_e \mathbf{I} & \frac{11}{210} l_e m_e \mathbf{I} & \frac{7}{20} \rho l_e S_z \mathbf{I} & \frac{7}{20} \rho l_e S_y \mathbf{I} & \frac{9}{70} m_e \mathbf{I} & -\frac{13}{420} l_e m_e \mathbf{I} & \frac{3}{20} \rho l_e S_z \mathbf{I} & \frac{3}{20} \rho l_e S_y \mathbf{I} \\ \frac{1}{105} l_e^2 m_e \mathbf{I} & \frac{1}{20} \rho l_e^2 S_z \mathbf{I} & \frac{1}{20} \rho l_e^2 S_y \mathbf{I} & \frac{13}{420} l_e m_e \mathbf{I} & -\frac{1}{140} l_e^2 m_e \mathbf{I} & \frac{1}{30} \rho l_e^2 S_z \mathbf{I} & \frac{1}{30} \rho l_e^2 S_y \mathbf{I} \\ \frac{1}{3} \rho l_e I_{zz} \mathbf{I} & \frac{1}{3} \rho l_e I_{yz} \mathbf{I} & \frac{3}{20} \rho l_e S_z \mathbf{I} & -\frac{1}{30} \rho l_e^2 S_z \mathbf{I} & \frac{1}{6} \rho l_e I_{zz} \mathbf{I} & \frac{1}{6} \rho l_e I_{yz} \mathbf{I} \\ & \frac{1}{3} \rho l_e I_{yy} \mathbf{I} & \frac{3}{20} \rho l_e S_y \mathbf{I} & \frac{1}{30} \rho l_e^2 S_y \mathbf{I} & \frac{1}{6} \rho l_e I_{yz} \mathbf{I} & \frac{1}{6} \rho l_e I_{yy} \mathbf{I} \\ & & \frac{13}{35} m_e \mathbf{I} & -\frac{11}{210} l_e m_e \mathbf{I} & \frac{7}{20} \rho l_e S_z \mathbf{I} & \frac{7}{20} \rho l_e S_y \mathbf{I} \\ & & \frac{1}{105} l_e^2 m_e \mathbf{I} & -\frac{1}{20} \rho l_e^2 S_z \mathbf{I} & -\frac{1}{20} \rho l_e^2 S_y \mathbf{I} \\ & & & & \frac{1}{3} \rho l_e I_{zz} \mathbf{I} & \frac{1}{3} \rho l_e I_{yz} \mathbf{I} \\ & & & & & \frac{1}{3} \rho l_e I_{yy} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

kde S_y a S_z jsou lineární momenty průřezu a I_{yy} , I_{yz} , I_{zz} jsou kvadratické momenty

průřezu a \mathbf{I} představuje jednotkovou matici o rozměrech 3×3 . Platí

$$\begin{aligned} S_y &= \int_{A_e} z dA_e, \\ S_z &= \int_{A_e} y dA_e, \\ I_{yy} &= \int_{A_e} z^2 dA_e, \\ I_{yz} &= \int_{A_e} yz dA_e, \\ I_{zz} &= \int_{A_e} y^2 dA_e. \end{aligned} \tag{A.13}$$