

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

**Modelování turbulentního proudění pomocí
RANS a implicitního přístupu LES s využitím
nespojité Galerkinovy metody**

Ing. Helena Prausová

disertační práce
k získání akademického titulu doktor
v oboru Aplikovaná mechanika

Školitel: doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
Katedra mechaniky

Plzeň 2019

University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences

**Modelling of turbulent flows using RANS
and implicit LES with application
of discontinuous Galerkin method**

Ing. Helena Prausová

Ph.D. thesis
to obtain academic degree doctor
in Applied Mechanics

Supervisor: doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
Department of Mechanics

Pilsen 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracovala samostatně a s použitím uvedených zdrojů a literatury.

Plzeň, dne 5. 8. 2019

Předkládaná disertační práce vznikala za podpory projektu PUNTIS LO1506 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR v rámci programu NPU I.

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému školiteli doc. Ing. Janu Vimmrovi, Ph.D. za vedení v průběhu celého mého studia na Fakultě aplikovaných věd a za jeho podporu a pochopení v neobvyklých životních situacích. Můj obrovský dík patří Ing. Ondřeji Bublíkovi, Ph.D. za ochotu a nesčetné konzultace. Děkuji také Ing. Jindřichu Hálovi za poskytnutí experimentálních dat a Ing. Miroslavu Horákovi, Ph.D. za počítačovou podporu a poskytnutí výpočetních kapacit, bez nichž by bylo dokončení disertační práce velmi komplikované. Vážím si podpory kolegů a kolegyně z Katedry mechaniky a jejich tolerance k časté přítomnosti mé dcery na pracovišti.

Zvláštní poděkování bych ráda věnovala manželovi Jiřímu, mamince a mé úžasné tchyni za jejich lásku, trpělivost a poskytnutí dostatku času na dokončení doktorského studia. Bez nich by to nebylo možné.

Nakonec děkuji své dceři Kateřině za to, že mi byla obrovskou motivací, i když to vůbec netušila, a že to se mnou všechno vydržela až do konce.

Abstrakt

Disertační práce se zabývá numerickým modelováním turbulentního proudění stlačitelných tekutin pomocí přístupů RANS a LES se zaměřením na využití předností nespojitě Galerkinovy metody konečných prvků, která je použita pro prostorovou diskretizaci příslušných matematických modelů.

První část práce je zaměřena na implementaci dvourovnicových modelů turbulence typu $k-\omega$ do numerického řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě, vyvíjeného na pracovišti. Je uveden matematický model turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny v podobě systému Navierových-Stokesových rovnic ve 2D, středovaných podle Favra a uzavřených dvourovnicovým modelem turbulence $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006). Z důvodu problémů se stabilitou, vznikajících v důsledku diskretizace dvourovnicového modelu pomocí nespojitě Galerkinovy metody, je proveden převod modelové rovnice pro specifickou rychlost disipace ω do logaritmického tvaru a dále je vhodně omezena turbulentní kinetická energie k . Matematický model je převeden do bezrozměrového tvaru a jeho implementace je verifikována na úloze obtékání rovné desky s nulovým tlakovým gradientem.

Aplikační část práce je věnována studiu proudění stlačitelných tekutin v úzkých kanálech. Výzkum probíhá ve spolupráci s pracovníky Ústavu termomechaniky Akademie věd ČR, v.v.i., kteří provedli experimenty proudění vzduchu v kalibračním kanálu o výšce 10 mm s výtokem do volného prostoru a dále sérii měření v kanálech o výšce 0,5 až 4 mm. Porovnáním se změřeným průběhem statického a celkového tlaku v kalibračním kanálu a smykového napětí na stěně byl numerický řešič úspěšně validován pro plně turbulentní proudění v kanálu. Validovaný numerický řešič je následně aplikován na úlohu proudění v minikanálech. Jsou provedeny laminární a plně turbulentní simulace pro kanály výšky 0,5, 2, 3 a 4 mm, a to s druhým řádem přesnosti nespojitě Galerkinovy metody v prostoru a pro nadkritický tlakový poměr. Na základě porovnání numerických výsledků s experimentálně získaným statickým tlakem podél kanálu jsou učiněny závěry o hodnotě kritického Reynoldsova čísla ve zkoumaných minikanálech. Práce přináší nové výsledky v této nedostatečně probádané oblasti a přispívá k řešení stále otevřených otázek týkajících se proudění stlačitelné tekutiny v úzkých kanálech.

Poslední část práce se zabývá nepříliš rozšířenou, ale velmi slibnou, implicitní simulací velkých vírů, která je umožněna disipativními vlastnostmi nespojitě Galerkinovy metody při použití dostatečně vysokého řádu přesnosti metody v prostoru. V práci je uveden matematický model, tvořený systémem Navierových-Stokesových rovnic ve 3D bez filtrování a bez explicitního subgridního modelu. Dále je detailně popsána úloha turbulentního proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami, která je použita pro validaci nespojitě Galerkinovy metody se čtvrtým řádem přesnosti v prostoru na velmi hrubé výpočetní síti. Výsledky jsou statisticky vyhodnoceny a porovnány s daty dostupnými v literatuře. Získané výsledky jsou vzhledem k nízkému počtu elementů výpočetní sítě a absenci subgridního modelu velmi uspokojivé a představují dobrý základ pro další rozvoj nadějného DGM-ILES přístupu.

Klíčová slova: turbulentní proudění, nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků, dvourovnicový model turbulence $k-\omega$, minikanál, implicitní LES

Abstract

The thesis deals with numerical modelling of turbulent compressible fluid flows using RANS and LES approaches, taking advantage of the discontinuous Galerkin finite element method used for discretization of the appropriate mathematical models.

The first part is focused on implementation of two-equation k - ω turbulence models into the numerical solver, which is based on the discontinuous Galerkin method and is being developed in the department. Mathematical model of turbulent compressible fluid flow consisting of Favre averaged system of Navier-Stokes equations in 2D is described and closed with the two-equation k - ω turbulence model of Wilcox (2006). Discretization of the turbulence model by discontinuous Galerkin method causes problems with stability of numerical simulations. Modifications of the model are employed for this reason, namely the logarithmic formulation of the transport equation for specific dissipation rate ω and restriction of turbulent kinetic energy k . The mathematical model is transformed into the dimensionless form and its implementation is verified on zero pressure gradient flat plate problem.

Second part of the thesis is devoted to the study of compressible fluid flow in narrow channels. Research is taking place under collaboration with Institute of Thermomechanics of the CAS, v.v.i., where experiments of air flow in calibration channel of height 10 mm and in minichannels of height 0.5 to 4 mm were performed. Numerical solver was successfully validated for fully turbulent flows in channels using measured static and total pressure in calibration channel and shear stress on its wall. The solver was then applied on minichannels. Laminar and fully turbulent numerical simulations were performed in channels of height 0.5, 2, 3 and 4 mm, using second order of DGM in space. Conclusions concerning critical Reynolds number in minichannels based on comparison of static pressure obtained from calculations and experiments were drawn. The thesis brings original results in this insufficiently explored area and contributes to the solution of still open problems concerning compressible fluid flow in narrow channels.

Last part of the thesis deals with not widespread, but very promising implicit large eddy simulation, which is enabled thanks to the appropriate dissipation characteristics of the discontinuous Galerkin method with high order of accuracy in space. Mathematical model consisting of system of Navier-Stokes equations in 3D without filtering or explicit subgrid-scale model is stated. The testcase of turbulent channel flow is then described in detail and used for validation of the DGM with fourth order of accuracy in space on very coarse computational grid. The results are statistically evaluated and compared to the data available in literature. Considering the low number of grid elements and absence of subgrid-scale model, the obtained results are very satisfying and constitute solid grounds for future development of the promising DGM-ILES approach.

Keywords: turbulent flow, discontinuous Galerkin finite element method, two-equation turbulence model k - ω , minichannel, implicit LES

Obsah

Seznam symbolů a označení	9
Úvod	12
1 Modelování turbulentního proudění pomocí dvourovnicových modelů turbulence	17
1.1 Matematický model turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny	18
1.1.1 Systém Navierových-Stokesových rovnic a jeho středování	18
1.1.2 Uzavření systému RANS	21
1.1.3 Dvourovnicové modely turbulence typu $k-\omega$ s úpravami pro DGFEM .	23
1.1.4 Stabilizace simulací úpravou modelu $k-\omega$ pro implementaci do DGFEM	25
1.2 Numerické řešení - nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků	27
1.2.1 Bezrozměrový tvar matematického modelu v kompaktním zápisu	27
1.2.2 Nespojitá Galerkinova metoda ve 2D	29
1.3 Verifikace modelu $k-\omega$ na úloze obtékání rovné desky	32
1.3.1 Nastavení simulace	32
1.3.2 Stabilita numerické simulace	35
1.3.3 Výsledky verifikační simulace	36
1.3.4 Závěry	43
2 Numerická simulace proudění stlačitelné vazké tekutiny v minikanálech	44
2.1 Motivace a současný stav poznání	44
2.2 Formulace úlohy a popis experimentu	47
2.3 Numerická simulace proudění vzduchu v mezeře výšky $h = 10$ mm	48
2.3.1 Testování tvaru vstupní oblasti	48
2.3.2 Parametry numerické simulace	49
2.3.3 Výsledky simulace a porovnání s experimentem	53
2.4 Numerická simulace proudění vzduchu v mezerách výšky $h = 0,5$ až 4 mm . .	59
2.4.1 Parametry numerické simulace	59
2.4.2 Výsledky simulace a porovnání s experimentem	62
2.5 Diskuze výsledků a závěry	65
3 Implicitní simulace velkých vírů	69
3.1 Princip LES a standardní přístup	69
3.1.1 Přenos energie v turbulentním proudění	70
3.1.2 Matematický model	71
3.1.3 Filtrování a subgridní modely	72
3.2 Implicitní přístup	74
3.2.1 ILES a nespojitá Galerkinova metoda	75

3.3	Numerické řešení - nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků	78
3.3.1	Bezrozměrový tvar matematického modelu v kompaktním zápisu	78
3.3.2	Nespojitá Galerkinova metoda ve 3D	80
3.4	Simulace proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami	81
3.4.1	Geometrie a charakteristické veličiny úlohy	81
3.4.2	Volba referenční literatury	82
3.4.3	Parametry simulace	83
3.4.4	Počáteční a okrajové podmínky	85
3.4.5	Časový krok, vývoj simulace a sběr dat	86
3.4.6	Zdrojové členy	89
3.4.7	Statistické vyhodnocení simulace	91
3.4.8	Závěry a diskuze	100
	Závěr	102
	Literatura	105
	Publikované práce	112

Seznam symbolů a označení

Označení	Význam použitého symbolu a označení
BDF2	Second-Order Backward Differentiation Formula
DDG	Direct Discontinuous Galerkin
DGM, DGFEM	Discontinuous Galerkin (Finite Element) Method
DNS	Direct Numerical Simulation
GMRES	Generalized Minimal Residual Method
ILES	Implicit Large Eddy Simulation
LES	Large Eddy Simulation
MILES	Monotone Integrated Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds Averaged Navier-Stokes
A	plocha průřezu
A_{ii}	diagonální prvky anizotropní části tenzoru \mathbf{R}
a	rychlost zvuku
a_{ki}	koeficient báze funkce DGM
C_f	součinitel tření
C_S	Smagorinského konstanta
CFL	parametr nutné podmínky stability
c_p, c_v	měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku, objemu
D	průměr
D_h	hydraulický průměr
e	celková měrná energie
$\mathbf{e}, \mathbf{e}_i^m$	jednotkový vektor
$\mathbf{f}_s^n, \mathbf{f}_s^v$	s -tá složka nevazkého a vazkého numerického toku
\mathbf{f}_s^{DDG}	s -tá složka numerického toku DDG
f_1, f_2	zdrojový člen
f_β	empirická veličina modelu turbulence
G	filtr
h	parametr metody GMRES / výška mezery
k	součinitel tepelné vodivosti / turbulentní kinetická energie
k_t	součinitel turbulentní tepelné vodivosti
k_{sgs}	subgridní kinetická energie
L, l	charakteristická délka
\mathcal{L}, ℓ	délkové měřítko
L_e	vstupní délka
\mathbf{M}	matice hmotnosti
Ma	Machovo číslo

\mathbf{n}, n_i	jednotkový vektor vnější normály
n_t	počet časových vzorků
n_x, n_y, n_z	počet uzlů / elementů sítě ve směrech x, y, z
o	délka omočeného obvodu
p	statický tlak / stupeň aproximačního polynomu
p_{stat}, p_{celk}	statický tlak, celkový tlak
\mathbf{p}	produkční člen
P_k	produkce turbulentní kinetické energie
Pr	Prandtlovo číslo
Pr_t	turbulentní Prandtlovo číslo
\mathbf{q}, q_i	vektor tepelného toku
\mathbf{q}_t, q_{t_i}	vektor turbulentního tepelného toku
\mathbf{R}	tenzor Reynoldsových napětí
R_{ii}	diagonální prvky tenzoru \mathbf{R}
$\mathbf{R}(\mathbf{W})$	vektor reziduí
r	měrná plynová konstanta / poloměr
Re	Reynoldsovo číslo
Re_{ref}	referenční Reynoldsovo číslo
Re_x	Reynoldsovo číslo závislé na vzdálenosti od náběžné hrany
Re_τ	třecí Reynoldsovo číslo
S_{ij}	tenzor rychlosti deformace
t	čas
T	termodynamická teplota / časový interval
Tu	intenzita turbulence
U	charakteristická rychlost
u_η	Kolmogorovovo rychlostní měřítko
u_τ	třecí rychlost
u^+	bezrozměrová rychlost normovaná třecí rychlostí
\mathbf{v}, v_i	vektor rychlosti
v_i^0	složky počátečního vektoru rychlosti
$\mathbf{v}, v_{k,j}^r$	testovací funkce
\mathbf{W}	globální vektor neznámých koeficientů báзовých funkcí
$\mathbf{w}, w_k^m, \nabla \mathbf{w}$	vektor (konzervativních) proměnných a jeho gradient
\mathbf{w}^0	počáteční vektor (konzervativních) proměnných
$\hat{\mathbf{w}}, \nabla \hat{\mathbf{w}}$	vektor (konzervativních) proměnných v num. toku DDG a jeho gradient
$w_{k,i}^m$	koeficient lineární kombinace báзовých funkcí
x, y, z	kartézské složky vektoru prostorových souřadnic
y_0	vzdálenost prvního uzlu sítě od stěny
\mathbf{y}, y_i	vektor prostorových souřadnic
y^+	bezrozměrová vzdálenost prvního uzlu sítě od stěny ve stěnových jednotkách
α	konstanta modelu turbulence
$\alpha_1 - \alpha_6$	subgridní členy ve filtrovaných rovnicích
β, β_0, β^*	konstanty modelu turbulence / parametr numerického toku DDG
γ^*	konstanta modelu turbulence
δ	polovina výšky kanálu
δ_{ij}	Kroneckerovo delta
Δ	parametr numerického toku DDG / šířka filtru
Δ_i	charakteristický rozměr kontrolního elementu v i -tém souřadnicovém směru

Δl_k	charakteristický rozměr k -tého kontrolního elementu
Δt	časový krok
Δt^+	bezrozměrový časový krok
ε	měrná vnitřní energie
ϵ	rychlost disipace turbulentní energie
η	Kolmogorovovo délkové měřítko
κ	Poissonova adiabatická konstanta / vlnové číslo
μ	dynamická vazkost
μ_t	turbulentní vazkost
μ_{sgs}	subgridní vazkost
ν	kinematická vazkost
π	tlakový poměr / Ludolfovo číslo
ρ	hustota
σ_{ij}	tenzor vazkových napětí
$\sigma, \sigma_k, \sigma_d, \sigma^*$	konstanty modelu turbulence
τ	celkové smykové napětí
τ_{ij}	tenzor Reynoldsových turbulentních napětí / tenzor subgridních napětí
τ_η	Kolmogorovovo časové měřítko
τ_w	smykové napětí na stěně
φ_k^i	i -tá básová funkce na k -tém kontrolním elementu
χ_ω	empirická veličina modelu turbulence
ψ	náhodná funkce
Ω	omezená výpočtová oblast
$\Omega_k, \partial\Omega_k$	kontrolní element výpočetní sítě a jeho hranice
Ω_{ij}	tenzor rychlosti rotace (vířivosti)
ω	specifická rychlost disipace turbulentní energie
$\tilde{\omega}$	pomocná specifická rychlost disipace pro model k - ω podle Wilcoxe (2006)
$\hat{\omega}$	pomocná specifická rychlost disipace pro k - $\ln(\omega)$ formulaci

\bar{f}	střední hodnota veličiny f / filtrovaná veličina podle Reynoldse
f'	fluktuační veličiny f / příspěvek subgridních měřítek podle Reynoldse
\tilde{f}	střední hodnota veličiny f / filtrovaná veličina podle Favra
f''	fluktuační veličiny f / příspěvek subgridních měřítek podle Favra
\check{f}	modifikovaná veličina ve filtrovaných rovnicích
$\langle f \rangle$	zprůměrovaná hodnota veličiny f
$\langle v_i \rangle_{rms}$	root mean square intenzita turbulence

dolní index:

ref	referenční hodnota veličiny
fs	hodnota ve volném proudu
$bulk$	průměrná hodnota veličiny po normále ke stěně
$w/wall$	hodnota na stěně

horní index:

DGM	hodnota z vlastní simulace provedené pomocí DGM
M	hodnota z referenční simulace Mosera aj. [55]
$NASA$	hodnota z verifikační simulace NASA [101]
*	bezrozměrová / normovaná hodnota veličiny

Úvod

V přírodě i v technické praxi se vyskytuje celá řada typů proudění tekutin různých vlastností. V některých případech se lze při numerické simulaci omezit na laminární proudění, aniž by to znamenalo velké nepřesnosti. Často je ale nutné brát proudění jako turbulentní, případně přechodové, a jako takové ho i modelovat. Přístupů k modelování turbulentního proudění se dnes nabízí celá řada, od konceptu Reynoldsova středování a modelů turbulence přes přímou numerickou simulaci až po molekulární dynamiku, případně hybridní modely molekulární dynamiky a kontinua. Nejstarší metoda je založena na středování veličin proudového pole (RANS - *Reynolds Averaged Navier-Stokes*) a uzavření středovaného systému rovnic vhodným modelem turbulence, který modeluje vliv turbulentních fluktuací na střední hodnoty proudění. Výstupem simulací jsou tak pouze střední hodnoty veličin. Na opačném konci spektra v přesnosti zachycení turbulentních fluktuací stojí přímá numerická simulace (DNS - *Direct Numerical Simulation*), která je podmíněna použitím velmi jemné výpočetní sítě a malého časového kroku tak, aby řešením nestředovaného systému rovnic popisujícího proudění tekutiny bylo možné zachytit turbulentní fluktuace všech měřítek časových i prostorových. Na pomezí mezi těmito dvěma přístupy stojí simulace velkých vírů (LES - *Large Eddy Simulation*), která velké turbulentní struktury modeluje přímo a vliv těch menších zachytí pomocí subgridních modelů, podobných modelům turbulence.

Všechny tři přístupy se stále rozvíjí. Jsou zdokonalovány modely turbulence a v současnosti především modely přechodu z laminárního do turbulentního proudění. Stále více se do popředí zájmu dostává simulace velkých vírů díky své větší přesnosti a použitelnosti pro různé typy proudění. Prudký rozvoj výpočetní techniky umožňuje i stále širší uplatnění časově velmi náročné přímé numerické simulace, která ale zatím není běžně použitelná pro praktické úlohy.

Kromě rozvoje uvedených přístupů se v poslední době pozornost zaměřuje i na numerické metody, kterými jsou rovnice popisující turbulentní proudění diskretizovány. Rozvíjí se řada poměrně nových metod s vysokým řádem přesnosti v prostoru i v čase, které mohou přinést do modelování turbulence mnoho výhod. Jednou z takových metod je i nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků (*Discontinuous Galerkin Finite Element Method* - DGM, DGFEM), představující společné zobecnění metody konečných prvků a konečných objemů. Mezi její nesporné přednosti patří možnost volby řádu přesnosti v prostoru, velká flexibilita díky nespojitosti řešení na hranicích kontrolních elementů nebo vhodnost metody pro paralelní výpočty. Nevýhodou je nutnost vypořádat se s nespojitostí na hranicích elementů pomocí vhodných numerických toků nebo větší výpočetní náročnost, kvůli které je potřeba hledat efektivní způsoby časové integrace.

Předkládaná disertační práce se věnuje numerickému modelování turbulentního proudění pomocí přístupů RANS a LES, se zaměřením na využití nespojité Galerkinovy metody konečných prvků.

Vývoj modelování turbulentního proudění

Za počátek modelování turbulentního proudění pomocí středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic je považována práce Reynoldse (1895), který se zabýval experimentálním zkoumáním přechodu z laminárního do turbulentního režimu. Pro případ proudění nestlačitelné kapaliny v trubici s hladkým povrchem zavedl bezrozměrový parametr, určující, kdy k přechodu dochází, známý jako Reynoldsovo číslo. Jeho výzkum zcela zásadně ovlivnil pohled na turbulentní proudění. Z důvodu složitosti turbulentních jevů navrhl dekompozici veličin proudového pole na časovou střední hodnotu a fluktuaci. Jedná se o přístup dnes označovaný jako RANS, který se stal základem pro modelování turbulence. První pokus o matematický popis turbulentního proudění ale provedl už Boussinesq (1877), který zavedl turbulentní vazkost, pomocí níž vyjádřil turbulentní napětí analogicky k vazkému napětí. Na této aproximaci jsou založeny všechny klasické dvourovnicové modely.

Na začátku 20. století se začaly rozvíjet znalosti fyziky vazkého proudění, jedním z nejvýznamnějších mezníků byl Prandtlův objev mezní vrstvy a předpoklad nulové rychlosti tekutiny na obtékané stěně (1904). Na základě analogie se střední volnou dráhou částic plynu zavedl Prandtl (1925) směšovací délku, která se stala základem pro výpočet turbulentní vazkosti a nasměrovala výzkum modelování turbulentního proudění na mnoho dalších let. Modely založené na směšovací délce dnes označujeme jako algebraické nebo také nularovnicové. Dalším významným příspěvkem je práce Kolmogorova (1941), týkající se mimo jiné kaskádovitěho přenosu energie mezi strukturami různých měřítek, vyskytujících se v turbulentním proudu, a zavedení Kolmogorovových měřítek - těch nejmenších, na jejichž úrovni dochází k disipaci turbulentní kinetické energie.

Základy modelů turbulence s transportními rovnicemi najdeme v práci Kolmogorova (1942), který jako první navrhl úplný model turbulence, tedy takový, který nepotřebuje kromě počátečních a okrajových podmínek žádné další informace pro výpočet turbulentního proudění. Kromě modelové rovnice pro kinetickou energii turbulentních fluktuací k zavedl Kolmogorov další parametr ω , nazvaný specifická rychlost disipace kinetické turbulentní energie v jednotkovém objemu za jednotku času. Sestavil tak první dvourovnicový $k - \omega$ model turbulence, jehož využití bylo možné až po rozvoji výpočetní techniky v sedmdesátých letech 20. století. První jednorovnicový model vytvořil Prandtl (1945), modelovou diferenciální rovnici pro turbulentní kinetickou energii doplnil algebraickými vztahy pro délkové měřítko.

V polovině 20. století se začaly rozvíjet snahy o modelování turbulentního proudění bez využití Boussinesqovy aproximace. Rotta (1951) navrhl použití diferenciální rovnice pro Reynoldsův tenzor turbulentních napětí a umožnil tak vznik skupiny modelů Reynoldsových napětí (*Reynolds stress transport models*).

Dále byly rozvíjeny všechny skupiny modelů turbulence. Van Driest (1956) navrhl tlumicí funkci pro modely se směšovací délkou, která se od té doby používá ve většině algebraických modelů. Baldwin a Lomax (1978) vytvořili algebraický model, který nevyžaduje nesnadný výpočet tloušťky mezní vrstvy. Největší oblíbenosti z jednorovnicových modelů dosáhl model Spalarta a Allmarase (1992), navržený pro obtékání leteckého profilu a velmi používaný dodnes.

Nejllepší výsledky a nejširší použitelnost ze skupiny modelů založených na Boussinesqově hypotéze můžeme očekávat u dvourovnicových modelů zahrnujících i historii proudění, čemuž odpovídá jejich rozvoj ve druhé polovině 20. století. Modelování stlačitelného proudění významně ovlivnila práce Favra (1965), který navrhl použití hmotnostně podmíněného středování. Po dlouhou dobu byl nejpoužívanější Launderův $k - \epsilon$ model, Launder a Spalading (1972), než ho předčil model $k - \omega$ v mnoha různých podobách. O jeho rozvoj se zasloužili například Saffman (1970), Wilcox (1988, 2006), Kok (2000) nebo Hellsten (2005).

Rychlý rozvoj výpočetní techniky umožnil i vývoj modelů Reynoldsových napětí, náročnějších na výpočetní výkon, ale poskytujících v mnoha případech lepší výsledky, například Daly a Harlow (1970), Launder, Reece a Rodi (1975), Speziale (1991) nebo Wallin a Johansson (2000).

Postupně se rozvíjelo i modelování přechodu z laminárního do turbulentního proudění, od použití empirických korelací, např. Abu-Ghannam a Shaw (1980), až po komplikovaný model přechodu s dvěma transportními rovnicemi Langtryho a Mentera (2009) a řadu dalších.

Od sedmdesátých let se rozvíjela i oblast modelování velkých vírů LES. Jako první tento přístup navrhl Smagorinsky (1963), původně pro výpočty mezní vrstvy atmosféry, a významně k jeho rozvoji v počátcích přispěl Deardorff (1970). K většímu výzkumu došlo až v devadesátých letech díky výkonnějším počítačům, které umožnily využít LES alespoň pro jednodušší geometrie. Mezi základy subgridních modelů patří kromě Smagorinského především práce Germana aj. (1991). Od 90. let se rozvíjí také implicitní LES, tedy simulace velkých vírů bez použití explicitního subgridního modelu, jejíž počátky jsou spojeny s Borisem (1990). První přímou numerickou simulaci provedli již Orszag a Patterson (1972), ale její další rozvoj a použití byly umožněné až později s větším rozvojem výpočetní techniky.

Nejnovější směry v modelování turbulentního proudění jsou založeny především na simulaci velkých vírů LES, která je dále rozvíjena a rozšiřuje se její využití v technické praxi. Z důvodu vysoké výpočetní náročnosti LES, především v blízkosti obtékaných stěn a pro vysoká Reynoldsova čísla, vznikly metody kombinující LES a RANS, respektive URANS (*Unsteady RANS*, tedy RANS přístup použitý v nestacionárním režimu). Aplikace RANS v oblasti mezní vrstvy snižuje nároky na hustotu sítě u stěny oproti použití LES. Spalart aj. (1997) navrhli původně pro obtékání leteckého profilu s velkým úhlem náběhu metodu DES (*Detached Eddy Simulation*), která v mezní vrstvě využívá přístup URANS s jednorovnicovým modelem Spalarta a Allmarase a vnější odtržené víry jsou pak zachyceny pomocí LES. Metodu poprvé použili pro výpočet Shur aj. (1999). Později byly aplikovány i dvourovnicové modely ($k-\epsilon$, $k-\omega$ SST), například Strelets (2001). Přístup označovaný jako hybridní LES-RANS využívá ve vnitřní oblasti mezní vrstvy obvykle RANS model turbulence, vhodný pro nízká Reynoldsova čísla, a v logaritmické oblasti mezní vrstvy dochází k přechodu k LES, například Davidson a Dahlström (2005) nebo Shur aj. (2008), kteří kombinují takzvané *delayed* DES a hybridní LES-RANS.

Dále se rozvíjí skupina modelů, které stejně jako LES a uvedené kombinované přístupy rozřeší podstatnou část turbulentních fluktuací, ale délkové měřítko, určující množství rozřešených fluktuací, nezávisí explicitně na výpočetní síti. Tyto modely obsahují členy citlivé na množství vypočítaných fluktuací a Fröhlichem a von Terzim (2008) jsou označovány jako 2. generace URANS (2G-URANS). Řadí se sem metody PANS (*Partially Averaged Navier-Stokes*), Girimaji (2006), PITM (*Partially Integrated Transport Model*), Schiestel a Dejoan (2005), SAS (*Scale-Adaptive Simulation*), Menter a Egorov (2006), nebo X-LES (*Extra-Large Eddy Simulation*), Kok aj. (2004), kde hranice mezi RANS a LES je časově proměnná, implicitně určovaná, a nezávisí tedy na vzdálenosti od obtékané stěny.

Cíle disertační práce

Nespojitá Galerkinova metoda, která je základem numerického řešiče vyvíjeného na pracovišti, je velmi moderním a perspektivním přístupem k řešení úloh proudění tekutin. Pro využití k řešení problémů základního i aplikovaného výzkumu je samozřejmě nezbytnou vlastností takového softwaru schopnost modelovat nejen laminární, ale i plně turbulentní a v ideálním případě také přechodové proudění. Diskretizace modelů turbulence, obzvláště dvourovnicových, pomocí DGM je poněkud problematická. Proto je potřeba cíleně rozvíjet,

implementovat a verifikovat modely turbulence diskretizované pomocí DGM tak, aby je bylo možné používat pro řešení úloh vyplývajících z potřeb technické praxe.

Hlavním cílem této disertační práce je tedy implementace dvourovnicových modelů turbulence typu $k-\omega$ do numerického řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě konečných prvků, se zaměřením na stabilitu numerických simulací. Dále je záměrem modely turbulence verifikovat a následně využít pro řešení problematiky proudění tekutin v úzkých kanálech. Jedním z cílů výzkumu v oblasti vnitřní aerodynamiky se zaměřením na minikanály s charakteristickým rozměrem v řádu milimetrů je prozkoumání režimu proudění a vhodných přístupů k modelování takového typu proudění. Cílem práce je ve spolupráci s Ústavem termomechaniky AV ČR, v.v.i., provádějícím experimentální měření v minikanálech, přispět k porozumění fenoménu proudění stlačitelné vazké tekutiny v minikanálech, který není do současnosti stále dostatečně prozkoumán.

Dalším cílem práce je přispění k validaci nespojitě Galerkinovy metody pro implicitní simulaci velkých vírů. Disipativní a disperzní vlastnosti DGM při použití vyšších řádů přesnosti v prostoru činí z této metody ideálního kandidáta pro simulace na úrovni rozlišení běžného LES, ale bez explicitního subgridního modelu. Některé výsledky publikované v posledních letech se mohou vzhledem k jednoduchosti implicitního LES přístupu zdát až příliš dobré a nejsou vědeckou komunitou vždy dobře přijímány. Také jsou mnohdy doprovázeny nedostatečně detailními informacemi o provedení validačních simulací a zpracování jejich výsledků. V návaznosti na zaměření na proudění v kanálech je cílem práce validace DGM-ILES přístupu pro turbulentní proudění v kanálu, a tím i položení základů pro budoucí využití řešiče, vyvíjeného na pracovišti, pro simulace LES.

Struktura práce

Disertační práce je tématicky rozčleněna do tří kapitol. První kapitola se věnuje teorii modelování turbulence pomocí přístupu RANS. Je zde uveden matematický model proudění stlačitelné vazké tekutiny, který je tvořen systémem Navierových-Stokesových rovnic. Ten je dále ve stručnosti středován podle Reynoldse a podle Favra a středovaný systém rovnic je uzavřen pomocí vhodných aproximací pro neznámé členy vzniklé středováním. Pro modelování vlivu turbulentních fluktuací na střední veličiny proudového pole je zvolen dvourovnicový model $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006). Z důvodu diskretizace matematického modelu nespojitou Galerkinovou metodou konečných prvků je pro dosažení stability numerických simulací nutné model upravit. Proto je dále detailně uveden převod transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace ω do logaritmického tvaru a jsou také zavedena některá omezení turbulentní energie k . Rovnice matematického modelu včetně modelu turbulence jsou převedeny do bezrozměrového tvaru a prostorově diskretizovány pomocí nespojitě Galerkinovy metody konečných prvků. Popis metody je proveden pouze ve stručnosti, protože nespojitá Galerkinova metoda jako taková není zaměřením této práce a k simulacím je využit software vyvíjený na Katedře mechaniky Ing. Ondřejem Bublíkem, Ph.D. a Mgr. Alešem Pecou. Model turbulence a jeho úpravy jsou do řešiče implementovány a otestovány autorkou práce. První kapitola je uzavřena verifikační úlohou pro ověření správnosti implementace modelu turbulence $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006).

Druhá kapitola představuje aplikační část disertační práce. Implementovaný model turbulence je použit pro numerické simulace proudění stlačitelné vazké tekutiny v úzkých kanálech výšky 0,5 až 10 mm. Problematika minikanálů je řešena ve spolupráci s Ústavem termomechaniky Akademie věd ČR, v.v.i., kde byla provedena experimentální měření tlaku a smykového napětí na stěně v těchto kanálech. Ve druhé kapitole jsou tedy krátce popsány použité měřicí metody a formulována úloha proudění vzduchu ve dvourozměrném řezu skutečného kanálu.

Numerické simulace jsou provedeny v laminárním a v plně turbulentním režimu, a to pomocí přístupu RANS a modelu turbulence detailně popsáném v první kapitole. Výsledky simulací jsou porovnány s experimentálními daty a v závěru kapitoly jsou učiněny závěry o proudění v kanálech uvedených rozměrů a vhodných přístupech k modelování takového typu proudění. Středem zájmu je především režim proudění v kanálech, který neodpovídá vždy nutně zavedeným představám o hodnotách kritického Reynoldsova čísla, při němž dochází k přechodu z laminárního do turbulentního proudění.

Třetí kapitola se zabývá simulací velkých vírů. V posledním desetiletí se ukazuje, že nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků disponuje vlastnostmi více než vhodnými pro využití v přístupu ILES, tedy implicitní simulace velkých vírů, kdy se nepoužívá žádný subgridní model. Tento koncept je ve třetí kapitole blíže prozkoumán. Nejprve jsou formulovány obecné principy a pojmy používané v LES a jsou uvedeny vlastnosti nespojité Galerkinovy metody umožňující její použití pro ILES. Matematickým modelem proudění stlačitelné vazké tekutiny je zde samotný systém Navierových-Stokesových rovnic ve 3D bez jakýchkoliv úprav a ten je diskretizován pomocí DGM čtvrtého řádu přesnosti v prostoru. Metoda je testována na úloze turbulentního proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami známá pod pojmem *turbulent channel flow* a získané výsledky jsou porovnány s ILES simulací a přímou numerickou simulací uvedenými v literatuře.

Kapitola 1

Modelování turbulentního proudění pomocí dvourovnicových modelů turbulence

Středování systému Navierových-Stokesových rovnic podle Reynoldse (RANS) představuje jeden ze tří základních přístupů k modelování turbulentního proudění tekutin. Díky své rozumné výpočetní náročnosti a rozšíření v komerčních softwarech představuje dnes stále ještě nejběžnější metodu používanou pro řešení úloh inženýrské praxe. Omezená informace o proudovém poli, kterou v důsledku středování rovnic tento přístup poskytuje, je často dostačující. Přesnost RANS je zcela závislá na dobré volbě vhodného modelu turbulence v závislosti na konkrétní řešené úloze. Nabízí se celá řada modelů turbulence různých typů a složitosti, od nejjednodušších algebraických až po modely s několika transportními rovnicemi pro složky tenzoru turbulentních napětí. Simulace velkých vírů, jakkoliv velmi slibná a v současnosti rychle se rozvíjející a rozšiřující, je stále ještě značně výpočetně náročná a pro řadu úloh není takto podrobná predikce proudění nezbytně nutná. Stále má tedy smysl zabývat se přístupem RANS a rozvojem modelů turbulence a přechodu, obzvláště v případě jejich implementace do řešičů založených na moderních numerických metodách, poskytujících oproti klasickým, například konečně-objemovým metodám, mnohé výhody. Jednou z takových metod je i nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků, na které je založen numerický řešič použitý pro veškeré simulace v předkládané práci a jejíž přednosti jsou uvedeny v úvodu práce.

První část disertační práce je zaměřena na dvourovnicové modely turbulence typu $k-\omega$. Numerické řešení systému RANS ve spojení s dvourovnicovými modely turbulence pomocí nespojité Galerkinovy metody konečných prvků je poměrně obtížné [4], [78] a pro zvládnutí tohoto problému je potřeba provést určitá opatření. Pro zajištění stability numerické simulace je většinou nutné vhodným způsobem omezit velikost turbulentních veličin, především pokud se jedná o vyšší řády DGM nebo velký časový krok, který je umožněn implicitní časovou integrací, je-li použita. Ke zvýšení stability významně přispívá i převedení transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace ω do tvaru $\ln(\omega)$. Tato úprava je v práci použita a vysvětlena dále. Ve spojení s $\ln(\omega)$ úpravou lze aplikovat i takzvanou *realizability* podmínku [4], která umožňuje efektivněji využít výhod implicitní časové integrace. V průběhu vývoje simulací i v ustáleném řešení úloh se také mohou vyskytovat záporné hodnoty turbulentních veličin, které jsou nefyzikální. Při překonání těchto a dalších problematických aspektů je však možné těžit z mnohých výhod, které DGM přináší, jako například prakticky libovolná volba řádu přesnosti v prostoru, snadná implementace pro nekonformní výpočetní sítě nebo vhodnost pro paralelní výpočty.

1.1 Matematický model turbulentního proudění stlačitelné vazké tekutiny

Proudění tekutiny je popsáno systémem Navierových-Stokesových rovnic, který je tvořen zákony zachování hmotnosti, hybnosti a celkové energie. Fyzikální zákony zachování platí pro každé proudění - laminární, přechodové i turbulentní. Turbulentní proudění je tedy možné simulovat přímo řešením systému Navierových-Stokesových rovnic (DNS). Pro výrazné snížení výpočetní náročnosti se používá přístup založený na Reynoldsově středování rovnic. Okamžité hodnoty veličin proudového pole se rozloží na střední hodnotu a fluktuaaci a na systém Navierových-Stokesových rovnic se následně aplikuje středování v čase. V systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic se díky tomuto procesu objeví členy, které není možné přímo vypočítat. Pro jejich aproximaci se používají modely turbulence. Numerickou simulací založenou na RANS tedy získáme časově střední hodnoty veličin proudového pole, přičemž vliv turbulentních fluktuaací na toto střední proudění je zohledněn pomocí konkrétního modelu turbulence.

1.1.1 Systém Navierových-Stokesových rovnic a jeho středování

V této práci uvažujeme proudění stlačitelné vazké tekutiny, které je nestacionární, subsonické či supersonické s Machovým číslem do 1,5. Tekutina je newtonská, tedy viskozita závisí pouze na teplotě, vnější objemové síly působící na tekutinu nebereme v úvahu. Proudění takové tekutiny popisujeme systémem Navierových-Stokesových rovnic, který doplníme stavovou rovnicí pro ideální plyn. Uvažujeme proudění v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Konzervativní systém Navierových-Stokesových rovnic v diferenciálním tvaru vyjádříme vztahy [89]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho v_j) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho e v_j + p v_j) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij} v_i - q_j), \quad (1.3)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$. Veličiny jsou označeny následujícím způsobem: ρ je hustota tekutiny, $t \in (0, \infty)$ je čas, y_i je i -tá kartézská složka vektoru prostorových souřadnic $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3] \in \Omega$, v_i je odpovídající i -tá složka vektoru rychlosti $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, p je statický tlak a δ_{ij} je Kroneckerovo delta ($\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Celková měrná energie systému e je dána jako

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} v_i v_i,$$

kde ε je měrná vnitřní energie. Podle Fourierova zákona platí pro j -tou složku q_j tepelného toku $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ vztah

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial y_j},$$

kde T je termodynamická teplota a k je součinitel tepelné vodivosti tekutiny, který uvažujeme konstantní. Za předpokladu platnosti Stokesova vztahu jsou složky tenzoru vazkých napětí σ_{ij} pro newtonskou tekutinu dány v závislosti na tenzoru rychlosti deformace

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$$

vztahem

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \delta_{ij},$$

kde μ je součinitel dynamické viskozity tekutiny. Ten je funkcí teploty tekutiny T , tedy $\mu = \mu(T)$. Pro vyjádření této závislosti použijeme Sutherlandův vztah ve tvaru [89]

$$\mu(T) = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + 110}{T + 110},$$

kde T_{ref} je referenční teplota a μ_{ref} je dynamická viskozita při teplotě T_{ref} .

Stavovou rovnici $p = p(\rho, T)$ pro ideální plyn uvažujeme ve tvaru

$$p = \rho r T, \quad (1.4)$$

kde r je měrná plynová konstanta.

Středování systému Navierových-Stokesových rovnic podle Reynoldse a podle Favra

Detailní odvození středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic je možné nalézt v řadě prací, uvedeme zde proto pro ucelenost předkládané práce pouze základní vztahy a definice.

Pro odvození středovaného systému Navierových-Stokesových rovnic předpokládejme stacionární proudění tekutiny. Označme obecně veličinu proudového pole (rychlost, tlak atd.) jako $f(\mathbf{y}, t)$. Podle Reynoldse [70] rozložíme okamžitou hodnotu veličiny $f(\mathbf{y}, t)$ na střední hodnotu $\bar{f}(\mathbf{y})$ a fluktuaci $f'(\mathbf{y}, t)$, tedy

$$f(\mathbf{y}, t) = \bar{f}(\mathbf{y}) + f'(\mathbf{y}, t), \quad (1.5)$$

kde střední hodnota $\bar{f}(\mathbf{y})$ je definována jako

$$\bar{f}(\mathbf{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{y}, t) dt. \quad (1.6)$$

Ve skutečnosti není samozřejmě možné realizovat průměrování v nekonečně velkém časovém intervalu, uvažujeme tedy T dostatečně velké vzhledem k periodě turbulentních fluktuací. Z definice střední hodnoty (1.6) vyplývají dva základní vztahy, a to

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f}(\mathbf{y})} &= \bar{f}(\mathbf{y}), \\ \overline{f'(\mathbf{y}, t)} &= 0. \end{aligned}$$

Aplikací středování podle Reynoldse odvodíme středovanou rovnici odpovídající zákonu zachování hmotnosti. Okamžité hodnoty složek hustoty a rychlosti rozložíme na střední hodnoty a fluktuace, tedy

$$\rho(\mathbf{y}, t) = \bar{\rho}(\mathbf{y}) + \rho'(\mathbf{y}, t), \quad v_j(\mathbf{y}, t) = \bar{v}_j(\mathbf{y}) + v'_j(\mathbf{y}, t),$$

a celou rovnici (1.1) středujeme podle Reynoldse. Získáme tak středovanou rovnici zachování hmotnosti ve tvaru

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j + \overline{\rho' v'_j}) = 0. \quad (1.7)$$

Ta obsahuje výrazy se středními hodnotami, které mají formálně stejný tvar, jako v původní nestředované rovnici (1.1). Navíc se zde ale objevuje korelace s fluktuací hustoty $\overline{\rho'v'_j}$, která nemá analogii v laminárním popisu a velmi by komplikovala řešení rovnice. Z uvedeného tedy vyplývá, že středování podle Reynoldse definované vztahy (1.5) a (1.6) není pro stlačitelnou tekutinu vhodné. Problém se člena s fluktuací hustoty nevznikne, použijeme-li pro stlačitelnou tekutinu hmotnostně podmíněné středování podle Favra [19]. Okamžitou hodnotu veličiny proudového pole $f = f(\mathbf{y}, t)$ rozložíme na střední hodnotu $\tilde{f}(\mathbf{y})$, definovanou vztahem

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\bar{\rho}(\mathbf{y})} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t) dt = \frac{\overline{\rho(\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}, t)}}{\bar{\rho}(\mathbf{y})} \quad (1.8)$$

a na fluktuaci $f''(\mathbf{y}, t)$, tedy

$$f(\mathbf{y}, t) = \tilde{f}(\mathbf{y}) + f''(\mathbf{y}, t),$$

kde $\bar{\rho}$ je střední hodnota hustoty odpovídající Reynoldsovu středování.

Definiční vztah pro střední hodnotu $\tilde{f}(\mathbf{y})$ (1.8) můžeme přepsat do tvaru

$$\bar{\rho}\tilde{f} = \overline{\rho f}, \quad (1.9)$$

a tedy

$$\bar{\rho}\tilde{f} = \bar{\rho}\bar{f} + \overline{\rho'f'}. \quad (1.10)$$

S využitím vztahu (1.9) lze ukázat platnost důležitého vztahu pro středování podle Favra $\overline{\rho f''} = 0$. Pomocí vztahu (1.10) pak můžeme dokázat, že platí $\tilde{f}'' \neq 0$.

Následující vztahy vyjadřují hlavní rozdíl mezi konvenčním středováním podle Reynoldse a hmotnostně podmíněným středováním podle Favra

$$\begin{aligned} \text{Reynolds : } & \overline{f'} = 0, \quad \overline{\rho f'} \neq 0, \\ \text{Favre : } & \tilde{f}'' \neq 0, \quad \overline{\rho f''} = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Aplikujeme-li nyní vztah (1.10) ve tvaru $\bar{\rho}\bar{v}_j = \bar{\rho}\tilde{v}_j - \overline{\rho'v'_j}$ na rovnici kontinuity pro stlačitelné proudění středovanou podle Reynoldse (1.7), dostaneme

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (1.12)$$

tedy rovnici kontinuity středovanou podle Favra. Rovnice je ve formálně stejném tvaru jako původní nestředovaná (1.1).

S využitím uvedeného lze odvodit středované rovnice odpovídající zákonům zachování hybnosti a celkové energie. Okamžité hodnoty složek rychlosti, celkové energie, termodynamické teploty a tenzoru vazkých napětí se rozloží podle Favra a okamžité hodnoty tlaku a hustoty podle Reynoldse, tedy

$$\begin{aligned} v_j &= \tilde{v}_j + v''_j, & e &= \tilde{e} + e'', & T &= \tilde{T} + T'', & \sigma_{ij} &= \tilde{\sigma}_{ij} + \sigma''_{ij}, \\ p &= \bar{p} + p', & \rho &= \bar{\rho} + \rho'. \end{aligned}$$

Středovanou rovnici odpovídající zákonu zachování hybnosti získáme ze vztahu (1.2) pomocí jednoduchých úprav ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j + \bar{p}\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{\sigma}_{ij} + \overline{\sigma''_{ij}} - \overline{\rho v''_i v''_j}), \quad (1.13)$$

a středovanou rovnici odpovídající zákonu zachování celkové energie z rovnice (1.3) ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_j + \bar{p}\tilde{v}_j + c_p\overline{\rho T v_j''} + \tilde{v}_i\overline{\rho v_i'' v_j''} + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}) = \\ = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{v}_i + \overline{\sigma_{ij}''}\tilde{v}_i + \overline{\sigma_{ij} v_i''} + \frac{c_p\mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} + \frac{c_p\mu}{Pr} \frac{\partial \overline{T''}}{\partial y_j}). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Fluktuace součinitele dynamické vazkosti μ a fluktuace měrné tepelné kapacity c_p neuvažujeme. V rovnicích (1.13) a (1.14) dále zanedbáme členy obsahující $\overline{\sigma_{ij}''}$ a $\overline{T''}$ a dostaneme tak systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic podle Favra (FANS, většinou se ale i pro tento systém používá označení RANS) pro turbulentní proudění stlačitelné tekutiny v podobě

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j + \bar{p}\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{\sigma}_{ij} - \overline{\rho v_i'' v_j''}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{e})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_j + \bar{p}\tilde{v}_j) = \\ = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{\sigma}_{ij}\tilde{v}_i - \tilde{v}_i\overline{\rho v_i'' v_j''} + \frac{c_p\mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} - c_p\overline{\rho T v_j''} + \overline{\sigma_{ij} v_i''} - \frac{1}{2}\overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Tento systém rovnic doplníme středovanou stavovou rovnicí pro ideální plyn

$$\bar{p} = r\bar{\rho}\tilde{T}. \quad (1.18)$$

Pro středovanou celkovou měrnou energii \tilde{e} platí

$$\bar{\rho}\tilde{e} = \bar{\rho}\tilde{e} + \frac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_i + \frac{1}{2}\overline{\rho v_i'' v_i''}, \quad (1.19)$$

což je možné zapsat jako

$$\bar{\rho}\tilde{e} = \bar{\rho}(\tilde{e} + \frac{1}{2}\tilde{v}_i\tilde{v}_i + k), \quad (1.20)$$

kde k je kinetická energie turbulentních fluktuací (turbulentní kinetická energie) definovaná vztahem

$$k = \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho v_i'' v_i''}}{\bar{\rho}}. \quad (1.21)$$

1.1.2 Uzavření systému RANS

Pro řešení turbulentního proudění je potřeba systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic (1.15) - (1.17) uzavřít, tedy vhodně aproximovat neznámé členy, které vznikly v důsledku středování podle Favra. Porovnáním s výchozím systémem rovnic (1.1) - (1.3) vidíme, že kromě nahrazení okamžitých hodnot středními obsahují středované rovnice (1.16) a (1.17) navíc člen $-\overline{\rho v_i'' v_j''}$. Ten vyjadřuje vliv turbulentních fluktuací na přenos hybnosti v tekutině a nazývá se tenzor Reynoldsových turbulentních napětí nebo také tenzor turbulentních smykových napětí, zkráceně Reynoldsovo napětí. Značí se

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho v_i'' v_j''}.$$

V zásadě je možné určit tenzor turbulentních napětí dvěma způsoby. Buď aproximujeme přímo Reynoldsovo napětí a tedy využijeme modely turbulence prvního řádu, nebo soustavu středovaných Navierových-Stokesových rovnic uzavřeme transportními rovnicemi pro složky tenzoru Reynoldsových napětí a aproximujeme neznámé výrazy v nich obsažené. Jedná se o modely druhého řádu, které jsou schopné zachytit i značně složité jevy v turbulentním proudu.

K aproximaci Reynoldsových napětí (modely prvního řádu) se využívá Boussinesqova hypotéza [8], [99] založená na představě určité analogie mezi molekulárním a turbulentním přenosem hybnosti v tekutině. Turbulentní napětí τ_{ij} se vyjádří podobným vztahem jako vazkové napětí $\tilde{\sigma}_{ij}$ pomocí turbulentní vazkosti μ_t , tedy

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij}, \quad (1.22)$$

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho v_i'' v_j''} = \mu_t \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_t \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij}. \quad (1.23)$$

Problematika nalezení tenzoru turbulentních napětí je tak převedena na nalezení skalární hodnoty μ_t . I přes rozdílnost mezi procesy molekulárního a turbulentního přenosu hybnosti, zejména co se délkového měřítka týká, dává hypotéza přijatelné výsledky.

Výraz $c_p \overline{\rho T v_j''}$ v rovnici (1.17) představuje turbulentní přenos tepla a za předpokladu úměrnosti ke gradientu střední hodnoty teploty ho aproximujeme analogicky k molekulárnímu přenosu tepla výrazem

$$q_{t_j} = \overline{c_p \rho T v_j''} = -\frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j},$$

kde Pr_t je turbulentní Prandtlovo číslo definované jako $Pr_t = \frac{c_p \mu_t}{k_t}$, k_t je součinitel turbulentní tepelné vodivosti tekutiny. Pro turbulentní Prandtlovo číslo se obvykle používá konstantní hodnota, v případě mezní vrstvy nejčastěji $Pr_t = 0,89$ nebo $Pr_t = 0,90$. Ve volné smykové vrstvě je pak vhodnější hodnota $Pr_t = 0,5$ [99].

Ve středované rovnici (1.17) se dále vyskytují členy $\overline{\sigma_{ij} v_i''}$ a $\frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''}$, představující molekulární difuzi a přenos turbulentní kinetické energie. Tyto členy je možné zanedbat pro nularovnicové modely a někdy i pro modely vyšších řádů, pokud se nejedná o proudění v hypersonické oblasti. Nejčastěji se pro dvourovnicové modely a modely Reynoldsových napětí používá aproximace [99]

$$\overline{\sigma_{ij} v_i''} - \frac{1}{2} \overline{\rho v_i'' v_i'' v_j''} = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j},$$

kde σ_k je konstanta. Všechny simulace v předkládané práci se pohybují v oblasti nejvýše mírně nadzvukové, tyto členy tedy zanedbáme.

K úpravě tepelného toku $\bar{q}_j + q_{t_j}$ využijeme středovanou stavovou rovnici (1.18) a termodynamický vztah $c_p = \frac{\kappa r}{\kappa - 1}$, kde κ je Poissonova adiabatická konstanta. Dostaneme

$$\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_j} = \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right).$$

S využitím uvedených aproximací a předpokladu Boussinesqovy hypotézy získáme systém

středovaných Navierových-Stokesových rovnic ve tvaru

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j + \bar{p}\delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_j + \bar{p}\tilde{v}_j) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij})\tilde{v}_i + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \right], \quad (1.26)$$

kde τ_{ij} je dáno vztahem (1.23).

Pro uzavření tohoto systému tedy zbývá určit turbulentní dynamickou vazkost μ_t pomocí některého z modelů turbulence. Turbulentní vazkost je možné vyjádřit jako součin turbulentního délkového a rychlostního měřítka. V nejjednodušších algebraických modelech se pro určení turbulentní vazkosti používají pouze algebraické vztahy, většinou založené na Prandtlově hypotéze o směšovací délce [63]. Jednorovnicové modely využívají pro určení turbulentního rychlostního měřítka většinou kinetickou turbulentní energii k získanou z transportní rovnice, délkové měřítko je pak dáno algebraickým vztahem. Dvourovnicové modely turbulence, na něž je zaměřena tato práce, jsou tvořeny dvěma transportními rovnicemi a pojednávají o nich podrobněji následující odstavce.

Vedle těchto tří skupin modelů turbulence existuje řada dalších, například model s transportní rovnicí pro turbulentní vazkost nebo model s další transportní rovnicí (v2-f model). Dále pak nelineární modely s turbulentní vazkostí, které na rozdíl od dosud uvedených mají nelineární vztah mezi turbulentním napětím a gradienty střední rychlosti a jsou díky tomu schopny zachytit například sekundární proudění v trojrozměrném kanálu.

1.1.3 Dvourovnicové modely turbulence typu $k - \omega$ s úpravami pro DGFEM

Dvourovnicové modely jsou nejpoužívanějšími modely turbulence založenými na Boussinesqově hypotéze. Jsou tvořeny dvěma transportními rovnicemi, kdy jedna je zpravidla rovnicí pro turbulentní kinetickou energii k . Turbulentní energie je definována vztahem (1.21) a představuje turbulentní rychlostní měřítko. Druhá transportní rovnice je pro rychlost disipace turbulentní energie ϵ nebo pro specifickou rychlost disipace ω . Tyto veličiny vyjadřují turbulentní délkové měřítko. Rychlost disipace je definována

$$\epsilon = \frac{\mu \frac{\partial v_i''}{\partial y_j} \frac{\partial v_i''}{\partial y_j}}{\bar{\rho}}. \quad (1.27)$$

Specifickou rychlost disipace pro vyjádření turbulentního délkového měřítka zavedl Saffman [73] jako

$$\omega = \frac{\epsilon}{k}.$$

Průběh ϵ podél normály k obtékané stěně není monotónní, průběh ω ovšem ano. Tato skutečnost umožňuje přesné zachycení průběhu turbulentní veličiny ω u stěny, aniž by bylo nutné použít tak jemnou výpočetní síť jako v případě veličiny ϵ .

Dvourovnicové modely zohledňují díky transportním rovnicím i historii proudění a umožňují tak podstatně přesnější výpočty i pro složitější typy proudění než modely algebraické nebo jednorovnicové. Je možné je aplikovat i na problémy typu rázových vln nebo odtržení proudu.

Základními dvourovnicovými modely jsou $k-\epsilon$ [49] a $k-\omega$ [96], které jsou kromě zmíněných transportních rovnic dále tvořeny řadou zčásti empirických vztahů a konstant. Model $k-\epsilon$ není možné aplikovat až k obtékané stěně. Je nutno využít stěnové funkce nebo úpravu modelu pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla. Model $k-\omega$ je naopak dobře použitelný až k obtékané stěně, ve vnějším proudu dává ovšem zpravidla lepší výsledky model $k-\epsilon$.

Základní tvar modelu $k - \omega$

Jako výchozí verzi dvourovnicového modelu $k-\omega$ uvedme model podle Wilcoxe [96], který byl vytvořen na základě Saffmanova návrhu použít pro vyjádření turbulentního délkového měřítko specifickou rychlost disipace ω [73].

Model je tvořen transportní rovnicí pro turbulentní kinetickou energii k , kterou lze odvodit ze středované a původní rovnice zákona zachování hybnosti [66], ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j k) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right] + P_k - \beta^* \bar{\rho} k \omega \quad (1.28)$$

a transportní rovnicí pro specifickou rychlost disipace ω . Ta je navržena na základě podstaty fyzikální děje v proudění a rozměrové analýzy ve tvaru analogickém k transportní rovnici pro k jako

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_j \omega) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \alpha P_k \frac{\omega}{k} - \beta \bar{\rho} \omega^2. \quad (1.29)$$

Výraz $P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j}$ představuje produkci turbulentní energie. Turbulentní vazkost je určena vztahem

$$\mu_t = \gamma^* \bar{\rho} \frac{k}{\omega}. \quad (1.30)$$

Empirické konstanty modelu jsou stanoveny jako $\sigma^* = \frac{1}{2}$, $\sigma = \frac{1}{2}$, $\beta^* = \frac{9}{100}$, $\alpha = \frac{5}{9}$, $\beta = \frac{3}{40}$ a $\gamma^* = 1$.

Modifikace modelu $k - \omega$

Model $k-\omega$ v základní podobě dává velmi uspokojivé výsledky pro řadu případů mezních vrstev i volných smykových proudění. Na rozdíl od modelu $k-\epsilon$ ho lze aplikovat až k obtékané stěně, ale v základní podobě je příliš citlivý na hodnotu ω ve volném proudu. Postupně byla vyvinuta řada modifikací zlepšujících vlastnosti modelu, především připojení tzv. příčné difuze a omezení turbulentního napětí.

Poprvé navrhl připojit člen příčné difuze k transportní rovnici pro specifickou rychlost disipace ω Speziale [83], neboť tento člen významně zlepšuje citlivost modelu na podmínky ve vnějším proudu. Coakley [13] zavedl jako první omezení turbulentního napětí. Turbulentní napětí, respektive hodnota turbulentní vazkosti μ_t tak není závislá přímo na hodnotě ω , jako ve vztahu (1.30), ale na hodnotě $\tilde{\omega}$ (značení s vlnkou zde nesouvisí se středováním), která je oproti ω zdola limitována. K omezení dojde, když produkce turbulentní energie přesáhne svoji disipaci. Použití takového omezení výrazně zlepšuje výsledky transonických výpočtů. Wilcox [97], [98] upravil základní model $k-\omega$ pro nízká turbulentní Reynoldsova čísla $Re_t = \frac{\mu_t}{\mu}$. Menter [51] navrhl sestavit dvouvrstvý model $k-\epsilon/k-\omega$ využívající vlastností obou modelů v základní podobě. Ve vazké podvrstvě a logaritmické oblasti mezní vrstvy používá model $k-\omega$, na něj pak navazuje model $k-\epsilon$. Transportní rovnice pro ϵ je přeformulována do zápisu pomocí ω a oba modely jsou pak propojeny spojovací funkcí, která umožňuje postupný přechod mezi nimi. Základní variantou dvouvrstvého Menterova modelu je BSL (*baseline*

model). Druhá varianta SST (*shear-stress transport*) upravuje výpočet turbulentní vazkosti a bere tak v úvahu transport turbulentního napětí. SST model je jedním z nejpoužívanějších dvourovnicových modelů turbulence. Většina dalších významných modifikací modelu $k-\omega$ se týká přidání členu příčné difuze, omezování turbulentního napětí a dalších úprav funkcí a konstant, například podle Penga [60], Hellstena [28] nebo Koka [41]. Jednou z takových úprav je i verze $k-\omega$ modelu podle Wilcoxe (2006) [99].

Model $k - \omega$ podle Wilcoxe (2006)

Model $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006) [99], který použijeme pro RANS simulace v této práci, obsahuje tedy oproti základní verzi člen příčné difuze, který zlepšuje citlivost modelu na parametry volného proudu, a dále omezovač turbulentního napětí. Model je tvořen transportními rovnicemi

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j k)}{\partial y_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta^* \bar{\rho} k \omega + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma^* \bar{\rho} \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right], \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j \omega)}{\partial y_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \right] + \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \quad (1.32)$$

a vztahem pro turbulentní vazkost s omezením turbulentního napětí ve tvaru

$$\mu_t = \bar{\rho} \frac{k}{\tilde{\omega}}, \quad \tilde{\omega} = \max \left\{ \omega, \frac{7}{8} \sqrt{\frac{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}{\beta^*}} \right\}, \quad \bar{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right).$$

Konstanty a další pomocné vztahy jsou potom dány

$$\alpha = \frac{13}{25}, \quad \beta^* = 0.09, \quad \beta = \beta_0 f_\beta, \quad \sigma = 0.5, \quad \sigma^* = \frac{3}{5}, \quad \beta_0 = 0,0708,$$

$$\sigma_d = \begin{cases} 0 & \text{pro } \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j} \leq 0, \\ \frac{1}{8} & \text{pro } \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \omega}{\partial y_j} > 0, \end{cases} \quad f_\beta = \frac{1 + 85\chi_\omega}{1 + 100\chi_\omega}, \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}\hat{S}_{ki}}{(\beta^*\omega)^3} \right|,$$

$$\hat{S}_{ki} = S_{ki} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial y_m} \delta_{ki}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right).$$

1.1.4 Stabilizace simulací úpravou modelu $k - \omega$ pro implementaci do DGFEM

Implementace rovnic modelu turbulence $k-\omega$ v uvedené podobě do numerického řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě způsobuje řadu numerických problémů, především se stabilitou výpočtu, jak bylo zmíněno v úvodu kapitoly. Potíže přinášejí mimo jiné podíly $\frac{\omega}{k}$ a $\frac{k}{\omega}$, vyskytující se v produkčním a difuzním členu v transportní rovnici pro specifickou rychlost disipace (1.32). V případě, že ω nabyde velké hodnoty a k malé, dostáváme z prvního podílu značně velkou hodnotu a z druhého naopak velmi malou. Tyto rozdíly mohou vést až ke ztrátě stability numerické simulace. Tento problém je možné výrazně zlepšit převedením modelu do formulace $k-\ln(\omega)$ [34], [45], tedy nahradit ω proměnnou $\hat{\omega}$ tak, že platí $\hat{\omega} = \ln(\omega)$. Takovou transformací je zároveň zajištěna kladná hodnota veličiny ω . Logaritmičká transformace turbulentních veličin byla poprvé navržena v práci [34] v souvislosti s modelem $k-\epsilon$ se stěnovými funkcemi. Pro turbulentní energii k ale není tento přístup výhodný, protože okrajová podmínka na pevné stěně $k = 0$ se transformací mění na $\hat{k} = \ln(k) \rightarrow -\infty$. Do logaritmičkého tvaru tedy převedeme pouze transportní rovnici pro specifickou rychlost disipace ω .

Formulace $k - \ln(\omega)$

Převod transportní rovnice pro ω provedeme dosazením $\omega = e^{\hat{\omega}}$ do rovnice (1.32), tedy

$$\frac{\partial(\bar{\rho}e^{\hat{\omega}})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j e^{\hat{\omega}})}{\partial y_j} = \alpha \frac{e^{\hat{\omega}}}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta \bar{\rho} e^{2\hat{\omega}} + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial e^{\hat{\omega}}}{\partial y_j} \right] + \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{e^{\hat{\omega}}} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial e^{\hat{\omega}}}{\partial y_j}. \quad (1.33)$$

Upravíme nejprve levou stranu (LS) rovnice (1.33) částečným derivováním jednotlivých členů, vytknutím výrazu $e^{\hat{\omega}}$ a využitím středované rovnice kontinuity (1.24). Postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \text{LS} &= e^{\hat{\omega}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial e^{\hat{\omega}}}{\partial t} + e^{\hat{\omega}} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} + \bar{\rho}\tilde{v}_j \frac{\partial e^{\hat{\omega}}}{\partial y_j} = \\ &= e^{\hat{\omega}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} e^{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + e^{\hat{\omega}} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} + \bar{\rho}\tilde{v}_j e^{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} = \\ &= e^{\hat{\omega}} \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j}}_{=0 \text{ (1.24)}} + \bar{\rho} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + \bar{\rho}\tilde{v}_j \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right) = e^{\hat{\omega}} \left(\bar{\rho} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + \bar{\rho}\tilde{v}_j \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right). \end{aligned}$$

Levou stranu dále vhodně rozšíříme a s využitím pravidla pro derivaci součinu dvou funkcí a středované rovnice kontinuity (1.24) ji upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} \text{LS} &= e^{\hat{\omega}} \left(\underbrace{\bar{\rho} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} + \hat{\omega} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} - \hat{\omega} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\bar{\rho}\tilde{v}_j \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} + \hat{\omega} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} - \hat{\omega} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j}}_{=0} \right) = \\ &= e^{\hat{\omega}} \left[\frac{\partial(\bar{\rho}\hat{\omega})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j\hat{\omega})}{\partial y_j} - \hat{\omega} \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j}}_{=0 \text{ (1.24)}} \right) \right] = \\ &= e^{\hat{\omega}} \left(\frac{\partial(\bar{\rho}\hat{\omega})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j\hat{\omega})}{\partial y_j} \right). \end{aligned}$$

Pravou stranu (PS) rovnice (1.33) částečně zderivujeme a vytkneme opět výraz $e^{\hat{\omega}}$, tedy

$$\begin{aligned} \text{PS} &= \alpha \frac{e^{\hat{\omega}}}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta \bar{\rho} e^{2\hat{\omega}} + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) e^{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right] + \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{e^{\hat{\omega}}} \frac{\partial k}{\partial y_j} e^{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} = \\ &= e^{\hat{\omega}} \frac{\alpha}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - e^{\hat{\omega}} \beta \bar{\rho} e^{\hat{\omega}} + \left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \left(e^{\hat{\omega}} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} + e^{\hat{\omega}} \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right) + e^{\hat{\omega}} \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{e^{\hat{\omega}}} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} = \\ &= e^{\hat{\omega}} \left\{ \frac{\alpha}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta \bar{\rho} e^{\hat{\omega}} + \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} + \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{e^{\hat{\omega}}} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right\}. \end{aligned}$$

Vrátíme se k zápisu celé rovnice ve tvaru $\text{LS} = \text{PS}$ a vydělíme ji nenulovým výrazem $e^{\hat{\omega}}$. Dostáváme tak konečný tvar transportní rovnice pro specifickou rychlost disipace ω formulované pomocí veličiny $\hat{\omega}$ v podobě

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{\omega})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j\hat{\omega})}{\partial y_j} &= \frac{\alpha}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta \bar{\rho} e^{\hat{\omega}} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right] + \left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} + \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{e^{\hat{\omega}}} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

kde nejvýraznější změnou oproti původní rovnici (1.32) je přítomnost členu $(\mu + \sigma\mu_t) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j}$.

Dále vyžadují úpravu pomocné vztahy modelu k - ω obsahující veličinu ω , konkrétně

$$\tilde{\omega} = \max \left\{ e^{\hat{\omega}}, \frac{7}{8} \sqrt{\frac{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}{\beta^*}} \right\}, \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}\hat{S}_{ki}}{(\beta^*e^{\hat{\omega}})^3} \right|.$$

Použitím takto upraveného modelu k - $\ln(\omega)$ získáme hodnotu $\hat{\omega}$ a provedením $\omega = e^{\hat{\omega}}$ následně zjistíme hledanou specifickou rychlost disipace ω .

Omezení turbulentní energie k

Převod transportní rovnice pro turbulentní energii do logaritmického tvaru není z důvodů uvedených v předchozím odstavci použit, tudíž nelze vyloučit výskyt záporných hodnot k . Pro zlepšení stability simulací a částečné zamezení výskytu nefyzikálních hodnot k , potažmo μ_t , zavedeme pomocné veličiny

$$k_{01} = \max(k, 0), \\ k_{02} = \max(k, 10^{-15}).$$

Omezení absolutní nulou se uplatní při výpočtu μ_t , ve výrazech v kulatých závorkách ve vazkých tocích v obou rovnicích modelu a ve zdrojovém členu - destrukci k , tedy ve výrazu $-\beta^*\bar{\rho}ke^{\hat{\omega}}$. Omezení hodnotou 10^{-15} použijeme v produkci ω , tedy ve výrazu $\frac{\alpha}{k}\tau_{ij}\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j}$, kde nelze z důvodu dělení k použít absolutní nulu. V derivaci $\frac{\partial k}{\partial y_j}$ je ponechána hodnota k taková, jaká je skutečně vypočítávána v průběhu simulace. Pro snazší orientaci v již tak komplikovaných rovnicích do nich nebudeme symboly k_{01} a k_{02} zavádět, ponecháme pouze k , ale předpokládáme použití těchto omezení.

1.2 Numerické řešení - nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků

Prostorová diskretizace rovnic matematického modelu (1.41) je provedena pomocí nespojitě Galerkinovy metody konečných prvků (DGFEM). Princip metody, detailní odvození a řadu doplňujících metod lze nalézt v práci [9], která byla základem pro numerický řešič vyvíjený na pracovišti a použitý pro simulace v předkládané práci. Některé metody byly postupně nahrazeny nebo upraveny. Detailní popis a implementace DGFEM není zaměřením této práce, proto zde uvedeme pouze základní informace o metodě a principech, které byly pro realizaci simulací použity.

1.2.1 Bezrozměrový tvar matematického modelu v kompaktním zápisu

Z numerického hlediska je výhodné řešit uvedenou soustavu rovnic v bezrozměrovém tvaru. Převod do bezrozměrového tvaru provedeme vztahem rozměrových hodnot na kladné referenční hodnoty podle vztahů

$$\bar{\rho}^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho_{ref}}, \quad t^* = \frac{t}{t_{ref}}, \quad \tilde{v}_j^* = \frac{\tilde{v}_j}{v_{ref}}, \quad y_i^* = \frac{y_i}{l_{ref}}, \quad \bar{p}^* = \frac{\bar{p}}{p_{ref}}, \quad \tilde{e}^* = \frac{\tilde{e}}{e_{ref}}, \quad k^* = \frac{k}{k_{ref}}, \quad \omega^* = \frac{\omega}{\omega_{ref}}$$

a rovnice poté vhodně vydělíme referenčními hodnotami. Matematický model v bezrozměrovém tvaru ve dvou dimenzích dostaneme v následující podobě (hvězdička značí bezrozměrovou veličinu je po zbyvající část tohoto odstavce vynechána pro větší přehlednost zápisu)

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{v}_i\tilde{v}_j + \bar{p}\delta_{ij}) = \frac{1}{Re_{ref}} \frac{\partial}{\partial y_j}(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}), \quad i = 1, 2, \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_j + \bar{p}\tilde{v}_j) &= \frac{1}{Re_{ref}} \frac{\partial}{\partial y_j} [(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij})\tilde{v}_i + \\ &+ \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right)], \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j k)}{\partial y_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta^* \bar{\rho} k e^{\hat{\omega}} + \frac{1}{Re_{ref}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma^* \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial k}{\partial y_j} \right], \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{\omega})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}_j \hat{\omega})}{\partial y_j} &= \frac{\alpha}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} - \beta \bar{\rho} e^{\hat{\omega}} + \frac{1}{Re_{ref}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \right] + \\ &+ \frac{1}{Re_{ref}} \left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j} + \frac{1}{Re_{ref}} \sigma_d \frac{\bar{\rho}}{e^{\hat{\omega}}} \frac{\partial k}{\partial y_j} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_j}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Pomocné algebraické vztahy zůstávají po převodu do bezrozměrového tvaru formálně beze změny. Referenční délku l_{ref} , tlak p_{ref} , teplotu T_{ref} a dynamickou vazkost μ_{ref} vhodně zvolíme, ostatní referenční hodnoty jsou pak určeny vztahy

$$v_{ref} = \sqrt{r_{ref} T_{ref}}, \quad t_{ref} = \frac{l_{ref}}{v_{ref}}, \quad \rho_{ref} = \frac{p_{ref}}{v_{ref}^2}, \quad e_{ref} = v_{ref}^2, \quad k_{ref} = \frac{1}{Re_{ref}} v_{ref}^2, \quad \omega_{ref} = \frac{v_{ref}}{l_{ref}}$$

a referenční Reynoldsovo číslo je

$$Re_{ref} = \frac{l_{ref} \rho_{ref} v_{ref}}{\mu_{ref}}. \quad (1.40)$$

V zásadě je možné diskretizovat systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic a rovnice modelu turbulence odděleně a využít různé numerické metody pro jejich řešení. V této práci je ale numericky celý systém rovnic (1.35) - (1.39) řešen dohromady. Ve 2D ho zapíšeme v kompaktní vektorové podobě

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial t} + \sum_{s=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_s} \mathbf{f}_s^n(\bar{\mathbf{w}}) = \sum_{s=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_s} \mathbf{f}_s^v(\bar{\mathbf{w}}, \nabla \bar{\mathbf{w}}) + \bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{w}}, \nabla \bar{\mathbf{w}}), \quad (1.41)$$

kde $\nabla \bar{\mathbf{w}}$ je gradient vektoru $\bar{\mathbf{w}}$. Vektor proměnných $\bar{\mathbf{w}}$, nevazké numerické toky $\mathbf{f}_i^n(\bar{\mathbf{w}})$, vazké numerické toky $\mathbf{f}_i^v(\bar{\mathbf{w}}, \nabla \bar{\mathbf{w}})$ a produkční člen $\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{w}}, \nabla \bar{\mathbf{w}})$ jsou dány jako

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2 \\ \bar{\rho}\tilde{e} \\ \bar{\rho}k \\ \bar{\rho}\omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_1^n(\bar{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v}_1 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1^2 + \bar{p} \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1\tilde{v}_2 \\ \bar{v}_1(\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p}) \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1 k \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1 \omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^n(\bar{\mathbf{w}}) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}\tilde{v}_2 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_1\tilde{v}_2 \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2^2 + \bar{p} \\ \bar{v}_2(\bar{\rho}\tilde{e} + \bar{p}) \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2 k \\ \bar{\rho}\tilde{v}_2 \omega \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_1^v(\bar{\mathbf{w}}, \nabla \bar{\mathbf{w}}) &= \frac{1}{Re_{ref}} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{11} + \tau_{11} \\ \tilde{\sigma}_{12} + \tau_{12} \\ \tilde{v}_1(\tilde{\sigma}_{11} + \tau_{11}) + \tilde{v}_2(\tilde{\sigma}_{12} + \tau_{12}) + \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \\ \left(\mu + \sigma^* \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial k}{\partial y_1} \\ \left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_1} \end{bmatrix}, \\
\bar{\mathbf{f}}_2^v(\bar{\mathbf{w}}, \nabla \bar{\mathbf{w}}) &= \frac{1}{Re_{ref}} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\sigma}_{12} + \tau_{12} \\ \tilde{\sigma}_{22} + \tau_{22} \\ \tilde{v}_1(\tilde{\sigma}_{12} + \tau_{12}) + \tilde{v}_2(\tilde{\sigma}_{22} + \tau_{22}) + \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \right) \\ \left(\mu + \sigma^* \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial k}{\partial y_2} \\ \left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \\
\bar{\mathbf{p}}(\bar{\mathbf{w}}, \nabla \bar{\mathbf{w}}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\tau_{11} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y_1} + \tau_{12} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y_2} + \tau_{12} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_1} + \tau_{22} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_2} \right) - \beta^* \bar{\rho} k e^{\hat{\omega}} \\ \frac{\alpha}{k} \left(\tau_{11} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y_1} + \tau_{12} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial y_2} + \tau_{12} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_1} + \tau_{22} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial y_2} \right) - \beta \bar{\rho} e^{\hat{\omega}} + \\ + \frac{1}{Re_{ref}} \left(\mu + \sigma \bar{\rho} \frac{k}{e^{\hat{\omega}}} \right) \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_1} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_1} + \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_2} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_2} \right) + \frac{1}{Re_{ref}} \sigma_d \frac{\bar{p}}{e^{\hat{\omega}}} \left(\frac{\partial k}{\partial y_1} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_1} + \frac{\partial k}{\partial y_2} \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y_2} \right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

V této podobě je matematický model připraven k diskretizaci pomocí nespojité Galerkinovy metody konečných prvků, o které je pojednáno dále. Pro přehlednější zápis v dalším odstavci vynecháme u středovaného vektoru proměnných, numerických toků a produkčního členu značení pruhem.

1.2.2 Nespojitá Galerkinova metoda ve 2D

Nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků je společným zobecněním metody konečných prvků a konečných objemů. Stejně jako klasická metoda konečných prvků je DGFEM založena na aproximaci slabého řešení rovnice (1.41). Liší se ale volbou báze funkcí, které jsou zde nespojité. To přináší řadu výhod, ale i komplikací při řešení.

Systém středovaných Navierových-Stokesových rovnic s dvourovnicovým modelem $k-\omega$ je v kompaktní vektorové podobě zapsán vztahem (1.41). Výpočtovou oblast Ω beze zbytku pokryjeme kontrolními elementy Ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$, které se nepřekrývají. Aproximativní řešení rovnice (1.41) hledáme na prostoru funkcí $\mathcal{P}^p(\Omega_k)$, tedy polynomů řádu nejvýše p , přičemž p volíme. Mluvíme-li o Galerkinově metodě například 2. řádu, jedná se o polynomy 1. stupně ($p = 1$). Hledané řešení je polynomem na každém kontrolním elementu Ω_k , na hranicích elementů je však nespojité. Rovnici (1.41) skalárně vynásobíme testovací funkcí $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ z uvedeného prostoru funkcí a zintegrujeme přes kontrolní element Ω_k , tedy

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s^n}{\partial y_s} \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \frac{\partial \mathbf{f}_s^v}{\partial y_s} \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega_k} \mathbf{p} \mathbf{v} \, d\Omega.$$

Aplikací integrace per-partes na integrály obsahující toky dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \mathbf{v} \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^n n_s \mathbf{v} \, dl - \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^n \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_s} \, d\Omega &= \\ = \oint_{\partial\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^v n_s \mathbf{v} \, dl - \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y_s} \, d\Omega + \int_{\Omega_k} \mathbf{p} \mathbf{v} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (1.42)$$

kde $\mathbf{n} = [n_1, n_2]$ je jednotkový vektor vnější normály k příslušné hranici kontrolního elementu.

Řád přesnosti v prostoru je dán volbou bázových funkcí prostoru polynomů $\mathcal{P}^p(\Omega_k)$. Jejich vhodnou volbou lze také dosáhnout významného zjednodušení výsledných rovnic. Uvažujme m -tou složku vektorové funkce \mathbf{w} na kontrolním elementu Ω_k jako lineární kombinaci bázových funkcí φ_k^i , $i = 1, 2, \dots, M$, tedy

$$w_k^m(\mathbf{y}, t) = \sum_{i=1}^M w_{k,i}^m(t) \varphi_k^i(\mathbf{y}).$$

Testovací funkce \mathbf{v} je potom zvolena následujícím způsobem. Na elementu Ω_k je r -tá složka $v_{k,j}^r$ testovací funkce dána jako

$$v_{k,j}^r = \begin{cases} \varphi_k^j & \text{pro } r = m, \\ 0 & \text{pro } r \neq m, \end{cases}$$

mimo element Ω_k je rovna nule.

Dosazením bázových funkcí a testovací funkce do rovnice (1.42) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \frac{\partial w_{k,i}^m}{\partial t} \varphi_k^i \varphi_k^j \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^n n_s \varphi_k^j \, dl - \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^n \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial y_s} \, d\Omega &= \\ = \underbrace{\oint_{\partial\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^v n_s \varphi_k^j \, dl}_{DDG} - \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^2 \mathbf{f}_s^v \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial y_s} \, d\Omega + \int_{\Omega_k} \mathbf{p} \varphi_k^j \, d\Omega. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Klíčovou součástí DGFEM je nahrazení křivkových integrálů pomocí numerického toku, stejně jako v metodě konečných objemů. Pro nevazký tok použijeme Lax-Friedrichsovo schéma. To splňuje požadavky DGM na schéma s vyšší umělou vazkostí takové, aby vhodně tlumilo oscilace v řešení způsobené nespojitostmi.

Pro vazké toky je výhodné použít metodu DDG (*direct discontinuous Galerkin*), která se začíná uplatňovat teprve v posledních letech [100]. Metoda je robustní a snadno implementovatelná. Zásadním problémem DGM je nalezení vhodné aproximace derivací veličin proudového pole na hranicích kontrolních elementů, kde kvůli nespojitosti v řešení není možné použít pouhý aritmetický průměr derivací zleva a zprava hranice elementu. Metoda DDG nahrazuje vazký tok $\mathbf{f}_s^v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})$ v označeném integrálu v rovnici (1.43) numerickým tokem $\mathbf{f}_s^{DDG}(\hat{\mathbf{w}}, \nabla \hat{\mathbf{w}})$, kde

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{w}_k^L + \mathbf{w}_k^R), \quad \nabla \hat{\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y_1}, \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y_2} \right), \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y_i} &= \beta_0 \frac{\mathbf{w}_k^R - \mathbf{w}_k^L}{\Delta} n_i + \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_i} \right|_R + \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_i} \right|_L \right), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

kde \mathbf{w}_k^L a \mathbf{w}_k^R jsou hodnoty vektoru proměnných zleva a zprava hranice kontrolního elementu Ω_k , $\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_1} \right|_{L/R}$ a $\left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_2} \right|_{L/R}$ jsou hodnoty derivací vektoru proměnných zleva a zprava hranice kontrolního elementu Ω_k . Koeficient volíme $\beta_0 = 2$ a Δ je kolmá vzdálenost středů kontrolních elementů sousedících s hranou, pro kterou hledáme hodnotu toku.

Pro vyčíslení jednotlivých integrálů v rovnici (1.43) použijeme vhodné Gaussovy integrační vzorce.

Uvedené kroky vedou na systém obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé koeficienty lineární kombinace báze funkcí složek vektoru proměnných na každém kontrolním elementu Ω_k ve tvaru

$$\mathbf{M} \frac{d\mathbf{W}}{dt} = \mathbf{R}(\mathbf{W}), \quad (1.44)$$

kde \mathbf{W} je globální vektor neznámých koeficientů, \mathbf{M} je matice hmotnosti a $\mathbf{R}(\mathbf{W})$ obsahuje uvedené aproximace vazkých a nevazkých toků a zdrojový člen.

RANS simulace v této kapitole provedeme s 1. řádem přesnosti v čase. Implicitní schéma odvodíme následujícím způsobem. Časovou derivaci v rovnici (1.44) nahradíme dopřednou diferencí prvního řádu, vektor reziduí $\mathbf{R}(\mathbf{W}^{n+1})$ v čase t_{n+1} rozvineme do Taylorovy řady a rovnici upravíme. Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n}{\Delta t} &= \mathbf{R}(\mathbf{W}^{n+1}), \\ \mathbf{M} \frac{\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n}{\Delta t} &= \mathbf{R}(\mathbf{W}^n) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}} (\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n), \\ \left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}} \right) \Delta \mathbf{W} &= \mathbf{R}(\mathbf{W}^n), \quad \text{kde } \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n. \end{aligned}$$

Poslední rovnice představuje systém lineárních rovnic, který vyřešíme metodou GMRES (*generalized minimal residual method*). Úskalím je zde ještě vyčíslení Jakobiánu $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}}$, který aproximujeme konečnou diferencí

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial w_i^m} = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{W}^n + \mathbf{e}_i^m h) - \mathbf{R}(\mathbf{W}^n)}{h},$$

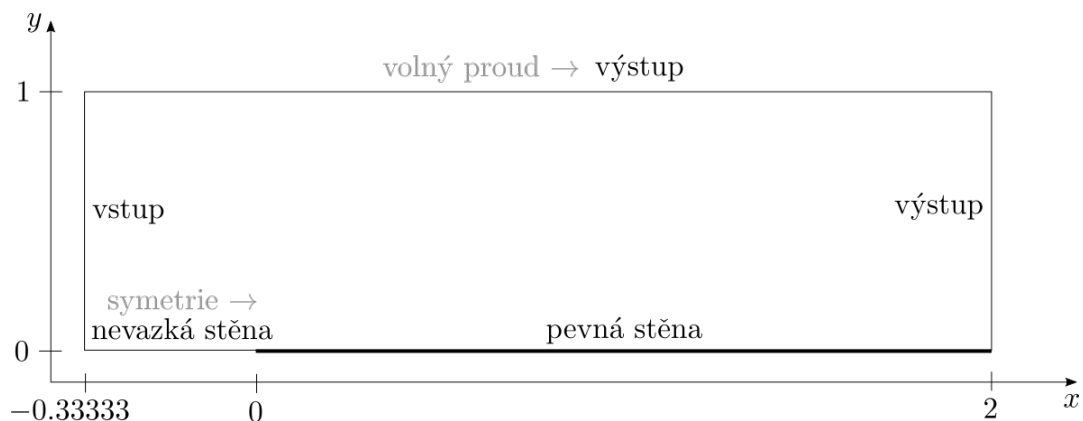
kde \mathbf{e}_i^m je jednotkový vektor s jedničkou na pozici odpovídající pozici w_i^m v globálním vektoru \mathbf{W} a h volíme 10^{-6} .

Simulace RANS jsou realizovány ve 2D, s 2. řádem přesnosti DGFEM v prostoru, tedy $p = 1$, a na strukturované výpočetní síti tvořené čtyřúhelníky. Volíme v tomto případě Lagranževu bázi takovou, že i -tá báze funkce na kontrolním elementu Ω_k je ve tvaru

$$\varphi_k^i(x, y) = a_{1i} + a_{2i}x + a_{3i}y + a_{4i}xy,$$

počet báze funkcí je $M = 4$. Funkce jsou voleny tak, že i -tá báze funkce nabývá na referenčním elementu hodnoty 1 v i -tém vrcholu elementu A_i a v ostatních vrcholech je rovna 0. Referenční element je dán vrcholy $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [1, 0]$, $A_3 = [1, 1]$ a $A_4 = [0, 1]$. Z této skutečnosti odvodíme koeficienty a_{1i} až a_{4i} pro $i = 1, 2, 3, 4$ a získáme tak konkrétní podobu báze funkcí na referenčním elementu

$$\begin{aligned} \varphi_k^1(x, y) &= 1 - x - y + xy, \\ \varphi_k^2(x, y) &= x - xy, \\ \varphi_k^3(x, y) &= xy, \\ \varphi_k^4(x, y) &= y - xy. \end{aligned}$$



Obrázek 1.1: Geometrie úlohy obtékání rovné desky a okrajové podmínky

1.3 Verifikace modelu $k-\omega$ na úloze obtékání rovné desky

Pro verifikaci implementace dvourovnicového modelu $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006) do řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě konečných prvků provedeme simulaci dvourozměrného obtékání rovné desky s nulovým tlakovým gradientem podle NASA [101] (*zero pressure gradient flat plate*). Jedná se o rovnou desku reprezentovanou pevnou adiabatickou stěnou o délce 2 m, orientovanou ve směru osy x ($x \equiv y_1$), před níž je umístěna náběžná oblast dlouhá 0,33333 m. Výška oblasti ve směru osy y ($y \equiv y_2$) je 1 m, což je zcela dostačující k tomu, aby okrajová podmínka na horní hranici výpočtové oblasti neovlivňovala nevhodně proudění u obtékané stěny. Geometrie úlohy je znázorněna na obrázku 1.1 včetně okrajových podmínek. Původní okrajová podmínka symetrie v oblasti před deskou [101] je realizována jako nevazká stěna a podmínka volného proudu (*farfield*) jako výstup, kdy jsou hodnoty veličin proudového pole extrapolovány, nikoliv pevně nastaveny. Po zpětné kontrole hodnot na těchto hranicích výpočtové oblasti je ale možné konstatovat splnění požadovaných okrajových podmínek.

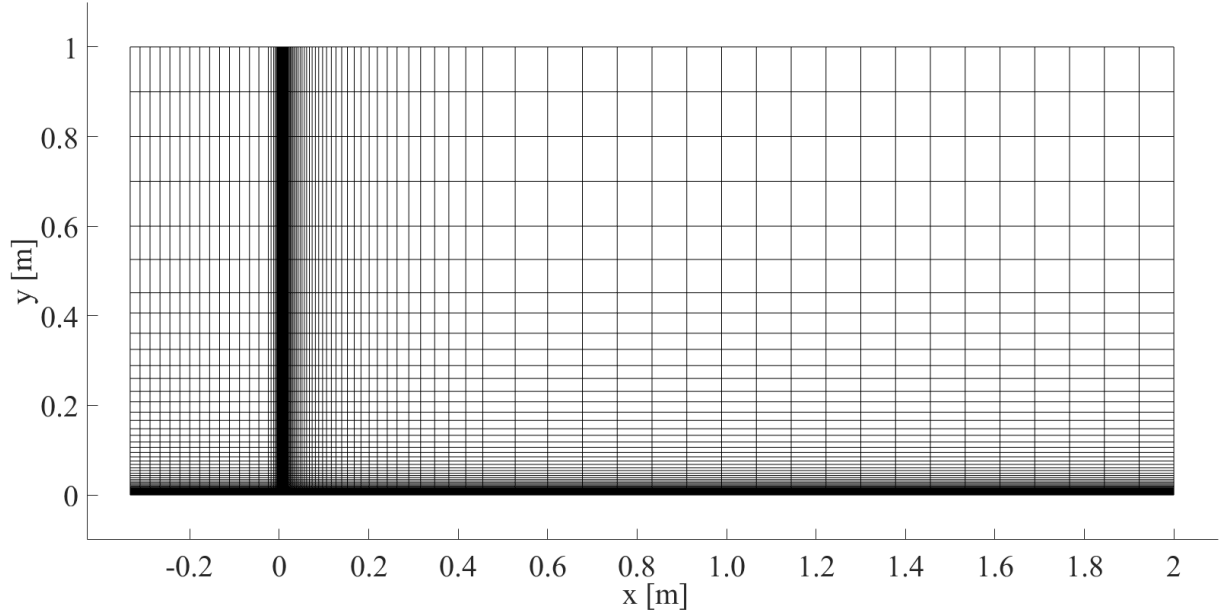
Ve zbývající části první kapitoly budeme uvažovat rozměrové veličiny a jejich střední hodnoty budeme značit tak, jak je zavedeno v odstavci 1.1.1.

1.3.1 Nastavení simulace

Pro urychlení výpočtu je pro verifikační úlohu použita metoda *multigrid*, kdy je simulace provedena postupně na třech strukturovaných čtyřúhelníkových sítích od nejhrubší po nej-

	počet elementů $n_x \times n_y$	počet elementů	y_0 [m]	y^+ [-]
hrubá síť	77×44	3 388	$12 \cdot 10^{-6}$	3,5
střední síť	154×88	13 552	$6 \cdot 10^{-6}$	1,5
jemná síť	308×176	54 208	$3 \cdot 10^{-6}$	0,8

Tabulka 1.1: Parametry zahrnutých sítí použitých pro simulaci obtékání rovné desky metodou *multigrid*: počet elementů ve směru souřadnicových os, celkový počet elementů, rozměrová a bezrozměrová vzdálenost prvního uzlu od stěny



Obrázek 1.2: Střední výpočetní síť pro numerickou simulaci obtékání rovné desky o počtu elementů 154×88

jemnější. Simulace na jemnější síti začíná vždy z ustáleného řešení získaného na hrubší síti, hodnoty všech veličin jsou do uzlů nové sítě extrapolovány. Na obrázku 1.2 je zobrazena střední síť, zahuštěná u obtékané stěny a v oblasti náběžné hrany desky. Parametry jednotlivých sítí jsou uvedeny v tabulce 1.1, kde n_x a n_y je počet elementů ve směru os x a y , y_0 je rozměrová vzdálenost prvního uzlu od stěny a y^+ maximální bezrozměrová vzdálenost prvního uzlu od stěny ve stěnových jednotkách, která se na celé délce desky vyskytuje. Ta je vyhodnocená z výsledků simulace, na jemné síti je splněno $y^+ \leq 1$.

Požadované fyzikální parametry úlohy jsou následující. Machovo číslo je $Ma^{NASA} = 0,2$, tedy proudění je v podstatě nestlačitelné, nicméně řešič se předpokládá stlačitelný, což je splněno. Referenční teplota je $T^{NASA} = 300$ K a Reynoldsovo číslo vztažené na jednotku délky $Re^{NASA} = 5 \cdot 10^6$. Index NASA zde použijeme pro zdůraznění skutečnosti, že se jedná o předepsané hodnoty podle [101]. Uvažujeme tedy vzduch při teplotě 300 K, odpovídající dynamická viskozita je $\mu = 1,846 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$, hustota $\rho = 1,177 \text{ kg m}^{-3}$ a statický tlak určený ze stavové rovnice pro ideální plyn $p = \rho r T = 1,177 \cdot 287 \cdot 300 = 101\,340$ Pa. Měrná tepelná kapacita při konstantním objemu je $c_v = 717,8 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$, Poissonova adiabatická konstanta $\kappa = 1,4$ a tepelná vodivost $k = 2,624 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$. Tyto hodnoty předpokládáme ve volném proudu dostatečně daleko od obtékané desky. Dále potřebujeme znát rychlost zvuku ve volném proudu, tedy

$$a_{fs} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{1,4 \frac{101\,340}{1,177}} \doteq 347,2 \text{ m s}^{-1}. \quad (1.45)$$

Indexem $_{fs}$ budeme označovat hodnoty ve volném proudu (*free stream*). Rychlost tekutiny ve směru osy x ve volném proudu pak určíme z požadovaného Machova čísla $Ma^{NASA} = v_{1,fs}/a_{fs}$, tedy

$$v_{1,fs} = Ma^{NASA} a_{fs} = 0,2 \cdot 347,2 \doteq 69,44 \text{ m s}^{-1}.$$

Ověříme nyní udávané Reynoldsovo číslo vztažené na jednotku délky ($l = 1$) ve volném

proudu. Dostaneme

$$Re^{NASA} = \frac{\rho v_{1,fs} l}{\mu} = \frac{1,177 \cdot 69,44 \cdot 1}{1,846 \cdot 10^{-5}} \doteq 4,4 \cdot 10^6 \approx 5 \cdot 10^6$$

a budeme tedy předpokládat, že úloha je s uvedenými fyzikálními hodnotami nastavena správně. Reynoldsovo číslo, vyskytující se v bezrozměrovém tvaru matematického modelu (1.41), je referenční Reynoldsovo číslo (1.40), které se bude od Re^{NASA} lišit. Jako referenční hodnoty tlaku, hustoty a viskozity zvolíme uvedené parametry volného proudu, referenční délka je rovna jedné. Z převodu do bezrozměrového tvaru uvedeného v odstavci 1.2.1 vyplývá vztah pro referenční rychlost

$$v_{ref} = \sqrt{\frac{p_{ref}}{\rho_{ref}}} = \sqrt{\frac{101340}{1,177}} \doteq 293,43 \text{ m s}^{-1},$$

a tedy referenční Reynoldsovo číslo, se kterým pracuje numerický řešič, je

$$Re_{ref} = \frac{\rho_{ref} v_{ref} l_{ref}}{\mu_{ref}} = \frac{1,177 \cdot 293,43 \cdot 1}{1,846 \cdot 10^{-5}} \doteq 1,87 \cdot 10^7.$$

Okrajové podmínky

Na hranicích výpočtové oblasti jsou předepsány následující okrajové podmínky.

Vstup

- hodnoty volného proudu, tedy stagnační tlak $\bar{p} = 101340 \text{ Pa}$ a stagnační hustota $\bar{\rho} = 1,177 \text{ kg m}^{-3}$,
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici,
- napětí ve směru normály k hranici $(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$,
- turbulentní veličiny ve volném proudu získané z výsledků uvedených v [101], tedy $k = 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 614,96 \text{ s}^{-1}$.

Výstup

- statický tlak podle požadovaného tlakového poměru 1,0282, tedy $\bar{p} = 101340/1,0282 \doteq 98553 \text{ Pa}$
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici,
- napětí ve směru normály k hranici $(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$,
- ostatní hodnoty včetně turbulentních veličin extrapolujeme z proudového pole.

Vazká stěna

- složky rychlosti $\tilde{v}_1 = 0 \text{ m s}^{-1}$, $\tilde{v}_2 = 0 \text{ m s}^{-1}$,
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici (adiabatická stěna),
- konstantní hodnota turbulentní energie $k = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$,
- konstantní hodnota specifické rychlosti disipace $\omega = 10^{10} \text{ s}^{-1}$.

Nevazká stěna

- normálová složka rychlosti $\tilde{v}_2 = 0 \text{ m s}^{-1}$,
- ostatní hodnoty včetně turbulentních veličin extrapolujeme z proudového pole.

Hodnota ω na vazké stěně je určena podle běžně užívaného Menterova vztahu, například [99],

$$\omega_{wall} = 10 \frac{6 \mu}{\rho \beta_0 y_0^2}, \quad (1.46)$$

kde y_0 je vzdálenost prvního uzlu sítě od stěny a β_0 konstanta modelu turbulence $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006). Pro nejjemnější síť s $y_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, viz tabulku 1.1, dostaneme

$$\omega_{wall} = 10 \frac{6 \cdot 1,846 \cdot 10^{-5}}{1,177 \cdot 0,0708 \cdot (3 \cdot 10^{-6})^2} \doteq 1,48 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}.$$

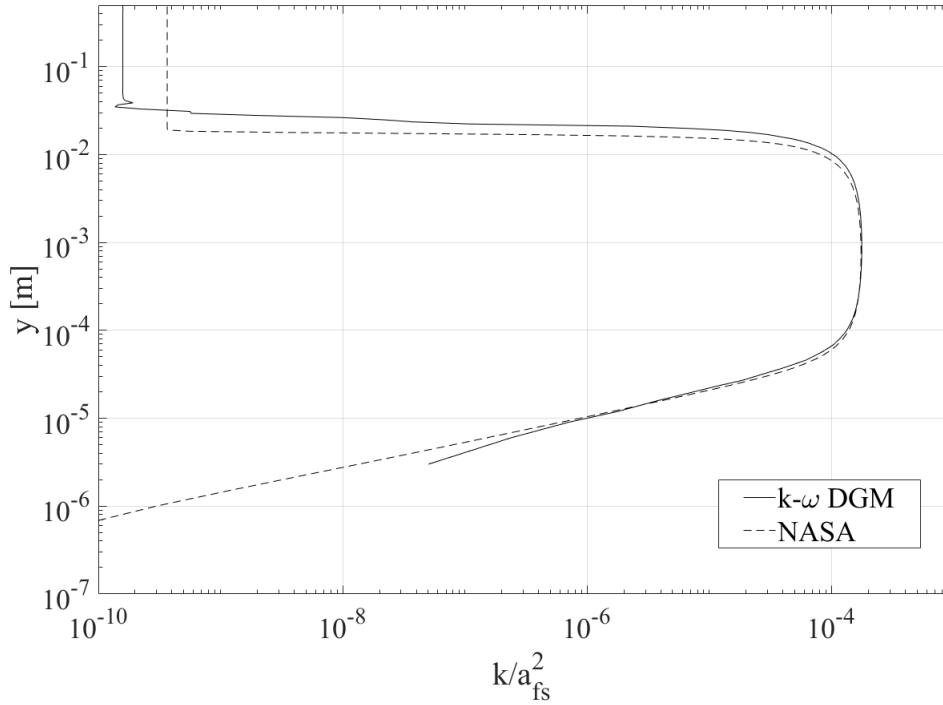
S ohledem na velmi rychlý pokles ω můžeme hodnotu bez obav zaokrouhlit nahoru na 10^{10} s^{-1} . Simulace jsou na všech sítích provedeny s 2. řádem přesnosti nespojitě Galerkinovy metody v prostoru, tedy ω je na každém elementu aproximováno polynomem 1. stupně, v podstatě nakloněnou rovinou. To umožňuje bez problémů použít dostatečně vysokou hodnotu ω na stěně, protože rovina se na elementu u stěny patřičným náklonem přizpůsobí. Uvedená hodnota specifické rychlosti disipace na stěně je tedy použita i pro dvě hrubší sítě, kde by v případě použití DGM prvního řádu v prostoru nebo metody konečných objemů bylo potřeba zadat hodnotu ω menší, jak by vyšlo při dosažení příslušných větších vzdáleností y_0 do vztahu (1.46).

Počáteční podmínky

Simulace na nejhrubší síti je zahájena z hodnot volného proudu aplikovaných na celé výpočtové oblasti.

1.3.2 Stabilita numerické simulace

Diskretizace dvourovnicového modelu $k-\omega$ pomocí DGM přináší problémy se stabilitou simulace, jak bylo již uvedeno výše. Převod rovnice pro specifickou rychlost disipace ω do logaritmického tvaru a omezení turbulentní energie k představuje velký krok směrem k dobré stabilitě simulace, bez těchto úprav by provedení simulace nebylo vůbec možné. Nicméně i přes tato opatření dochází i při zdánlivě rozumném vývoji simulace k náhlé ztrátě stability, jak uvádí i autoři [4]. Vrátime-li se v takovém případě například o několik desítek či stovek iterací zpět a pokračujeme v simulaci s o něco menším časovým krokem, ztrátě stability lze předejít a ve výpočtu pokračovat. Takové kritické okamžiky se vyskytují opakovaně a dochází tak postupně k poměrně významnému snižování časového kroku a tím ke zbytečně omezenému využití výhod implicitní časové integrace. Autoři [4] tento problém řeší zavedením již zmíněné *realizability* podmínky, která zajistí kladná normálová turbulentní napětí a splnění Schwarzovy nerovnosti pro smyková turbulentní napětí. To vede k omezení hodnoty $\hat{\omega}$ zdola konkrétní hodnotou. Podle [4] totiž původ těchto náhlých nestabilit spočívá právě v některých příliš malých hodnotách $\hat{\omega}$. V předkládané práci je tento problém řešen postupným snižováním časového kroku v případě potřeby. U úlohy obtékání rovné desky z uvedených počátečních podmínek se ukazuje jako nejvhodnější postup odstartovat simulaci s velmi malým časovým krokem, který je postupně významně zvyšován tak, aby alespoň po větší část celkového běhu simulace byl využit velký časový krok umožněný implicitní integrací. Vzhledem k poměrně značné výpočetní náročnosti těchto simulací je to velmi žádoucí. V pokročilejším stavu simulace je pak časový krok již podle potřeby snižován, dokud nedojde k dostatečnému ustálení rezidua a ukončení výpočtu.

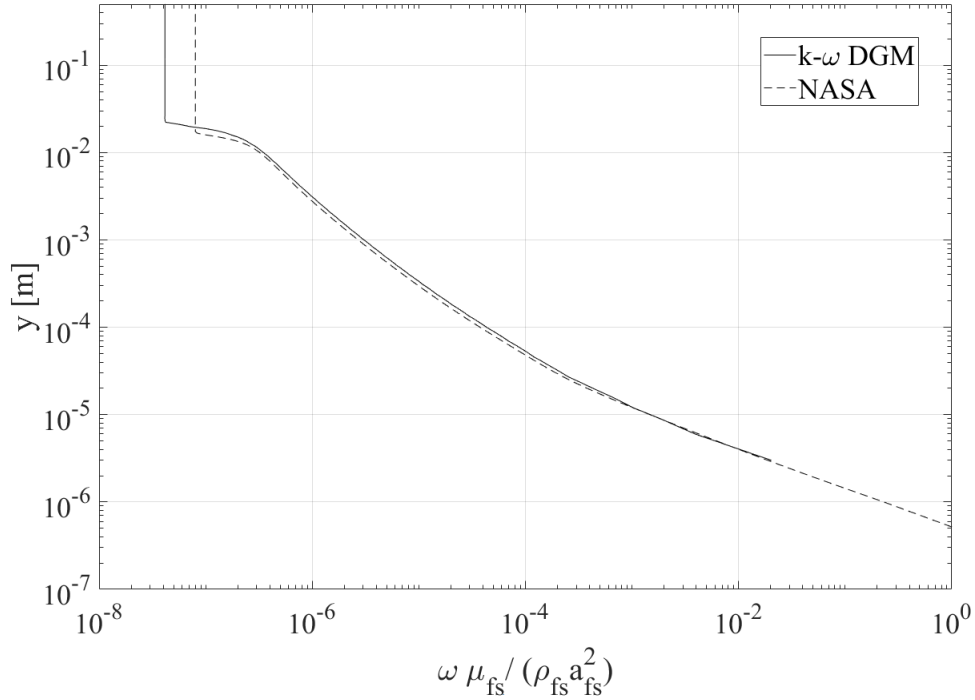


Obrázek 1.3: Průběh normované turbulentní energie k podél normály ke stěně v místě $x = 0,97$ m (plnou čarou); referenční výsledky NASA [101] (čárkovaně)

1.3.3 Výsledky verifikační simulace

Výsledky numerické simulace obtékání rovné desky s použitím dvourovnicového modelu turbulence $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006) s popsány úpravami a na nejjemnější výpočetní síti jsou v porovnání s referenčními výsledky NASA [101] uvedeny na následujících obrázcích. Zdůrazněme, že referenční simulace NASA je provedena se stejným modelem turbulence, ale bez úprav doplněných kvůli stabilitě DGM řešiče. Průběh turbulentních veličin podél normály ke stěně je zobrazen v místě $x = 0,97$ m, tedy přibližně v polovině délky obtékané desky. Pro vyhodnocení turbulentní energie k použijeme veličinu k/a_{fs}^2 , kde a_{fs} je rychlost zvuku ve volném proudu (1.45). Porovnání s výsledky NASA je uvedeno na obrázku 1.3. Odlišnost v začátku křivky na stěně je dána výpočetní sítí, respektive velikostí první buňky u stěny. Referenční simulace [101] byla provedena na velmi jemné síti o počtu elementů $545 \times 385 = 209\,825$. Maxima turbulentní energie ve středu mezní vrstvy jsou zachycena velmi pěkně, na vnějším okraji mezní vrstvy se křivky vzdalují a u vlastní simulace zde dochází k oscilacím. Hodnota ve volném proudu se mírně liší. Uvědomíme-li si však, že na osách grafu je užita logaritmická stupnice a ve volném proudu se pohybujeme v hodnotách řádu 10^{-9} až 10^{-10} , je tato odchylka zanedbatelná. Oscilace na okraji mezní vrstvy jsou způsobeny příliš hrubou sítí. Ta je sice patričně zahuštěná v blízkosti stěny, ale postupně se velikost elementů směrem od stěny zvětšuje a na okraji mezní vrstvy už pravděpodobně není dostatečující k přesnému zachycení náhlé změny v profilu k [78]. Dojde tak k podhodnocení turbulentní energie a oscilacím, případně se mohou v této oblasti vyskytnout i záporné hodnoty. Problém je možno řešit zavedením určité umělé viskozity [78], díky které dojde k vyhlazení profilu k v kritickém místě na okraji mezní vrstvy a jinde se její vliv prakticky neprojeví. K odstranění oscilací dojde s největší pravděpodobností i při zahuštění výpočetní sítě, to ale z důvodu časové náročnosti simulace na takové síti nebylo zatím testováno.

Průběh specifické rychlosti disipace ω opět normované parametry volného proudu ve tvaru



Obrázek 1.4: Průběh normované specifické rychlosti disipace ω podél normály ke stěně v místě $x = 0,97\text{ m}$ (plnou čarou); referenční výsledky NASA [101] (čárkovaně)

$\omega \mu_{fs}/(\rho_{fs} a_{fs}^2)$ je uveden na obrázku 1.4. Výsledky jsou zde v dobré shodě s referenční simulací NASA, odchylka ve volném proudu je stejně jako u turbulentní energie zanedbatelná, jedná se o hodnoty řádu 10^{-7} až 10^{-8} .

Vyhodnocení turbulentní viskozity μ_t je provedeno na obrázku 1.5. Zde není na rozdíl od grafů pro k a ω použita logaritmická stupnice, odchylka od referenční simulace NASA na vnějším okraji mezní vrstvy tedy více vynikne. Simulace předpovídá v daném řezu $x = 0,97\text{ m}$ přibližně o 29% větší tloušťku turbulentní mezní vrstvy než referenční simulace a zároveň nadhodnocuje maximální hodnotu μ_t přibližně o 8%. Pozice maxima je posunuta dále od stěny.

Odlišnosti turbulentní viskozity mají samozřejmě vliv na profil rychlosti. Porovnání složky rychlosti v_1 v místě $x = 0,97\text{ m}$ a $x = 1,90\text{ m}$ je uvedeno na obrázku 1.6. Proudění je celkově o něco pomalejší, což je vidět i z profilu bezrozměrové rychlosti $u^+(y^+)$ ve stejných dvou řezech na obrázku 1.7. Bezrozměrová rychlost u^+ je definovaná jako [61]

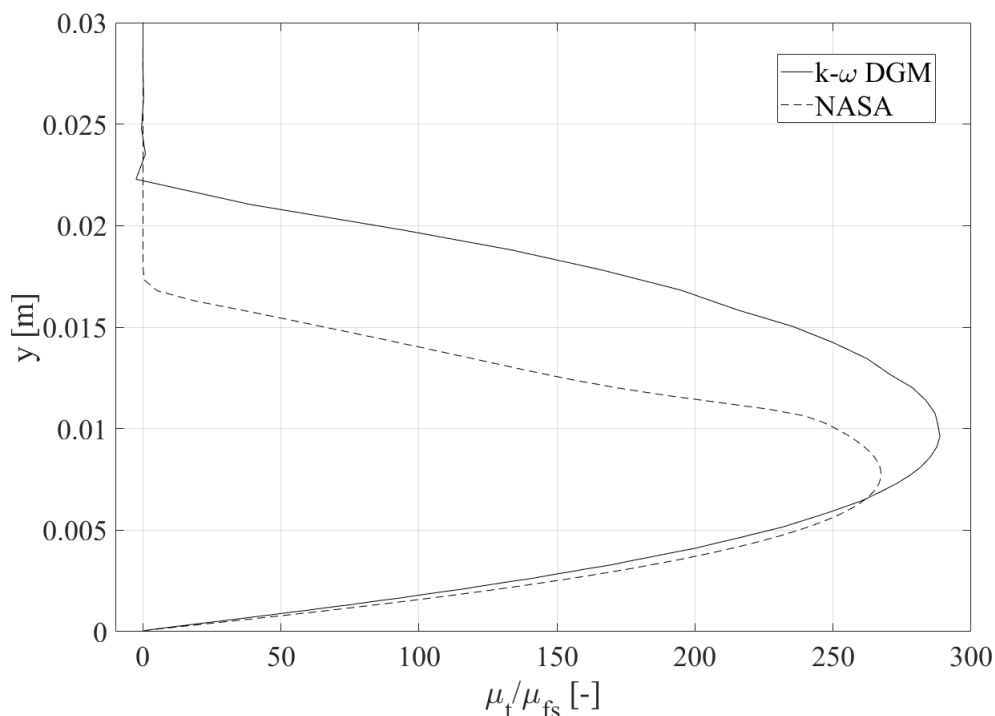
$$u^+ = \frac{\tilde{v}_1}{u_\tau}, \quad (1.47)$$

kde třecí rychlost u_τ je

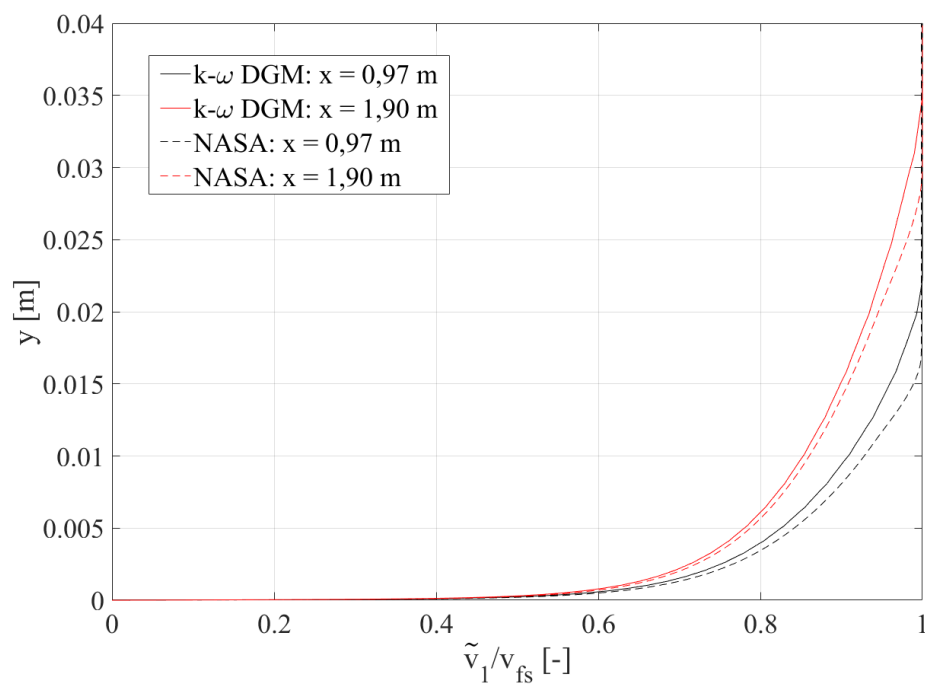
$$u_\tau = \sqrt{\nu \left. \frac{d\tilde{v}_1}{dy} \right|_{wall}} \quad (1.48)$$

a $\nu = \mu/\bar{\rho}$ je kinematická viskozita tekutiny. Bezrozměrová vzdálenost od stěny měřená ve stěnových jednotkách (*wall units*) je určena vztahem [61]

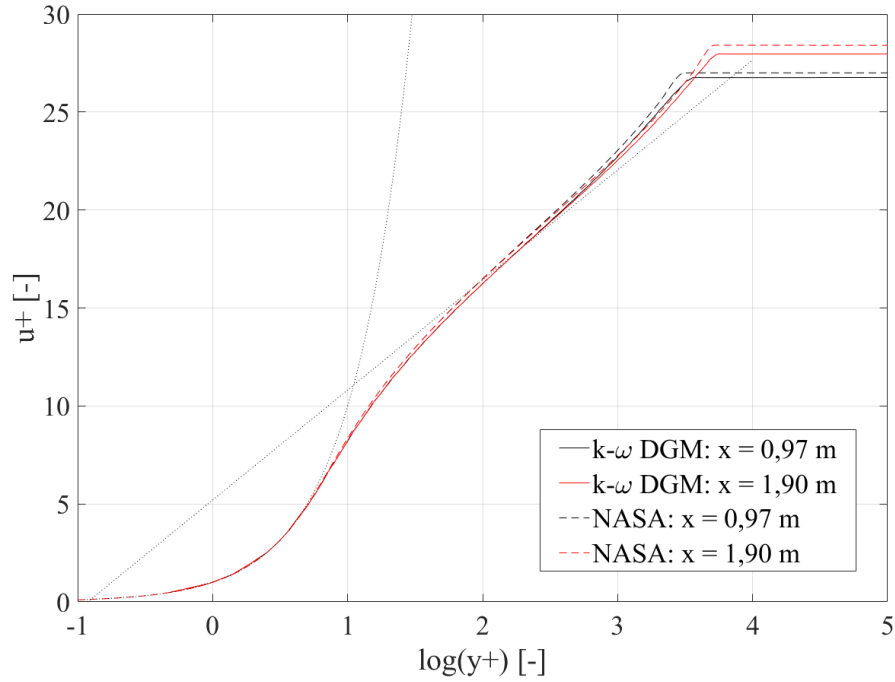
$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}. \quad (1.49)$$



Obrázek 1.5: Průběh normované turbulentní viskozity μ_t podél normály ke stěně v místě $x = 0,97$ m (plnou čarou); referenční výsledky NASA [101] (čárkovaně)



Obrázek 1.6: Normovaný profil složky rychlosti \tilde{v}_1 podél normály ke stěně v místě $x = 0,97$ m a $x = 1,90$ m (plnou čarou černou a červenou); referenční výsledky NASA [101] (čárkovaně černě a červeně)



Obrázek 1.7: Profil bezrozměrové rychlosti u^+ podél normály ke stěně v místě $x = 0,97$ m a $x = 1,90$ m (plnou čarou černou a červenou); referenční výsledky NASA [101] (čárkovaně černě a červeně)

Profil rychlosti ve vazké podvrstvě je zachycen dobře. Ten má vliv na výpočet součinitele tření, uvedeného později.

Z porovnání izochar veličin k/a_{fs}^2 (obrázky 1.8 a 1.9) a μ_t/μ_{fs} (obrázky 1.10 a 1.11) je opět vidět větší tloušťka mezní vrstvy vypočítaná simulací než tloušťka očekávaná.

Izočáry veličiny $\omega \mu_{fs}/(\rho_{fs} a_{fs}^2)$ na obrázcích 1.12 a 1.13 jsou v mezní vrstvě ve velmi dobré shodě s referenční simulací NASA. „Chybějící“ svislé izočáry na vstupu a ve volném proudu na obrázku 1.12 jsou dány faktem, že na vstupu byly nastaveny právě hodnoty volného proudu a v celé výpočetní oblasti kromě mezní vrstvy jsou tedy hodnoty konstantní. Z izochar v mezní vrstvě je ale vidět, že vliv této skutečnosti na situaci v mezní vrstvě je zanedbatelný.

Poslední vyhodnocovanou veličinou je součinitel tření C_f určený vztahem

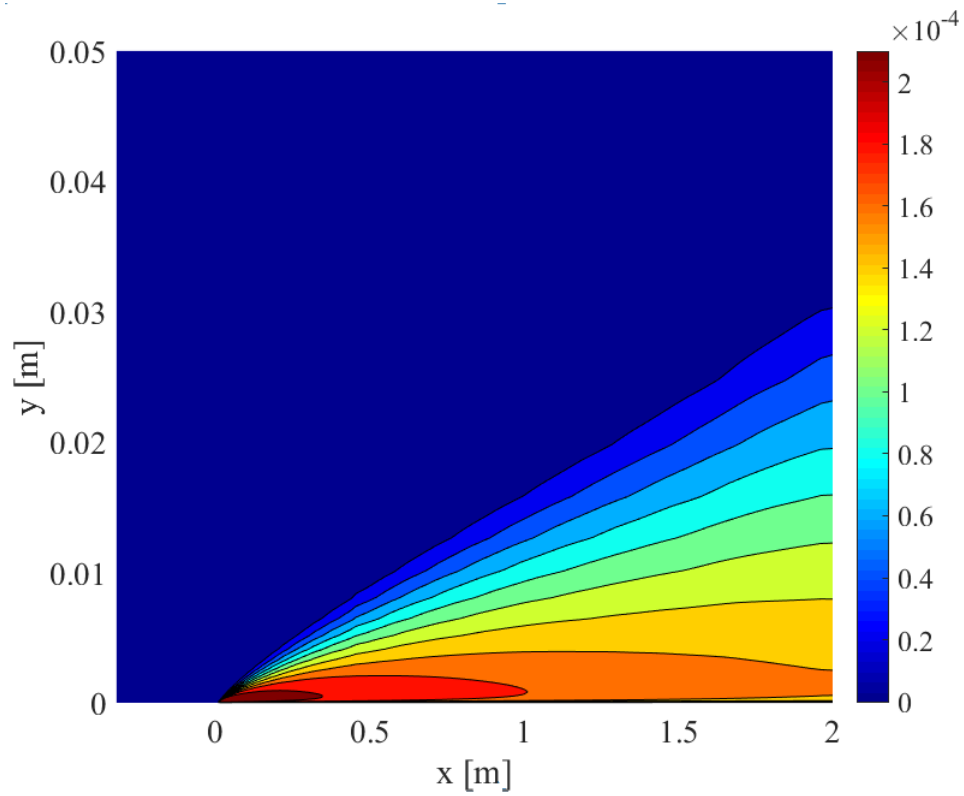
$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho_{fs} v_{fs}^2},$$

kde τ_w je smykové napětí na stěně. To závisí na derivaci složky rychlosti \tilde{v}_1 podle y na stěně a na dynamické viskozitě tekutiny μ podle vztahu [61]

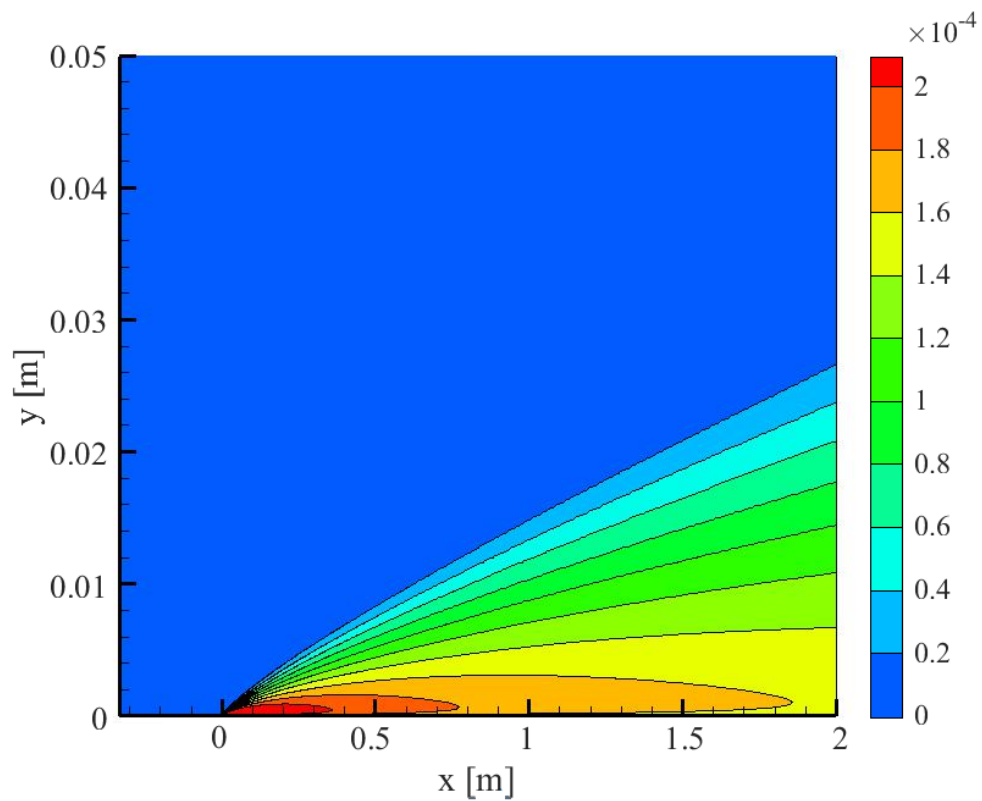
$$\tau_w = \mu \left. \frac{d\tilde{v}_1}{dy} \right|_{wall}. \quad (1.50)$$

Napětí τ_w závisí na situaci těsně u stěny a ta je zachycena dobře, jak je vidět z uvedených výsledků. Tedy i součinitel tření je v rozumné shodě s referenčními výsledky NASA, jak ukazuje obrázek 1.14. Uvedené teoretické křivky součinitele tření v laminárním a turbulentním případě jsou určeny podle následujících vztahů. Reynoldsovo číslo závislé na vzdálenosti x od náběžné hrany desky je

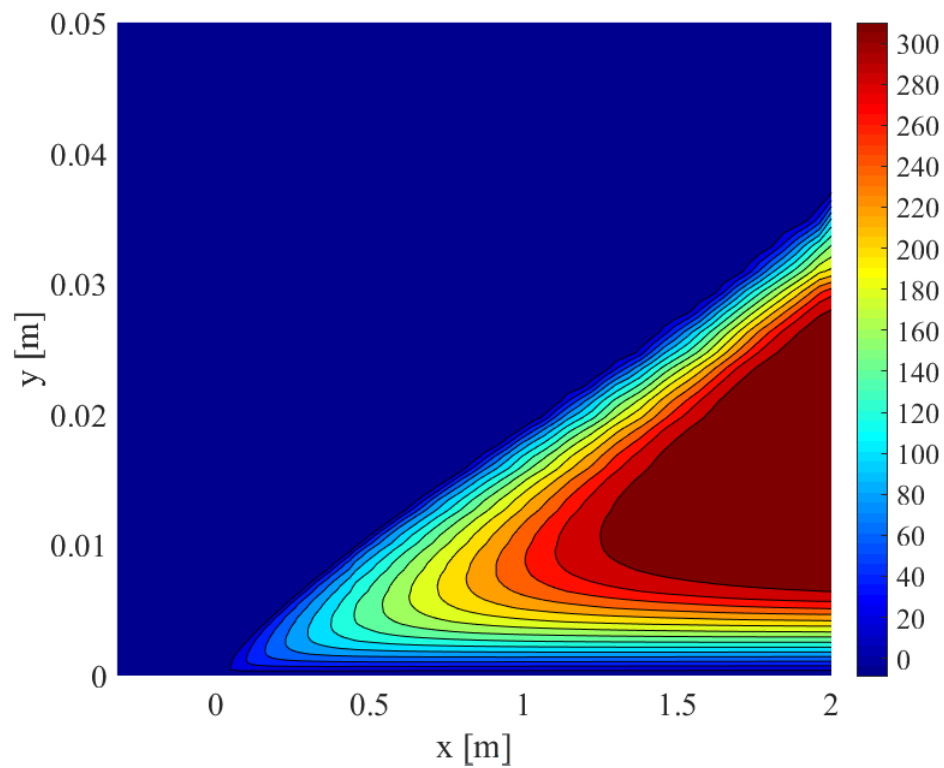
$$Re_x = \frac{\rho_{fs} v_{fs} x}{\mu_{fs}},$$



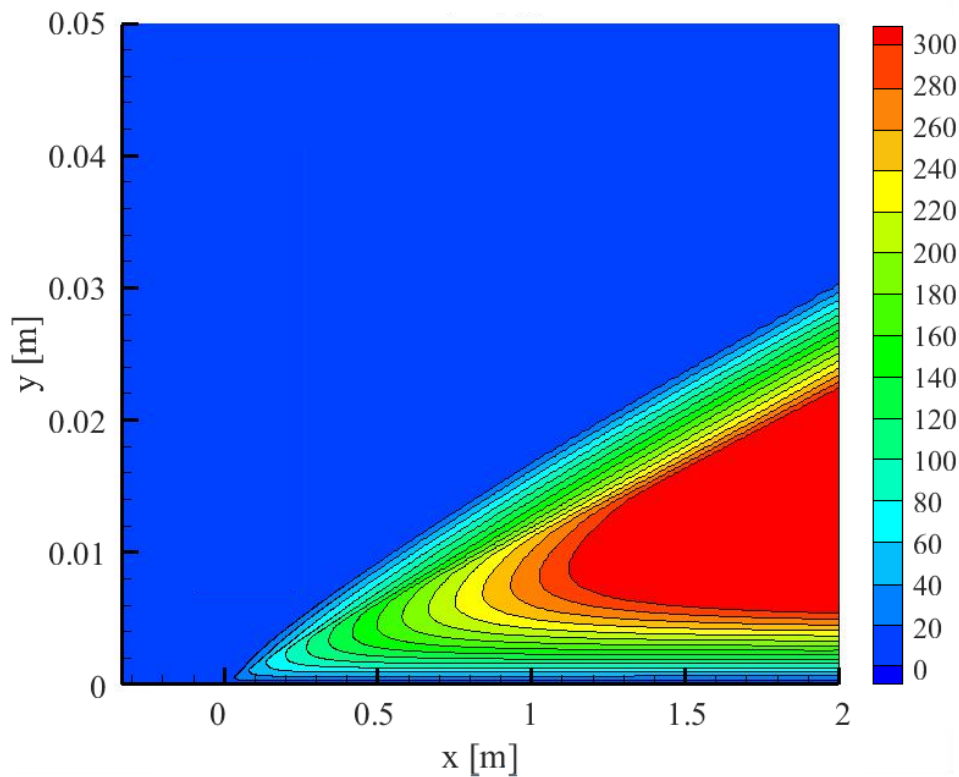
Obrázek 1.8: Izočáry normované turbulentní energie k získané numerickou simulací provedenou pomocí nespojitě Galerkinovy metody



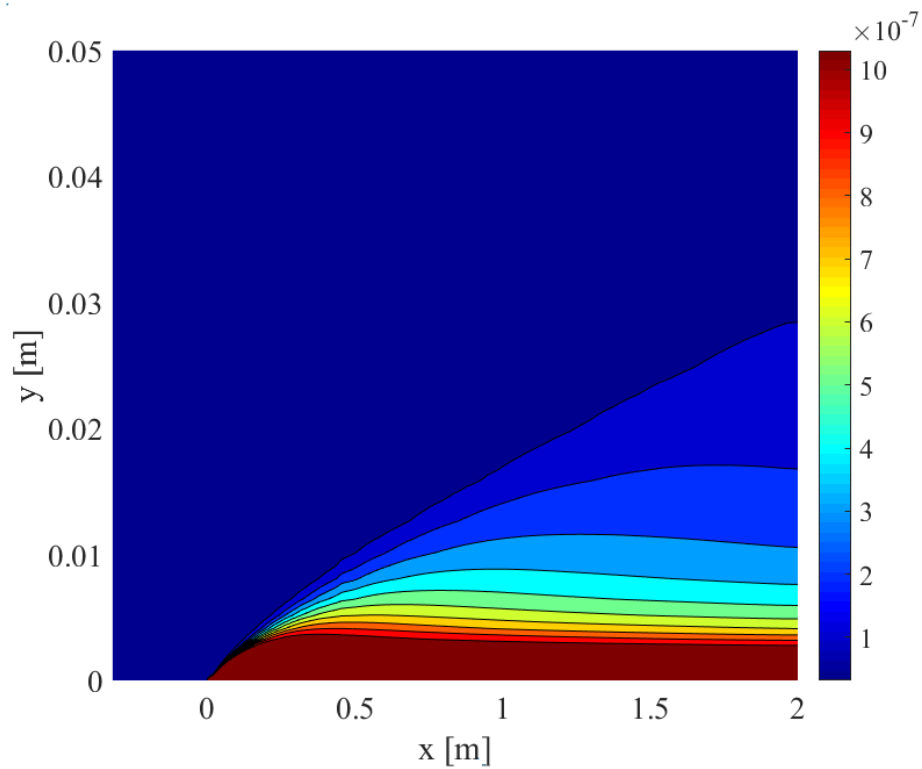
Obrázek 1.9: Izočáry normované turbulentní energie k z referenční simulace NASA [101]



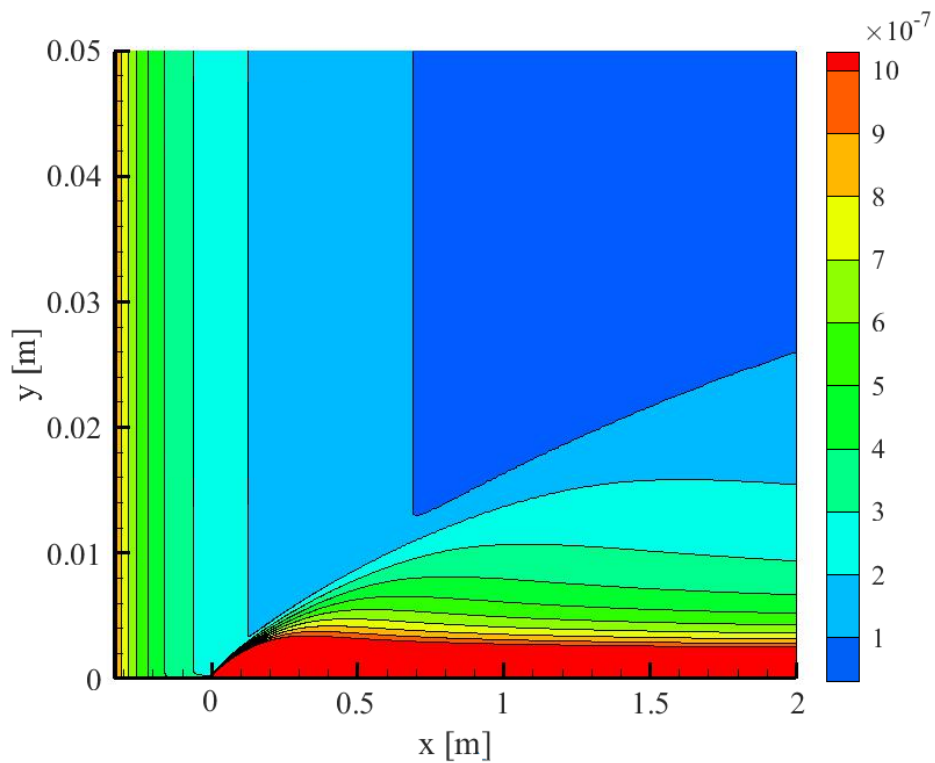
Obrázek 1.10: Izočáry normované turbulentní viskozity μ_t získané numerickou simulací provedenou pomocí nespojitě Galerkinovy metody



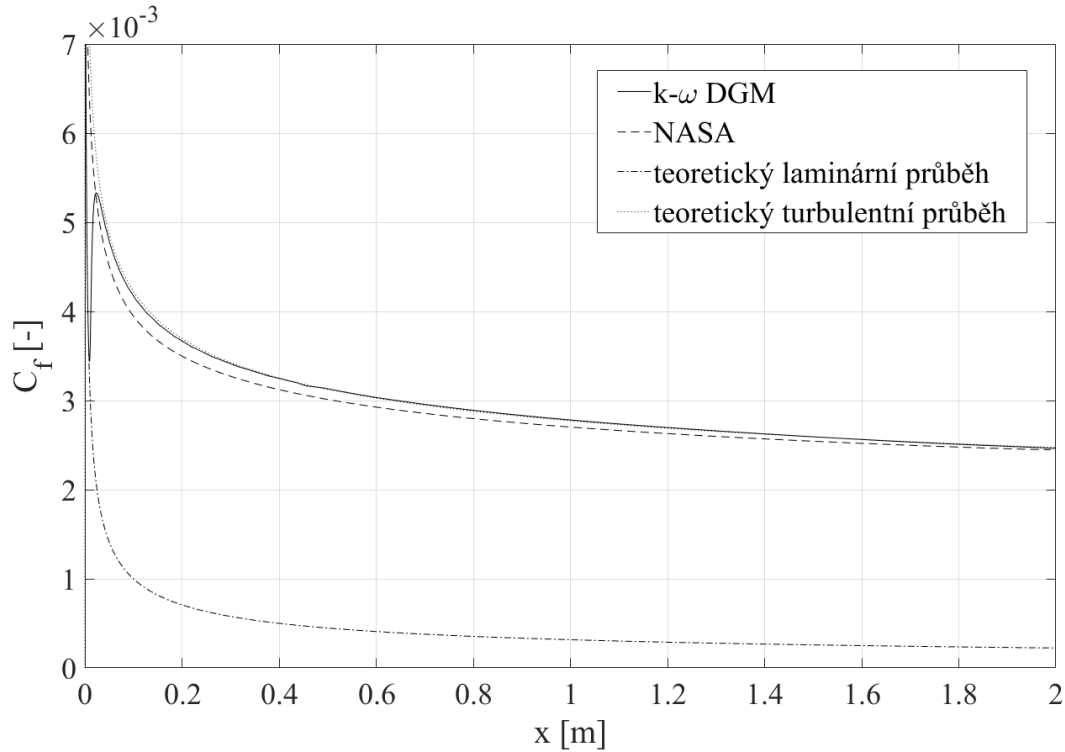
Obrázek 1.11: Izočáry normované turbulentní viskozity μ_t z referenční simulace NASA [101]



Obrázek 1.12: Izočáry normované specifické rychlosti disipace ω získané numerickou simulací provedenou pomocí nespojitě Galerkinovy metody



Obrázek 1.13: Izočáry normované specifické rychlosti disipace ω z referenční simulace NASA [101]



Obrázek 1.14: Průběh součinitele tření C_f podél obtékané stěny (plnou čarou); referenční výsledky NASA [101] (čárkovaně), teoretický laminární a turbulentní průběh součinitele (čerchovaně a tečkovaně)

laminární a turbulentní průběh C_f potom [61]

$$C_f^{lam} \approx 0,664 \sqrt{Re_x},$$

$$C_f^{turb} \approx 0,37 (\log_{10} Re_x)^{-2,584},$$

přičemž v případě C_f^{turb} se jedná Schultz-Grunowovu formulaci. Průběh součinitele tření získaný z provedené simulace se prakticky shoduje s touto teoretickou křivkou.

1.3.4 Závěry

Chování modelu turbulence $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006) s uvedenými úpravami, implementovaného do řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě, není celkově ideální, zejména rozdíl v tloušťce mezní vrstvy 29% je nezanedbatelný. Nicméně vliv této odchylky na průběh rychlosti a především na součinitel tření je malý. Odchytky od referenčních dat mohou být způsobeny příliš hrubou výpočetní sítí, kdy s jejím zjemňováním očekáváme zpřesnění všech veličin. Dalším faktorem jsou výše popsané úpravy modelu, které v původní verzi [99] nejsou, ale pro diskretizaci rovnic modelu pomocí DGFEM jsou nezbytné. Při aplikaci testovaného modelu turbulence na úlohu proudění vzduchu v úzkých mezerách, uvedenou dále, budeme tedy mít na paměti, že model predikuje větší tloušťku mezní vrstvy. Veličiny na stěně, jako smykové napětí nebo součinitel tření, jsou však vypočítávány dobře. S ohledem na tyto skutečnosti simulace provedeme a vyhodnotíme.

Kapitola 2

Numerická simulace proudění stlačitelné vazké tekutiny v minikanálech

Proudění tekutin v potrubích a kanálech nejrůznějších průřezů a velikostí je zkoumáno již více než 100 let. Nejznámější experiment provedl Osborne Reynolds již v roce 1883, při němž studoval přechod z laminárního režimu proudění do turbulentního v závislosti na měnící se rychlosti proudění vody. Po něm pojmenované Reynoldsovo číslo, vyjadřující poměr setrvačných a vazkých sil v tekutině, je významným bezrozměrovým parametrem, charakterizujícím proudění tekutiny. Známa je kritická hodnota $Re = 2300$, okolo které dochází ke ztrátě stability laminárního proudění v potrubích s kruhovým průřezem a k postupnému přechodu do turbulentního režimu proudění. Úloha proudění tekutin v kanálech se na první pohled může zdát v důsledku své jednoduché geometrie a obecně známých faktů značně triviální, hlubší prozkoumání situace a současného i staršího výzkumu v této oblasti však dokazuje opak.

Poznamenejme, že veličiny uváděné v této kapitole jsou rozměrové, není-li uvedeno jinak. V případě středovaných hodnot jsou tyto patřičně označeny v souladu se značením zavedeným v odstavci 1.1.1. Veškeré simulace uvedené v této kapitole jsou provedeny pomocí numerického řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě, jak je popsáno v první kapitole.

2.1 Motivace a současný stav poznání

Zaměříme se na proudění v kanálech obdélníkových průřezů, kdy pro průřezy s velmi vysokým poměrem stran šířka/výška můžeme mluvit o proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami, neboť dostatečně vzdálené boční stěny kanálu prakticky nemají vliv na proudové pole uprostřed kanálu. V takovém případě se většinou omezujeme na svislý řez středem kanálu a pracujeme ve 2D.

Reynoldsovo číslo, které charakterizuje typ proudění, je definované jako

$$Re = \frac{U L}{\nu},$$

kde $U [m s^{-1}]$ je charakteristická rychlost tekutiny, $L [m]$ je charakteristická délka úlohy a $\nu [m^2 s^{-1}]$ je kinematická viskozita tekutiny. Znalosti o proudění získané nejčastěji pro potrubí s kruhovým průřezem, kde charakteristickou délkou je průměr potrubí D , tedy $L = D$, se pro kanály s nekruhovým průřezem zobecňují zpravidla pomocí hydraulického průměru

D_h . Ten je dán vztahem

$$D_h = \frac{4A}{o},$$

kde A je plocha průřezu kanálu a o je délka omočeného obvodu. Uvažujeme zde kanály zcela naplněné tekutinou. Potom tedy $L = D_h$. Ovšem tento běžně používaný hydraulický průměr nemusí být vždy optimální charakteristickou délkou [36], zejména jedná-li se o predikci tření v turbulentním režimu, a ilustruje tak jednu z mnoha nejistot panujících ohledně proudění v nekruhových potrubích.

Další otázky vznikají ohledně vstupní délky (*entrance length*) L_e , tedy vzdálenosti od začátku kanálu, na které dochází k postupnému nárůstu mezní vrstvy na stěnách, až do jejich spojení v ose kanálu. Je tak dosaženo plně vyvinutého proudění, ve kterém se rychlostní profil již dále nemění. V případě laminárního proudění můžeme pro odhad délky vstupního úseku použít vztah

$$L_e = 0,05 Re D_h,$$

případně rozmezí $L_e = 0,025 - 0,065 Re D_h$. Pro turbulentní proudění je rozmezí mnohem větší. Orientačně je možné použít vztah [95]

$$L_e = 4,4 Re^{\frac{1}{6}} D_h, \quad (2.1)$$

obecně jsou doporučovány hodnoty v rozmezí $L_e = 10 - 150 D_h$. Uvedené vztahy jsou empiricky stanoveny pro kruhová potrubí, pro kanály s nekruhovým průřezem jsou opět zobecněny použitím hydraulického průměru. V případě turbulentního režimu je vstupní oblast podstatně kratší než v laminárním režimu. Přesný odhad L_e je prakticky nemožný, neboť délka vývoje turbulentního proudění závisí na mnoha faktorech, jako například vstupní intenzita turbulence nebo vstupní profil rychlosti.

Velkým problémem je samotná kritická hodnota Reynoldsova čísla. Spodní hranice je poměrně jasná, pod hodnotu přibližně $Re \approx 2000$ v proudící tekutině natolik převládají vazké síly, že laminární režim zůstane stabilní i při velkém rozrušení proudu. Horní hranice kritického Re je už ale značně nejistá. Je známo, že je možné laminární režim udržet, například při velmi pozvolném zvyšování rychlosti proudění, až do hodnot okolo $Re \approx 10000$. Z teoretických prací, které se zabývají stabilitou proudění v kanálu pomocí Orr-Sommerfeldovy rovnice, vyplývá kritické Reynoldsovo číslo pro proudění mezi dvěma rovnoběžnými stěnami vyvolané tlakovým spádem $Re \approx 5770$ [58]. Referenční délkou je zde výška kanálu a referenční rychlostí střední rychlost proudu. Z experimentálního vyšetřování jsou stanoveny různé hodnoty kritického Reynoldsova čísla, závislé na intenzitě turbulence na vstupu do kanálu. Pro přirozenou hladinu turbulence $Tu = 0,3\%$ je zjištěno $Re \approx 6700$ [39]. Numerické simulace nestlačitelného proudění v práci [53] ukazují, že přechod je v kanálech významně ovlivněn nejen intenzitou turbulence na vstupu, ale také profilem vstupní rychlosti. Předmětem testování je zde konstantní a parabolický profil, každý v kombinaci s dvěma hodnotami intenzity turbulence, a to $Tu = 1\%$ a $Tu = 5\%$. Pouze případ konstantního profilu a vyšší intenzity turbulence se chová tak, jak se běžně předpokládá. Tedy se zvyšováním Reynoldsova čísla dochází k postupnému přechodu přibližně mezi $Re \approx 2000$ a 8000 . V ostatních zkoumaných případech se laminární režim udrží do $Re \approx 10000$ a pak dojde k náhlému prudkému přechodu do turbulentního režimu.

Zcela zvláštní situace v tomto ohledu pak nastává v případě kanálů malých rozměrů, kde se laminární režim běžně vyskytuje při hodnotách řádově $Re \approx 10^4$ a pravidla platná pro kanály běžných rozměrů je nutné přehodnotit. O takových kanálech a úzkých mezerách je pojednáno dále.

Rešerše současné odborné literatury ukazuje, že výzkum v oblasti proudění tekutin v kanálech je v kategorii běžných kanálů zaměřen především na kritické stavy související s přechodem z laminárního do turbulentního režimu, relaminarizaci proudění a rozbor přechodového proudění obecně, například v experimentálních pracích [74], [94]. V oblasti minikanálů se naprostá většina prací týká přenosu tepla a snahy o zvyšování účinnosti výměníků tepla, viz například přehledová práce [18], případně se jedná o kanálky s nejrůznějšími překážkami, vícefázové proudění a podobně.

Klasifikace kanálů podle jejich rozměrů není v literatuře jednotná, nejčastěji se používá označení podle [37]. Kanály jsou zde rozděleny podle svého nejmenšího rozměru L_{min} (nejčastěji je to výška, respektive kolmá vzdálenost stěn) následujícím způsobem:

$$\begin{array}{ll} L_{min} \leq 1\mu\text{m} & \text{nanokanály,} \\ 1\mu\text{m} < L_{min} \leq 200\mu\text{m} & \text{mikrokanály,} \\ 200\mu\text{m} < L_{min} \leq 3\text{mm} & \text{minikanály,} \\ 3\text{mm} < L_{min} & \text{běžné kanály.} \end{array}$$

Běžně se ale můžeme setkat s posunutou terminologií, někdy i výrazně.

Zkoumání proudění stlačitelných vazkých tekutin v kanálech a úzkých mezerách v předkládané práci navazuje na dlouhodobý výzkum prováděný na pracovišti [89], [90], který byl zaměřený především na transonické proudění v těsnících mezerách šroubových kompresorů. Jedná se o pomezí mikro a minikanálů, přesněji mezery s charakteristickým rozměrem 100 až 500 μm .

Současná práce je zaměřena na kanály výšky 0,5 až 10 mm, tedy na minikanály a velmi malé běžné kanály. Výzkum proudění stlačitelných tekutin je prováděn ve spolupráci s Ústavem termomechaniky AV ČR, v.v.i., díky které je možné validovat výsledky numerických simulací pomocí experimentálních dat získaných pracovníky ÚT AV ČR v Aerodynamické laboratoři v Novém Kníně. Prakticky všechny výše zmíněné i další znalosti o přechodu v kanálech vychází ze zkoumání nestlačitelných tekutin. Jakmile se však jedná o tekutinu stlačitelnou, situace se komplikuje a predikce režimu proudění a především přechodu v kanálu se stává nejistou, zejména pro zkoumané úzké kanály.

Zajímáme-li se čistě o převažující režim proudění v kanálech, v oblasti běžných kanálů se můžeme do značné míry řídit Reynoldsovým číslem, samozřejmě s vědomím výše uvedených a dalších problémů. V oblasti mikroproudění je situace také poměrně jasná, vlivem blízkosti stěn zde dochází k výraznému tlumení jakýchkoliv poruch proudu a ten je tak ve většině případů laminární. Navíc v důsledku malých charakteristických rozměrů nebývají Reynoldsova čísla v mikrokanálech vysoká. Situace mezi těmito dvěma kategoriemi ale není příliš prozkoumaná a je středem zájmu v předkládané studii.

Pokud bychom chtěli detailněji zkoumat samotný přechod do turbulence, tedy za jakých podmínek (kategorie kanálů, Reynoldsovo číslo) a kde přesně (vzdálenost od vstupu do kanálu) k němu dojde, bude takový úkol náročný. Modely přechodu pro proudění v kanálech prakticky neexistují, většina modelů přechodu je kalibrována pro obtékání těles. Experimentální zkoumání přechodu je také podstatně obtížnější než měření za laminárních nebo plně turbulentních podmínek.

Tato kapitola je zaměřena na numerické simulace proudění v úzkých kanálech o výšce 0,5 až 10 mm pomocí přístupu RANS. Klade si za cíl blíže prozkoumat režim proudění v těchto kanálech, i když bez vhodného modelu přechodu je to možné jen v omezené míře. Základním výzkumem získané znalosti o proudění v úzkých mezerách a o vhodných způsobech numerického modelování takového typu proudění pak mohou být v budoucnu dále aplikovány

na složitější praktické problémy typu proudění v těsnících mezerách šroubových kompresorů nebo ventilů parních turbín.

2.2 Formulace úlohy a popis experimentu

Jako základní úloha pro studium proudění stlačitelné vazké tekutiny v minikanálech a velmi malých běžných kanálech je v návaznosti na spolupráci s Ústavem termomechaniky AV ČR, v.v.i. zvoleno proudění vzduchu za běžných podmínek v aerodynamicky hladkém rovném kanálu obdélníkového průřezu s vysokým poměrem stran šířka/výška. Vzduch je v případě kalibračního kanálu nasáván z okolní atmosféry a před samotným nasátím tvarovanou vstupní oblastí prochází nejprve přes silikagelovou sušičku, filtry, voštinu sloužící pro usměrnění proudu a soustavu sít. V případě velmi úzkých kanálů je vzduch nasáván přímo z laboratoře. V kanálu je vzduch urychlován vlivem nastaveného tlakového spádu a za kanálem proudí do volného prostoru realizovaného uklidňovací komorou, v níž je udržován požadovaný podtlak.

Veškeré experimenty uvedené v této kapitole byly provedeny pracovníky Ústavu termomechaniky Akademie věd ČR, v.v.i. v Aerodynamické laboratoři v Novém Kníně, která je vybavena aerodynamickým tunelem sacího typu. Realizována byla především pneumatická měření, při nichž byl odběry na stěně měřen statický tlak po délce kanálu a v několika vybraných bodech byl pitotovou sondou měřen také celkový tlak v ose kanálu. Optická měření, jejichž velkou předností především pro velmi malé kanály je jejich neinvazivnost, byla provedena Machovým-Zehnderovým interferometrem. Dále bylo experimentálně stanoveno smykové napětí na stěně, a to pomocí plůtkové sondy, jejíž popis a kalibraci lze nalézt v práci [65]. Určení smykového tření plůtkovou sondou je založeno na závislosti tečného napětí a tlakové difference změřené na překážce - „plůtku“, umístěné v oblasti platnosti zákona stěny. Hodnota intenzity turbulence na vstupu do kanálu, použitá pro nastavení numerických simulací, byla stanovena z měření pomocí žhaveného drátku. Detailní popis provedených kalibračních i finálních měření v úzkých kanálech včetně vyhodnocení nejistot měření a relevantních odkazů na zdroje v odborné literatuře je možné nalézt v disertační práci Ing. J. Hály [27].

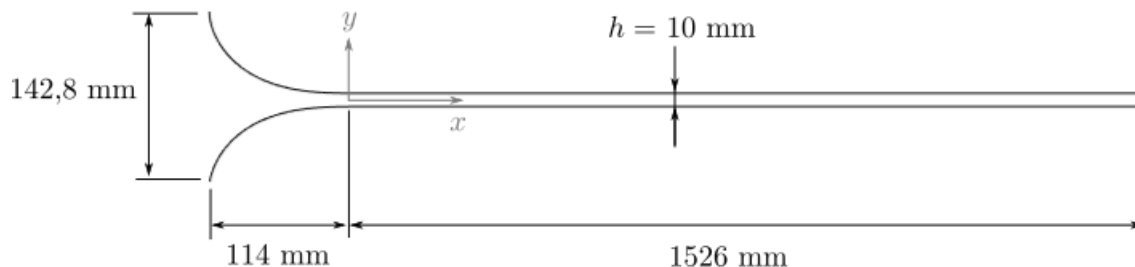
Popis přesné geometrie úlohy je nutné rozdělit na dvě části. První geometrie se týká kalibračního kanálu o výšce $h = 10$ mm a dostatečné délce takové, aby se mohlo proudění v kanálu plně vyvinout. Výška mezery umožňuje kalibraci měřících metod, které potom mohou být aplikovány v užších kanálech, kde je měření kvůli malým rozměrům náročnější a vyžaduje méně invazivní metody měření. Geometrie užších kanálů se mírně liší a je tedy popsána samostatně (výška $h = 0,5$ až 4 mm).

$h = 10$ mm

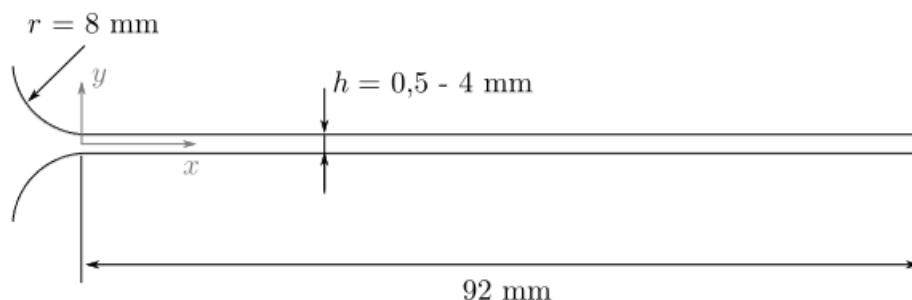
V případě kalibrační mezery o výšce $h = 10$ mm je kanál tvořen dvěma rovnoběžnými stěnami o šířce 200 mm a délce 1526 mm. Poměr stran průřezu $200/10 = 20$ je dostatečně velký na to, aby boční stěny neovlivňovaly proudění ve středu kanálu. Pro další popis a numerické simulace se můžeme omezit na svislý řez ve středu kanálu a úlohu tak řešit ve 2D. Schématické znázornění geometrie úlohy je uvedeno na obrázku 2.1. Stěny rozšířené vstupní oblasti jsou ve tvaru části lemniskáty a délka této vstupní oblasti je 114 mm.

$h = 0,5$ až 4 mm

V případě skupiny užších mezer je šířka kanálu 100 mm a délka rovné části 92 mm. Poměr stran průřezu kanálu se tedy pohybuje od 200 do 25. Geometrie svislého řezu ve středu kanálu je znázorněna na obrázku 2.2. Stěny rozšířené vstupní oblasti jsou v tomto případě ve tvaru čtvrtiny kružnice o poloměru 8 mm.



Obrázek 2.1: Schématické znázornění geometrie kalibračního kanálu výšky $h = 10$ mm, stěny vstupní oblasti jsou ve tvaru části lemniskáty



Obrázek 2.2: Schématické znázornění geometrie kanálu výšky $h = 0,5$ až 4 mm, stěny vstupní oblasti jsou ve tvaru čtvrtiny kružnice

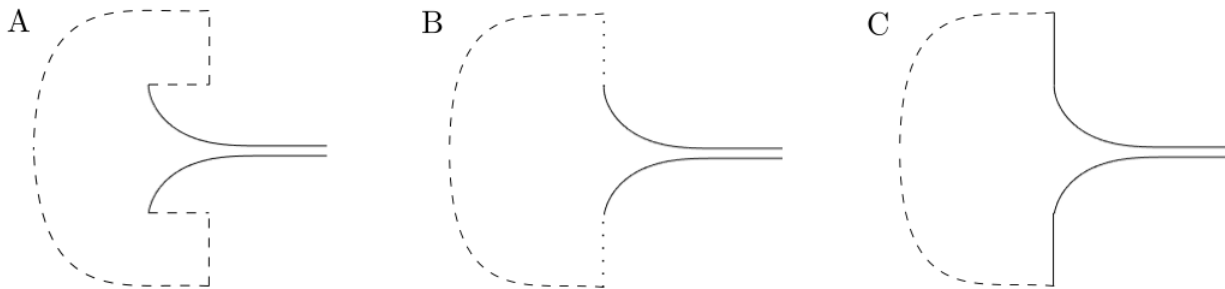
2.3 Numerická simulace proudění vzduchu v mezeře výšky $h = 10$ mm

Nejdříve provedeme numerické simulace proudění vzduchu v kanálu výšky 10 mm, který spadá do kategorie běžných kanálů. Stejně jako byl v experimentech použit pro kalibraci měřících metod pro úlohy tohoto typu, v případě numerického modelování jej díky porovnání s experimentálními daty použijeme pro validaci numerického řešiče a implementovaného modelu turbulence pro úlohy proudění v kanálu. V případě mezery výšky 10 mm bylo změřeno rozložení statického tlaku po délce kanálu, celkového tlaku podél osy kanálu a také smykové napětí na stěně. Experimenty byly provedeny pro tři tlakové spády $\pi = p_{in}/p_{out} = 0,3, 0,6$ a $0,8$, z nichž první je nadkritický, ostatní podkritické.

2.3.1 Testování tvaru vstupní oblasti

Vzduch je do mezery nasáván z prakticky nehybného prostředí v laboratoři. Nulovou vstupní rychlost ale nelze předepsat na začátku rozšířené vstupní oblasti, protože proudění se zde již začíná urychlovat. Z tohoto důvodu je vytvořena výpočtová oblast s velkou vstupní oblastí tak, aby simulace co nejvíce odpovídala podmínkám experimentu. V průběhu provádění předběžných simulací vyvstala otázka, jaký tvar této přidané vstupní oblasti zvolit. Proto byly otestovány tři typy vstupní oblasti uvedené na obrázku 2.3. V případě A navazuje na rozšířené stěny kanálu hranice výpočtové oblasti s okrajovou podmínkou typu vstup, vyznačeno čárkovaně. V případě B a C navazují na rozšířené stěny kanálu svislé stěny, v případě B jsou ne vazké a v případě C vazké, tedy s neskluzovou podmínkou.

Pro urychlení simulací zde není uvažována uklidňovací komora, výpočtová oblast je



Obrázek 2.3: Schématické znázornění tří testovaných tvarů vstupní oblasti; vazká stěna - plnou čarou, nevazká stěna - tečkovaně, vstup - čárkovaně

ukončena na konci rovného kanálu a je zde předepsán statický tlak známý v tomto místě z experimentu. Tlakový poměr je $\pi = 0,3$ a simulace jsou provedeny v turbulentním režimu. Přesné nastavení parametrů úlohy a okrajových podmínek je stejné jako u simulací provedených na úplné výpočtové oblasti, jak bude uvedeno později. Zde se jedná pouze o stanovení vhodného tvaru vstupní oblasti. Poznamenejme, že výpočetní síť je u obtékaných stěn dostatečně zahuštěna tak, aby pro první uzel u stěny byla splněna podmínka $y^+ \leq 1$.

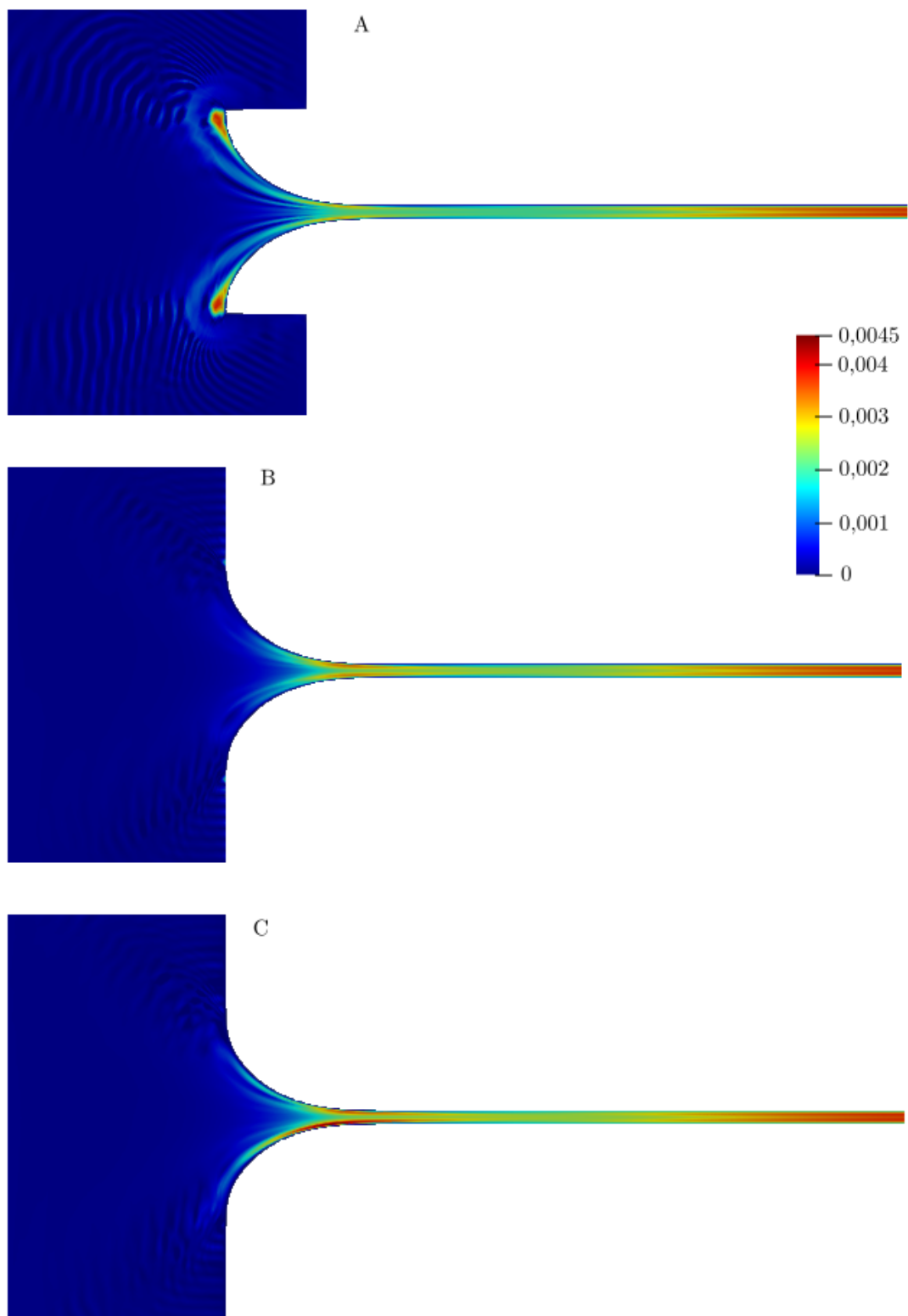
Porovnáním výsledků uvedených tří simulací docházíme k závěru, že vliv tvaru přidané vstupní oblasti na proudění v kanálu je při uvedeném nastavení zanedbatelný. Průběh všech veličin proudového pole je po celé délce kanálu prakticky totožný, mírně se liší pouze průběh turbulentních veličin v první třetině osy kanálu, vliv na proudové pole v kanálu je ale naprosto zanedbatelný. Největší rozdíly mezi jednotlivými případy můžeme vidět v rozložení turbulentní viskozity ve vstupní oblasti na obrázku 2.4. V případě A dochází na začátku pevných stěn k prudkému nárůstu turbulentní viskozity vlivem náhlého náběhu tekutiny na stěnu a jejího zbrždění. Od vstupu do rovné části kanálu se pak ale turbulentní viskozita dále vyvíjí prakticky stejně jako v ostatních případech. V případě B a C se rozložení příliš neliší, díky připojeným svislým stěnám jsou změny ve vstupní oblasti plynulejší.

V rozšířené vstupní oblasti na obrázku 2.4 můžeme pozorovat oscilace nízkých hodnot μ_t , především u oblasti typu A. Objevují se i mírně záporné hodnoty. Oscilace jsou způsobeny výpočetní sítí v kombinaci s nespojitou Galerkinovou metodou a podobné jevy lze pozorovat i u jiných simulací. Na průběh veličin dále po proudu nemají prakticky žádný vliv.

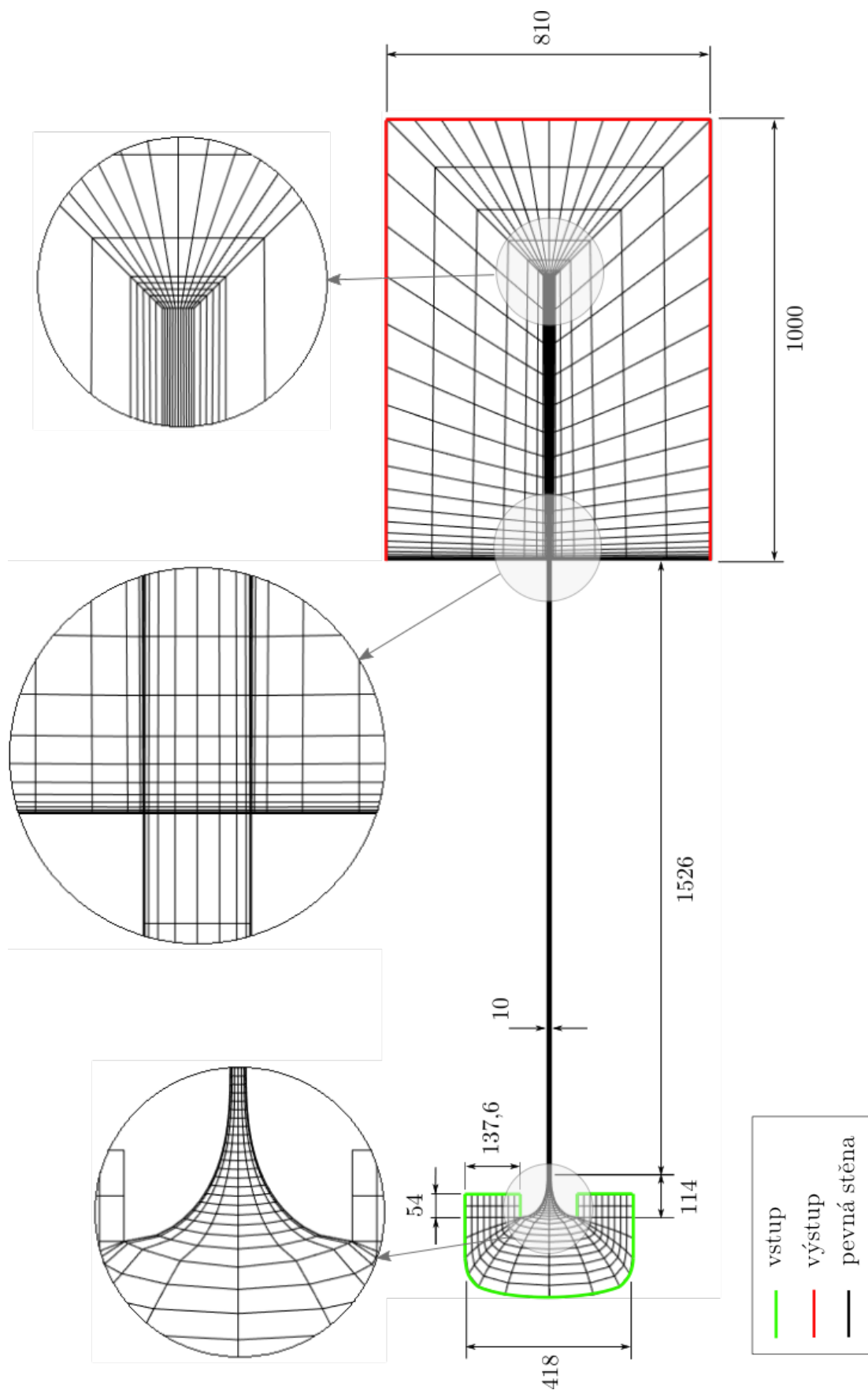
Na základě uvedené analýzy a zjištěných minimálních rozdílů mezi jednotlivými případy zvolíme pro další simulace na úplné výpočtové oblasti tvar vstupní oblasti typu A, který nejvíce odpovídá uspořádání experimentu.

2.3.2 Parametry numerické simulace

Simulaci proudění vzduchu v kanálu o výšce $h = 10$ mm provedeme na následující výpočtové oblasti. Přidaná vstupní oblast je typu A uvedeného v předchozím odstavci, za rovným kanálem následuje obdélníková oblast představující ukliďňovací komoru. Její rozměry jsou voleny dostatečně velké tak, aby okrajové podmínky na hranicích ukliďňovací komory neovlivňovaly úplav vznikající za kanálem. Geometrie výpočtové oblasti a typ okrajových podmínek jsou znázorněny společně s po částech strukturovanou čtyřúhelníkovou výpočetní sítí na obrázku 2.5. Síť je standardně zahuštěna u obtékaných stěn a také v úplavu za kanálem, kde vznikají při nadkritickém tlakovém poměru rázové vlny a jemná síť je zde proto nutností. Zobrazení sítě je pro větší přehlednost pouze orientační, ve skutečnosti je síť značně jemnější, tvořená 52 500 kontrolními elementy. Vzdálenost prvního uzlu sítě od stěny je v rovné části



Obrázek 2.4: Porovnání rozložení turbulentní viskozity μ_t ve vstupní části výpočtové oblasti v závislosti na tvaru oblasti a typu okrajových podmínek, výřez oblasti



Obrázek 2.5: Geometrie výpočtové oblasti pro mezeru výšky $h = 10$ mm, schématické znázornění výpočetní sítě s vyznačenými detaily a okrajové podmínky; všechny rozměry jsou uvedeny v milimetrech

kanálu $y_0 = 3 \cdot 10^{-6}$ m.

Médium je suchý vzduch uvažovaný jako ideální plyn, s ohledem na podmínky experimentu specifikovaný následujícími hodnotami. Termodynamická teplota je $T = 300$ K, hustota $\rho = 1,177 \text{ kg m}^{-3}$, dynamická viskozita $\mu = 1,846 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, měrná tepelná kapacita při konstantním objemu $c_v = 717,8 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, Poissonova adiabatická konstanta $\kappa = 1,4$ a tepelná vodivost $k = 2,624 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Orientační Reynoldsovo číslo odhadované pomocí předběžných simulací a experimentálních dat určíme z uvedené hustoty a viskozity, jako referenční délku použijeme výšku mezery a referenční střední rychlost proudu bude 200 m s^{-1} (v případě nadkritického tlakového spádu dojde na konci kanálu k urychlení proudění na rychlost zvuku). Dostaneme tedy hodnotu $Re \approx 1,3 \cdot 10^5$. Vzhledem k tomu, že se jedná o běžný kanál a Reynoldsovo číslo je značně vysoké, předpokládáme turbulentní režim proudění. Simulaci tedy provedeme s modelem turbulence k - ω podle Wilcoxe (2006) se všemi úpravami uvedenými v první kapitole.

Okrajové podmínky

Na hranicích výpočtové oblasti jsou předepsány následující okrajové podmínky pro střední hodnoty veličin proudového pole.

Vstup

- stagnační tlak $\bar{p} = 101325$ Pa a stagnační hustota $\bar{\rho} = 1,177 \text{ kg m}^{-3}$,
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici,
- napětí ve směru normály k hranici $(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$,
- turbulentní veličiny $k = 0,23 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $\omega = 1454 \text{ s}^{-1}$.

Výstup

- statický tlak podle požadovaného tlakového poměru $\pi = 0,3, 0,6$ a $0,8$, tedy $\bar{p} = 101325 \pi$
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici,
- napětí ve směru normály k hranici $(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$,
- ostatní hodnoty včetně turbulentních veličin extrapolujeme z proudového pole.

Vazká stěna

- složky rychlosti $\tilde{v}_1 = 0 \text{ m s}^{-1}$, $\tilde{v}_2 = 0 \text{ m s}^{-1}$,
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici (adiabatická stěna),
- konstantní hodnota turbulentní energie $k = 0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$,
- konstantní hodnota specifické rychlosti disipace $\omega = 10^{10} \text{ s}^{-1}$.

Vstupní hodnota turbulentní energie k je určena pomocí vztahu

$$k = \frac{3}{2} T u^2 \tilde{v}_1^2,$$

kde Tu je intenzita turbulence na vstupu do rozšířené části kanálu, která byla orientačně experimentálně stanovena na hodnotu $Tu = 1,3\%$, a \tilde{v}_1 je rychlost proudu ve stejném místě odhadnutá z předběžných simulací na hodnotu $\tilde{v}_1 = 30 \text{ m s}^{-1}$. Vstupní hodnota ω vychází ze zvoleného poměru vazkostí $\mu_t/\mu = 10$. Hodnota specifické rychlosti disipace ω na stěně je určena podle vztahu (1.46) stejným způsobem, jako u verifikační simulace obtékání desky.

Počáteční podmínky

Pro lepší stabilitu numerické simulace v počátku jejího běhu je v rovné části kanálu předepsán statický tlak rovnoměrně klesající z hodnoty vstupního tlaku, který je předepsán v celé vstupní oblasti, až do hodnoty výstupního tlaku, který je zadán v celé uklidňovací komoře. Počáteční hustota je konstantní a rychlost nulová v celé výpočetní oblasti.

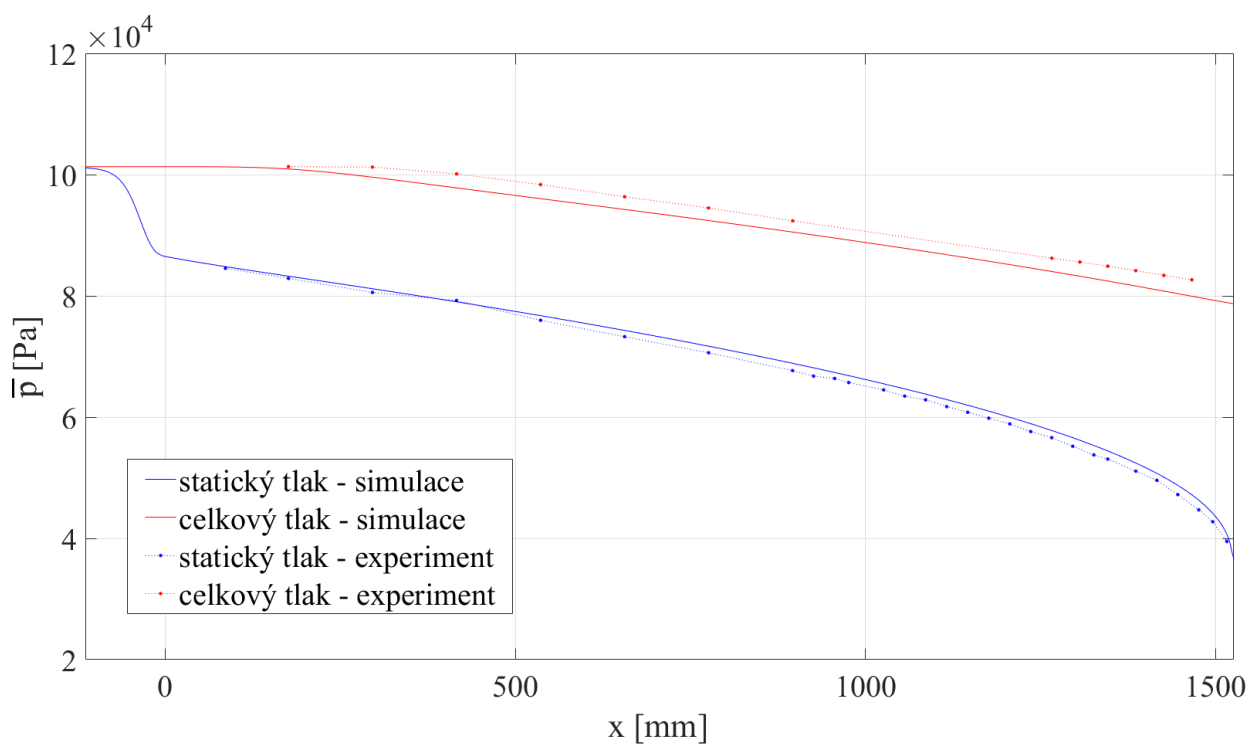
2.3.3 Výsledky simulace a porovnání s experimentem

Jak již bylo zmíněno, experimenty provedené na ÚT AV ČR poskytují průběh statického tlaku a celkového tlaku v ose rovné části kanálu, $x \in [0, 1526]$ mm, a smykové napětí na jeho stěně. Na obrázcích 2.6, 2.7 a 2.8 jsou postupně uvedeny odpovídající průběhy střední hodnoty statického a celkového tlaku pro tlakové poměry $\pi = 0,3, 0,6$ a $0,8$, získané z realizovaných numerických simulací, v porovnání s experimentálními daty. Ve všech třech případech můžeme konstatovat velmi dobrou shodu statického tlaku, celkový tlak v ose je numerickou simulací mírně podhodnocený. Poznamenejme, že celkový tlak je z výsledků simulace určen pomocí vztahu

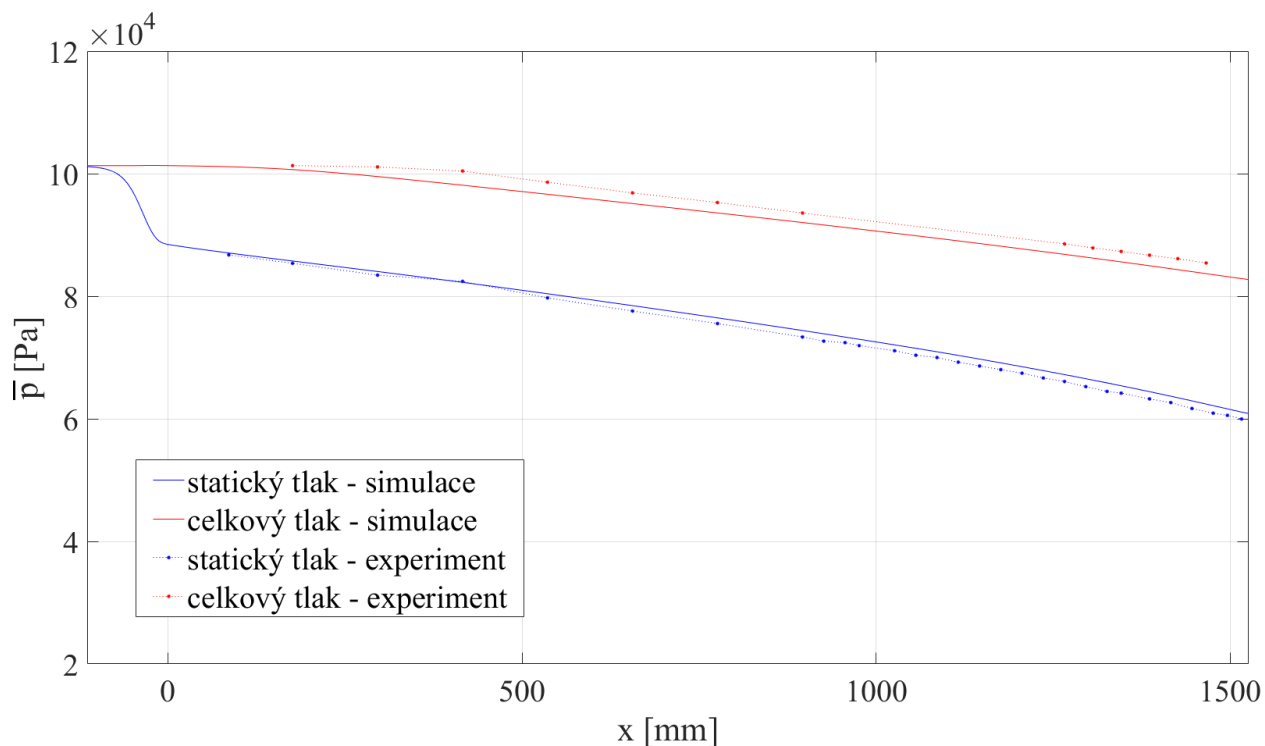
$$\bar{p}_{celk} = \bar{p}_{stat} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (2.2)$$

kde lokální Machovo číslo Ma je vypočítáno jako poměr celkové střední hodnoty rychlosti proudění v daném místě a dopočítané lokální střední hodnoty rychlosti zvuku

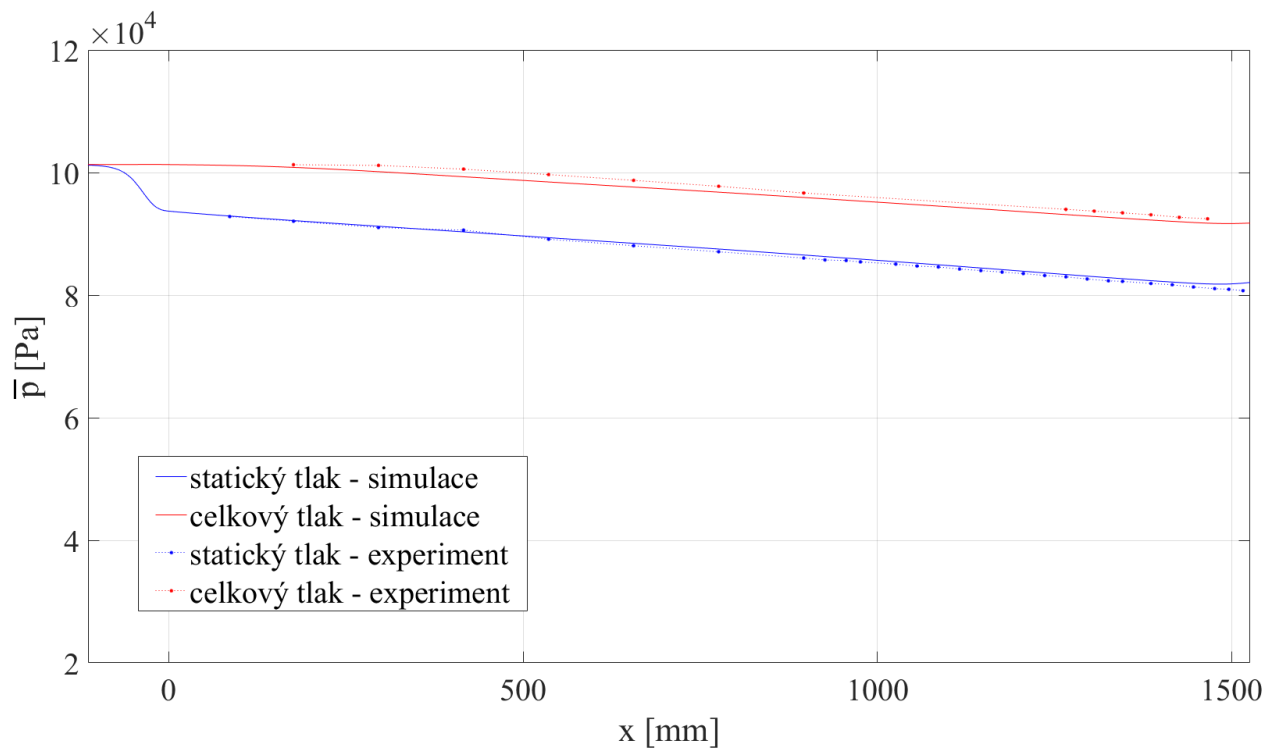
$$\bar{a} = \sqrt{\kappa \frac{\bar{p}_{stat}}{\bar{\rho}}}.$$



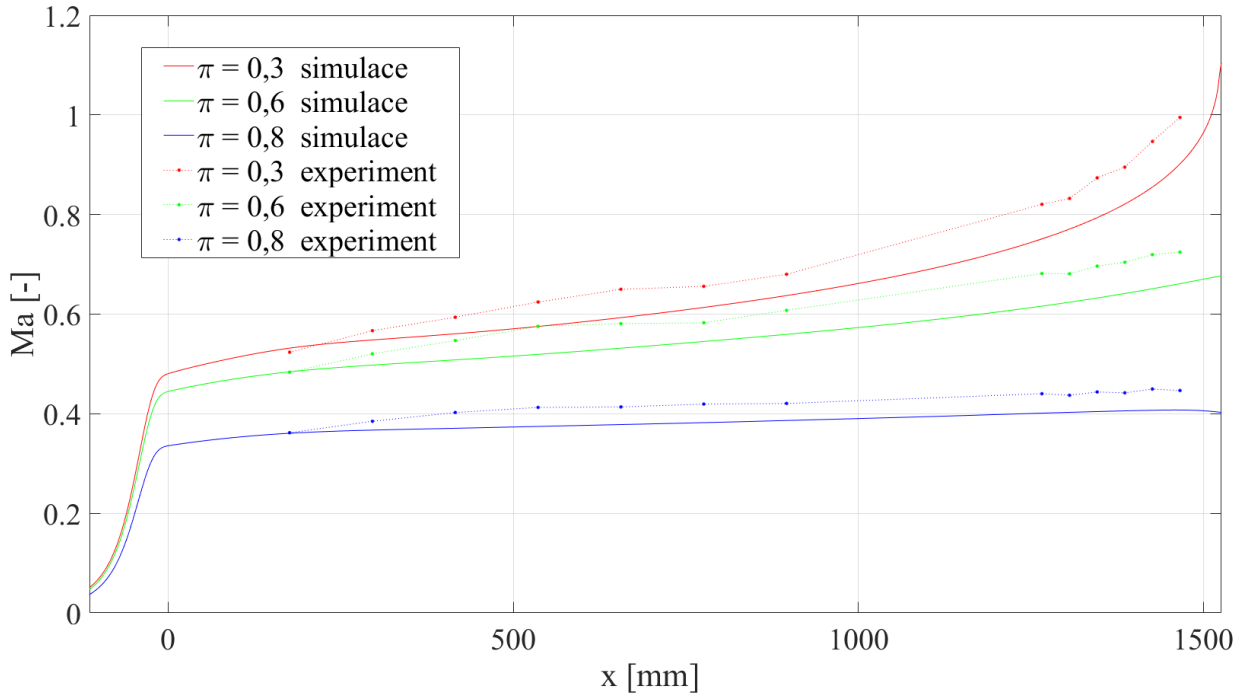
Obrázek 2.6: Průběh střední hodnoty statického a celkového tlaku v ose kanálu pro tlakový poměr $\pi = 0,3$; simulace (plnou čarou), experiment (body)



Obrázek 2.7: Průběh střední hodnoty statického a celkového tlaku v ose kanálu pro tlakový poměr $\pi = 0,6$; simulace (plnou čarou), experiment (body)



Obrázek 2.8: Průběh střední hodnoty statického a celkového tlaku v ose kanálu pro tlakový poměr $\pi = 0,8$; simulace (plnou čarou), experiment (body)



Obrázek 2.9: Průběh střední hodnoty Machova čísla v ose kanálu pro všechny tři tlakové poměry; simulace (plnou čarou), experiment (body)

Vyhodnocení průběhu Machova čísla v ose rovné části kanálu je pro numerickou simulaci i experiment uvedeno na obrázku 2.9. Vyhodnocení Machova čísla ze změřeného statického a celkového tlaku je provedeno inverzním vztahem k (2.2). Rozdíly pozorované v průběhu celkového tlaku se dle očekávání odrážejí i v porovnání Machova čísla, které je v simulaci opět celkově nižší než v experimentu.

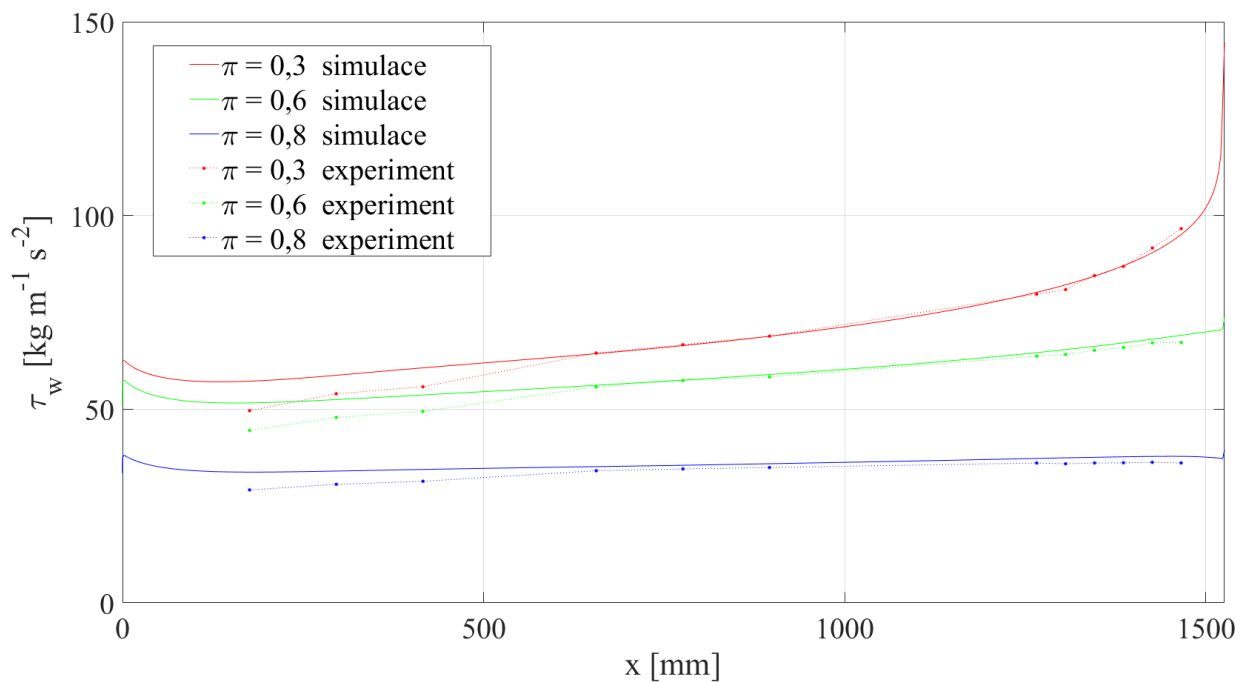
Důležitou veličinou poskytnutou provedenými experimenty je smykové napětí na stěně τ_w . Z výsledků numerické simulace ho určíme pomocí dynamické viskozity a derivace složky rychlosti \tilde{v}_1 podle y na stěně ze vztahu

$$\tau_w = \mu \left. \frac{d\tilde{v}_1}{dy} \right|_{wall}.$$

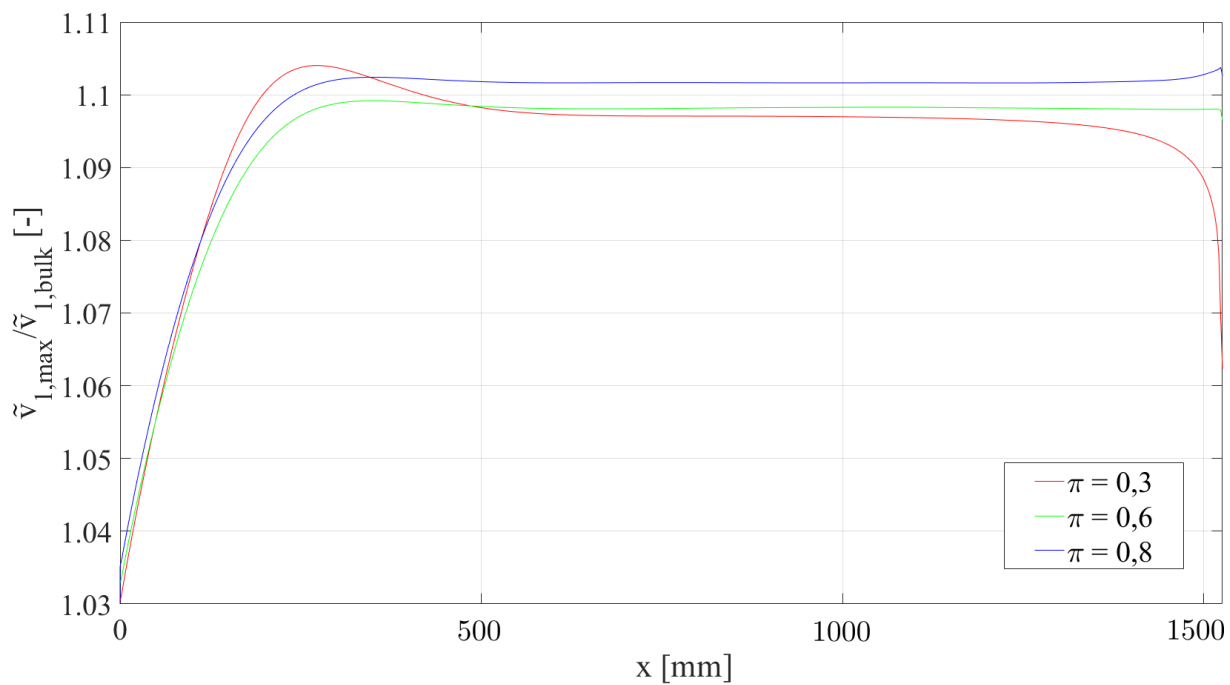
Porovnání se změřeným průběhem smykového napětí pro všechny tři tlakové poměry je uvedeno na obrázku 2.10. Shoda s experimentálními daty je kromě prvních tří odběrných míst na začátku kanálu výborná. Odchylka na začátku kanálu je pravděpodobně způsobena nevyvinutým charakterem proudění v této oblasti, kdy použitá měřicí metoda nemusí poskytovat zcela správné hodnoty. Určíme-li vstupní délku pro tento kanál podle vztahu (2.1), dostaneme pro všechny tři tlakové spády hodnoty v rozmezí zhruba $L_e = 0,4 - 0,6$ m, uvažováno od začátku rovné části kanálu. To odpovídá právě oblasti, kde se hodnoty τ_w liší. Vstupní délku můžeme vyhodnotit i podle změn profilu rychlosti po délce kanálu. Na obrázku 2.11 je vykreslen poměr maximální hodnoty rychlosti v ose kanálu $\tilde{v}_{1,max}$ a průměrné rychlosti ve svislém řezu kanálem

$$\tilde{v}_{1,bulk} = \frac{1}{h} \int_0^h \tilde{v}_1(y) dy.$$

Přesná hodnota poměru $\tilde{v}_{1,max}/\tilde{v}_{1,bulk}$ závisí na Reynoldsově čísle a nelze ji pro kanály s nekruhým průřezem přesně odhadnout [53]. Nicméně rychlostní profil považujeme za vyvinutý,



Obrázek 2.10: Průběh střední hodnoty smykového napětí na stěně kanálu pro všechny tři tlakové poměry; simulace (plnou čarou), experiment (body)



Obrázek 2.11: Poměr maximální a průměrné rychlosti \tilde{v}_1 v rovné části kanálu pro určení vstupní délky, pro všechny tři tlakové poměry

pokud se uvedený poměr již dále nemění. Z grafu na obrázku 2.11 je vidět, že k ustálení tvaru profilu \tilde{v}_1 dojde v rozmezí $L_e = 0,55 - 0,65$ m, jak je pro jednotlivé tlakové poměry uvedeno v tabulce 2.1. Tyto hodnoty v zásadě potvrzují předchozí odhad vstupní délky.

π	0,3	0,6	0,8
L_e [m]	0,65	0,60	0,55

Tabulka 2.1: Vstupní délka v kalibračním kanálu odhadovaná z vývoje rychlostního profilu, pro jednotlivé tlakové poměry

Tlakový poměr $\pi = 0,3$ je na rozdíl od dalších dvou nadkritický. Kritický tlakový poměr při proudění vzduchu ($\kappa = 1,4$) v kanálu je dán vztahem

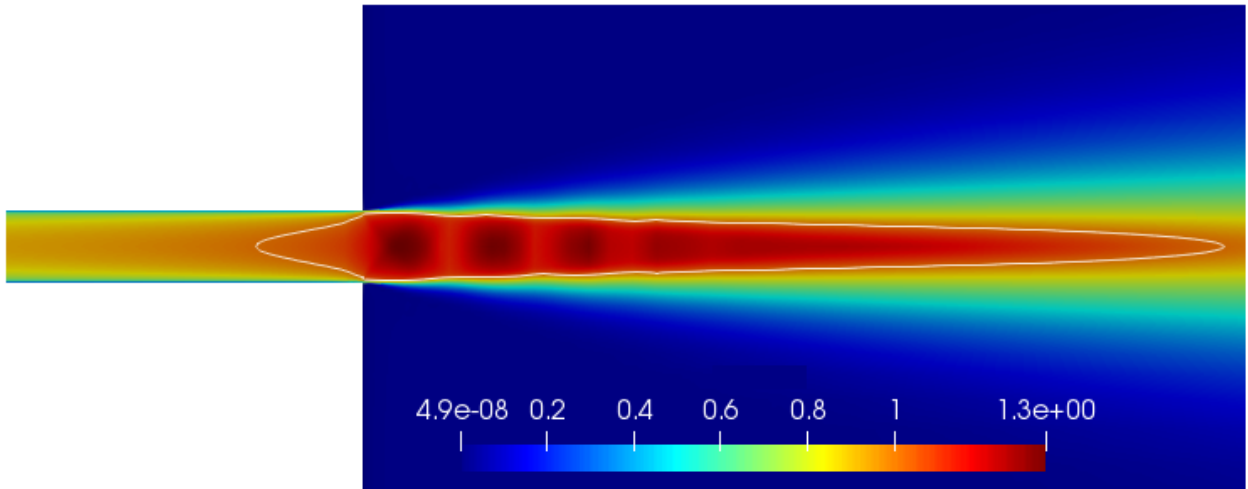
$$\pi_{krit} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \doteq 0,528.$$

Při nadkritickém tlakovém poměru 0,3 dosahuje rychlost vzduchu na konci kanálu rychlosti zvuku, tedy $Ma = 1$, jak je vidět z průběhu Machova čísla na obrázku 2.9, a dochází zde k aerodynamickému ucpání. Vzduch dále pokračuje nadzvukovou rychlostí a ve výtoku do uklidňovací komory expanduje. Tlak v tomto rozpínajícím se vzduchu klesá pod úroveň okolního tlaku v komoře a po stranách proudu vznikají rázové vlny. Na konci tohoto úseku dojde k prudkému poklesu rychlosti a nárůstu tlaku. Tento jev se několikrát opakuje, postupně slábne, až dojde k vymizení rázových vln a celkovému uklidnění v komoře. Rozložení Machova čísla v oblasti výtoku do volného prostoru, respektive uklidňovací komory, je zobrazeno na obrázku 2.12. Na obrázku 2.13 je pak pro srovnání uvedeno rozložení Machova čísla pro podkritický tlakový poměr $\pi = 0,6$, kdy dochází pouze k volnému výtoku tekutiny bez rázových vln a jejímu postupnému zpomalení. Zdůrazněme ale skutečnost, že se v obou případech jedná o středované řešení. Reálné situaci tedy bude odpovídat pouze určitý, spíše kratší, úsek za kanálem, dále se proud začne rozpadat a bude se vyvíjet nestacionárně a vůči ose úplavu nesymetricky.

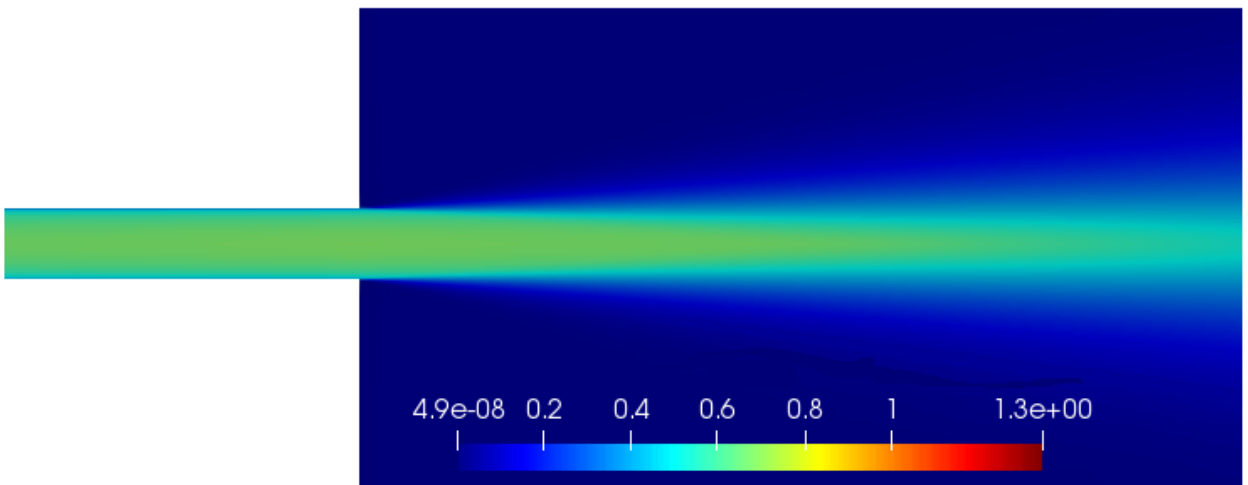
Z výsledků provedených simulací můžeme nyní vyhodnotit skutečné Reynoldsovo číslo, dříve pouze odhadované. V tabulce 2.2 je uvedeno minimální lokální Reynoldsovo číslo v ose kanálu včetně rozšířené vstupní části a dále pouze v rovné části. Jako referenční délku uvažujeme výšku kanálu a referenční rychlost je průměrná rychlost v každém konkrétním svislém řezu kanálu. Z uvedených hodnot usuzujeme, že předpoklad plně turbulentního režimu proudění v celé oblasti je oprávněný. Dále je v tabulce 2.2 uvedena maximální hodnota bezrozměrové vzdálenosti y^+ (1.49) prvního uzlu sítě od stěny v rovné části mezery. V případě

π	Re	Re v rovné části	$y^+ [-]$
0,3	11 000	93 000	1,20
0,6	10 000	87 000	1,18
0,8	8 000	68 000	1,02

Tabulka 2.2: Minimální lokální Reynoldsovo číslo v ose kanálu včetně vstupní oblasti, v ose rovné části kanálu a maximální bezrozměrová vzdálenost prvního uzlu sítě od stěny y^+ pro jednotlivé tlakové poměry



Obrázek 2.12: Rozložení střední hodnoty Machova čísla v oblasti výtoku do volného prostoru pro nadkritický tlakový poměr $\pi = 0,3$; bíle zvýrazněná izočára odpovídá $Ma = 1$



Obrázek 2.13: Rozložení střední hodnoty Machova čísla v oblasti výtoku do volného prostoru pro podkritický tlakový poměr $\pi = 0,6$

dvou větších tlakových spádů není přesně dodržena podmínka $y^+ \leq 1$, ale díky 2. řádu přesnosti nespojitě Galerkinovy metody, použité k řešení úlohy, je možné tyto hodnoty bez obav akceptovat a výpočetní síť považovat u stěny za dostatečně kvalitní pro provedení turbulentních simulací.

Poznamenejme, že stabilita simulací, která je při diskretizaci dvourovnicových modelů turbulence pomocí nespojitě Galerkinovy metody konečných prvků značně problematická, se u této úlohy chová prakticky stejně, jako bylo uvedeno u verifikační úlohy obtékání rovné desky v první kapitole.

Z verifikační simulace v první kapitole vyplynuly i některé závěry týkající se predikce turbulentní viskozity a tloušťky turbulentní mezní vrstvy pomocí implementovaného modelu turbulence. V úloze obtékání desky docházelo k nadhodnocení tloušťky mezní vrstvy o 29% a zároveň i k mírnému zvýšení maxima turbulentní viskozity v mezní vrstvě, ovšem s malým dopadem na výpočet rychlosti či smykového napětí na stěně. Podíváme-li se na předložené výsledky simulace proudění vzduchu v úzkém kanálu z pohledu těchto skutečností, nabízí se otázka, zda právě předčasný nárůst mezní vrstvy na stěnách na začátku kanálu a predikce nižší rychlosti především ve vnější části mezní vrstvy nedává kratší vstupní délku a nezpůsobuje tak odchylku od experimentu v průběhu celkového tlaku.

2.4 Numerická simulace proudění vzduchu v mezerách výšky $h = 0,5$ až 4 mm

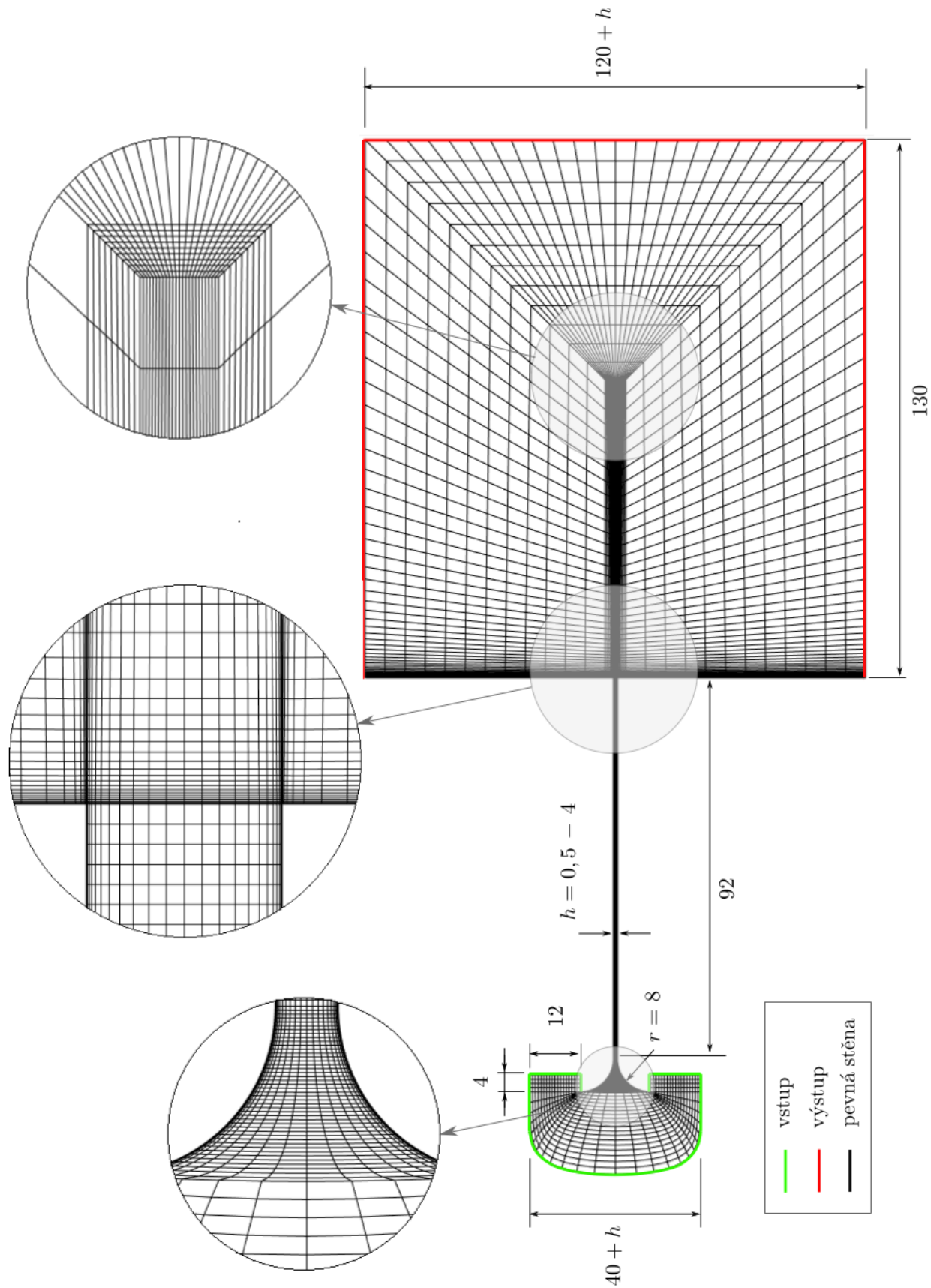
Podle zavedené terminologie v úvodu kapitoly se zkoumaná skupina mezer výšky 0,5 až 4 mm pohybuje v oblasti minikanálů (do 3 mm) a velmi malých běžných kanálů. Kvůli velmi malým rozměrům kanálů je zde změřeno pouze rozložení statického tlaku podél osy kanálu, a to pro několik nadkritických i podkritických tlakových spádů. V případě mezery výšky 2 mm byla provedena i optická měření a pořízeny tak interferogramy celé oblasti. Zabývat se budeme především nadkritickými tlakovými poměry $\pi = p_{in}/p_{out} = 0,189$ a 0,308.

2.4.1 Parametry numerické simulace

Simulaci proudění vzduchu provedeme v kanálech výšky $h = 0,5, 2, 3$ a 4 mm, a to na následující výpočtové oblasti. Tvar přidané vstupní oblasti bude stejně jako v předchozí úloze typu A a uklidňovací komora dostatečně velká vzhledem k rozměrům mezery. Geometrie výpočtové oblasti a typ okrajových podmínek jsou znázorněny společně s po částech strukturovanou čtyřúhelníkovou výpočetní sítí na obrázku 2.14. Síť je standardně zahuštěna u obtékaných stěn a v úplavu za kanálem. Výpočetní síť je tvořena 12 900 kontrolními elementy, vzdálenost prvního uzlu sítě od stěny je v rovné části kanálu $y_0 = 6,5 \cdot 10^{-6}$ m.

Fyzikální hodnoty proudícího vzduchu jsou oproti předchozí úloze mírně posunuty. Termodynamická teplota je $T = 292,15$ K, hustota $\rho = 1,209$ kg m⁻³, dynamická viskozita $\mu = 1,879 \cdot 10^{-5}$ kg m⁻¹s⁻¹, měrná tepelná kapacita při konstantním objemu $c_v = 718$ J kg⁻¹K⁻¹, Poissonova adiabatická konstanta $\kappa = 1,4$ a tepelná vodivost $k = 2,561 \cdot 10^{-2}$ W m⁻¹K⁻¹.

Orientační Reynoldsovo číslo určíme opět z uvedené hustoty a viskozity, referenční délky v podobě výšky kanálu a referenční rychlosti 200 m s⁻¹, neboť se zajímáme o nadkritické tlakové spády. Pro jednotlivé výšky kanálu dostaneme přibližně hodnoty uvedené v tabulce 2.3. Přestože se kromě nejužší mezery jedná o hodnotu běžně považovanou za nadkritickou, je při odhadu režimu proudění potřeba značné opatrnosti. Simulace proto provedeme pro všechny kanály laminárně i turbulentně a díky porovnání s experimentálně získaným



Obrázek 2.14: Geometrie výpočtové oblasti pro mezery výšky $h = 0,5$ až 4 mm, výpočetní síť s vyznačenými detaily a okrajové podmínky; všechny rozměry jsou uvedeny v milimetrech

přuběhem statického tlaku a interferogramy v případě 2 mm mezery se pokusíme učinit některé závěry o režimu proudění v těchto úzkých mezerách.

h [mm]	0,5	2	3	4
Re	6 400	25 700	38 600	51 500

Tabulka 2.3: Předběžný odhad Reynoldsova čísla v mezerách výšky h pro nadkritické tlakové spády

Okrajové podmínky

Na hranicích výpočtové oblasti jsou předepsány následující okrajové podmínky pro střední hodnoty veličin proudového pole.

Vstup

- stagnační tlak $\bar{p} = 101325$ Pa a stagnační hustota $\bar{\rho} = 1,209$ kg m⁻³,
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici,
- napětí ve směru normály k hranici $(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$,
- turbulentní veličiny $k = 0,0337$ m² s⁻¹, $\omega = 21\,680$ s⁻¹.

Výstup

- statický tlak podle požadovaného tlakového poměru $\pi = 0,189$ a $0,308$, tedy $\bar{p} = 101325 \pi$
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici,
- napětí ve směru normály k hranici $(\tilde{\sigma}_{ij} + \tau_{ij}) n_j = 0$, $i = 1, 2$,
- ostatní hodnoty včetně turbulentních veličin extrapolujeme z proudového pole.

Vazká stěna

- složky rychlosti $\tilde{v}_1 = 0$ m s⁻¹, $\tilde{v}_2 = 0$ m s⁻¹,
- nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k hranici (adiabatická stěna),
- konstantní hodnota turbulentní energie $k = 0$ m² s⁻²,
- konstantní hodnota specifické rychlosti disipace $\omega = 3 \cdot 10^9$ s⁻¹.

Vstupní hodnota turbulentní energie k je určena stejně jako u předchozí úlohy, intenzita turbulence v tomto případě není známá a stanovíme ji proto na hodnotu $Tu = 0,5\%$. Rychlost proudu na vstupu do rozšířené části kanálu odhadnutá z předběžných simulací je $\tilde{v}_1 = 30$ m s⁻¹. Vstupní hodnota ω vychází ze zvoleného poměru vazkostí $\mu_t/\mu = 0,1$. Přesná hodnota specifické rychlosti disipace ω na stěně určená podle vztahu (1.46) je z důvodu použití 2. řádu DGFEM opět zvýšena na uvedenou hodnotu.

Počáteční podmínky

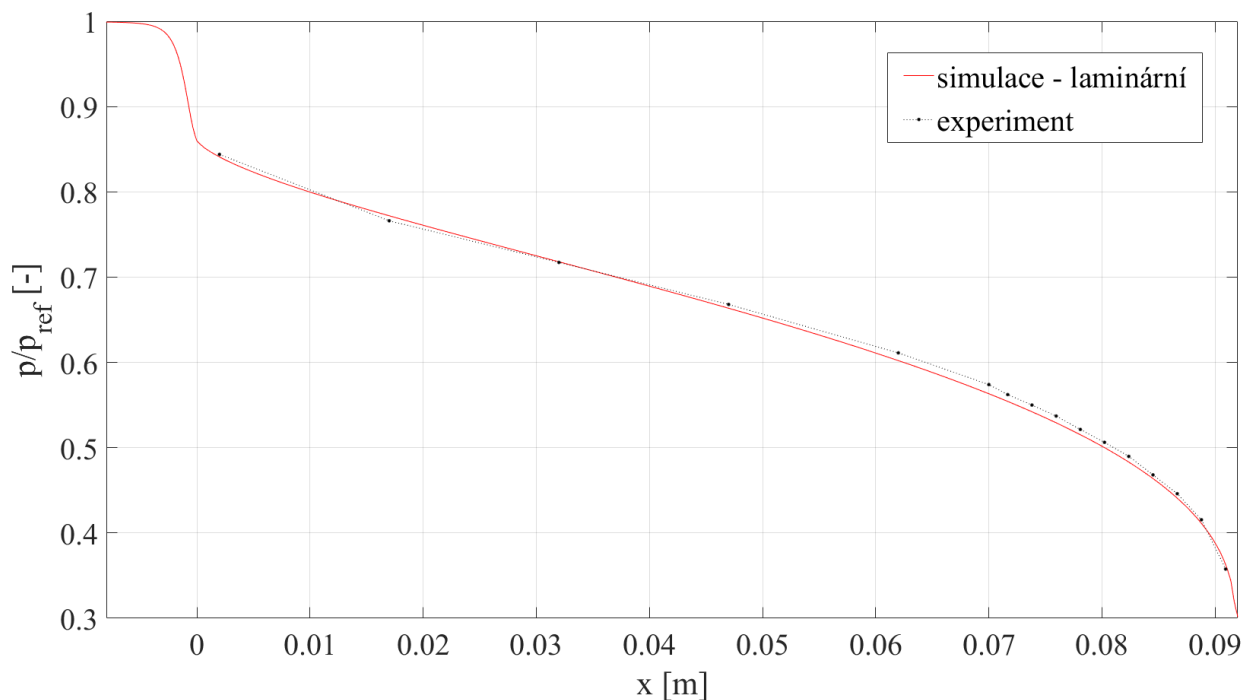
Pro lepší stabilitu numerické simulace v počátku jejího běhu je v rovné části kanálu předepsán statický tlak rovnoměrně klesající z hodnoty vstupního tlaku, který je předepsán v celé vstupní oblasti, až do hodnoty výstupního tlaku, který je zadán v celé uklidňovací komoře. Počáteční hustota je konstantní a rychlost nulová v celé výpočetní oblasti.

2.4.2 Výsledky simulace a porovnání s experimentem

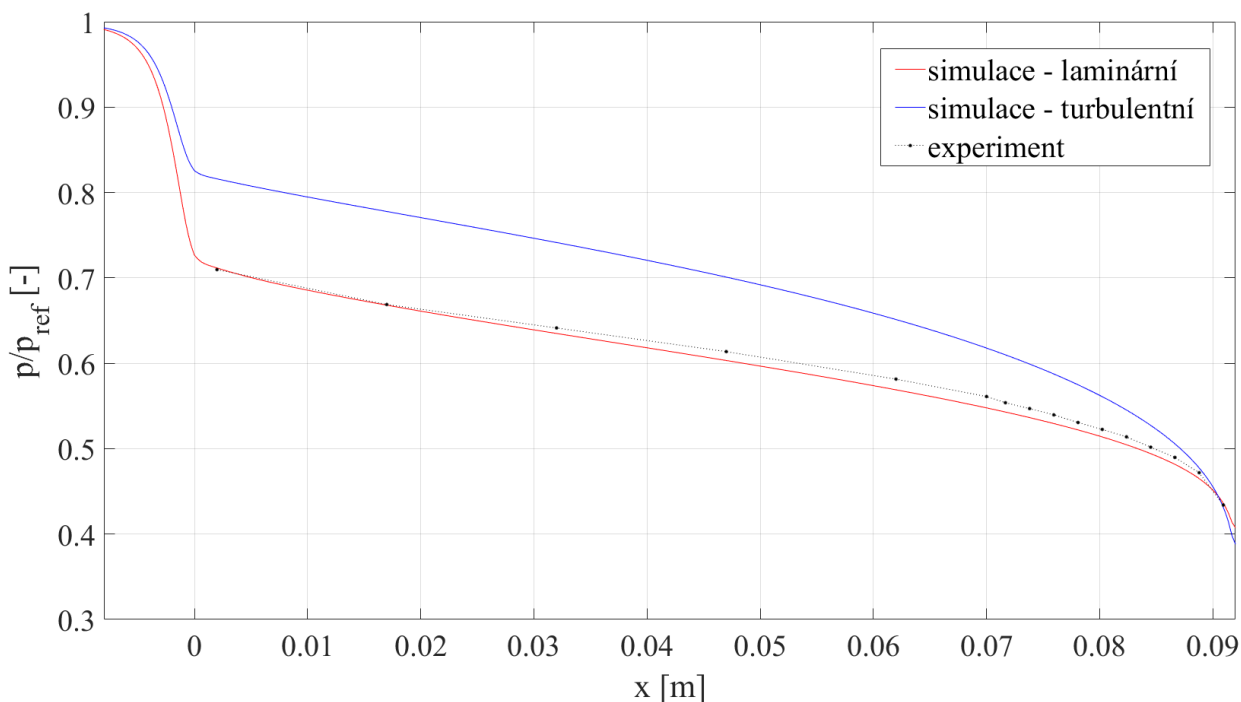
Numerické simulace proudění vzduchu ve čtyřech zkoumaných kanálech jsou provedeny pro nadkritický tlakový poměr $\pi = 0,189$. Vzhledem k nejistotě, která i přes relativně vysoká odhadovaná Reynoldsova čísla (viz tabulku 2.3) panuje ohledně režimu proudění v těchto kanálech, realizujeme vždy laminární a turbulentní výpočet. Výjimkou je nejužší mezera o výšce 0,5 mm, kde postačí simulace laminární.

Na obrázcích 2.15, 2.16, 2.17 a 2.18 je uveden průběh střední hodnoty statického tlaku postupně pro kanály výšky 0,5, 2, 3 a 4 mm. Kromě nejužší mezery je vždy porovnán výsledek simulace laminární, simulace s modelem turbulence a experimentální data. Tlak je normován referenčním tlakem zvoleným jako stagnační tlak na vstupu. V případě mini-kanálů výšky 0,5 mm a 2 mm vidíme jednoznačnou shodu laminárních a experimentálních hodnot. V případě kanálů výšky 3 mm a 4 mm už je vidět vzdalování experimentálních hodnot statického tlaku od výsledků laminární simulace, na konci kanálu pak dochází ke shodě s výsledky turbulentní simulace.

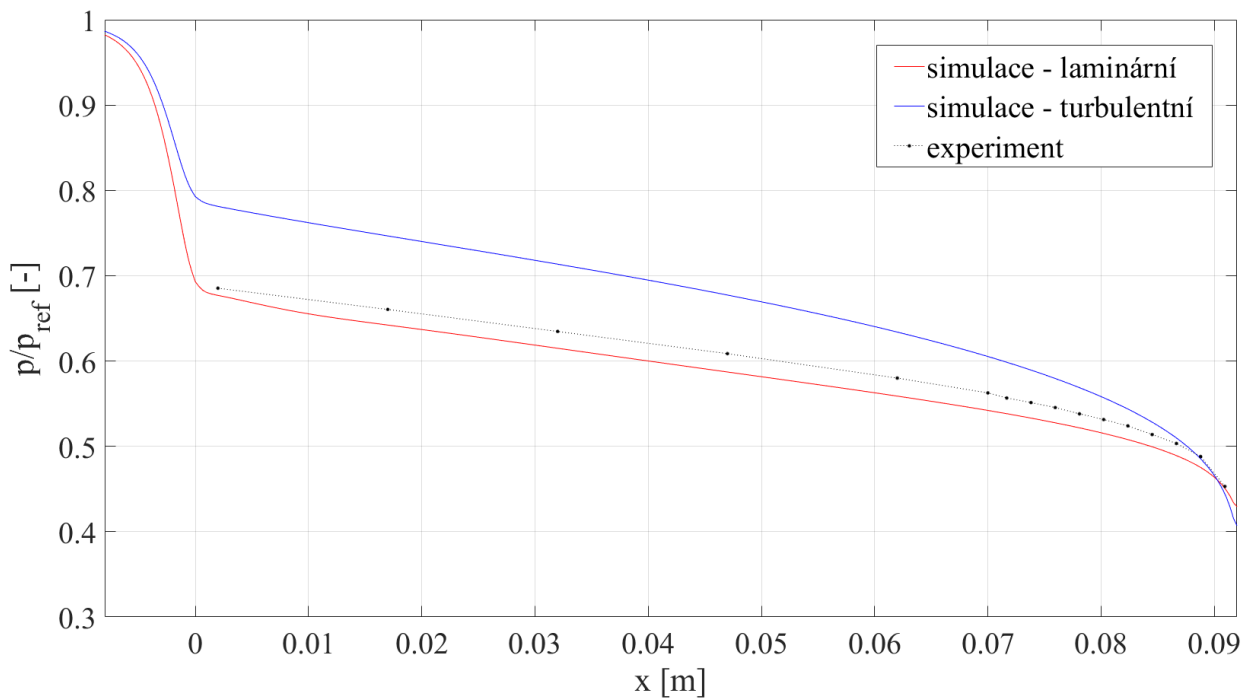
Určeme nyní opět skutečné hodnoty lokálního Reynoldsova čísla v uvedených kanálech. Vypočítáme je na základě výšky kanálu a průměrné rychlosti v každém svislém řezu $x = \text{konst.}$ Minimální lokální Reynoldsovo číslo v rovné části kanálu je uvedeno v tabulce 2.4, společně s maximální bezrozměrovou vzdáleností prvního uzlu sítě od stěny y^+ v případě turbulentní



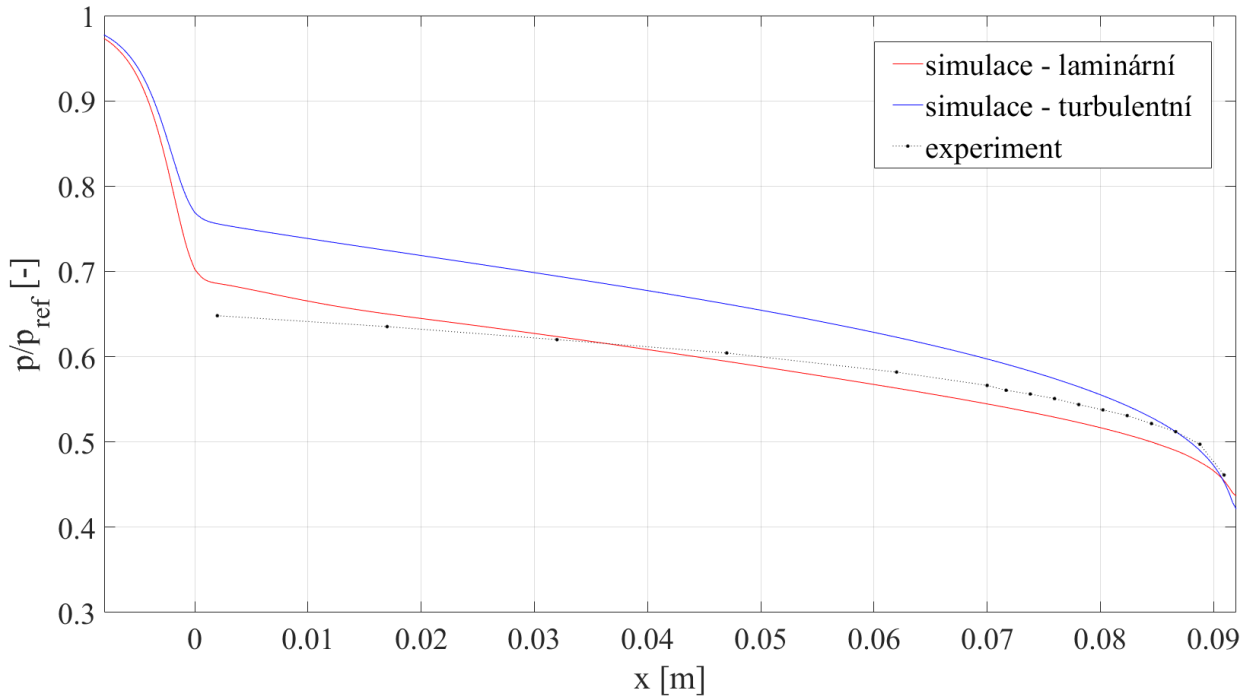
Obrázek 2.15: Průběh střední hodnoty normovaného statického tlaku v ose kanálu $h = 0,5$ mm pro tlakový poměr $\pi = 0,189$; simulace laminární (červeně), experiment (černé body)



Obrázek 2.16: Průběh střední hodnoty normovaného statického tlaku v ose kanálu $h = 2$ mm pro tlakový poměr $\pi = 0,189$; simulace laminární (červeně), simulace turbulentní (modře), experiment (černé body)



Obrázek 2.17: Průběh střední hodnoty normovaného statického tlaku v ose kanálu $h = 3$ mm pro tlakový poměr $\pi = 0,189$; simulace laminární (červeně), simulace turbulentní (modře), experiment (černé body)



Obrázek 2.18: Průběh střední hodnoty normovaného statického tlaku v ose kanálu $h = 4$ mm pro tlakový poměr $\pi = 0,189$; simulace laminární (červeně), simulace turbulentní (modře), experiment (černé body)

h [mm]	0,5	2	3	4
Re	3 100	16 600	25 900	34 100
y^+	-	4,8	5,1	5,1

Tabulka 2.4: Minimální lokální Reynoldsovo číslo v rovné části kanálu a maximální bezrozměrová vzdálenost prvního uzlu sítě od stěny y^+ pro jednotlivé výšky kanálu a tlakový poměr $\pi = 0,189$

simulace. Podmínka pro dobré zachycení turbulentní mezní vrstvy $y^+ \leq 1$ není pro tyto úlohy splněna, jak bylo očekáváno již podle kvality výpočetní sítě u stěny. Z provedených testovacích simulací, které nejsou v práci uvedeny, ale jasně vyplynulo, že zjemněním sítě a tedy snížením hodnoty y^+ nedosáhneme prakticky žádné změny ve výsledcích turbulentních simulací. Velký vliv zde má druhý řád nespojitě Galerkinovy metody, který dokáže nedostatečně jemnou síť u stěny částečně vykompenzovat. Z důvodu výpočetní náročnosti tedy byly simulace realizovány na uvedené hrubší síti, aniž by to ale mělo na odhad režimu proudění v mezerách vliv. Pro laminární výpočty je síť naprosto dostačující.

Interferogramy pořízené při experimentu poskytují vizuální informaci o celé oblasti včetně části uklidňovací komory. Využijeme je pro kvalitativní porovnání s izočarami střední hodnoty hustoty právě v oblasti výstupu vzduchu z kanálu do volného prostoru. Interferometrie je založena na skutečnosti, že rychlost šíření světla závisí na indexu lomu média, kterým světlo prochází, a index lomu závisí na hustotě. Mohou tak být přímo určovány změny hustoty tekutiny. Porovnání provedeme pro mezeru výšky $h = 2$ mm a nadkritické tlakové poměry $\pi = 0,189$ a $0,308$. Pro nadkritické tlakové poměry dochází za kanálem ke stejné situaci

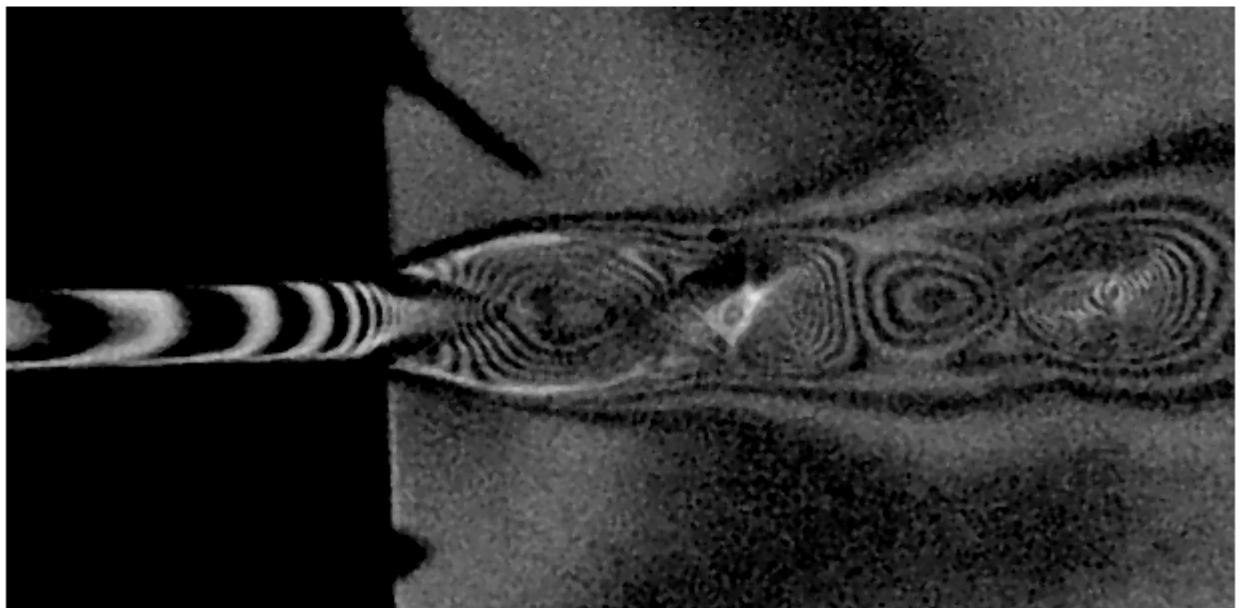
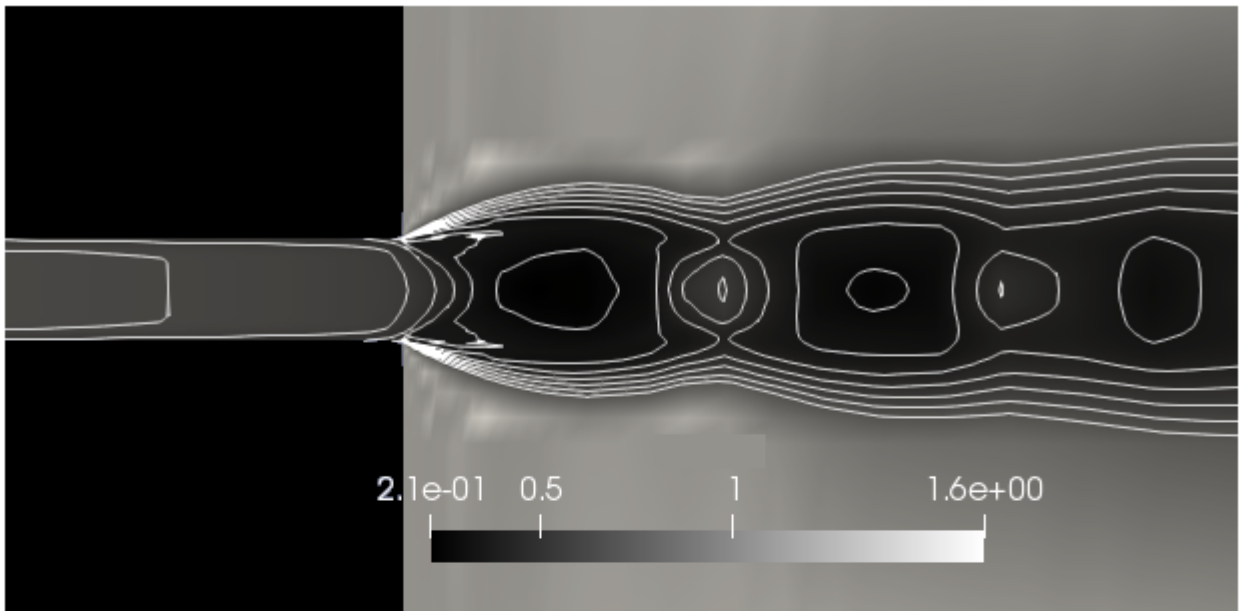
jako u mezery výšky $h = 10$ mm, tedy vzniku šikmých rázových vln, jak bylo popsáno v odstavci 2.3.3. Izočáry střední hodnoty hustoty pro tlakový poměr $\pi = 0,189$ jsou uvedeny na obrázku 2.19 nahoře, interferogram pro stejný tlakový poměr je pak na obrázku dole. Izočáry střední hodnoty hustoty pro tlakový poměr $\pi = 0,308$ můžeme vidět na obrázku 2.20 nahoře, interferogram pro stejný tlakový poměr je uveden dole. Numerické simulace pro získání uvedených izočar byly provedeny následujícím způsobem. Z grafu na obrázku 2.16 vidíme, že proudění v kanále je laminárního charakteru, respektive je možné ho dobře modelovat laminárně. Ve výtoku do volného prostoru již ale nepůsobí stabilizující vazké síly dané blízkostí stěn v kanálu a předpokládáme tak nutně rychlý přechod do turbulentního režimu. Navíc jsou laminární simulace v oblasti uklidňovací komory, kde dochází k výrazným nestacionárním jevům, značně nestabilní a výsledky neodpovídají realitě. Situace je proto kvůli absenci vhodného modelu přechodu vyřešena tak, že ve vstupní oblasti a rovném kanálu je výpočet realizován laminárně a v uklidňovací komoře pak plně turbulentně s pomocí modelu $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006). „Přechodová“ oblast je řešena tak, že na úseku zasahujícím 1 mm do rovného kanálu a 8 mm do uklidňovací komory je lineárně navyšována produkce turbulentní energie $P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j}$ v rovnici (1.31) z hodnoty 0 na hodnotu 1. Průběh statického tlaku v ose kanálu odpovídá při této úpravě experimentálním výsledkům stejně dobře, jako tlak získaný výpočtem čistě laminárním. Pro oba zkoumané tlakové poměry můžeme konstatovat rozumnou kvalitativní shodu izočar hustoty s interferogramy, samozřejmě pouze v krátkém úseku za kanálem. Dále už středované řešení neodpovídá skutečnosti, protože stacionární RANS přístup není schopen postihnout nestacionární jevy, které se v uklidňovací komoře vyskytují.

2.5 Diskuze výsledků a závěry

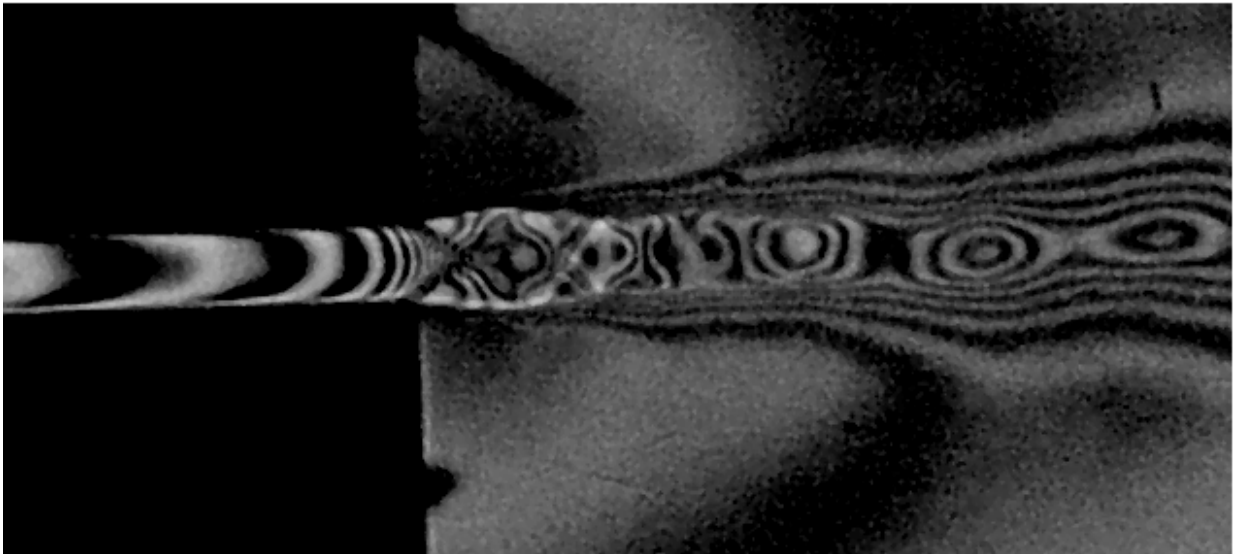
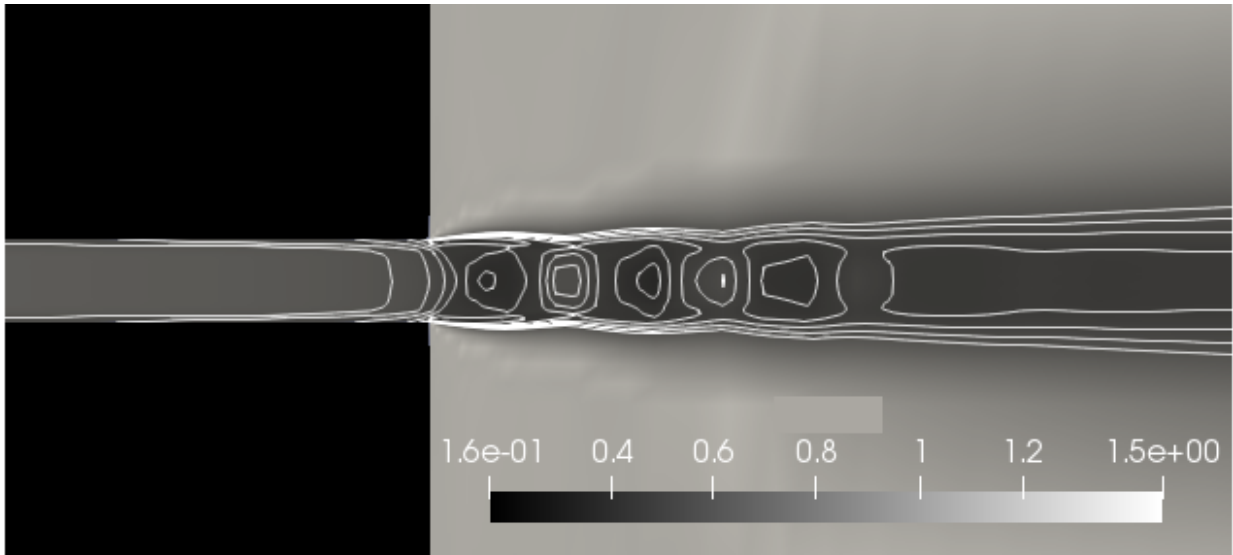
Po zhodnocení výsledků simulací provedených v kalibračním kanálu výšky 10 mm, uvedených v části 2.3 této kapitoly, můžeme konstatovat, že validace numerického řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě s modelem turbulence $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006) pro plně turbulentní proudění proběhla velmi uspokojivě. Mírná odchylka v průběhu celkového tlaku v ose kanálu je pravděpodobně způsobena nedostatečně přesnou predikcí turbulentní vazkosti v turbulentní mezní vrstvě, jak bylo zjištěno z verifikační simulace obtékání rovné desky. Predikce statického tlaku po délce kanálu je velmi dobrá, stejně jako výpočet smykového napětí na stěně kanálu kromě vstupní délky, což bylo komentováno výše. Vyjděme tedy z toho, že turbulentní řešič je použitelný pro predikci proudění v úzkých kanálech.

Podíváme-li se nyní na užší mezery na pomezí minikanálů a běžných kanálů, můžeme konstatovat následující. V kanálech výšky $h \leq 2$ mm je ve shodě s experimentem průběh statického tlaku získaný z laminární simulace. Pro $h = 0,5$ mm je shoda prakticky přesná, zanedbatelná odchylka v případě $h = 2$ mm je v toleranci nejistot měření [27]. Pro mezeru $h = 3$ mm je vidět již zřetelné odchylování experimentálně zjištěného tlaku od laminární predikce a na konci kanálu, v místě $x = 89$ mm, dochází k přimknutí k turbulentní křivce tlaku. U mezery výšky $h = 4$ mm je tento jev ještě zřetelnější a k přimknutí k turbulentní křivce dojde v místě $x = 87$ mm.

Získané výsledky naznačují počínající přechod do turbulentního proudění od výšky kanálu okolo 3 mm. Experimentálně získaný statický tlak je vyšší, než při zcela laminárním výpočtu, ale sklon křivky rozhodně nenasvědčuje režimu plně turbulentnímu, s výjimkou samotného konce kanálu. Pohybujeme se zde pravděpodobně v oblasti určitého intermitentního proudění. Fenomén plně vyvinutého intermitentního režimu proudění je popsán v práci [53] a bylo by možné ho identifikovat podle poměru $\tilde{v}_{1,max}/\tilde{v}_{1,bulk}$, který se v takovém případě ustálí mezi



Obrázek 2.19: Izočáry střední hodnoty hustoty [$kg\ m^{-3}$] ve výtoku do uklidňovací komory získané numerickou simulací (nahore) a odpovídající interferogram pořizeny pracovníky ÚT AV ČR (dole), pro kanál $h = 2\ mm$ a pro tlakový poměr $\pi = 0,189$



Obrázek 2.20: Izočáry střední hodnoty hustoty [$kg\ m^{-3}$] ve výtoku do uklidňovací komory získané numerickou simulací (nahore) a odpovídající interferogram pořizeny pracovníky ÚT AV ČR (dole), pro kanál $h = 2\ mm$ a pro tlakový poměr $\pi = 0,308$

hodnotou přibližně 1,15 platnou pro vyvinuté turbulentní proudění a 1,5 pro vyvinuté laminární proudění. Vzhledem k délce kanálu je zde ale proudění nevyvinuté a posouzení podle profilu rychlosti není možné. Zdůrazňujeme, že se jedná pouze o hypotézu, pro konkrétní závěry o přechodu do turbulence bude nezbytné nalezení vhodného modelu přechodu pro proudění v kanálech.

Naprostá většina existujících modelů přechodu je kalibrována pro obtékání těles. Při proudění v kanálu dochází k přechodu stejně jako při obtékání těles, tedy v mezní vrstvě, která se na stěnách kanálu vyvíjí, případně při setkání obou smykových vrstev při vytváření vyvinutého rychlostního profilu. Všechny modely přechodu jsou ale do určité míry závislé na empirických kritériích, která byla odvozena pro konkrétní podmínky. Model přechodu tak musí být pro proudění stlačitelné tekutiny v kanálu upraven a pomocí experimentu validován. Jedním z možných řešení může být algebraický model přechodu s modifikací produkce turbulentní energie podle Langtryho a Sjolandera [47], kde by pravděpodobně bylo nejvhodnější upravit korekční funkci PTM_1 [67]. Vzhledem k nedostatku dostupných experimentů pro stlačitelné proudění bude pro validaci modelu přechodu v kanálu potřeba provést experimenty nové.

Zároveň se z hlediska numerického modelování jeví jako velmi vhodné prodloužit pro další experimenty úzký kanál na takovou délku, aby se proudění stačilo vyvinout a ideálně délka úseku kanálu s vyvinutým prouděním převažovala nad vstupní délkou. Bylo by tak možné spolehlivěji vyhodnotit režim proudění v kanálu, než za současného stavu nevyvinutého proudění. I vzhledem k plánovaným dalším měřením, konkrétně smykového napětí na stěně v minikanálech, by bylo prodloužení více než přínosné. V kalibračním kanálu se totiž ukazuje, že pro úsek kanálu s nevyvinutým prouděním nejsou metody předpokládající znalost rychlostního profilu, jako je právě plůtková sonda, příliš spolehlivé. Pokud by bylo měření realizováno jinou metodou, například žhaveným filmem, tento problém by pravděpodobně nastal, nicméně i tato metoda s sebou nese značné komplikace v podobě obtížné kompenzace teplotních vlivů.

Kapitola 3

Implicitní simulace velkých vírů

Každý ze tří základních přístupů pro modelování turbulentního proudění tekutin (řešení středovaných Navierových-Stokesových rovnic RANS, simulace pohybu velkých vírů LES a přímá numerická simulace DNS) poskytuje odlišné možnosti využití, přesnosti a výpočetní náročnosti. Pro praktický a v každodenní inženýrské praxi v současnosti nejvíce užívaný přístup RANS existuje řada dobrých a stále zdokonalovaných modelů turbulence a přechodu, které dávají uspokojivé výsledky, pokud je model pro konkrétní problematiku vhodně zvolen. Ideálním modelem turbulence by ovšem byl takový, který by dokázal předpovědět chování tekutiny pro široké rozmezí podmínek proudění a typů geometrie. Takový model však dosud nebyl vytvořen, chceme-li tedy v modelování proudění tekutin dosáhnout větší univerzálnosti a přesnosti, je nutné přistoupit k simulaci pohybu velkých vírů nebo dokonce k přímé numerické simulaci. I přes zvyšující se výkonnost výpočetní techniky není ale použití přímé numerické simulace pro běžné aplikace stále ještě reálné, obzvláště v případech rozměrných geometrií a vysokých Reynoldsových čísel. Simulace pohybu velkých vírů představuje určitý kompromis mezi RANS a DNS přístupem vzhledem k přesnosti predikce vývoje proudění tekutiny i vzhledem k časovým a paměťovým nárokům kladeným na výpočetní techniku.

3.1 Princip LES a standardní přístup

Turbulentní proudění je charakteristické neuspořádaným pohybem vírových struktur celé škály měřítek, délkových i časových. Zatímco DNS řeší přímo všechny tyto turbulentní víry a poskytuje tak kompletní informaci o fluktuacích všech veličin proudového pole v prostoru i v čase, RANS naopak hledá pouze střední hodnoty veličin a vliv turbulentních struktur všech měřítek na tyto střední hodnoty modeluje vhodným modelem turbulence. V běžném pojetí LES se systém Navierových-Stokesových rovnic filtruje a následně se přímo řeší pouze turbulentní víry velkých měřítek, vliv těch menších se modeluje pomocí subgridního modelu. Získané filtrované veličiny proudového pole tak obsahují podstatně více informací, než středované veličiny v RANS. Protože chování turbulentních vírů malých měřítek je víceméně homogenní a izotropní, stačí pro jeho modelování i jednodušší, algebraický subgridní model (v porovnání s náročnými RANS modely turbulence). Díky univerzálnosti chování turbulentních struktur menších měřítek může být takový subgridní model aplikován na velké množství různých úloh. Vzhledem k tomu, že většina turbulentní energie je obsažena ve velkých vírových strukturách, subgridní model přispívá k celkovému napětí v tekutině podstatně menší měrou, než RANS model turbulence, a tak je i chyba vnesená do simulace subgridním modelem menší. V důsledku přímého řešení velkých turbulentních vírů, které jsou vždy nestacionární a prostorové, musí být i LES simulace nestacionární a provedena

na trojrozměrné výpočtové oblasti.

3.1.1 Přenos energie v turbulentním proudění

Zavedme nyní konkrétněji délkové měřítko ℓ , charakterizující velikost vírové struktury vyskytující se v turbulentním proudě. Plně turbulentní proudění sestává z mnoha vírů různých délkových měřítek, od největších, s měřítkem srovnatelným s charakteristickým rozměrem celé úlohy \mathcal{L} , tedy $\ell \approx \mathcal{L}$, až po nejmenší Kolmogorovova měřítko, která specifikujeme dále. Teorie energetické kaskády [71] vysvětluje přenos kinetické energie mezi víry jednotlivých měřítek. Největší víry obsahují nejvíce energie, jsou nestabilní a rozpadem na menší víry těmto předávají energii. Tento proces se opakuje a dochází k přenosu energie na stále menší a menší měřítko až do té úrovně, kdy je pohyb vírů stabilní a vlivem molekulární viskozity kinetická energie disipuje v teplo. Pohyb vírů malých měřítek ($\ell \ll \mathcal{L}$) je podle Kolmogorovovy hypotézy [43] statisticky izotropní, pro každé turbulentní proudění univerzální (za předpokladu dostatečně vysokého Reynoldsova čísla) a je určen výhradně hodnotou molekulární viskozity ν a rychlostí disipace ε . Rychlost disipace ε vyjadřuje míru, se kterou větší turbulentní víry předávají energii menším. Veličiny ν a ε pak definují Kolmogorovova měřítko

$$\begin{aligned} \text{délkové } \eta &= (\nu^3/\varepsilon)^{\frac{1}{4}}, \\ \text{rychlostní } u_\eta &= (\varepsilon\nu)^{\frac{1}{4}}, \\ \text{časové } \tau_\eta &= (\nu/\varepsilon)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

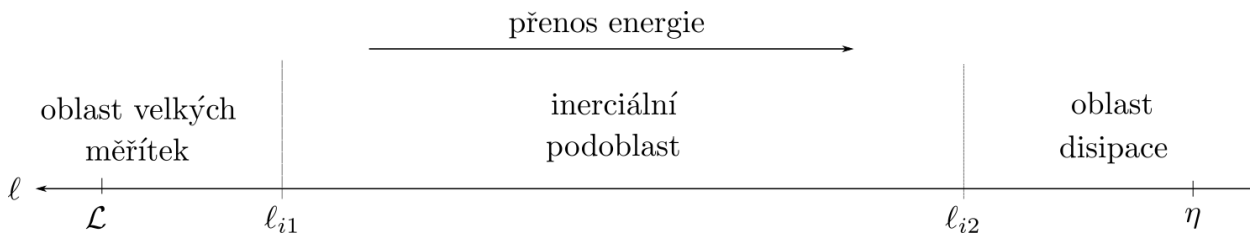
kteřá charakterizují pohyb těch nejmenších vírů, na jejichž úrovni dochází na konci energetické kaskády k disipaci kinetické energie. V případě DNS je nutné přímo modelovat i tuto nejmenší měřítko a volit tedy takovou diskretizační síť a časový krok, aby byla zachytitelná. Celou škálu délkových měřítek lze rozdělit na tři oblasti [61] - oblast největších vírů (*energy-containing range*) obsahujících hlavní část kinetické energie; dále inerciální podoblast, kde pohyb vírů ovlivňují setrvačné síly a vazké jsou zde zanedbatelné; a nakonec oblast disipace obsahující malá měřítko, kde převažují vazké síly a dochází zde k prakticky veškeré disipaci. Situace je znázorněna na obrázku 3.1.

Zavedeme-li vlnové číslo κ , odpovídající délkovému měřítku ℓ , vztahem

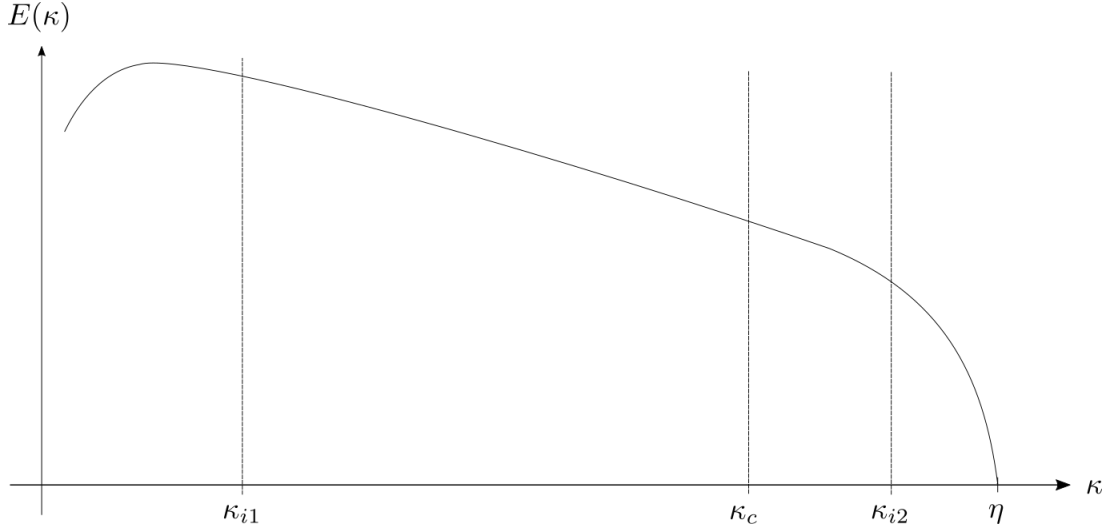
$$\kappa = 2\pi/\ell,$$

můžeme znázornit typické spektrum kinetické energie $E(\kappa)$ křivkou na obrázku 3.2, kde jsou jednotlivé oblasti opět odděleny jako na obrázku 3.1. Hranice oblasti velkých měřítek a inerciální podoblasti je dána délkovým měřítkem ℓ_{i1} (obr. 3.1), respektive vlnovým číslem $\kappa_{i1} = 2\pi/\ell_{i1}$ (obr. 3.2). Hranice inerciální podoblasti a oblasti disipace je značena délkovým měřítkem ℓ_{i2} (obr. 3.1), respektive vlnovým číslem $\kappa_{i2} = 2\pi/\ell_{i2}$ (obr. 3.2).

Ze statistického hlediska dochází k přenosu energie v kaskádě směrem z větších na menší délková měřítko - *forwardscatter*, lokálně ale může docházet i k opačnému procesu, tedy



Obrázek 3.1: Schématické znázornění rozdělení délkových měřítek turbulentního proudění do tří oblastí v souvislosti s energetickou kaskádou



Obrázek 3.2: Typický průběh energetického spektra turbulentního proudění v závislosti na vlnovém čísle κ

zpětnému přestupu energie z menších na větší turbulentní víry. Tento jev se nazývá *backscatter* [61] a je možné ho zahrnout do subgridního modelu.

3.1.2 Matematický model

V této práci uvažujeme proudění stlačitelné vazké tekutiny, které je nestacionární, jednofázové, subsonické či supersonické s Machovým číslem do 1,5. Tekutina je newtonská, tedy viskozita závisí pouze na teplotě, vnější objemové síly působící na tekutinu nebereme v úvahu. Proudění takové tekutiny popisujeme systémem Navierových-Stokesových rovnic, tedy rovnic odvozených ze zákonů zachování hmotnosti, hybnosti a celkové energie. Systém rovnic doplníme stavovou rovnicí pro ideální plyn. Uvažujme proudění v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Konzervativní systém Navierových-Stokesových rovnic v diferenciálním tvaru potom vyjádříme vztahy [89]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho v_j) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} + f_1 \delta_{1i}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho e v_j + p v_j) = \frac{\partial}{\partial y_j}(\sigma_{ij} v_i - q_j) + f_2, \quad (3.3)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$. Veličiny jsou označeny následujícím způsobem: ρ je hustota tekutiny, $t \in (0, \infty)$ je čas, y_i je i -tá kartézská složka vektoru prostorových souřadnic $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3] \in \Omega$, v_i je odpovídající i -tá složka vektoru rychlosti $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$, p je statický tlak a δ_{ij} je Kroneckerovo delta ($\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$). Celková měrná energie systému e je dána jako

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} v_i v_i,$$

kde ε je měrná vnitřní energie. Podle Fourierova zákona platí pro j -tou složku q_j tepelného toku $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ vztah

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial y_j},$$

kde T je termodynamická teplota a k je součinitel tepelné vodivosti tekutiny, který uvažujeme konstantní. Za předpokladu platnosti Stokesova vztahu jsou složky tenzoru vazkových napětí σ_{ij} pro newtonskou tekutinu dány v závislosti na tenzoru rychlosti deformace

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right)$$

vztahem

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \delta_{ij},$$

kde μ je součinitel dynamické viskozity tekutiny. Ten je funkcí teploty tekutiny T , tedy $\mu = \mu(T)$. Pro vyjádření této závislosti použijeme Sutherlandův vztah ve tvaru [89]

$$\mu(T) = \mu_{ref} \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + 110}{T + 110},$$

kde T_{ref} je referenční teplota a μ_{ref} je dynamická viskozita při teplotě T_{ref} . Zdrojové členy f_1 a f_2 budou definovány později při popisu konkrétní testovací úlohy.

Stavovou rovnici $p = p(\rho, T)$ pro ideální plyn uvažujeme ve tvaru

$$p = \rho r T, \quad (3.4)$$

kde r je měrná plynová konstanta.

3.1.3 Filtrování a subgridní modely

Simulace velkých vírů (LES) v tradičním pojetí je založena na filtrování systému Navierových-Stokesových rovnic (3.1) - (3.3). Filtrováním s konkrétní šířkou filtru Δ se oddělí turbulentní víry malých a velkých délkových měřítek. Struktury měřítek větších než šířka filtru jsou počítány přímo numerickým řešením filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic, víry měřítek menších jsou modelovány subgridním modelem. Zjednodušeně řečeno, použijeme-li šířku filtru odpovídající velikosti buňky sítě (toto nemusí nutně platit), je zřejmé, že struktury menší než tato velikost nemohou být běžnými numerickými metodami na takové síti zachyceny. Vlnové číslo κ_c , odpovídající hranici mezi přímo simulovanými a modelovanými měřítky, se označuje jako *cut-off* vlnové číslo a musí se nacházet v inerciální podoblasti, jak je znázorněno na obrázku 3.2.

Odvození systému filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic je formálně podobné, jako středování rovnic v RANS přístupu. Zde se však jedná o prostorové, nikoliv časové průměrování. Označme obecně veličinu proudového pole (rychlost, tlak, ...) jako $f(\mathbf{y}, t)$. Okamžitou hodnotu této veličiny rozložíme na část $\bar{f}(\mathbf{y}, t)$ reprezentující velká turbulentní měřítká a část $f'(\mathbf{y}, t)$ představující příspěvek malých měřítek, tedy

$$f(\mathbf{y}, t) = \bar{f}(\mathbf{y}, t) + f'(\mathbf{y}, t). \quad (3.5)$$

Filtrovaná, přímo řešená část $\bar{f}(\mathbf{y}, t)$ je formálně definována konvolučním integrálem [91], [31]

$$\bar{f}(\mathbf{y}, t) = \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi} = G * f(\mathbf{y}, t), \quad (3.6)$$

kde $\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi} \in \Omega$ a funkce G je jádro konvoluce, pro které platí

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1 \quad \text{pro } \forall \mathbf{y} \in \Omega.$$

Funkce G charakterizuje použitý typ filtru a závisí na jeho šířce Δ , která určí oblast měřítek, jež je potřeba modelovat. Příspěvek malých (subgridních) měřítek je pak vzhledem k (3.5) a (3.6) dán vztahem

$$f'(\mathbf{y}, t) = f(\mathbf{y}, t) - \bar{f}(\mathbf{y}, t) = (1 - G(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})) * f(\mathbf{y}, t).$$

V případě stlačitelného proudění je vhodnější použít hmotnostně podmíněné filtrování podle Favra. Veličinu proudového pole $f(\mathbf{y}, t)$ rozložíme jako

$$f(\mathbf{y}, t) = \tilde{f}(\mathbf{y}, t) + f''(\mathbf{y}, t),$$

kde filtrovaná část $\tilde{f}(\mathbf{y}, t)$ je vyjádřena pomocí filtrované hustoty vztahem

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}.$$

Využití tohoto přístupu vede, stejně jako v případě Favrova středování v RANS, na filtrovanou rovnici zachování hmotnosti zapsanou ve formálně stejném tvaru, v jakém je původní nefiltrovaná rovnice (3.1). Zdůrazněme, že přestože jsme použili stejné značení (\bar{f} , \tilde{f} , f' , f'') jako v případě středování v RANS přístupu, jedná se zde o jiný princip.

Mezi běžně používané filtry patří především box (*top hat*) filtr, definovaný jako [21]

$$G(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pro } |\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}| \leq \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

dále Gaussův filtr a spektrální (*sharp cut-off*) filtr.

Systém filtrovaných Navierových-Stokesových rovnic lze odvodit a zapsat v několika různých podobách [21], dva pravděpodobně nejčastěji používané systémy zavedl Vreman [92] (systém I. s modifikovanou energií a systém II. s modifikovaným tlakem a teplotou). Uveďme pro představu systém filtrovaných rovnic například ve tvaru (systém I. podle Vremana) [91]

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{v}_j)}{\partial y_j} = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \tilde{v}_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y_i} - \frac{\partial \check{\sigma}_{ij}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho} \tau_{ij}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\sigma}_{ij} - \check{\sigma}_{ij}), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} \check{e}) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{\rho} \check{e} \tilde{v}_j + \bar{p} \tilde{v}_j) - \frac{\partial}{\partial y_j}(\check{\sigma}_{ij} \tilde{v}_i) + \frac{\partial \check{q}_j}{\partial y_j} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \quad (3.9)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$, $\bar{\rho}$ a \bar{p} označují filtrovanou hustotu a tlak a \tilde{v}_i je i -tá složka vektoru rychlosti $\tilde{\mathbf{v}} = [\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3]$ filtrovaná podle Favra. Ostatní veličiny jsou funkcemi uvedených filtrovaných veličin. Symboly \check{e} , $\check{\sigma}_{ij}$ a \check{q}_j značí zmíněné modifikované veličiny. Levá strana filtrovaných rovnic je formálně shodná se systémem Navierových-Stokesových rovnic (3.1) - (3.3), jen zapsaná pomocí filtrovaných veličin. Výrazy na pravé straně rovnic (3.7) - (3.9) pak představují subgridní členy reprezentující vliv malých měřítek na filtrované veličiny. Poslední člen ve filtrované rovnici (3.8) se pro vysoká Reynoldsova čísla zanedbává. Velikost a význam subgridních členů $\alpha_1 - \alpha_6$ v rovnici (3.9) detailně prozkoumal Vreman [92] a také uvedl jejich aproximace [91]. Některé z nich je možné bez velké chyby zanedbat.

Nejvýznamnějším subgridním členem je tenzor subgridních turbulentních napětí τ_{ij} obsažený ve filtrované rovnici (3.8)

$$\bar{\rho} \tau_{ij} = -\bar{\rho}(\widetilde{v_i v_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j), \quad (3.10)$$

který vznikl během filtrování v důsledku nelinearity konvektivních členů. Zároveň je to jediný subgridní člen vyskytující se v systému filtrovaných rovnic pro proudění nestlačitelné tekutiny a proto je mu také obvykle věnována největší pozornost. Představuje vliv turbulentních fluktuací subgridních měřítek na přenos energie v tekutině.

Subgridní modely

Standardní simulace velkých vírů s použitím subgridních modelů není cílem této práce, uveďme tedy zde pro představu pouze nejběžnější tradiční subgridní model používaný pro aproximaci tenzoru turbulentních napětí τ_{ij} (3.10). Vzhledem k homogenitě a isotropii vírových struktur malých měřítek je možné tenzor τ_{ij} modelovat pomocí Boussinesqovy hypotézy [8], která se využívá i v RANS. Je založena na představě určité analogie mezi molekulárním a turbulentním přenosem energie v tekutině. Turbulentní napětí se vyjádří podobným vztahem jako vazké napětí σ_{ij} pomocí subgridní vazkosti μ_{sgs} , tedy

$$\tau_{ij} = -\bar{\rho}(\widetilde{v_i v_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = \mu_{sgs} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{sgs} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial y_k} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} k_{sgs} \delta_{ij},$$

kde k_{sgs} je subgridní kinetická energie definovaná jako

$$k_{sgs} = \frac{\tau_{ii}}{2\bar{\rho}}.$$

Problematika nalezení tenzoru turbulentního napětí τ_{ij} je tak převedena na nalezení skalární hodnoty μ_{sgs} . Ta je podle modelu Smagorinského [79] určena vztahem

$$\mu_{sgs} = \bar{\rho} (C_S \Delta)^2 \sqrt{\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}},$$

kde \bar{S}_{ij} je filtrovaný tenzor rychlosti deformace

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial y_i} \right).$$

Šířka filtru Δ odpovídající velikosti buněk sítě může být definována různě, například $\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{\frac{1}{3}}$ nebo $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, kde Δ_i je charakteristický rozměr buňky sítě v i -tém souřadnicovém směru. Volba šířky filtru má samozřejmě vliv na výsledek simulace. Konstanta C_S je Smagorinského konstanta, jejíž hodnotu je potřeba volit s ohledem na konkrétní úlohu. Významné zpřesnění Smagorinského modelu v tomto ohledu představuje dynamická úprava podle Germana aj. [24], kdy je hodnota koeficientu C_S v průběhu simulace vypočítávána s pomocí takzvaného testovacího filtru. Tato úprava nemusí ale nutně vždy poskytovat přesnější výsledky než původní model s konstantní hodnotou C_S [35].

Kromě jednoduchých algebraických subgridních modelů, jakým je i uvedený model Smagorinského, existuje řada dalších, například jednorovnicové modely s transportní rovnicí pro subgridní kinetickou energii. Dále je v případě stlačitelného proudění nutné patřičně modelovat i subgridní členy $\alpha_1 - \alpha_6$ v rovnici (3.9).

Simulace LES s využitím subgridních modelů s sebou přináší samozřejmě mnoho aspektů, které je potřeba vhodně řešit, například okrajové a počáteční podmínky. Zejména určení vstupních okrajových podmínek je v LES problematické a podstatně náročnější než v RANS přístupu.

3.2 Implicitní přístup

Tradiční přístup v LES sleduje běžné schéma *fyzikální podstata* \rightarrow *matematický model* \rightarrow *numerická metoda*. Tedy fyzikální jev (turbulentní proudění) popíšeme matematickým modelem (filtrovaný systém Navierových-Stokesových rovnic doplněný subgridním modelem)

a ten se snažíme co nejpřesněji vyřešit vhodnou numerickou metodou. Tu volíme v klasickém LES ideálně tak, aby disipativní diskretizační chyba metody byla oproti disipaci vnesené do systému subgridním modelem zanedbatelná. Připustíme-li jinou cestu, kdy se běžně striktně oddělené fyzikální modelování a numerická aproximace mohou prolínat, můžeme využít principu *capturing physics with numerics* [26]. To znamená určité zabudování fyzikální podstaty problému rovnou do numerické metody a tím vlastně upozadění exaktního matematického modelu.

Z tohoto principu vychází druhý, méně tradiční, přístup k simulaci velkých vírů, a to implicitní *large eddy simulation* (ILES). ILES využívá diskretizační chyby numerické metody jako subgridního modelu. Řešen je původní nefiltrovaný systém Navierových-Stokesových rovnic (3.1) - (3.3) a vliv malých délkových (subgridních, *unresolved*) měřítek na měřítko velká (přímo řešená, *resolved*) je implicitně zahrnut díky vhodné volbě numerické metody, jejíž disipativní vlastnosti se postarají o disipaci turbulentní kinetické energie právě v oblasti těch malých škál pohybu, kde k ní skutečně dochází. Toto je samozřejmě podmíněno předpokladem, že vliv subgridních měřítek na řešená měřítko je čistě disipativní [21]. V ILES se tedy nepoužívá žádný explicitní subgridní model.

Myšlenka implicitní simulace velkých vírů byla poprvé uvedena Borisem v roce 1990 [6], který ji zakládá na použití monotónních metod a zavedl proto označení MILES (*Monotone Integrated Large Eddy Simulation*) jako zdůraznění skutečnosti, že monotónní metody mají pro ILES vhodné vlastnosti. V jedné z prvních prací na toto téma [7] použili autoři monotónní schéma *flux-corrected transport* (FCT) založené na metodě konečných objemů. Později se ukázalo, že numerické schéma může být vhodně disipativní, aniž by zachovávalo monotonii. Je tedy příhodnější používat obecnější označení ILES. Postupně se pro simulaci velkých vírů bez použití subgridních modelů rozvinula řada dalších metod. Jejich společnou charakteristikou bývá adaptivní řád metody a využití právě vyšších řádů přesnosti v prostoru, jak bude rozvedeno dále.

Implicitní LES přináší v porovnání s tradičním přístupem řadu výhod. Díky diskretizaci původního nefiltrovaného systému Navierových-Stokesových rovnic se vyhneme potížím spojeným se subgridními modely - jejich formulací, implementací nebo posouzením vhodnosti modelu pro konkrétní úlohu. ILES umožňuje také velmi efektivní a snadné využití stále narůstající výkonnosti výpočetní techniky. S výkonnějším počítačem si můžeme dovolit zjemnit diskretizační síť a získat tak pomocí ILES podstatně lepší výsledky, než při jakémkoliv dosud provedeném vylepšení subgridních modelů. Nevýhodou je neoddělitelnost numerického schématu a implicitního subgridního modelu, a tudíž i problematické zahrnutí případných nových poznatků o turbulentním proudění, které by v explicitním subgridním modelu mohly být poměrně snadno zohledněny.

Řada vlastností a možností uplatnění přístupu ILES byla postupně od devadesátých let matematicky popsána, rozpracována a zdůvodněna, přesto od počátku nebyl tento přístup vědeckou komunitou zabývající se turbulentním prouděním všeobecně přijímán, jak uvádí ještě v roce 2007 Grinstein et al. [26]. K této skutečnosti pravděpodobně přispívají jednak stále ještě nedostatečné teoretické základy a také nedůvěru budící pozoruhodná jednoduchost a široká aplikovatelnost ILES, díky čemuž se dosud dosažené výsledky zdají být „až příliš dobré na to, aby to byla pravda.“

3.2.1 ILES a nespojitá Galerkinova metoda

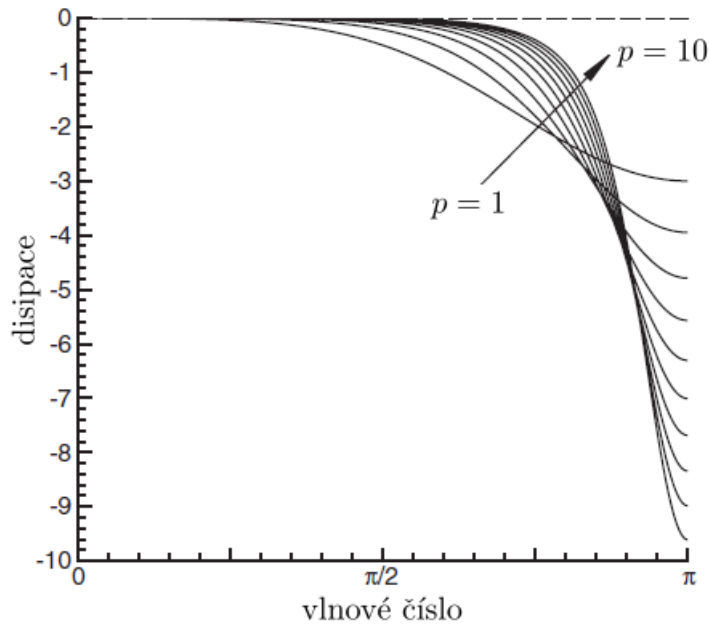
Již řada metod vysokých řádů přesnosti v prostoru byla úspěšně použita pro implicitní simulaci velkých vírů, ať už se jedná o konečně-objemová, konečně-prvková nebo diferenční schémata. V posledních dvou desetiletích byly rozvinuty nové metody vysokých řádů přesnosti

založené na diskretizaci pomocí konečných prvků, jejichž disperzní a disipativní vlastnosti umožňují jejich využití pro ILES. Patří mezi ně například metody *flux-reconstruction* (FR) [32], *spectral-element* (SEM) [38], *spectral difference* (SDM) [85] nebo nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků (DGM, DGFEM) [30]. Tyto metody představují určitý kompromis mezi flexibilními konečně-objemovými metodami široce používanými v průmyslové praxi a vysoce přesnými akademickými řešiči [12], implementujícími například pseudospektrální metody (PS) [10].

Nespojitá Galerkinova metoda se poprvé objevila již v roce 1973 [69] v souvislosti s řešením rovnice transportu neutronů a byla postupně rozšiřována pro řešení dalších typů rovnic včetně využití pro simulace proudění tekutin [9]. Až v posledním desetiletí se ale ukazuje její použitelnost pro tzv. *under-resolved* simulace. Tedy simulace, kdy jsou řešeny nefiltrované Navierovy-Stokesovy rovnice stejně jako v případě DNS, ale jejich rozlišení nedosahuje potřebné úrovně pro rozřešení všech turbulentních měřítek až po ta nejmenší. Rozlišením máme na mysli počet stupňů volnosti (dof - *degrees of freedom*) dané úlohy v prostoru, který jen dán v základu počtem elementů diskretizační sítě a na každém elementu je navýšen ještě o příslušný počet dof v závislosti na konkrétní použité metodě vyššího řádu. Příklad výpočtu dof pro nespojitou Galerkinovu metodu bude uveden na konkrétní úloze později. Pod označení *under-resolved* simulace tedy patří nejen ILES ve výše uvedeném smyslu, kdy je použita síť srovnatelná s tradičním LES a subgridní model je zastoupen diskretizační chybou numerické metody. Řadí se sem i simulace na sítích jemnějších a s použitím vysokého řádu numerického schématu, které už se přibližují k rozlišení DNS, samozřejmě za předpokladu, že numerická metoda zajistí správné disipativní chování. Moura aj. [57] navrhuje označovat tento typ simulací následujícím způsobem. *Implicit large eddy simulation* je výstižným názvem v případě, že chování numerické chyby metody prokazatelně napodobuje subgridní modely používané v LES. *Under-resolved direct numerical simulation* (uDNS) by pak mělo být používáno pro schémata vysokých řádů, kde není předpokládána přímá souvislost se standardními subgridními modely. Nespojitá Galerkinova metoda spadá spíše do druhé kategorie, nicméně v této práci (a v mnohých jiných) jsou oba termíny používány bez takto přísného rozlišování.

Abychom o numerické metodě mohli uvažovat jako o vhodném kandidátovi pro ILES, musí její disipativní vlastnosti zajistit disipaci kinetické energie v oblasti velkých vlnových čísel. Pro nespojitou Galerkinovu metodu platí, že čím vyšší řád přesnosti metody, respektive stupeň polynomiální aproximace p , použijeme, tím příhodnější jsou její disipativní vlastnosti, jak je znázorněno na obrázku 3.3 pro polynomy stupně $p = 1$ až $p = 10$. Křivky získané analýzou DGM s použitím Gauss-Legendreových integračních bodů provedenou autory práce [23] jasně ukazují, že čím vyšší je stupeň polynomu p , tím menší disipací jsou zatížena velká turbulentní měřítká. To je žádoucí, protože podle uvedené teorie energetické kaskády je v oblasti velkých měřítek energie pouze předávána a k disipaci nedochází. Naopak, se vzrůstajícím řádem přesnosti je podle obrázku 3.3 disipace uplatňována na menších a menších měřítkách, kde právě k disipaci kinetické energie skutečně dochází. Tyto vlastnosti činí z DGM ideálního kandidáta pro *under-resolved* simulace v celém rozsahu tohoto pojmu.

Využití DGM pro *under-resolved* simulace se věnuje několik skupin autorů, kteří přispívají k prohloubení znalostí o použitelnosti a přesnosti metody a teoretického zdůvodnění její funkčnosti. Jedna z prvních prací na toto téma [14] ukázala schopnost nespojité Galerkinovy metody úspěšně predikovat statistiky prvního řádu s využitím menšího počtu stupňů volnosti, než jaký je vyžadován tradičními metodami. Na hrubších sítích než v LES umožňuje DGM úspěšně zachytit i přechodové proudění v odtržení při obtékání leteckého profilu [86], [87], a to se srovnatelnou přesností. Z porovnání nízkých a velmi vysokých řádů nespojité Galerkinovy metody (až do šestnáctého řádu) [22] na úloze Taylorova-Greenova víru na hrubých sítích vyplývá několik zásadních skutečností. Nízké řády metody vykazují dle očekávání



Obrázek 3.3: Disipativní vlastnosti DGM pro interpolační polynomy stupně $p = 1$ až $p = 10$, převzato z [23]

nepříjemnou numerickou chybu, vyšší řády jsou však často kvůli takzvanému *aliasingu* nestabilní, méně robustní. K aliasingu dochází v důsledku nedostatečné integrační přesnosti při výpočtu toků a je možné ho řešit několika technikami s velmi dobrým výsledkem, a tím simulaci s vysokým řádem stabilizovat. Za předpokladu dobré stabilizace je pak výhodné využít co nejvyšší možný řád DGM. S dostatečně vysokým řádem může *under-resolved* simulace pomocí DGM překonat co do přesnosti běžné simulace LES, například [33], samozřejmě při stejném počtu stupňů volnosti. V práci [22] byl zkoumán i vliv volby integračních bodů na přesnost simulací i jejich robustnost, přičemž volba Gauss-Legendreových bodů se ukázala v obou kategoriích vhodnější než volba bodů Gauss-Lobatto-Legendreových. Validaci DGM v pojetí *under-resolved* simulací na nestrukturovaných sítích je věnována velká pozornost v pracích [11] a [12], kde byly kromě testovacích akademických úloh (Taylorův-Greenův vír, homogenní izotropní turbulence HIT a proudění v kanálu - channel flow) provedeny i simulace náročnějších aplikací směřující k využití metody v inženýrské praxi, například obtékání leteckého profilu, proudění v turbínové mříži nebo odtržení proudu od zakřiveného povrchu. Důraz je v těchto pracích kladen na čtvrtý řád metody, tedy $p = 3$, který nabízí velmi dobrý poměr mezi přesností simulace a výpočetní náročností, navíc při použití těchto středně vysokých řádů ještě nenastávají problémy typu *aliasing*. Pro řády nižší je většinou potřeba doplnit systém explicitním subgridním modelem. Na výsledek simulace má vliv i typ použité výpočetní sítě (strukturovaná/nestrukturovaná) a typ elementů, přičemž u některých elementů dochází k nežádoucí kumulaci energie v oblasti velkých vlnových čísel [11]. Ve validaci prostřednictvím zmíněných akademických úloh obstála metoda velmi dobře. Výsledky inženýrských aplikací (zdůrazněme použitý 4. řád metody) jsou v zásadě uspokojivé a naznačují možnosti dalšího rozvoje a použití tohoto přístupu, podmíněné ale dalším rozsáhlým testováním. Při použití velmi vysokých řádů přesnosti metody je možné i pro praktičtější aplikace získat výborné výsledky, jak se ukazuje na obtékání válce nebo při přechodovém proudění na leteckém profilu za použití 12. řádu DGM [5]. Za použití stejného nebo menšího počtu stupňů volnosti, než je uvedeno v referenční literatuře, je zde dosaženo výsledků stejně kva-

litních nebo i lepších ve srovnání s metodami nízkých řádů se subgridními modely. K rozvoji teoretické základny přispívá práce [57], jejíž autoři provedli analýzu metody DGM zaměřenou na zjištění, jak numerická disipace přesně ovlivňuje nerozřešená turbulentní měřítká. Na jejím základě je navrženo takzvané *1% pravidlo* pro odhad maximálního vlnového čísla κ , které může být na dané diskretizační síti a za daného řádu metody přesně zachyceno. Autoři práce [56] doporučují používat řády středně vysoké, okolo $p = 6$, z důvodu falešné kumulace energie v oblasti malých měřítek při použití velmi vysokých řádů metody, náchylných navíc i ke zmíněnému aliasingu a vyžadujících tak dodatečnou stabilizaci.

Z uvedeného vyplývá jedna z velkých výhod využití nespojitě Galerkinovy metody pro *under-resolved* nebo ILES simulace, pomíneme-li nespornou výhodou absence nutnosti implementovat explicitní subgridní model. Tou je možnost získat stejně přesné simulace jako s tradičním LES za použití menšího počtu stupňů volnosti, nebo naopak získat kvalitnější výsledky při stejném počtu stupňů volnosti, tedy při zhruba srovnatelné výpočetní náročnosti. Pro daný počet stupňů volnosti je lepší volit spíše hrubší síť a vyšší řád metody, než naopak. Je velmi důležité uvědomit si a zdůraznit, že uvedené víceméně úspěšné simulace plně turbulentního i přechodového proudění byly prováděny za nízkých a středních Reynoldsových čísel. Se vzrůstajícím Reynoldsovým číslem mohou vznikat problémy se stabilitou v důsledku potlačení stabilizujících vlivů viskozity a dojde nutně i ke zhoršení přesnosti výsledků, neboť charakter takových simulací bude mnohem více *under-resolved*.

3.3 Numerické řešení - nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků

Nepřehlédnutelné vlastnosti nespojitě Galerkinovy metody v souvislosti s implicitní simulací velkých vírů přímo vybízejí k bližšímu prozkoumání tohoto přístupu. Ve zbývajících částech předkládané práce tedy provedeme vlastní validaci DGM-ILES přístupu na jednoduché akademické úloze a po porovnání s výsledky uvedenými v literatuře učiníme některé závěry. Uvedme nyní detaily k numerickému řešení matematického modelu, kterým je v případě metody ILES pouze samotný systém Navierových-Stokesových rovnic ve 3D.

3.3.1 Bezrozměrový tvar matematického modelu v kompaktním zápisu

Systém Navierových-Stokesových rovnic (3.1) - (3.3) budeme opět řešit v bezrozměrovém tvaru. Převod provedeme vztahem rozměrových hodnot na kladné referenční hodnoty podle vztahů

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_{ref}}, \quad t^* = \frac{t}{t_{ref}}, \quad v_j^* = \frac{v_j}{v_{ref}}, \quad y_i^* = \frac{y_i}{l_{ref}}, \quad p^* = \frac{p}{p_{ref}}, \quad e^* = \frac{e}{e_{ref}}$$

a rovnice poté vhodně vydělíme referenčními hodnotami. Matematický model v bezrozměrovém tvaru dostaneme v následující podobě (hvězdička značí bezrozměrovou veličinu je ve zbývajících částech tohoto odstavce vynechána pro větší přehlednost zápisu)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho v_j) = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \frac{1}{Re_{ref}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} + f_1 \delta_{1i}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial y_j}(\rho e v_j + p v_j) = \frac{1}{Re_{ref}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\sigma_{ij} v_i + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{p}{\rho} \right) \right] + f_2, \quad (3.13)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$ a tepelný tok q_j je upraven stejným způsobem jako v první kapitole v odstavci 1.1.2. Stavová rovnice, Sutherlandův vztah a vztah pro tenzor vazkých napětí zůstávají po převodu do bezrozměrového tvaru formálně beze změny. Referenční délku l_{ref} , tlak p_{ref} , teplotu T_{ref} a dynamickou vazkost μ_{ref} vhodně zvolíme, ostatní referenční hodnoty jsou pak určeny vztahy

$$v_{ref} = \sqrt{r_{ref} T_{ref}}, \quad t_{ref} = \frac{l_{ref}}{v_{ref}}, \quad \rho_{ref} = \frac{p_{ref}}{v_{ref}^2}, \quad e_{ref} = v_{ref}^2$$

a referenční Reynoldsovo číslo je

$$Re_{ref} = \frac{l_{ref} \rho_{ref} v_{ref}}{\mu_{ref}}. \quad (3.14)$$

Bezrozměrový systém Navierových-Stokesových rovnic (3.11) - (3.13) zapíšeme ve 3D v kompaktní vektorové podobě

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_s} \mathbf{f}_s^n(\mathbf{w}) = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_s} \mathbf{f}_s^v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) + \mathbf{p}(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}), \quad (3.15)$$

kde $\nabla \mathbf{w}$ je gradient vektoru \mathbf{w} . Vektor konzervativních proměnných \mathbf{w} , nevazké numerické toky $\mathbf{f}_i^n(\mathbf{w})$, vazké numerické toky $\mathbf{f}_i^v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})$ a zdrojový člen $\mathbf{p}(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})$ jsou dány jako

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1^n(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_1 v_3 \\ v_1(\rho e + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2^n(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho v_2 v_3 \\ v_2(\rho e + p) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3^n(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3^2 + p \\ v_3(\rho e + p) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_1^v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \frac{1}{Re_{ref}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{11} v_1 + \sigma_{12} v_2 + \sigma_{13} v_3 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2^v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \frac{1}{Re_{ref}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{12} v_1 + \sigma_{22} v_2 + \sigma_{23} v_3 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_3^v(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \frac{1}{Re_{ref}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} v_1 + \sigma_{23} v_2 + \sigma_{33} v_3 + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{p}{\rho} \right) \end{bmatrix}.$$

Zdrojové členy f_1 a f_2 včetně převodu do bezrozměrového tvaru jsou diskutovány později u validační úlohy.

V této podobě je matematický model připraven k diskretizaci pomocí nepojité Galerkinovy metody konečných prvků.

3.3.2 Nespojité Galerkinova metoda ve 3D

Diskretizace rovnic matematického modelu (3.15) je provedena pomocí nespojité Galerkinovy metody konečných prvků, která je popsána v kapitole zabývající se přístupem RANS, v odstavci 1.2.2. Uvedeme zde tedy už jen ty části metody, ve kterých se v této kapitole liší.

Zásadní změna je zde kromě rozšíření do 3D především v časové diskretizaci a volbě bázových funkcí. Matematický model v kompaktním vektorovém zápisu (3.15) tedy obsahuje tři složky vazkého a nevazkého toku a zdrojový člen, který je nyní podstatně jednodušší. Analogicky k rovnici (1.43) tedy můžeme rovnou psát

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} \sum_{i=1}^M \frac{\partial w_{k,i}^m}{\partial t} \varphi_k^i \varphi_k^j d\Omega + \oint_{\partial\Omega_k} \sum_{s=1}^3 \mathbf{f}_s^n n_s \varphi_k^j dl - \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^3 \mathbf{f}_s^n \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial y_s} d\Omega = \\ = \oint_{\partial\Omega_k} \sum_{s=1}^3 \mathbf{f}_s^v n_s \varphi_k^j dl - \int_{\Omega_k} \sum_{s=1}^3 \mathbf{f}_s^v \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial y_s} d\Omega + \int_{\Omega_k} \mathbf{p} \varphi_k^j d\Omega, \end{aligned} \quad (3.16)$$

kde jednotkový vektor vnější normály k hranici kontrolního elementu je $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$.

Metodu DDG pro vazké toky jednoduše rozšíříme do 3D

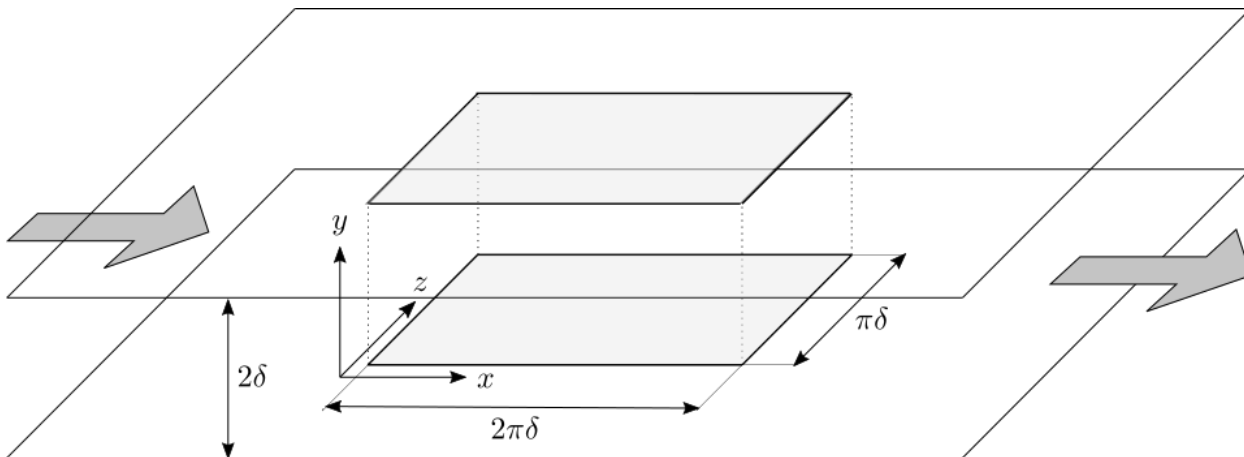
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{w}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{w}_k^L + \mathbf{w}_k^R), \quad \nabla \hat{\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y_1}, \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y_2}, \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y_3} \right), \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial y_i} &= \beta_0 \frac{\mathbf{w}_k^R - \mathbf{w}_k^L}{\Delta} n_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_i} \Big|_R + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y_i} \Big|_L \right), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Simulace LES v této kapitole je provedena stejně jako v případě RANS implicitně, ale s 2. řádem přesnosti v čase. Časovou derivaci v rovnici (1.44) nahradíme pomocí schématu BDF2 (*second-order backward differentiation formula*), vektor reziduí $\mathbf{R}(\mathbf{W}^{n+1})$ rozvineme do Taylorovy řady stejně jako v kapitole zabývající se RANS. Jednoduchými úpravami postupně dostaneme

$$\begin{aligned} M \frac{3\mathbf{W}^{n+1} - 4\mathbf{W}^n + \mathbf{W}^{n-1}}{2\Delta t} &= \mathbf{R}(\mathbf{W}^{n+1}), \\ M \frac{3\mathbf{W}^{n+1} - 4\mathbf{W}^n + \mathbf{W}^{n-1}}{2\Delta t} &= \mathbf{R}(\mathbf{W}^n) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}} (\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n), \\ \left(\frac{3}{2\Delta t} M - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{W}} \right) \Delta \mathbf{W} &= \mathbf{R}(\mathbf{W}^n) + \frac{1}{2\Delta t} M (\mathbf{W}^n - \mathbf{W}^{n-1}), \quad \text{kde } \Delta \mathbf{W} = \mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n. \end{aligned}$$

Simulace je realizována se čtvrtým řádem přesnosti DGFEM v prostoru ($p = 3$) a na strukturované výpočetní síti tvořené šestistěny. Volíme Taylorovu bázi tvořenou 20-ti bázovými funkcemi, na referenční krychli o délce hrany 1 zapsanými jako

$$\begin{aligned} \varphi_1^k(x, y, z) &= 1, & \varphi_6^k(x, y, z) &= y^2, & \varphi_{11}^k(x, y, z) &= x^3, & \varphi_{16}^k(x, y, z) &= xy^2, \\ \varphi_2^k(x, y, z) &= x, & \varphi_7^k(x, y, z) &= z^2, & \varphi_{12}^k(x, y, z) &= y^3, & \varphi_{17}^k(x, y, z) &= y^2z, \\ \varphi_3^k(x, y, z) &= y, & \varphi_8^k(x, y, z) &= xy, & \varphi_{13}^k(x, y, z) &= z^3, & \varphi_{18}^k(x, y, z) &= xz^2, \\ \varphi_4^k(x, y, z) &= z, & \varphi_9^k(x, y, z) &= xz, & \varphi_{14}^k(x, y, z) &= x^2y, & \varphi_{19}^k(x, y, z) &= yz^2, \\ \varphi_5^k(x, y, z) &= x^2, & \varphi_{10}^k(x, y, z) &= yz, & \varphi_{15}^k(x, y, z) &= x^2z, & \varphi_{20}^k(x, y, z) &= xyz. \end{aligned}$$



Obrázek 3.4: Schématické znázornění geometrie úlohy proudění mezi dvěma rovnoběžnými nekonečnými deskami: simulace je provedena na konečné oblasti o rozměrech $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$

3.4 Simulace proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami

Pro první vlastní aplikaci nespojitě Galerkinovy metody v rámci *under-resolved* simulací je v této práci zvolena klasická úloha plně turbulentního proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami, v anglicky psané literatuře známá pod pojmem *turbulent channel flow*, např. [55]. Stejná úloha byla řešena pomocí DGM v rámci ILES s velkým úspěchem v pracích [11], [12], poslouží tedy dobře k testování vhodnosti řešiče s vysokým řádem přesnosti v prostoru, založeného na DGM a vyvíjeného v rámci pracoviště, pro tento typ úloh. Důvodem volby uvedené úlohy je i dlouhodobé zaměření autorky na vnitřní aerodynamiku a proudění v kanálech.

3.4.1 Geometrie a charakteristické veličiny úlohy

Termínem *turbulent channel flow* popisujeme teoretickou situaci proudění tekutiny mezi dvěma hladkými, rovnoběžnými a nekonečně velkými deskami. Proudění je řízeno konstantním tlakovým spádem. Předpokládáme plně turbulentní režim, proudění je statisticky ustálené a statisticky jednodimenzionální, tedy rychlostní statistiky závisí pouze na vzdálenosti od stěny. Geometrii popíšeme v kartézském souřadnicovém systému následujícím způsobem. Osa x je orientována ve směru hlavního proudu, respektive záporného tlakového gradientu, směr osy x se označuje jako *streamwise*. Osa y je kolmá na stěny a směřuje od dolní stěny k horní, směr y je tedy *wall-normal*, a osa z ve směru *spanwise* dotváří levotočivý souřadnicový systém, jak je znázorněno na obrázku 3.4. Systém $[x, y, z]$ odpovídá souřadnicovému systému $[y_1, y_2, y_3]$ zavedenému při popisu matematického modelu v odstavci 3.1.2. Geometrie úlohy je v zásadě definována jediným parametrem, a to výškou kanálu $h = 2\delta$, respektive polovinou výšky δ .

Pro účely numerické simulace je samozřejmě nutné oblast omezit i ve směrech os x a z , přičemž výsledná konečná oblast musí být dostatečně velká na to, aby obsáhla i největší vznikající turbulentní struktury [54]. Použijeme ověřené rozměry $2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$, viz. obrázek 3.4, v souladu s nastavením přímé numerické simulace [55] a ILES simulace [11], s nimiž budou výsledky porovnávány. Na vzniklých hranicích v rovinách xy a yz předepíšeme periodické okrajové podmínky, které zajistí teoretickou nekonečnost výpočtové oblasti.

Zavedme nyní značení, které využijeme pro následující výklad i vyhodnocení výsledků numerické simulace. Pro přehlednější zápis a v souladu s běžnými zvyklostmi použijeme v případě nutnosti písmeno u pro složku rychlosti ve směru osy x , tedy $u \equiv v_1$. Okamžitou hodnotu libovolné veličiny $f(x, y, z, t)$ značíme pouze písmenem, její střední hodnotu v prostoru (v souřadnicových směrech x a z) a v čase symbolem $\langle f \rangle \equiv \langle f \rangle_{xzt}$. Střední hodnotu získanou průměrováním pouze v prostoru označíme $\langle f \rangle_{xz}$ a průměrováním pouze v čase $\langle f \rangle_t$. Písmenem s čárkou potom v této kapitole rozumíme okamžitou fluktuaci veličiny v čase i prostoru, definovanou jako

$$f'(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) - \langle f \rangle.$$

Značení fluktuací je sice shodné se značením použitým u středování a filtrování v první kapitole, zde se ale jedná o statistické zpracování okamžitých veličin proudového pole získaných řešením Navierových-Stokesových rovnic, nikoliv o filtrování nebo středování. Detaily statistického zpracování výsledků simulace budou uvedeny v rámci vyhodnocení úlohy.

Proudění v kanále je charakterizováno parametrem Re_τ , tedy Reynoldsovým číslem vztaženým na třetí rychlost u_τ , definovanou jako [61]

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (3.17)$$

kde τ_w je smykové napětí na stěně a ρ je hustota tekutiny. Smykové napětí závisí na derivaci střední hodnoty složky rychlosti ve směru proudu $\langle u \rangle$ podle y na stěně a na dynamické viskozitě tekutiny μ podle vztahu [61]

$$\tau_w = \mu \left. \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right|_{wall}. \quad (3.18)$$

Pro třetí rychlost tedy dostaneme dosazením (3.18) do vztahu (3.17) předpis

$$u_\tau = \sqrt{\nu \left. \frac{d\langle u \rangle}{dy} \right|_{wall}}, \quad (3.19)$$

kde $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ je kinematická viskozita tekutiny. Třetí Reynoldsovo číslo je potom definováno jako

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu}, \quad (3.20)$$

kde δ je již zavedená polovina výšky kanálu. Úloha je kompletně definována zadáním tří parametrů: Re_τ , δ a ν .

3.4.2 Volba referenční literatury

Historie úlohy *turbulent channel flow* vychází z řady experimentálních měření prováděných již od roku 1929, následovaných prvními numerickými simulacemi v 70. letech, kdy část mezní vrstvy byla z pochopitelných důvodů daných tehdejšími výpočetními kapacitami pouze modelována. V roce 1982 byla poprvé mezní vrstva simulována až ke stěně [54], úloha byla pojata jako testovací problém pro LES s použitím subgridního modelu a výsledky porovnány s experimentálními daty. Reynoldsovo číslo vztažené na rychlost ve středu kanálu bylo $Re = 13800$, což zhruba odpovídá $Re_\tau = 395$, o němž bude pojednáno dále. Data byla následně

používána pro studium struktury turbulentního proudění, i když rozlišení simulace nebylo ještě dostatečné pro rozřešení všech turbulentních měřítek v blízkosti stěny. V roce 1987 následuje tedy přímá numerická simulace [40] s $Re = 3\,300$ (respektive $Re_\tau = 180$), s detailní databází výsledků včetně situace u stěny. Již zmíněná práce z roku 1999 [55] pak doplňuje výpočty o další dva stavy proudění, a to $Re_\tau = 395$ a $Re_\tau = 590$, a je v předkládané práci zvolena jako základní referenční literatura pro úlohu proudění v kanálu, stejně jako je tomu až do současnosti u nesčetných dalších autorů zabývajících se turbulentním prouděním, především validací a verifikací subgridních modelů a LES kódů.

Druhou uvažovanou referenční simulací je ILES provedené pomocí nespojitě Galerkinovy metody konečných prvků bez použití subgridního modelu [11], [12]. Autor se zabývá simulacemi plně turbulentního proudění v kanále s třecím Reynoldsovým číslem $Re_\tau = 180, 395, 590$ a 950 . Je uplatněn *wall-resolved* přístup, tedy diskretizační síť je v blízkosti stěn zjemněna natolik, aby byla turbulentní mezní vrstva dobře zachycena a nebyl tak potřeba žádný stěnový model. Výpočty jsou provedeny se 4. řádem přesnosti DGM ($p = 3$) na takové síti, aby výsledný počet stupňů volnosti odpovídal přibližně rozlišení běžně používanému pro LES. Nespojitá Galerkinova metoda konečných prvků je doplněna Roeovým upwind schématem a symetrickou vnitřní penaltou. Pro časovou diskretizaci je použita implicitní metoda BDF2 stejně jako v předkládané práci, s konstantním časovým krokem. Pro všechny uvedené hodnoty Re_τ dostává autor velmi dobré výsledky, konkrétně profily střední rychlosti a intenzity turbulence.

3.4.3 Parametry simulace

Testovací úloha proudění v kanálu je provedena pro $Re_\tau = 395$ na strukturované hexahedrové síti sestávající z $21 \times 16 \times 16$ elementů v jednotlivých souřadnicových směrech [11]. Výpočet je realizován se 4. řádem nespojitě Galerkinovy metody, přičemž pro tento řád je použito 20 bázových funkcí a tedy každý element poskytuje 20 stupňů volnosti. Výsledný počet stupňů volnosti je tedy $(21 \times 16 \times 16) \times 20 = 107\,520$. Síť je u obtékaných stěn zahuštěna ve směru osy y podle vztahu [11]

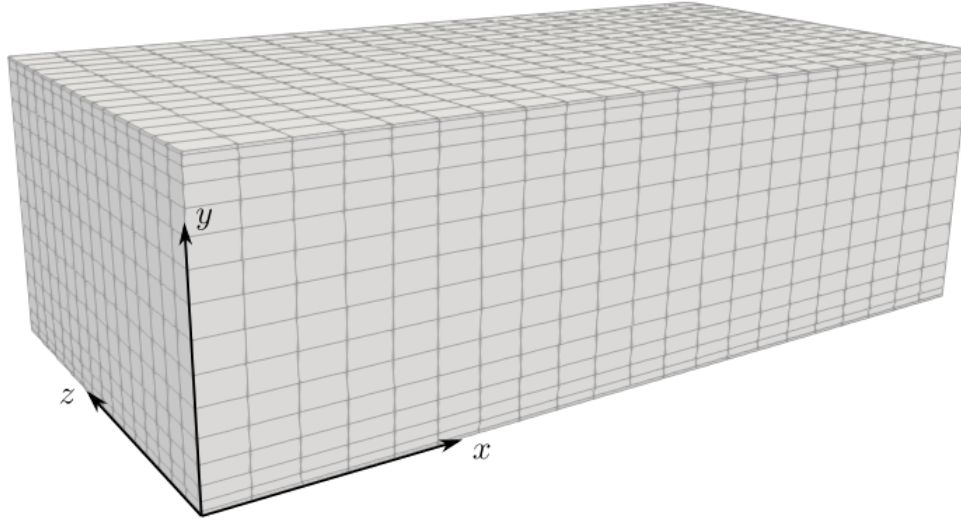
$$y(\xi) = \delta \left(1 - \cos \left(\frac{\pi \xi}{2\delta} \right) \right), \quad \text{kde } \xi \in [0, \delta],$$

a uvedený interval pro ξ je rozdělený rovnoměrně na 9 hodnot (jedná se o polovinu kanálu). V souřadnicových směrech x a z je dělení ekvidistantní, výpočetní síť je znázorněna na obrázku 3.5.

Fyzikální parametry simulace jsou nastaveny následujícím způsobem. Jak již bylo řečeno, úloha je definována třemi parametry: Re_τ , δ a ν . Vybrané třetí Reynoldsovo číslo je $Re_\tau = 395$, polovina výšky kanálu je zvolena $\delta = 0,5$ m tak, aby výška kanálu byla $h = 2\delta = 1$ m. Jako médium uvažujeme vzduch při teplotě 300 K, tedy kinematická viskozita je $\nu = 1,568 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Ostatní parametry vyplývají z těchto tří. Hustota vzduchu je za normálního tlaku při uvedené teplotě $\rho = 1,177 \text{ kg m}^{-3}$, měrná tepelná kapacita při konstantním objemu $c_v = 717,8 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$, Poissonova adiabatická konstanta $\kappa = 1,4$ a tepelná vodivost $k = 2,624 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$.

S ohledem na referenční DNS simulaci [55], která byla provedena jako nestlačitelná, je maximální lokální Machovo číslo v celé výpočtové oblasti nejvýše rovno hodnotě 0,1.

Z databáze dat referenční simulace [55] je možné zjistit přesnou hodnotu třetího Reynoldsova čísla, která činí $Re_\tau = 392,24 \approx 395$. Z tohoto přesného třetího Reynoldsova čísla



Obrázek 3.5: Výpočetní síť pro úlohu proudění mezi dvěma rovnoběžnými nekonečnými deskami: rovnoměrné dělení ve směru os x a z , mírné zahuštění u obtékaných stěn ve směru osy y

určíme podle vztahu (3.20) třecí rychlost u_τ , tedy

$$u_\tau = \frac{Re_\tau \nu}{\delta} = \frac{392,24 \cdot 1,568 \cdot 10^{-5}}{0,5} = 0,0123 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.21)$$

Rychlosti jsou v referenční práci normovány právě třecí rychlostí, normované hodnoty budeme značit hvězdičkou. Nejedná se ale o převod do bezrozměrového tvaru ve smyslu odstavce 3.3.1. Hodnoty, jimiž se normuje, jsou zde jiné.

Dále lze z normovaného profilu střední rychlosti $\langle u^* \rangle$ v práci [55] určit normovanou průměrnou rychlost u_{bulk}^* definovanou jako [61]

$$u_{bulk}^* = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \langle u^*(y) \rangle dy, \quad (3.22)$$

kteřá pro $Re_\tau = 395$ dává hodnotu $u_{bulk}^* = 17,5452$. Rozměrová hodnota potom bude

$$u_{bulk} = u_{bulk}^* u_\tau = 17,5452 \cdot 0,0123 = 0,2158 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.23)$$

Vypočítáme-li nyní Reynoldsovo číslo Re dané úlohy v běžném smyslu, tedy založené na charakteristické rychlosti v kanálu u_{bulk} a charakteristickém rozměru výšky kanálu h , dostaneme hodnotu

$$Re = \frac{u_{bulk} h}{\nu} = \frac{0,2158 \cdot 1}{1,568 \cdot 10^{-5}} = 13764, \quad (3.24)$$

kteřé pravděpodobně dává lepší představu o režimu proudění v kanálu než Re_τ . Navíc může být toto Reynoldsovo číslo v řadě případů potřeba pro nastavení řešiče, který hodnotu Re požaduje jako vstupní parametr. Vztah mezi oběma Reynoldsovými čísly můžeme pak odvodit následujícím způsobem. Ze vztahu (3.20) vyjádříme poměr

$$\frac{\delta}{\nu} = \frac{Re_\tau}{u_\tau}$$

a dosadíme ho do vztahu (3.24), tedy dostaneme

$$Re = \frac{u_{bulk} h}{\nu} = \frac{u_{bulk} 2\delta}{\nu} = 2 u_{bulk} \frac{Re_\tau}{u_\tau},$$

kde podle (3.23)

$$\frac{u_{bulk}}{u_\tau} = u_{bulk}^*$$

a tedy

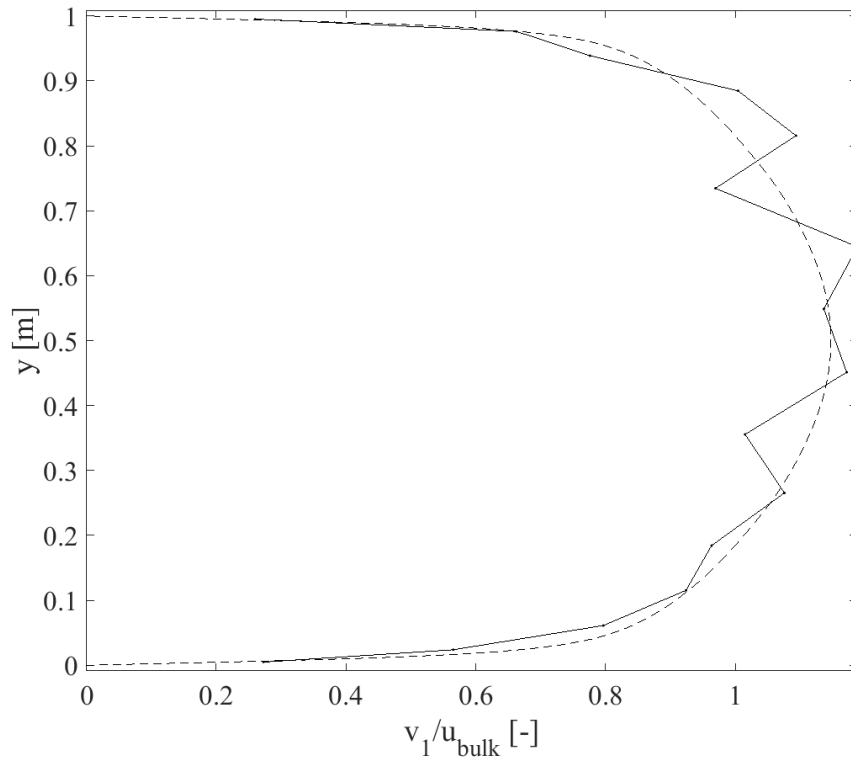
$$Re = 2 u_{bulk}^* Re_\tau = 2 \cdot 17,5452 \cdot 392,24 = 13\,764.$$

Z tohoto vztahu lze v případě potřeby jednoduše určit Reynoldsovo číslo Re pro další případy řešené v práci [55].

3.4.4 Počáteční a okrajové podmínky

Počáteční podmínky

Vzhledem k velké výpočetní náročnosti 3D úlohy jsou počáteční podmínky zadány tak, aby vývoj proudového pole do požadovaného stavu netrval zbytečně dlouhou dobu. Proto je na začátku simulace předepsán v celé výpočtové oblasti vyvinutý turbulentní profil střední rychlosti $\langle u \rangle^0$ z referenční práce [55], který je perturbován, což podnítl mnohem rychlejší vývoj turbulentních fluktuací, než kdybychom předepsali hladký střední profil a vývoj fluktuací byl odkázán pouze na numerické nepřesnosti. Složky vektoru rychlosti tedy zadáme v čase $t = 0$



Obrázek 3.6: Příklad počátečního rychlostního profilu v konkrétním místě (x, z) : hladký střední profil podle [55] (čárkovaně) a náhodně perturbovaný počáteční profil (plnou čarou)

jako [35]

$$\begin{aligned}v_1^0(x, y, z) &= \langle u(y) \rangle^0 + 0,1 u_{bulk} \psi, \\v_2^0(x, y, z) &= 0,1 u_{bulk} \psi, \\v_3^0(x, y, z) &= 0,1 u_{bulk} \psi,\end{aligned}$$

kde u_{bulk} je referenční hodnota (3.23) a ψ je náhodná funkce zapsaná v softwaru Matlab vzorcem

$$\psi = 2 \text{rand}(1) - 1 \in [-1, 1].$$

Funkce ψ je volána v každém uzlu sítě a pro každou ze tří složek rychlosti vždy znovu a hladký profil střední rychlosti je tak v každém uzlu náhodně vychýlen o nejvýše 10% hodnoty u_{bulk} . Počáteční profil složky rychlosti v_1 podél normály ke stěně může v konkrétním místě $[x, z]$ vypadat například jako na obrázku 3.6. Rychlost je zde normována hodnotou u_{bulk} (3.23). Počáteční vektor konzervativních proměnných pak bude definován následujícím způsobem

$$\mathbf{w}^0(x, y, z) = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1^0 \\ \rho v_2^0 \\ \rho v_3^0 \\ \frac{p}{\kappa-1} + \frac{1}{2}\rho((v_1^0)^2 + (v_2^0)^2 + (v_3^0)^2) \end{bmatrix}.$$

Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou díky geometrii úlohy velmi jednoduché.

Ve směru proudu:

- periodicita, tedy hodnoty všech veličin vektoru konzervativních proměnných jsou kopírovány ze vstupní hranice na výstupní a naopak.

Napříč proudem (*spanwise*):

- periodicita, veličiny kopírovány z jedné strany kanálu na druhou a naopak.

Stěny:

- horní i dolní stěna kanálu jsou považovány za pevnou, nepropustnou, dokonale hladkou a vazkou stěnu, tedy předepisujeme nulovou rychlost $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ pro $y = 0$ a $y = h$,

- stěny jsou adiabatické a tedy dále předepisujeme nulový tepelný tok stěnou v podobě $\frac{\partial T}{\partial n} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial y_i} n_i = 0$, kde n_i je i -tá složka jednotkového vektoru vnější normály k příslušné stěně. Zde je potřeba mít na paměti, že v řadě prací zabývajících se simulacemi proudění v kanálu je stěna izotermální a výsledky simulací či experimentů jsou odlišné.

3.4.5 Časový krok, vývoj simulace a sběr dat

Časový krok pro vývoj simulace i následný sběr dat pro výpočet statistických hodnot je $\Delta t = 0,0097$ s. Jeho hodnota je vyplývá ze vztahu

$$\Delta t = \min_k \left\{ \frac{CFL}{\frac{|\lambda_{x_1,k}| + |\lambda_{x_2,k}| + |\lambda_{x_3,k}|}{\Delta l_k}} \right\},$$

kde volíme $CFL = 1$, $\lambda_{x_i,k} = |v_i| + a$ pro $i = 1, 2, 3$, a je rychlost zvuku a Δl_k je charakteristická velikost kontrolního elementu Ω_k . Uvedený vztah je běžnou CFL podmínkou stability v případě explicitních schémat, u implicitní metody zde slouží pouze k výpočtu časového kroku, který ale může být značně navýšen volbou většího CFL. Časový krok je

nastaven dostatečně malý, aby jím nebyl omezován vývoj turbulentních fluktuací. Porovnejme ho s hodnotou uvedenou pro stejnou úlohu v referenční práci [11], kde je prezentován bezrozměrový časový krok $\Delta t^+ = 2 \cdot 10^{-3}$ určený vztahem

$$\Delta t^+ = \frac{u_\tau \Delta t}{\delta}.$$

Pro hodnoty v předkládané práci dostaneme

$$\Delta t^+ = \frac{0,0123 \cdot 0,0097}{0,5} \doteq 2,4 \cdot 10^{-4} \ll 2 \cdot 10^{-3},$$

tedy hodnotu přibližně o řád menší než v referenční práci. Časový krok tedy budeme považovat za dostatečně malý pro dobrý vývoj simulace.

Pro dosažení statisticky ustáleného stavu byla simulace prováděna po dobu 70 000 časových iterací, což odpovídá fyzikálnímu času

$$t_0 = 70\,000 \cdot \Delta t = 70\,000 \cdot 0,0097 = 697 \text{ s} \doteq 11,3 \text{ min.}$$

Sběr dat pro statistické vyhodnocení výsledků simulace pak následuje se stejným časovým krokem $\Delta t = 0,0097$ s po dobu dalších 60 000 časových iterací, tedy po fyzikální čas

$$t_1 = 60\,000 \cdot \Delta t = 60\,000 \cdot 0,0097 = 582 \text{ s} \doteq 9,7 \text{ min.}$$

Aktuální stav proudového pole je ukládán každých 100 iterací, tedy přibližně každou 1 s skutečného času vývoje proudění. Tímto způsobem je vytvořen soubor 600 vzorků kompletního okamžitého stavu všech veličin proudového pole a ten je základem pro statistické vyhodnocení simulace.

Statisticky ustálený stav proudění identifikujeme podle průběhu celkového smykového napětí $\tau(y)$ podél normály ke stěnám kanálu. Celkové smykové napětí v turbulentním proudě je dáno součtem vazkého napětí

$$\mu \frac{d\langle v_1 \rangle}{dy} \quad (3.25)$$

a Reynoldsova napětí

$$-\rho \langle v'_i v'_j \rangle, \quad (3.26)$$

tedy

$$\tau(y) = \mu \frac{d\langle v_1 \rangle}{dy} - \rho \langle v'_i v'_j \rangle, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad (3.27)$$

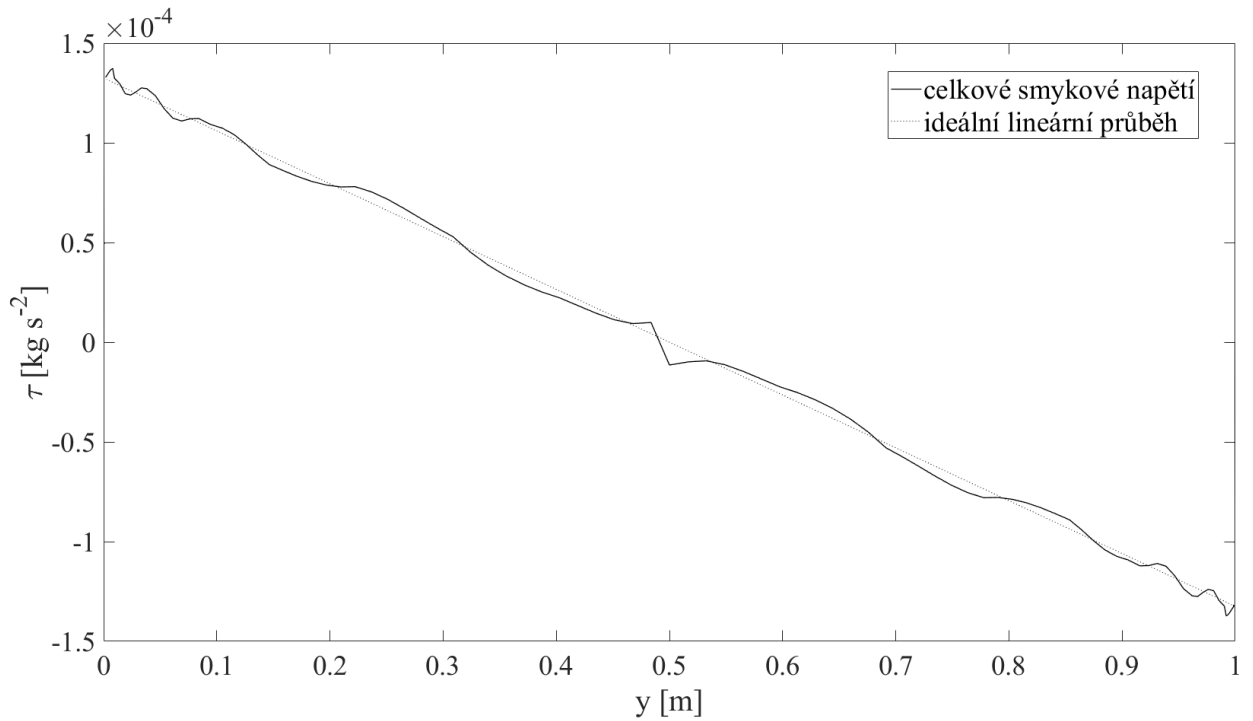
a jeho průběh je v případě vyvinutého, statisticky ustáleného turbulentního proudění lineární [61]. Lze totiž ukázat, že platí

$$\tau(y) = \tau_w \left(1 - \frac{y}{\delta}\right). \quad (3.28)$$

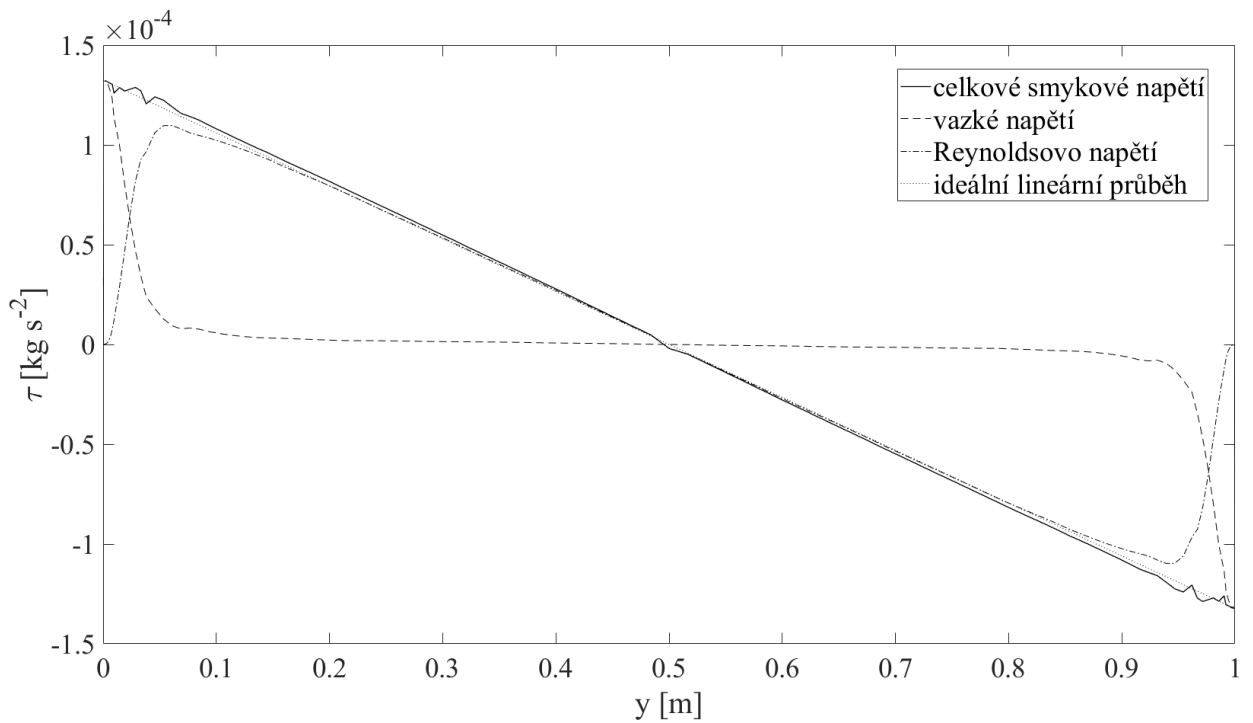
Celkové smykové napětí (3.27) vypočítáme následujícím způsobem

$$\tau(y) = \mu \frac{d\langle v_1 \rangle}{dy} - \rho \sqrt{\langle v'_1 v'_2 \rangle^2 + \langle v'_1 v'_3 \rangle^2 + \langle v'_2 v'_3 \rangle^2},$$

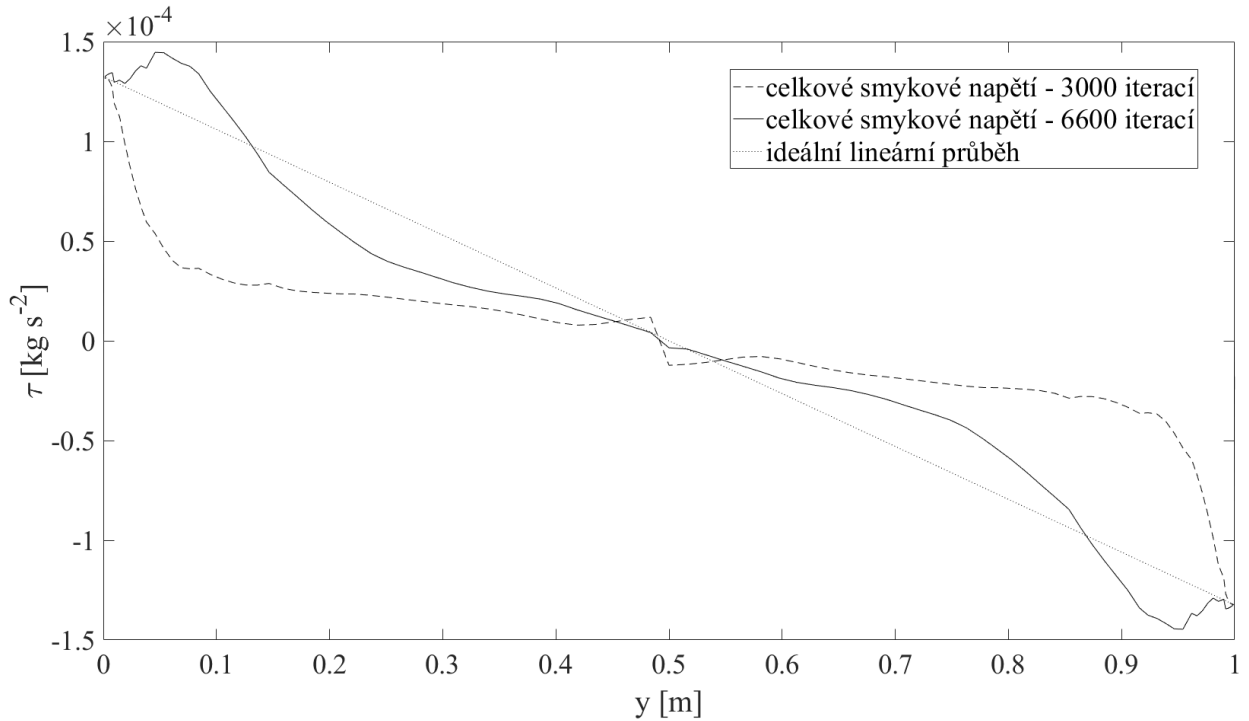
kde výrazy $\langle v_1 \rangle = \langle v_1(y) \rangle$, $\langle v'_1 v'_2 \rangle$, $\langle v'_1 v'_3 \rangle$ a $\langle v'_2 v'_3 \rangle$ vyčíslíme analogicky podle vztahů (3.31), (3.35) a (3.36) popsanych detailně v odstavci 3.4.7.



Obrázek 3.7: Průběh celkového smykového napětí $\tau(y)$ podél normály ke stěně kanálu (plnou čarou) po dosažení statisticky ustáleného stavu proudění, vyhodnoceno v 20 000 iterací; teoretický lineární průběh napětí (tečkovaně)



Obrázek 3.8: Průběh celkového smykového napětí $\tau(y)$ podél normály ke stěně kanálu (plnou čarou) - průměrováno přes celý soubor statisticky ustálených stavů, vazké napětí (čárkovaně) a Reynoldsovo napětí (čerchovaně); teoretický lineární průběh napětí (tečkovaně) podle (3.28)



Obrázek 3.9: Příklad průběhu celkového smykového napětí $\tau(y)$ podél normály ke stěně kanálu v případě nevyvinutého stavu proudění, vyhodnoceno v 3 000 (čárkovaně) a 6 000 (plnou čarou) iterací; teoretický lineární průběh napětí (tečkovaně)

Poznamenejme, že výraz (3.25) je zcela v souladu s definicí tenzoru vazkých napětí σ_{ij} , uvedenou v matematickém modelu v odstavci 3.1.2. Lze snadno ukázat, že v případě statisticky jednodimenzionálního proudění budou všechny složky $\langle \sigma_{ij} \rangle$ nulové kromě $\langle \sigma_{ij} \rangle = \mu d\langle v_1 \rangle / dy$.

Po zpětném vyhodnocení celkového smykového napětí se ukazuje, že proudění je statisticky ustálené již po přibližně 20 000 iterací provedených s uvedeným časovým krokem. Průběh celkového napětí v 20 000 iterací je znázorněn na obrázku 3.7, kdy je již celkový charakter průběhu $\tau(y)$ možné považovat za lineární. Zdůrazněme, že se jedná o vyhodnocení pouze z jednoho konkrétního časového okamžiku, takže složky Reynoldsova napětí $-\rho \langle v'_i v'_j \rangle$ jsou průměrovány pouze ve směrech os x a z , tedy $-\rho \langle v'_i v'_j \rangle_{xz}$, nikoliv v čase. Zprůměrujeme-li hodnoty přes více časových vzorků, dostaneme poměrně hladký průběh napětí. Na obrázku 3.8 vidíme průměrované celkové napětí pro celý soubor 600 vzorků určených pro vyhodnocení simulace. Příklad celkového napětí v případě nevyvinutého proudění je pro ilustraci uveden na obrázku 3.9, konkrétně pro 3 000 a 6 000 iterací.

3.4.6 Zdrojové členy

Jak bylo uvedeno v odstavci 3.4.1, proudění mezi dvěma rovnoběžnými deskami je řízeno konstantním tlakovým spádem. Vzhledem k periodické okrajové podmínce ve směru proudu není možné nastavit tlakový spád běžným způsobem, tedy zadáním vyššího tlaku na vstupu a nižšího na výstupu. Na vstupní i výstupní hranici a tedy i v celé výpočtové oblasti je tlak stejný. Proudění tedy musí být řízeno zdrojovými členy f_1 a f_2 v systému Navierových-Stokesových rovnic (3.1) - (3.3). Ty zajistí, aby se třetí rychlost u_τ , a tím i odpovídající třetí Reynoldsovo číslo Re_τ , udrželi na požadovaných hodnotách, respektive velmi blízko

nich, absolutní přesnosti lze těžko dosáhnout. Existuje více strategií, mezi nejčastější patří použití konstantního tlakového gradientu a konstantního hmotnostního průtoku [68]. Zvolme konstantní tlakový gradient. Zdrojový člen f_1 se vyskytuje pouze v hybnostní rovnici ve směru proudu (3.2) a definujeme ho jako prostorově průměrovaný tlakový gradient

$$f_1 = - \left\langle \frac{dp}{dx} \right\rangle_{xz}.$$

Z rovnováhy sil v kanálu vyplývá pro tlakový gradient vztah [61]

$$- \left\langle \frac{dp}{dx} \right\rangle_{xz} = \frac{\tau_w}{\delta}.$$

Dosažením za smykové napětí na stěně ze vztahu (3.17), tedy $\tau_w = u_\tau^2 \rho$, dostaneme

$$f_1 = - \left\langle \frac{dp}{dx} \right\rangle_{xz} = \frac{u_\tau^2 \rho}{\delta}.$$

Třecí rychlost u_τ je pro danou úlohu konstantní, polovina výšky kanálu δ také a vzhledem k prakticky nestlačitelným podmínkám ($Ma \leq 0, 1$) můžeme považovat i hustotu za přibližně konstantní, a tedy $\rho = \rho_{ref}$. Stejně jako v práci [35] se ale tento zdrojový člen ukazuje nedostatečným, protože proudění se postupně urychluje. Zdrojový člen v uvedené podobě proto budeme dynamicky měnit v závislosti na aktuálním stavu proudového pole v každém časovém kroku simulace t_n následujícím způsobem. Je-li $u_{bulk}(t_n)$ hodnota průměrné střední rychlosti $\langle u(y, t) \rangle_{xz}$ v časovém kroku t_n , vypočítaná analogicky ke vztahu (3.22), zdrojový člen v časovém kroku t_{n+1} použijeme ve tvaru

$$f_1 = \frac{u_\tau^2 \rho_{ref}}{\delta} \cdot \frac{u_{bulk} - u_{bulk}(t_n)}{\Delta t_n},$$

kde u_{bulk} je požadovaná hodnota podle [55] a $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ je velikost časového kroku. Tedy pokud $u_{bulk}(t_n) < u_{bulk}$, zdrojový člen bude kladný a proudění urychlováno, pokud naopak $u_{bulk}(t_n) > u_{bulk}$, záporný zdrojový člen proudění zpomalí. Tímto způsobem bude udržována požadovaná hodnota u_{bulk} .

Zdrojový člen f_2 v rovnici (3.3) má tvar [2]

$$f_2 = - \left\langle \frac{dp}{dx} \right\rangle_{xz} u_{bulk} = \frac{u_\tau^2 \rho_{ref}}{\delta} u_{bulk}.$$

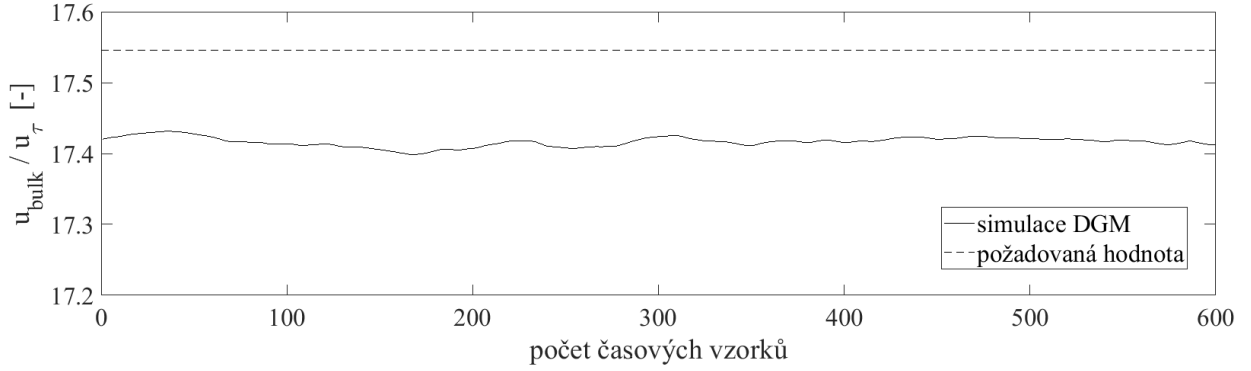
Provedeme-li převod zdrojových členů do bezrozměrového tvaru stejným způsobem, jako je převeden systém Navierových-Stokesových rovnic v odstavci 3.3.1, dostaneme

$$f_1 = \frac{u_\tau^2}{\delta} \frac{u_{bulk} - u_{bulk}(t_n)}{\Delta t_n},$$

$$f_2 = \frac{2u_\tau^2}{v_{ref}^2} u_{bulk},$$

kde $u_\tau = 0, 0123 \text{ m s}^{-1}$ je rozměrová hodnota charakteristické třecí rychlosti (3.21) a hodnoty u_{bulk} a Δt_n jsou bezrozměrové.

Na obrázku 3.10 je zobrazen vývoj aktuální hodnoty $u_{bulk}^*(t_n)$ v každém časovém vzorku ze souboru dat. Je vidět, že rychlost je trvale podhodnocená, ale napříč celým souborem v zásadě vyrovnaná. Rozdíl oproti požadované hodnotě je velmi malý, okamžité hodnoty



Obrázek 3.10: Vývoj aktuální hodnoty $u_{bulk}^* = u_{bulk}/u_\tau$ napříč souborem 600 časových vzorků (plnou čarou); požadovaná hodnota podle [55] (čárkovaně)

jsou v průměru o 0,75% menší než ideální hodnota $u_{bulk}^* = 17,5452$. Průměrná bezrozměrová hodnota činí $u_{bulk}^{*DGM} \doteq 17,413$, rozměrová pak $u_{bulk}^{DGM} = u_{bulk}^{*DGM} \cdot u_\tau = 17,413 \cdot 0,0123 = 0,2142$. Označení DGM zde zdůrazňuje, že se jedná o skutečnou hodnotu získanou jako výsledek provedené simulace, a nikoliv o referenční hodnotu z práce [55]. Skutečné Reynoldsovo číslo podle definice (3.24) je potom

$$Re^{DGM} = \frac{u_{bulk}^{DGM} h}{\nu} = \frac{0,2142 \cdot 1}{1,568 \cdot 10^{-5}} = 13\,661, \quad (3.29)$$

což představuje 99,3% ideální hodnoty Re (3.24).

3.4.7 Statistické vyhodnocení simulace

Reálné turbulentní proudění je vždy nestacionární, tedy okamžité hodnoty veličin proudového pole jsou v čase proměnné i po dosažení ustáleného stavu. Simulace LES, a samozřejmě i ILES nebo *under-resolved*, přesně zachycují část škály skutečných vírových struktur a tedy jsou nutně také nestacionární. Pro získání výsledků z takové nestacionární simulace je nutné nejprve dosáhnout statisticky ustáleného stavu, jak bylo popsáno v odstavci 3.4.5, samozřejmě za předpokladu, že pro danou úlohu ustálený stav vůbec existuje. V dalším běhu numerické simulace jsou pak okamžité hodnoty sice stále časově proměnné, ale jejich statistické hodnoty již jsou konstantní, a právě ty použijeme pro celkové vyhodnocení simulace. V případě proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami nás zajímá především profil střední rychlosti ve směru proudu a střední profily intenzity turbulence ve všech třech souřadnicových směrech.

Vzhledem k velmi hrubé diskretizační síti a vysokému řádu nespojitě Galerkinovy metody není možné vyhodnotit požadované veličiny pouze v uzlech sítě, došlo by tak ke ztrátě značné části podrobných informací, obsažených v každém kontrolním elementu. Proto pomyšlně doplníme mezi každé dva uzly sítě dalších 5 rovnoměrně rozmístěných bodů v každém souřadnicovém směru, a pomocí koeficientů bázeových funkcí v nich vypočítáme hodnoty potřebných veličin. Označme skutečný počet elementů sítě jako

$$n_{x0} = 21, \quad n_{y0} = 16, \quad n_{z0} = 16.$$

Při vyhodnocení budeme pracovat s maticí hodnot v uzlech (a v doplněných bodech) o rozměrech

$$n_x = 5n_{x0} + n_{x0} + 1 = 127, \quad n_y = 5n_{y0} + n_{y0} + 1 = 97, \quad n_z = 5n_{z0} + n_{z0} + 1 = 97.$$

Větší počet hodnot již nemá pro čtvrtý řád DGM smysl.

Profily střední rychlosti

Pro získání středních rychlostí $\langle v_i(y) \rangle$, $i = 1, 2, 3$, jsou okamžité rychlosti $v_i(x, y, z, t)$ pro každé $y = \text{konst.}$ průměrovány ve směrech souřadnicových os x a z a v čase, tedy přes všech $n_t = 600$ vzorků v souboru. Vzhledem k tomu, že matice hodnot je ve směrech x a z ekvidistantní, můžeme použít jednoduše aritmetický průměr. Prostorově střední i -tá složka rychlosti v čase t_n pro konkrétní $y = \text{konst.}$ tedy bude

$$\langle v_i(y, t_n) \rangle_{xz} = \frac{1}{n_x n_z} \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_z} v_i(x_j, y, z_k, t_n). \quad (3.30)$$

Vzhledem k tomu, že proudění je statisticky symetrické podle osy kanálu $y = \delta$, jsou hodnoty průměrovány ještě v obou polovinách kanálu, čímž se vlastně zdvojnásobí soubor dat.

Časový krok, se kterým byly pořízeny jednotlivé vzorky, je konstantní ($100 \times \Delta t$, viz odstavec 3.4.5), i zde tak můžeme použít aritmetický průměr. Dostaneme

$$\langle v_i(y) \rangle = \langle \langle v_i(y, t_n) \rangle_{xz} \rangle_t = \frac{1}{n_t} \sum_{n=1}^{n_t} \langle v_i(y, t_n) \rangle_{xz}. \quad (3.31)$$

Takto získaný profil střední rychlosti $\langle v_1(y) \rangle$, normovaný třetí rychlostí $u_\tau = 0,0123$ (3.21), je v porovnání s referenční přímkou numerickou simulací [55] uvedený na obrázku 3.11. Na první pohled je zřejmý celkově plošší charakter získaného profilu, a dále i menší strmost profilu u stěny kanálu, vedoucí k nižší hodnotě derivace $d\langle v_1 \rangle / dy$ na stěně. To je zřejmé i z grafu na obrázku 3.12, kde je vykreslena derivace první složky rychlosti podle normály ke stěně $d\langle v_1(y) \rangle / dy$ pro polovinu kanálu. Mírné zakolísání v monotonii derivace v místě okolo $y/\delta \approx 0,15$ je v profilu $\langle v_1 \rangle$ (obr. 3.11) i při bližším prozkoumání prakticky nezatelné a může být způsobené pouhým nedostatečným rozsahem souboru dat použitému ke statistickému vyhodnocení. Profily středních rychlostí $\langle v_2(y) \rangle$ a $\langle v_3(y) \rangle$ jsou prezentovány na obrázcích 3.13 a 3.14. Vzhledem k hlavnímu směru proudu ve směru osy x očekáváme, že se tyto rychlosti budou blížit nulovým hodnotám, což je v porovnání s hodnotami $\langle v_1(y) \rangle$ v zásadě splněno. Maximum $\langle v_2(y) \rangle$, respektive $\langle v_3(y) \rangle$, činí 0,001%, respektive 0,14%, z maxima $\langle v_1(y) \rangle$. Dosažení statisticky nulových hodnot by vyžadovalo teoreticky nekonečně velký soubor časových vzorků.

Dále uveďme vyhodnocení bezrozměrové rychlosti $\langle u^+ \rangle$, definované jako [61]

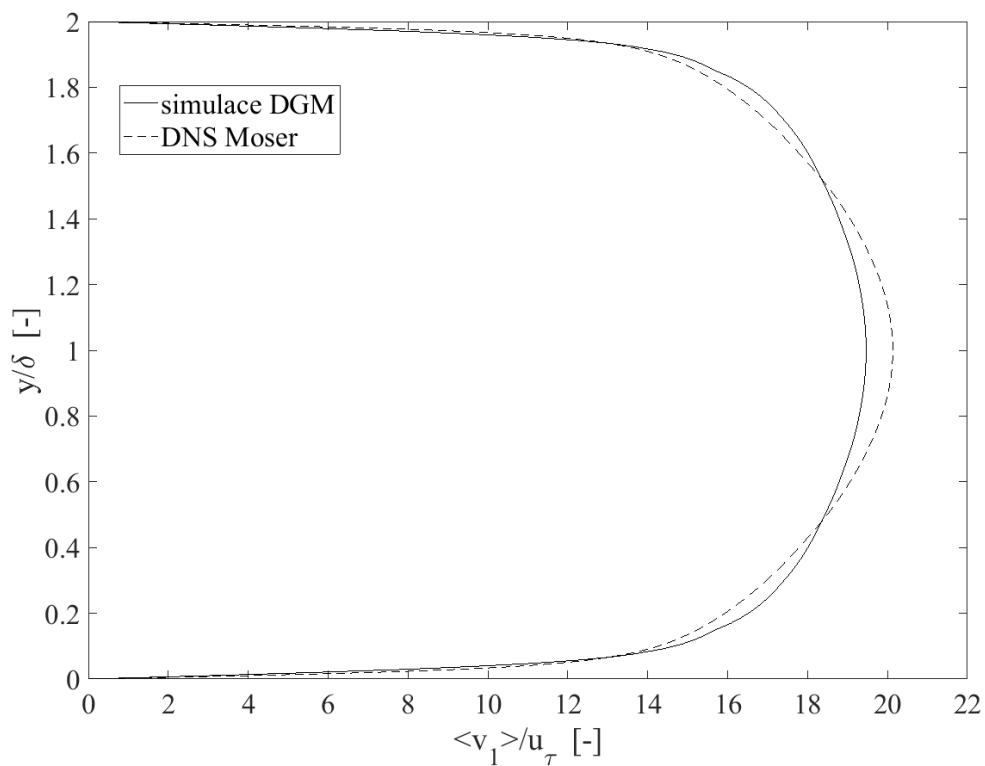
$$\langle u^+ \rangle = \frac{\langle v_1 \rangle}{u_\tau}, \quad (3.32)$$

v závislosti na bezrozměrové vzdálenosti od stěny měřené ve stěnových jednotkách (*wall units*), určené vztahem [61]

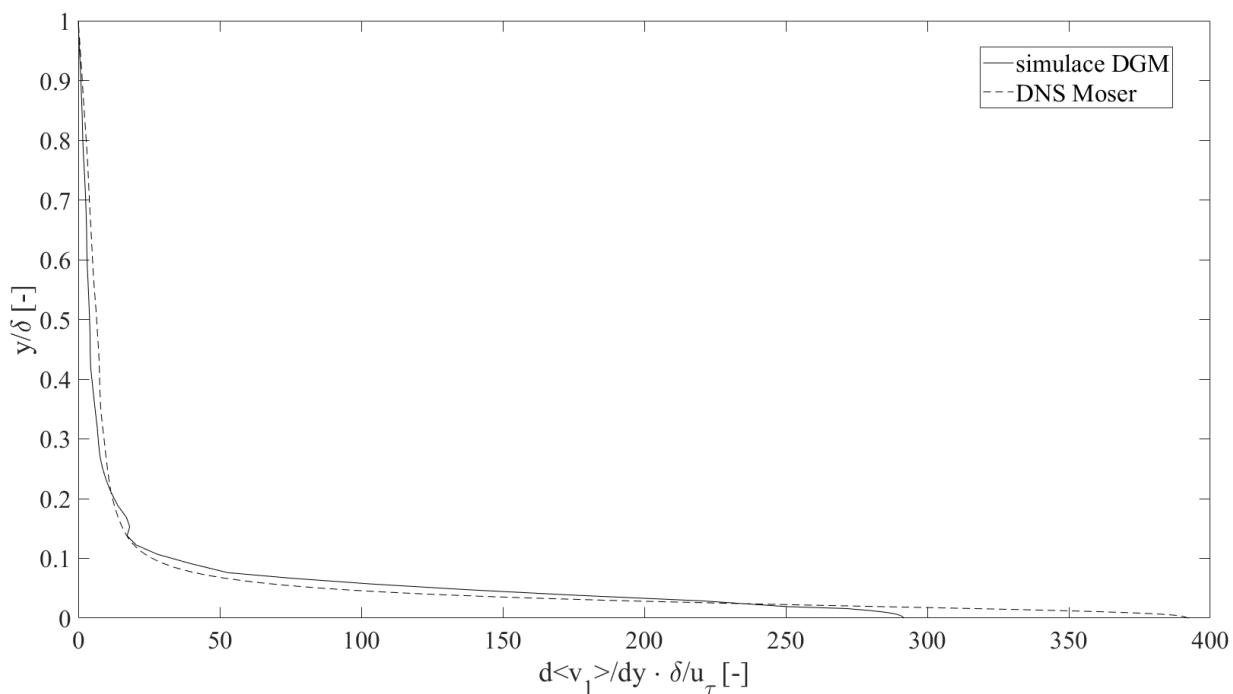
$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}.$$

Poznamenejme, že takto definované $\langle u^+ \rangle$ odpovídá výše uvedenému $\langle v_1 \rangle / u_\tau$, které ale nebylo tak označováno. Důvodem je fakt, že se jednalo o normování libovolnou referenční rychlostí, která byla zvolena jako u_τ . V případě $\langle u^+ \rangle$ už to musí být nutně právě u_τ , jak to vyžaduje definice (3.32).

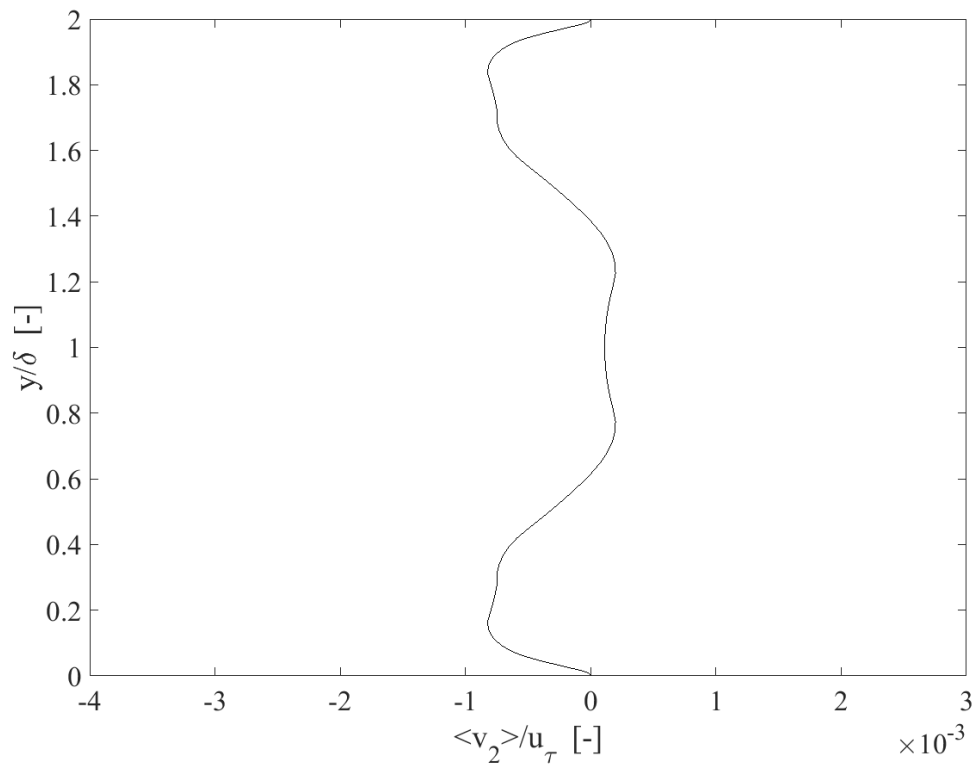
Porovnání získané závislosti $\langle u^+(y^+) \rangle$ s referenčními daty z práce [55] je uvedeno na obrázku 3.15, a to pro polovinu výšky kanálu, tedy pro $y \in [0, \delta]$. Jsou zde uvedeny



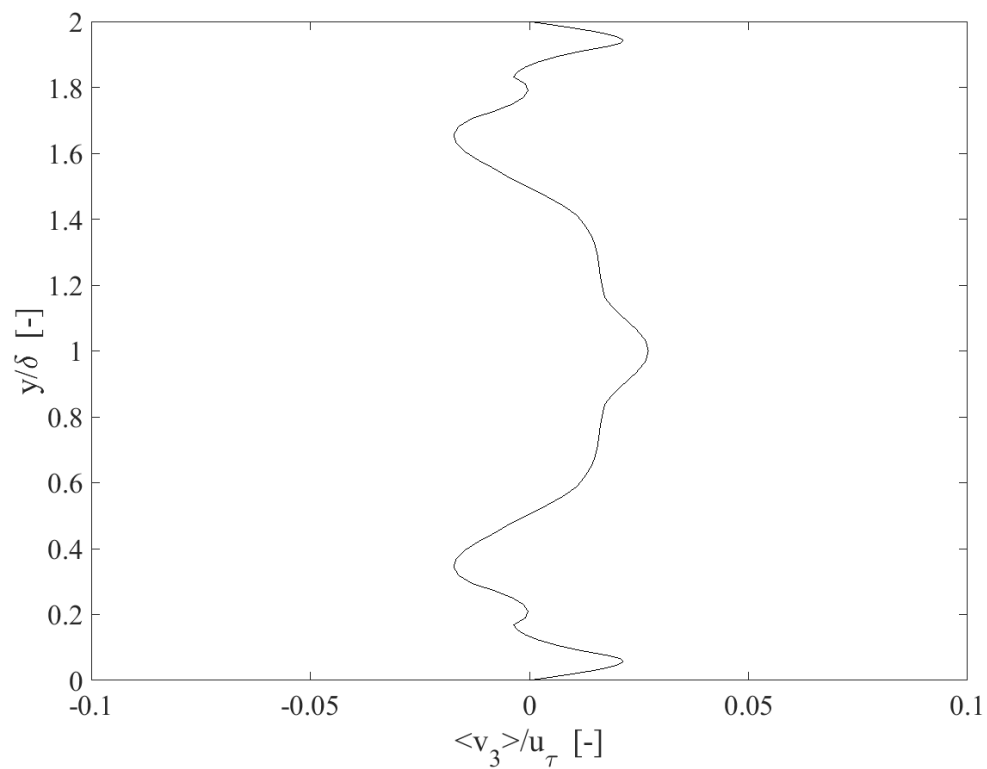
Obrázek 3.11: Profil střední rychlosti $\langle v_1(y) \rangle$ podél normály ke stěnám kanálu, normovaný třecí rychlostí u_τ (plnou čarou); odpovídající profil z přímé numerické simulace [55] (čárkovaně)



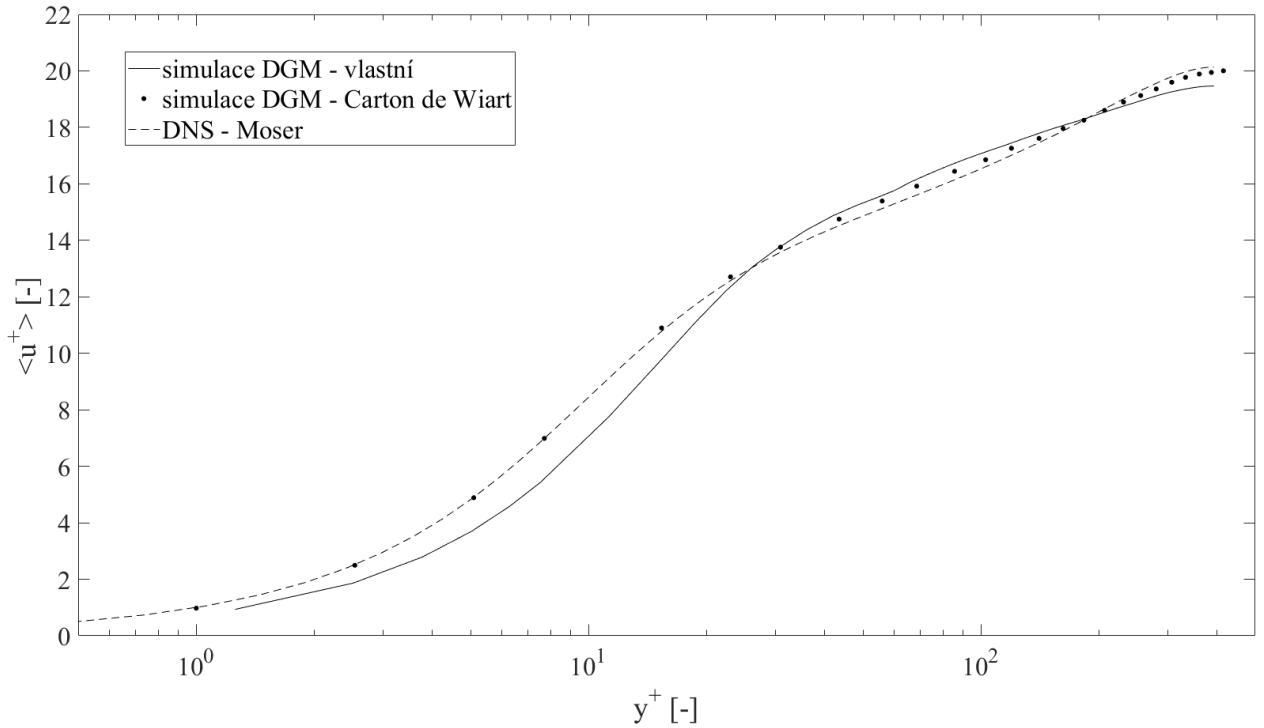
Obrázek 3.12: Derivace střední rychlosti $\langle v_1(y) \rangle$ podle normály ke stěnám kanálu, normovaná, pro polovinu kanálu (plnou čarou); odpovídající hodnoty z přímé numerické simulace [55] (čárkovaně)



Obrázek 3.13: Profil střední rychlosti $\langle v_2(y) \rangle$ podél normály ke stěnám kanálu, normovaný třecí rychlostí u_τ



Obrázek 3.14: Profil střední rychlosti $\langle v_3(y) \rangle$ podél normály ke stěnám kanálu, normovaný třecí rychlostí u_τ



Obrázek 3.15: Závislost bezrozměrové rychlosti u^+ na bezrozměrové vzdálenosti od stěny ve stěnových jednotkách y^+ pro polovinu kanálu (plnou čarou); výsledky referenční DGM-ILES simulace [12] (body), odpovídající referenční hodnoty z DNS [55] (čárkovaně)

i výsledky z druhé uvažované referenční simulace - ILES pomocí nespojitě Galerkinovy metody [11], [12]. Odlišnosti od DNS v zásadě kopírují situaci na obrázku 3.11. Velmi dobrá shoda referenční DGM-ILES simulace [12] je komentována později v souvislosti s dalšími výsledky.

Pro zhodnocení výsledků provedené numerické simulace je klíčová situace u obtékaných stěn, konkrétně derivace střední rychlosti na stěně $d\langle v_1 \rangle / dy|_{wall}$. Tato hodnota je z profilu střední rychlosti $\langle v_1 \rangle$ vyčíslena pomocí konečné diference na $7,18 \text{ s}^{-1}$. Z grafů na obrázcích 3.11 a 3.12 je vidět, že velikost derivace je menší, než o čekávaná hodnota odpovídající referenční práci [55], přesněji činí 74% ideální hodnoty. Vypočítáme-li nyní skutečnou hodnotu třecí rychlosti podle vztahu (3.19), dostaneme

$$u_{\tau}^{DGM} = \sqrt{\nu \frac{d\langle v_1 \rangle}{dy}} \Big|_{wall} = \sqrt{1,568 \cdot 10^{-5} \cdot 7,18} \doteq 0,0106 \text{ m s}^{-1}.$$

Označení DGM zde zdůrazňuje, že se jedná o skutečnou hodnotu získanou jako výsledek provedené simulace, a nikoliv o referenční hodnotu třecí rychlosti (3.21) z práce [55]. Pro normování veškerých rychlostních charakteristik v této kapitole je použita referenční hodnota $u_{\tau} = 0,0123$ (3.21). Skutečné třecí Reynoldsovo číslo (3.20) je potom

$$Re_{\tau}^{DGM} = \frac{u_{\tau}^{DGM} \delta}{\nu} = \frac{0,0106 \cdot 0,5}{1,568 \cdot 10^{-5}} \doteq 338, \quad (3.33)$$

což představuje 86% požadované hodnoty $Re_{\tau} = 392,24$.

Reynoldsova napětí a intenzita turbulence

Další a detailnější informace o výsledcích numerické simulace získáme vyhodnocením turbulentních fluktuací, a to prostřednictvím Reynoldsových napětí a intenzity turbulence. Reynoldsovo napětí $-\rho\langle v'_i v'_j \rangle$, $i, j = 1, 2, 3$, vzniká v důsledku přenosu hybnosti v tekutině turbulentními fluktuacemi rychlosti. Je zvykem označovat jako Reynoldsovo napětí pouze výraz $\langle v'_i v'_j \rangle$ [61] a ten také vyhodnocovat. Označuje se písmenem R , tedy $R_{ij} = \langle v'_i v'_j \rangle$, a přesněji řečeno se jedná o složky tenzoru Reynoldsových napětí \mathbf{R} . Vzhledem k symetrii tenzoru platí $\langle v'_i v'_j \rangle = \langle v'_j v'_i \rangle$ a v maticovém zápisu můžeme tenzor Reynoldsových napětí zapsat v podobě

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \langle v'_1 v'_1 \rangle & \langle v'_1 v'_2 \rangle & \langle v'_1 v'_3 \rangle \\ \langle v'_1 v'_2 \rangle & \langle v'_2 v'_2 \rangle & \langle v'_2 v'_3 \rangle \\ \langle v'_1 v'_3 \rangle & \langle v'_2 v'_3 \rangle & \langle v'_3 v'_3 \rangle \end{bmatrix}.$$

Tenzor můžeme rozložit na izotropní část $2/3 k \delta_{ij}$ a anizotropní část $\langle v'_i v'_j \rangle - 2/3 k \delta_{ij}$, kde

$$k = \frac{1}{2} \langle v'_k v'_k \rangle = \frac{1}{2} (\langle v'_1 v'_1 \rangle + \langle v'_2 v'_2 \rangle + \langle v'_3 v'_3 \rangle)$$

je turbulentní kinetická energie. Tedy v maticovém zápisu dostaneme

$$\mathbf{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \langle v'_k v'_k \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \langle v'_k v'_k \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \langle v'_k v'_k \rangle \end{bmatrix}}_{\text{izotropní část}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \langle v'_1 v'_1 \rangle - \frac{1}{3} \langle v'_k v'_k \rangle & \langle v'_1 v'_2 \rangle & \langle v'_1 v'_3 \rangle \\ \langle v'_1 v'_2 \rangle & \langle v'_2 v'_2 \rangle - \frac{1}{3} \langle v'_k v'_k \rangle & \langle v'_2 v'_3 \rangle \\ \langle v'_1 v'_3 \rangle & \langle v'_2 v'_3 \rangle & \langle v'_3 v'_3 \rangle - \frac{1}{3} \langle v'_k v'_k \rangle \end{bmatrix}}_{\text{anizotropní část}}.$$

Pro posouzení výsledků simulace použijeme diagonální prvky anizotropní části tenzoru Reynoldsových napětí, označme je písmenem A , tedy

$$A_{ii} = \langle v'_i v'_i \rangle - \frac{1}{3} (\langle v'_1 v'_1 \rangle + \langle v'_2 v'_2 \rangle + \langle v'_3 v'_3 \rangle) = R_{ii} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 R_{kk}. \quad (3.34)$$

Jednotlivá Reynoldsova napětí vystupující ve výrazu (3.34) vypočítáme následujícím způsobem [35]

$$R_{ii} = \langle v'_i v'_i \rangle = \langle v_i v_i \rangle - \langle v_i \rangle \langle v_i \rangle, \quad (3.35)$$

to znamená průměrováním okamžitých hodnot složek rychlosti a jejich součinů. Střední rychlosti $\langle v_i \rangle = \langle v_i(y) \rangle_{xzt}$ jsme již určili výše podle vztahů (3.30) a (3.31), analogicky vyčíslíme i součin

$$\langle v_i v_i \rangle = \langle v_i(y) v_i(y) \rangle_{xzt} = \frac{1}{n_t} \sum_{n=1}^{n_t} \left(\frac{1}{n_x n_z} \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_z} v_i(x_j, y, z_k, t_n) v_i(x_j, y, z_k, t_n) \right) \quad (3.36)$$

pro konkrétní $y = \text{konst}$.

V databázi příslušející k referenční práci [55] jsou uvedena Reynoldsova napětí $R_{ii}^M(y)$ získaná z přímé numerické simulace. Horním indexem M označujeme příslušnost veličiny k referenční práci (Moser aj.). Z Reynoldsových napětí stejným způsobem jako v rovnici (3.34)

určíme diagonální anizotropní prvky

$$A_{ii}^M = R_{ii}^M - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 R_{kk}^M.$$

Srovnání diagonálních prvků anizotropní části tenzoru Reynoldsových napětí získaných z provedené numerické simulace a z referenční DNS simulace je uvedeno na obrázku 3.16, hodnoty A_{ii} jsou normovány kvadrátem třetí rychlosti $u_\tau = 0,0123$, stejně jako referenční veličiny, a křivky jsou vykresleny pro polovinu kanálu. Celkový charakter křivek je rozumný. V oblasti u stěny, přibližně do $y/\delta = 0,4$, jsou Reynoldsova napětí nadhodnocena a maxima jsou pro všechny tři složky posunuta dále od stěny. Viditelná lokální maxima, vyskytující se na získaných křivkách, odpovídají hranicím elementů výpočetní sítě a jsou způsobena nespojitostí Galerkinovy metody právě na hranicích kontrolních elementů.

Určeme dále takzvané *root mean square turbulence intensities*. Značí se nejčastěji jako $\langle v_i' \rangle_{rms}$ a získáme je z Reynoldsových napětí vztahem

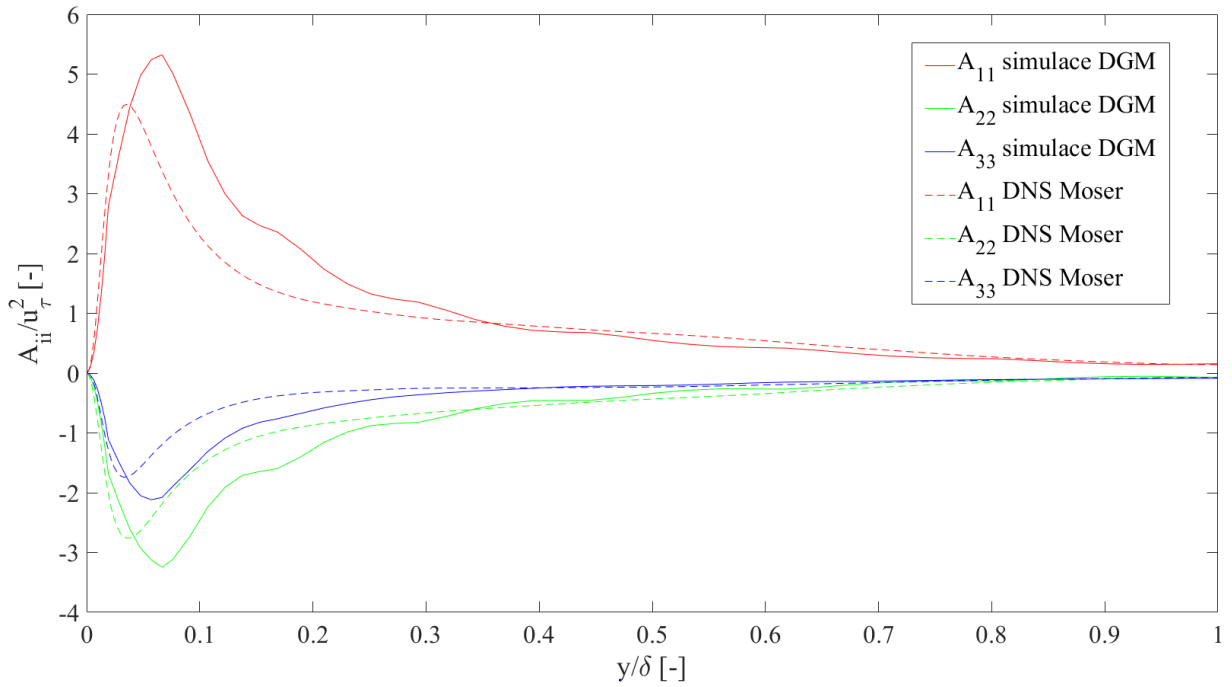
$$\langle v_i' \rangle_{rms} = \sqrt{\left| R_{ii} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 R_{kk} \right|} = \sqrt{|A_{ii}|}.$$

Odpovídající referenční veličiny jsou

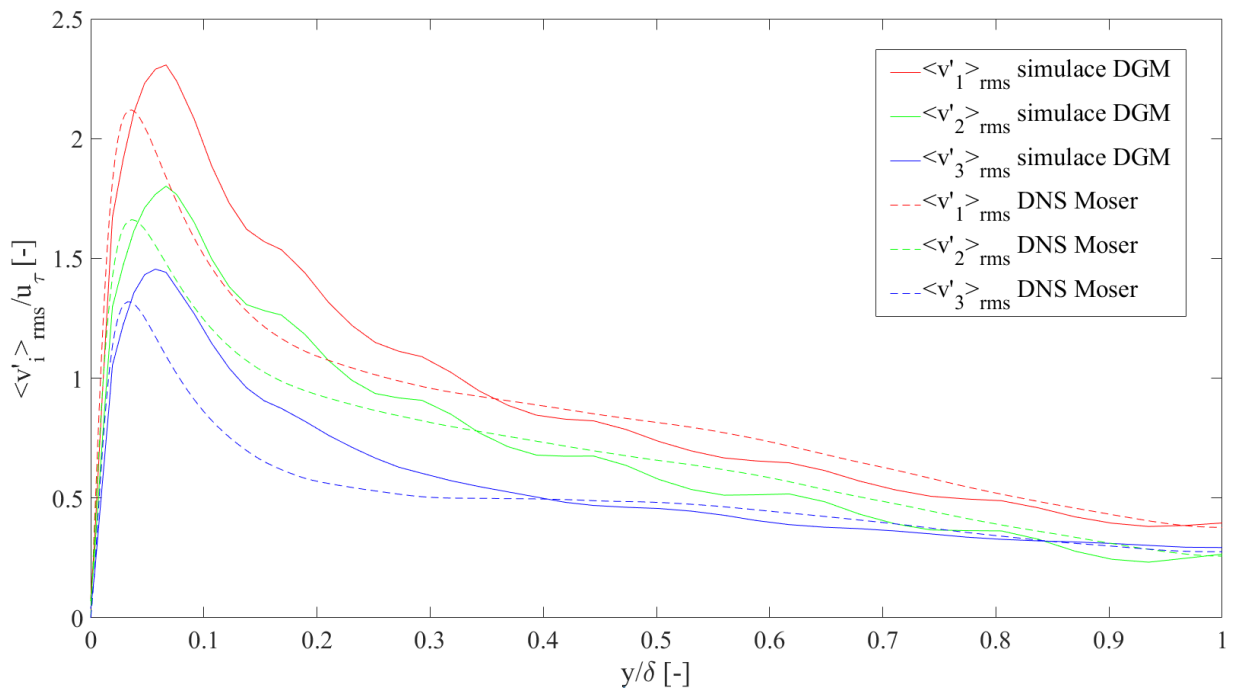
$$\langle v_i' \rangle_{rms}^M = \sqrt{|A_{ii}^M|}.$$

Porovnání uvedené intenzity turbulence s referenčním DNS ve všech třech souřadnicových směrech v polovině kanálu je provedeno na obrázku 3.17, hodnoty jsou normovány třetí rychlostí $u_\tau = 0,0123$. Graf v podstatě kopíruje situaci na obrázku 3.16, uvádíme ho však pro úplnost a z respektu k zavedeným zvyklostem, protože tyto veličiny jsou v pracích zabývajících se turbulentním prouděním v kanálu standardně vyhodnocovány.

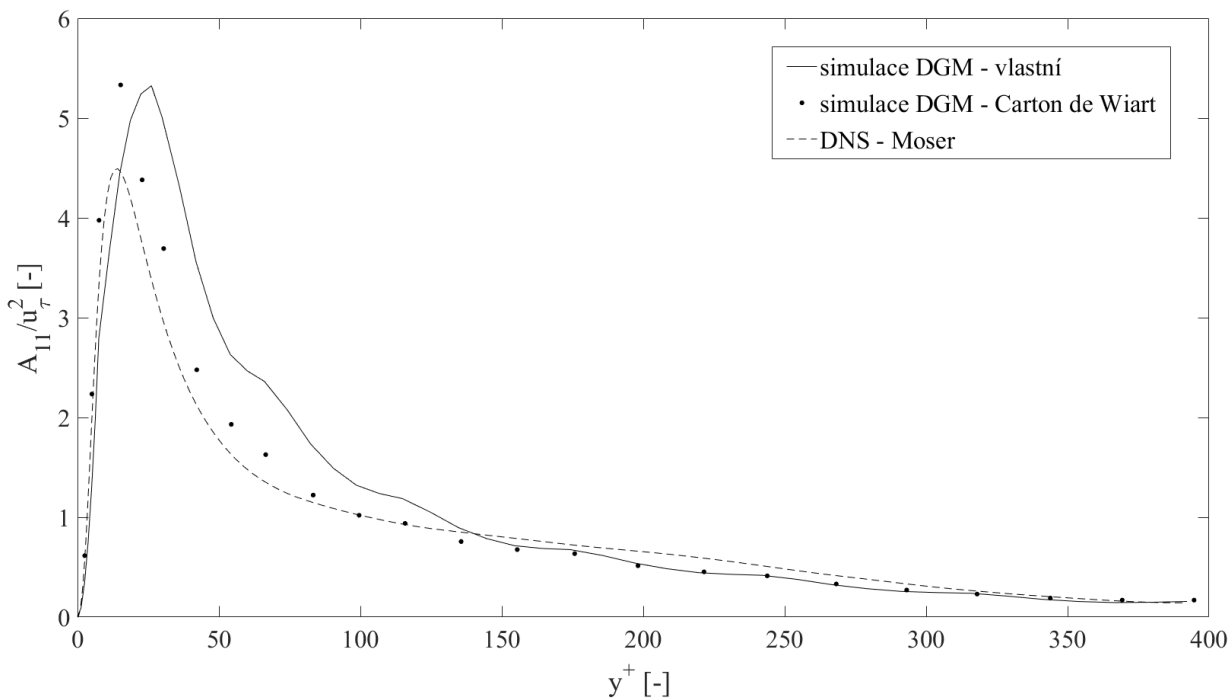
Diagonální prvky anizotropní části tenzoru Reynoldsových napětí A_{ii} je možné porovnat s odpovídající DGM-ILES simulací provedenou v pracích [11], [12]. Na obrázcích 3.18, 3.19 a 3.20 jsou uvedeny závislosti hodnot A_{ii} na vzdálenosti od stěny y^+ pro polovinu kanálu stejně jako na obrázku 3.16, pro přehlednost zde každý ze tří prvků zvlášť. Výsledky referenční DGM-ILES simulace dávají velmi pěknou shodu s DNS v pozici maxima všech třech prvků, která jsou jen nepatrně posunuta dále od stěny. Původ této lepší shody spočívá pravděpodobně v lepším rozlišení referenční simulace oproti simulaci provedené v předkládané práci. Velikost maxima pro A_{11} je ale pro vlastní a referenční simulaci ve výborné shodě, pro A_{22} a A_{33} se o něco liší. Lokální maxima odpovídající hranicím kontrolních elementů se na křivkách referenční simulace DGM vyskytují také, nicméně v mnohem menší míře, což je zřejmě dáno nejen lepším rozlišením referenční simulace, ale i volbou básových funkcí, o kterých autoři neposkytují přesné informace. Ve střední části kanálu, zhruba od $y^+ \approx 150$, můžeme v případě A_{11} a A_{22} konstatovat výbornou shodu obou DGM simulací. V případě A_{33} dává vlastní simulace dokonce lepší výsledky než referenční.



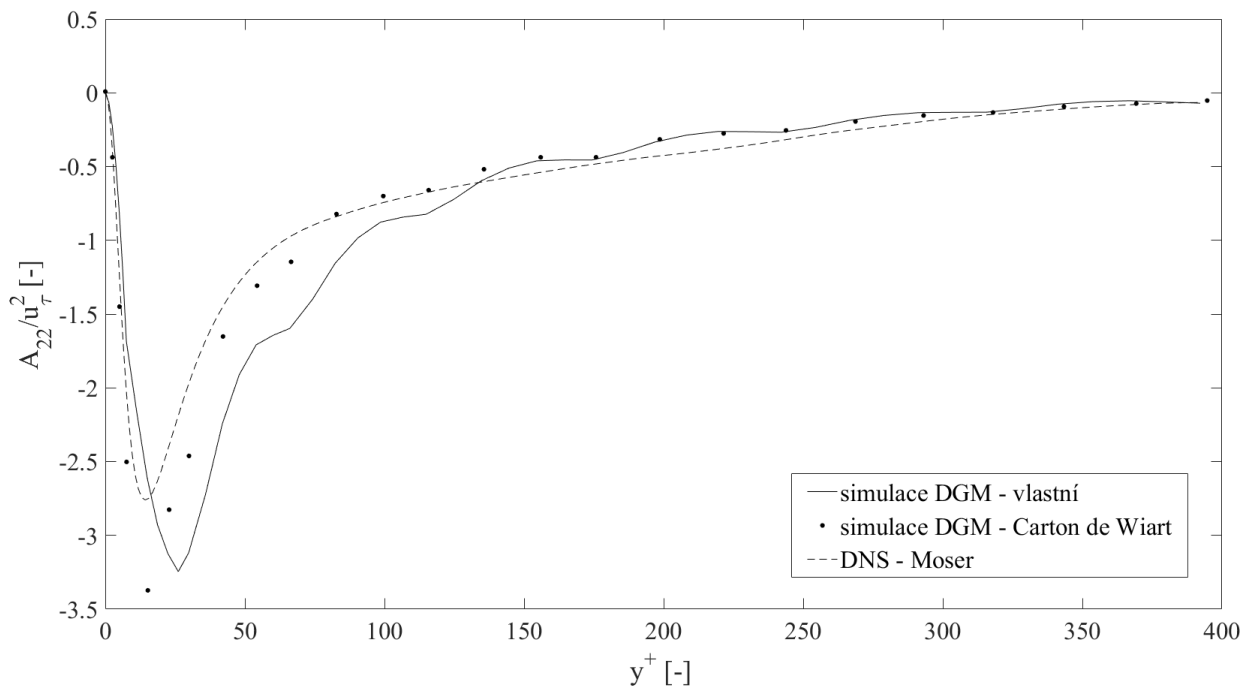
Obrázek 3.16: Průběh diagonálních prvků anizotropní části tenzoru Reynoldsových napětí (plnou čarou červeně, zeleně a modře); odpovídající referenční hodnoty z DNS [55] (čárkovaně červeně, zeleně a modře)



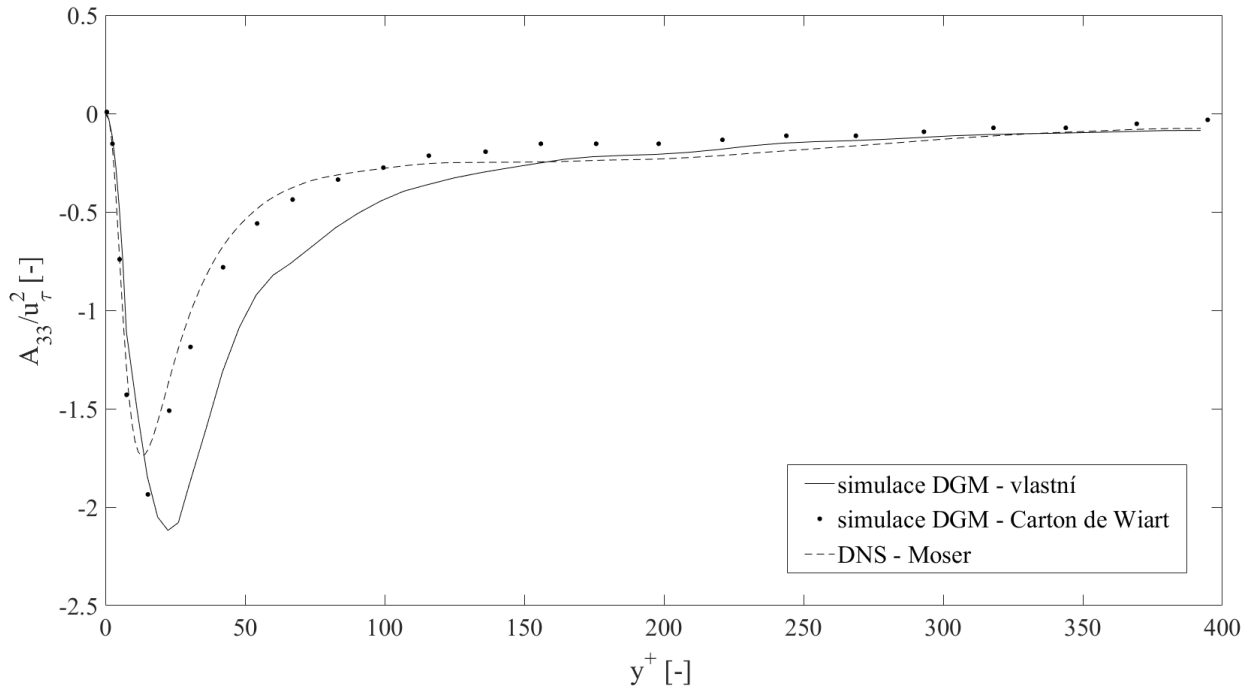
Obrázek 3.17: Průběh rms intenzity turbulence ve všech třech souřadnicových směrech (plnou čarou červeně, zeleně a modře); odpovídající referenční hodnoty z DNS [55] (čárkovaně červeně, zeleně a modře)



Obrázek 3.18: Průběh prvku A_{11} anizotropní části tenzoru Reynoldsových napětí (plnou čarou); výsledky referenční DGM-ILES simulace [12] (body), odpovídající referenční hodnoty z DNS [55] (čárkovaně)



Obrázek 3.19: Průběh prvku A_{22} anizotropní části tenzoru Reynoldsových napětí (plnou čarou); výsledky referenční DGM-ILES simulace [12] (body), odpovídající referenční hodnoty z DNS [55] (čárkovaně)



Obrázek 3.20: Průběh prvku A_{33} anizotropní části tenzoru Reynoldsových napětí (plnou čarou); výsledky referenční DGM-ILES simulace [12] (body), odpovídající referenční hodnoty z DNS [55] (čárkovaně)

3.4.8 Závěry a diskuze

Nejvýznamnějším faktorem, způsobujícím odchylky prezentovaných výsledků od referenční DNS simulace [55] je nepochybně prostorové rozlišení simulace, respektive počet stupňů volnosti. Vzhledem k počtu elementů ($21 \times 16 \times 16$) a počtu básových funkcí (20) je počet stupňů volnosti 107 520, jak je uvedeno v odstavci 3.4.3. V referenční práci [11], [12] je použit stejný počet elementů, informace o básových funkcích však není k dispozici. Z autorem uvedeného rozlišení $63 \times 48 \times 48$ vyplývá počet stupňů volnosti 145 152. Odpovídající počet básových funkcí je pak $145\,152 / (21 \cdot 16 \cdot 16) = 27$. Referenční simulace je tedy pravděpodobně provedena s $27/20 = 1,35$ krát lepším rozlišením, což má na přesnost výsledků významný vliv. Obzvláště uvědomíme-li si, že se uvedená čísla pohybují na hranici použitelného rozlišení, se kterým má vůbec ještě smysl tuto úlohu řešit. Tato skutečnost nebyla v době zahájení simulace zřejmá a vzhledem k velké výpočetní náročnosti úlohy nebylo již možné simulaci opakovat s větším počtem stupňů volnosti, ať už by ho bylo dosaženo zvýšením počtu básových funkcí na stejné síti nebo zjemněním sítě při stávajícím počtu básových funkcí.

Zvážit musíme i otázku, zda byla simulace nastavena skutečně přesně v souladu s referenční DNS simulací. Reynoldsovo číslo Re^{DGM} (3.29) je nepatrně nižší než ideální referenční hodnota (3.24), odchylka 0,7% je ale natolik malá, že nepředpokládáme výrazný vliv odlišnosti Reynoldsova čísla na výsledky. Hodnota třetího Reynoldsova čísla Re_{τ}^{DGM} (3.33) se od své ideální hodnoty liší více (o 14%), to je ale způsobeno velikostí derivace rychlosti na stěně a na celkový stav proudění v kanále to nemá zásadní vliv.

V případě lepšího rozlišení simulace by dále mělo smysl uvažovat o dalších faktech, která mají vliv na přesnost výsledků, například typ použité výpočetní sítě, typ elementů, nebo konkrétní numerické metody pro aproximaci vazkých a nevazkých toků a další. Vzhledem k testům provedeným v práci [11] je ovšem význam těchto faktorů velmi malý a má smysl se

jimi zabývat až v případě vyřešení významnějších otázek, jako je právě počet stupňů volnosti.

Prezentovaná numerická simulace je provedena na velmi hrubé síti, bez subgridního modelu a se středně vysokým řádem nespojitě Galerkinovy metody. Uvědomíme-li si tyto skutečnosti, jsou dosažené výsledky velmi uspokojivé a nadějně pro další rozvoj použité metodiky - ILES, respektive *under-resolved* přístupu v kombinaci s nespojitou Galerkinovou metodou vyšších řádů. Již pouhé zvýšení řádu metody ze čtvrtého na pátý nebo mírné zahuštění výpočetní sítě s největší pravděpodobností povede k výraznému zpřesnění výsledků a přiblížení se k referenční DNS simulaci. Vzhledem k disipativním vlastnostem DGM, uvedeným v odstavci 3.2.1, lze rozhodně doporučit volbu vyššího řádu přesnosti metody na úkor počtu elementů sítě. Pro velmi vysoké řády je ale potřeba zajistit stabilitu některou z technik řešících problém aliasingu. V této souvislosti můžeme konstatovat, že stabilita provedené numerické simulace s výše popsáním nastavením, čtvrtým řádem přesnosti v prostoru a uvedeným časovým krokem je naprosto bezproblémová. Ani při velmi dlouhém běhu simulace nedochází k žádným potížím typu nevhodné kumulace numerické chyby, která by mohla vést ke ztrátě stability.

Zpřesnění ILES simulace provedené v této kapitole se může stát základem pro další zkoumání implicitního přístupu v LES, vedoucí postupně k validaci metody pro náročnější a praktičtější úlohy, pokud se prokáže její vhodnost. Jak bylo zmíněno již v úvodu kapitoly, některé kroky v tomto směru byly již učiněny v práci [11], kde byly s větším či menším úspěchem řešeny například úlohy obtékání leteckého profilu nebo proudění v turbínové mříži. Nutností je validace metody pro vysoká Reynoldsova čísla, protože dosavadní studie se zaměřovaly na Reynoldsova čísla středně vysoká.

Velmi slibná je tato metoda v oblasti přechodového proudění, jak bylo již prokázáno při simulacích odtržení proudu a přechodu do turbulence na leteckém profilu [86], [87].

Závěr

Disertační práce se věnuje numerickému modelování turbulentního proudění pomocí přístupů RANS a ILES se zaměřením na využití nespojitě Galerkinovy metody konečných prvků, která je použita pro prostorovou diskretizaci matematických modelů.

Do numerického řešiče založeného na nespojitě Galerkinově metodě, vyvíjeného na pracovišti, byl v rámci předkládané disertační práce implementován dvourovnicový model turbulence $k-\omega$ podle Wilcoxe (2006). Ten zahrnuje člen příčné difuze, zlepšující citlivost modelu na parametry volného proudu, a dále omezuje turbulentní napětí, čímž se stává poměrně široce uplatnitelným pro řadu úloh. Pro zajištění stability prováděných numerických simulací bylo nutné dvourovnicový model turbulence upravit, jednak převedením modelové rovnice pro specifickou rychlost disipace ω do logaritmického tvaru a také omezením hodnot turbulentní kinetické energie k . Implementace modelu byla verifikována na úloze obtékání rovné desky. Veškeré RANS simulace byly provedeny s druhým řádem přesnosti DGM v prostoru.

Numerický řešič doplněný o uvedený model turbulence byl následně využit pro studium proudění stlačitelné vazké tekutiny v úzkých kanálech s výtokem do volného prostoru. Výzkum je prováděn ve spolupráci s Ústavem termomechaniky Akademie věd ČR, v.v.i., což umožňuje porovnání výsledků numerických simulací s experimentálními daty. Pomocí kalibračního kanálu o výšce 10 mm tak byl numerický řešič úspěšně validován pro turbulentní proudění stlačitelné tekutiny v úzkém kanálu a následně aplikován na proudění v minikanálech o výšce 0,5 až 4 mm. Výzkum byl vzhledem k absenci vhodného modelu přechodu pro proudění v kanálech realizován pomocí laminárního a plně turbulentního výpočtu. Z porovnání získaného průběhu statického tlaku po délce kanálu s experimentálními daty vyplývají pro proudění ve zkoumaných mezerách s nadkritickým tlakovým spádem následující skutečnosti. V kanálech do výšky 2 mm je možné situaci v kanálu dobře modelovat laminárně, od výšky 3 mm se začíná změřený průběh statického tlaku od laminární predikce již zřetelně odchylovat a těsně před koncem kanálu dochází ke shodě s tlakem získaným plně turbulentní simulací. Laminární režim proudění byl tedy v minikanálu zaznamenán až do hodnoty Reynoldsova čísla okolo 17 000, která je oproti běžně očekávaným hodnotám kritického Reynoldsova čísla již dosti vysoká. Předpokládáme, že se zde projevuje právě specifická vlastnost úzkých kanálů, kde se vlivem blízkosti stěn a dominance vazkých sil udrží laminární proudění i za vyšších Reynoldsových čísel, než je běžné u kanálů větších charakteristických rozměrů. Při volbě vhodného matematického modelu proudění je tedy potřeba značné opatrnosti. Situaci zde dále komplikuje nevyvinutý charakter proudění v kanálu. Pro detailnější vyhodnocení režimu proudění v kanálech problematických charakteristických rozměrů okolo 3 mm a Reynoldsových čísel nad 17 000 je potřeba upravit a validovat některý z dostupných modelů přechodu, většinou kalibrovaných pro obtékání těles, tak, aby byl dobře použitelný pro proudění v úzkých kanálech. Predikce smykového napětí na stěně v kalibračním kanálu výšky 10 mm proběhla úspěšně a je možné z ní vyjít při vyšetřování smykového napětí v užších mezerách v návaznosti na plánovaná měření.

Druhá část disertační práce je zaměřena na implicitní simulaci velkých vírů, tedy LES

bez použití explicitního subgridního modelu. Nespojité Galerkinova metoda konečných prvků je díky svým disipativním vlastnostem pro tento přístup velmi vhodná. Při použití dostatečně vysokého řádu přesnosti v prostoru dochází k disipaci kinetické energie v oblasti vírových struktur malých délkových měřítek, zatímco velká délková měřítka, kde je energie pouze předávána, nejsou disipací zatížena prakticky vůbec. Diskretizován je zde tedy pouze systém Navierových-Stokesových rovnic ve 3D bez úprav. Pro první validaci vyvíjeného řešiče pro přístup DGM-ILES byla provedena numerická simulace turbulentního proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami s nulovým tlakovým spádem, se čtvrtým řádem přesnosti DGM v prostoru a na velmi hrubé výpočetní síti. Po dosažení statisticky ustáleného stavu byly vyhodnoceny profily střední rychlosti a složky Reynoldsových napětí a tyto veličiny byly porovnány s daty z přímé numerické simulace a ILES simulace se stejným řádem přesnosti, uvedenými v literatuře. Pro simulaci v předkládané práci byl použit menší počet bazových funkcí v rámci DGM než v referenční ILES simulaci v literatuře. V důsledku toho nebylo dosaženo tak dobré shody s referenční přímou numerickou simulací, nicméně vzhledem ke kvalitě sítě a absenci subgridního modelu jsou získané výsledky velmi dobré. Prostorové rozlišení simulace použité v předkládané práci se evidentně pohybuje na hranici rozumné použitelnosti a ukazuje tak velký potenciál metody, kdy již při malém navýšení počtu bazových funkcí nebo počtu elementů výpočetní sítě je možné dosáhnout výborných výsledků.

Přínosy práce a další směřování výzkumné činnosti

Předložená disertační práce uvádí řadu známých vztahů a principů, které jsou nutné pro ucelenost práce a vysvětlení provedeného výzkumu. Vlastní přínos disertační práce spočívá v následujících skutečnostech.

- Byla provedena implementace široce použitelného dvourovnicového modelu turbulence typu $k-\omega$ do numerického řešiče založeného na perspektivní nespojité Galerkinově metodě konečných prvků a model byl s určitými výhradami verifikován. S úspěchem byl realizován převod modelové rovnice pro specifickou rychlost disipace ω do logaritmického tvaru a aplikováno omezení turbulentní kinetické energie k pro zajištění stability simulací turbulentního proudění. Bylo upozorněno na další problémy vznikající v důsledku diskretizace dvourovnicového modelu pomocí DGM. Tyto kroky přispěly ke zkvalitnění softwaru vyvíjeného na pracovišti a k významnému rozšíření možností jeho uplatnění.
- V málo probádané oblasti proudění stlačitelné tekutiny v úzkých kanálech byly získány nové výsledky v dobré shodě s experimentálním měřením a učiněny závěry o hodnotě kritického Reynoldsova čísla. Numerický řešič byl pomocí experimentálních dat úspěšně validován pro predikci statického a celkového tlaku v úzkém kanálu a smykového napětí na jeho stěně pro případ plně turbulentního proudění. Na základě provedených simulací byla učiněna doporučení pro další experimentální a numerické vyšetřování proudění stlačitelné tekutiny v minikanálech. Tématika proudění tekutin v minikanálech stále přináší řadu otevřených problémů, týkajících se například stlačitelnosti tekutiny, modelování přechodu nebo specifík kategorie minikanálů. Předkládaná práce na tyto problémy upozorňuje a přispívá k jejich řešení.
- Byly vytvořeny základy pro validaci vyvíjeného softwaru pro nepříliš rozšířenou, ale velmi slibnou, implicitní simulaci velkých vírů, která je založena na příhodných disipativních vlastnostech nespojité Galerkinovy metody konečných prvků při použití

vyšších řádů přesnosti v prostoru. Předkládaná práce upozorňuje na hraniční prostorové rozlišení validační simulace turbulentního proudění mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými deskami, při kterém je možné získat pomocí ILES simulace výsledky rozumné kvality. Provedená numerická simulace představuje dobrý základ pro další výzkum a rozvoj v perspektivní oblasti DGM-ILES.

Na základě výzkumu v oblasti proudění stlačitelných tekutin v úzkých kanálech je v současné době připravován článek k zaslání do redakce impaktovaného odborného časopisu.

Budoucí výzkumná činnost bude zaměřena na rozšiřování portfolia modelů turbulence diskretizovaných pomocí DGM a dosažení stability numerických simulací zautomatizováním některých procesů, které byly dosud řešeny přímým zásahem do běhu simulací, například v podobě úpravy časového kroku. V oblasti výzkumu proudění stlačitelné tekutiny v minikanálech bude nezbytné vhodně modifikovat některý z dostupných modelů přechodu a pomocí experimentu ho validovat pro úzké kanály. Možností pro rozvoj přístupu ILES je celá řada, lze se ubírat směrem k testování metody pro vysoká Reynoldsova čísla nebo se zaměřit na modelování přechodu, kdy by mohla být metoda velmi užitečná především pro stlačitelné proudění.

Literatura

- [1] Abu-Ghannam B. J., Shaw R.: Natural Transition of Boundary Layers - The Effects of Turbulence, Pressure Gradient, and Flow History. *Journal of Mechanical Engineering Science* 22(5), 213-228, 1980.
- [2] Arovitola A., Denaro F. M., Marra F. S.: Development and validation of low-Mach LES solver with OpenFOAM. *Proceedings of ASME-ATI-UIT Conference on Thermal and Environmental Issues in Energy Systems*, 2010.
- [3] Baldwin B. S., Lomax H.: Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper 78-257*, 1978.
- [4] Bassi F., Crivellini A., Rebay S., Savini M.: Discontinuous Galerkin solution of the Reynolds-averaged Navier-Stokes and $k-\omega$ turbulence model equations. *Computers & Fluids* 34, 507-540, 2005.
- [5] Beck A. D., Bolemann T., Flad D., Frank H., Gassner G. J., Hindenlang F., Munz C.-D.: High order discontinuous Galerkin spectral element methods for transitional and turbulent flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 76(8), 522-548, 2014.
- [6] Boris J. P.: On large eddy simulation using subgrid turbulence models. *Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads*, J. L. Lumley (ed.), Springer-Verlag, New York, 344-353, 1990.
- [7] Boris J. P., Grinstein F. F., Oran E. S., Kolbe R. L.: New insights into large eddy simulation. *Fluid Dynamics Research* 10, 199-228, 1992.
- [8] Boussinesq J.: *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut National de France, Tome XXIII, No 1. Imprimerie Nationale, Paris, 1877.
- [9] Bublík O.: *Aplikace nespojité Galerkinovy metody konečných prvků na řešení úloh mechaniky tekutin*. Disertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2014.
- [10] Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A. M., Zang T. A.: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, 1987.
- [11] Carton de Wiart C.: *Towards a discontinuous Galerkin solver for scale-resolving simulations of moderate Reynolds number flows, and application to industrial cases*. Disertační práce, Université Catholique de Louvain, École Polytechnique de Louvain, Louvain-la-Neuve, 2014.

- [12] Carton de Wiart C., Hillewaert K.: A discontinuous Galerkin method for implicit LES of moderate Reynolds number flows. *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA SciTech Forum*, 2015.
- [13] Coakley T. J.: Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA Paper 83-1693*, 1983.
- [14] Collis S. S.: Discontinuous Galerkin methods for turbulence simulation. *Proceedings of the Summer Program 2002*, Center for Turbulence Research, 155-167, 2002.
- [15] Daly B. J., Harlow F. H.: Transport equations in turbulence. *Physics of Fluids* 13, 2634-2649, 1970.
- [16] Davidson L., Dahlström S.: Hybrid LES-RANS: An approach to make LES applicable at high Reynolds number. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 19(6), 415-427, 2005.
- [17] Deardorff J.: A numerical study of three dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics* 41(2), 453-480, 1970.
- [18] Dixit T., Ghosh I.: Review of micro- and mini-channel heat sinks and heat exchangers for single phase fluids. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 41, 1298-1311, 2015.
- [19] Favre A.: Équations des gaz turbulents compressibles. *Journal de Mécanique* 4(3), 361-390, 1965.
- [20] Fröhlich J., von Terzi D.: Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace* 44(5), 349-377, 2008.
- [21] Garnier E., Adams N., Sagaut P.: *Large eddy simulation for compressible flows*. Scientific Computation, Springer Netherlands, Dordrecht, 2009.
- [22] Gassner G. J., Beck A. D.: On the accuracy of high-order discretizations for underresolved turbulence simulations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 27, 221-237, 2013.
- [23] Gassner G., Kopriva D. A.: A comparison of the dispersion and dissipation errors of Gauss and Gauss-Lobatto discontinuous Galerkin spectral element methods. *SIAM Journal on Scientific Computing* 33 (5), 2560-2579, 2011.
- [24] Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H.: A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A* 3, 1760-1765, 1991.
- [25] Girimaji S. S.: Partially averaged Navier-Stokes model for turbulence: A Reynolds-averaged Navier-Stokes to direct numerical simulation bridging method. *ASME Journal of Applied Mechanics* 73(3), 413-421, 2006.
- [26] Grinstein F., Margolin L., Rider W.: *Implicit Large Eddy Simulation: Computing Turbulent Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [27] Hála J.: *Compressible fluid flow through minichannel*. Disertační práce, ČVUT, Praha, 2019 (bude publikováno).

- [28] Hellsten A.: Some improvements in Menter's $k-\omega$ SST turbulence model. *AIAA Paper 89-2554*, 1998.
- [29] Hellsten A. K.: New advanced $k-\omega$ turbulence model for high-lift aerodynamics. *AIAA Journal* 43(9), 1857-1869, 2005.
- [30] Hesthaven J. S., Warburton T.: *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*. Texts in Applied Mathematics, Springer, 2008.
- [31] Holman J.: *Numerické řešení stacionárního a nestacionárního turbulentního proudění*. Disertační práce, ČVUT, Praha, 2014.
- [32] Huynh H. T.: A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods. *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, AIAA-2007-4079, 2007.
- [33] Iliescu T., Fischer P. F.: Large eddy simulation of turbulent channel flows by the rational large eddy simulation model. *Physics of Fluids* 15(10), 3036-3047, 2003.
- [34] Ilinca F., Pelletier D.: Positivity preservation and adaptive solution for the $k-\epsilon$ model of turbulence. *AIAA Journal* 36(1), 44-50, 1998.
- [35] John V., Roland M.: Simulations of the turbulent channel flow at $Re_\tau = 180$ with projection-based finite-element variational multiscale methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 55, 407-429, 2007.
- [36] Jones O. C.: An improvement in the calculation of turbulent friction in rectangular ducts. *Journal of Fluids Engineering* 98, 173-180, 1976.
- [37] Kandlikar S., Garimella s., Li D., Colin S., King M. R.: *Heat Transfer and Fluid Flow in Minichannels and Microchannels*, Elsevier Ltd., 2006.
- [38] Karniadakis G., Sherwin S. J.: *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [39] Karnitz M. A., Potter M. C., Smith M. C.: An Experimental Investigation of Transition of a Plane Poiseuille Flow. *Journal of Fluids Engineering* 96(4), 384-388, 1974.
- [40] Kim J., Moin P., Moser R.: Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics* 177, 133-166, 1987.
- [41] Kok J. C.: Resolving the dependence on freestream values for the $k-\omega$ turbulence model. *AIAA Journal* 38(7), 1292-1295, 2000.
- [42] Kok J. C., Dol H. S., Oskam B., van der Ven H.: Extra-large eddy simulation of massively separated flows. *AIAA Paper 2004-264*, 2004.
- [43] Kolmogorov A. N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akademiya Nauk SSSR* 30, 299-303, 1941.
- [44] Kolmogorov A. N.: Equations of turbulent motion of an incompressible fluid. *Izvestia Academy of Sciences, USSR; Physics* 6(1-2), 56-58, 1942.

- [45] Landmann B.: *A parallel discontinuous Galerkin code for the Navier-Stokes and Reynolds-averaged Navier-Stokes equations*. Disertační práce, Universität Stuttgart, 2008.
- [46] Langtry R. B., Menter F. R.: Correlation-Based Transition Modeling for Unstructured Parallelized Computational Fluid Dynamics Codes. *AIAA Journal* 47(12), 2894-2906, 2009.
- [47] Langtry R. B., Sjolander S. A.: Prediction of transition for attached and separated shear layers in turbomachinery. *AIAA Paper 2002-3641*, 2002.
- [48] Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.: Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics* 68(3), 537-566, 1975.
- [49] Launder B. E., Spalding D. B.: *Mathematical Models of Turbulence*. Academia Press, London, 1972.
- [50] Mašát M.: *Tvorba radikálů v plazmatu výboje v supersonické trysce*. Diplomová práce, MFF UK v Praze, 2007.
- [51] Menter F. R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal* 32(8), 1598-1605, 1994.
- [52] Menter F. R., Egorov Y.: Revisiting the turbulent scale equation. *Solid Mechanics and Its Applications* 129, 279-290, 2006.
- [53] Minkowycz W. J., Abraham P. J., Sparrow E. M.: Numerical simulation of laminar breakdown and subsequent intermittent and turbulent flow in parallel-plate channels: Effects of inlet velocity profile and turbulence intensity. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 52, 4040-4046, 2009.
- [54] Moin P., Kim J.: Numerical investigation of turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics* 118, 341-377, 1982.
- [55] Moser R. D., Kim J., Mansour N. N.: Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Physics of Fluids* 11(4), 943-945, 1999.
- [56] Moura R. C., Peiró J., Sherwin S. J.: Implicit LES approaches via discontinuous Galerkin methods at very large Reynolds. *Direct and Large-Eddy Simulation XI*, M. V. Salvetti et al. (eds.), ERCOFTAC Series, Springer, 2019.
- [57] Moura R. C., Sherwin S. J., Peiró J.: Linear dispersion-diffusion analysis and its application to under-resolved turbulence simulations using discontinuous Galerkin spectral/hp methods. *Journal of Computational Physics* 298 (C), 695-710, 2015.
- [58] Orszag S. A.: Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *Journal of Fluid Mechanics* 50(4), 689-703, 1971.
- [59] Orszag S. A., Patterson G. S.: Numerical simulation of turbulence: statistical models and turbulence. *Lecture Notes in Physics* 12, 127-147, 1972.
- [60] Peng S.-H., Davidson L., Holmberg S.: A modified low-Reynolds-number $k-\omega$ model for recirculating flows. *Journal of Fluids Engineering* 119(4), 867-875, 1997.

- [61] Pope S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [62] Prandtl L.: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. *Verh. III, Int. Math. Congr. Heidelberg*, 484-494, 1904.
- [63] Prandtl L.: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 5, 136-139, 1925.
- [64] Prandtl L.: Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. *Nacr. Akad. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl.*, 6-19, 1945.
- [65] Příhoda J.: *Metody měření smykového napětí na obtékané stěně*. Výzkumná zpráva Z-443/74, Ústav termomechaniky AV ČR, v.v.i., Praha, 1974.
- [66] Příhoda J., Louda P.: *Matematické modelování turbulentního proudění*. Skriptum ČVUT v Praze, 2006.
- [67] Příhoda J.: Soukromá korespondence, 2019.
- [68] Quadrio M., Frohnapfel B., Hasegawa Y.: Does the choice of the forcing term affect flow statistics in DNS of turbulent channel flow? *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 55(2), 286-293, 2016.
- [69] Reed W. H., Hill T. R.: Triangular mesh methods for the neutron transport equation. *Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479*, 1973.
- [70] Reynolds O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 186, 123-164, 1895.
- [71] Richardson L. F.: *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.
- [72] Rotta J.: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Zeitschrift für Physik* 129, 547-572, 1951.
- [73] Saffman P. G.: A Model for inhomogeneous turbulent flow. *Proceedings of the Royal Society of London A* 317, 417-433, 1970.
- [74] Seki D., Matsubara M.: Experimental investigation of relaminarizing and transitional channel flows. *Physics of Fluids* 24, 124102, 2012.
- [75] Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M., Travin A.: Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments* 4, 669-678, 1999.
- [76] Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K.: A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29, 1638-1649, 2008.
- [77] Schiestel R., Dejoan A.: Towards a new partially integrated transport model for coarse grid and unsteady turbulent flow simulations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 18(6), 443-468, 2005.

- [78] Schoenawa S., Hartmann R.: Discontinuous Galerkin discretization of the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations with the shear-stress transport model. *Journal of Computational Physics* 262, 194-216, 2014.
- [79] Smagorinsky J.: General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review* 91, 99-164, 1963.
- [80] Spalart P. R., Allmaras S. R.: A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper 92-439*, 1992.
- [81] Spalart P. R., Jou W.-H., Strelets M., Allmaras S. R.: Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach. *Advances in LES/DNS, First International Conference on DNS/LES*, 1997.
- [82] Speziale C. G.: Analytical methods for the development of Reynolds stress closures in turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics* 23, 107-157, 1991.
- [83] Speziale C. G., Abid R., Anderson E. C.: A critical evaluation of two-equation models for near wall turbulence. *AIAA Paper 90-1481*, 1990.
- [84] Strelets M.: Detached eddy simulation of massively separated flows. *AIAA Paper 2001-0879*, 1-18, 2001.
- [85] Sun Y., Wang Z. J., Liu Y.: High-order multidomain spectral difference method for the Navier-Stokes equations on unstructured hexahedral grids. *Communication in Computational Physics* 2(2), 310-333, 2007.
- [86] Uranga A., Persson P.-O., Drela M., Peraire J.: Implicit large eddy simulation of transitional flows over airfoils and wings. *19. AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA-2009-4131*, 2009.
- [87] Uranga A., Persson P.-O., Drela M., Peraire J.: Implicit large eddy simulation of transition to turbulence at low Reynolds numbers using a discontinuous Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87, 232-261, 2011.
- [88] Van Driest E. R.: On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences* 23, 1007-1011, 1036, 1956.
- [89] Vimmr J.: *Modelování proudění tekutin s aplikacemi v biomechanice a ve vnitřní aerodynamice*. Habilitační práce, ZČU v Plzni, 2008.
- [90] Vimmr J., Klášterka H., Hajžman M., Luxa M., Dvořák R.: Mathematical modelling and experimental investigation of gas flow in minichannels and microchannels. *Journal of Thermal Science* 19(4), 289-294, 2010.
- [91] Vreman A. W.: *Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer*. Disertační práce, Universiteit Twente, Enschede, 1995.
- [92] Vreman B., Geurts B., Kuerten H.: A priori tests of large eddy simulation of the compressible plane mixing layer. *Journal of Engineering Mathematics* 29, 299-327, 1995.
- [93] Wallin S., Johansson A. V.: An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics* 403, 89-132, 2000.

- [94] Whalley R. D., Dennis D. J. C., Graham M. D., Poole R. J.: An experimental investigation into spatiotemporal intermittencies in turbulent channel flow close to transition. *Experiments in Fluids* 60, 102, 2019.
- [95] White F. M.: *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill Higher Education, 2006.
- [96] Wilcox D. C.: Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal* 26(11), 1299-1310, 1988.
- [97] Wilcox D. C.: Comparison of two-equation turbulence models for boundary layers with pressure gradient. *AIAA Journal* 31(8), 1414-1421, 1993.
- [98] Wilcox D. C.: Simulation of transition with a two-equation turbulence model. *AIAA Journal* 32(2), 247-255, 1994.
- [99] Wilcox D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, California, 2006.
- [100] Xiaoquan Y., Cheng J., Luo H., Zhao Q.: Robust implicit direct discontinuous Galerkin method for simulating the compressible turbulent flows. *AIAA Journal* 57(3), 1113-1132, 2019.
- [101] <https://turbmodels.larc.nasa.gov/flatplate.html>.

Publikované práce

- [1] Prausová H., Bublík O., Vimmr J., Luxa M., Hála J.: Clearance gap flow: Simulations by discontinuous Galerkin method and experiments. *The European Physical Journal Conferences* 92:02073, DOI: 10.1051/epjconf/20159202073, 2015.
- [2] Hála J., Luxa M., Bublík O., Prausová H., Vimmr J.: Clearance gap flow: Extended pneumatic measurements and simulations by discontinuous Galerkin finite element method. *The European Physical Journal Conferences* 114:02034, DOI: 10.1051/epjconf/201611402034, 2016.
- [3] Vimmr J., Bublík O., Prausová H., Hála J., Pešek L.: Numerical simulation of fluid flow through simplified blade cascade with prescribed harmonic motion using discontinuous Galerkin method. *The European Physical Journal Conferences* 180(591):02117, DOI: 10.1051/epjconf/201817002117, 2018.