

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

Bakalářská práce

---

# LINEÁRNÍ PERISTALTICKÉ ČERPADLO

---

Jiří MUŠKA

Květen 2019

**ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE**  
(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Jiří MUŠKA**  
Osobní číslo: **E16B0038P**  
Studijní program: **B2612 Elektrotechnika a informatika**  
Studijní obor: **Elektrotechnika a energetika**  
Název tématu: **Lineární peristaltické čerpadlo**  
Zadávací katedra: **Katedra elektromechaniky a výkonové elektroniky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Proveďte rešerši principů čerpání tekutin.
2. Navrhněte lineární čerpadlo na peristaltickém principu.
3. Sestavte matematický model fyzikálního systému a s využitím vhodné numerické metody proveďte simulaci.
4. Ověřte experimentálně navržený model.
5. Srovnejte základní parametry modelu a experimentu.

Rozsah grafických prací: podle doporučení vedoucího

Rozsah kvalifikační práce: 30 - 40 stran

Forma zpracování bakalářské práce: tištěná/elektronická

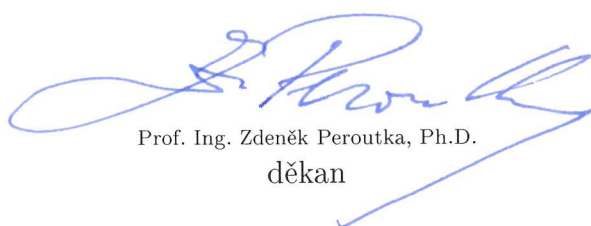
Seznam odborné literatury:

1. M. Busek, M. Nötzel, C. Polk, and F. Sonntag, Characterization and simulation of peristaltic micropumps, *Journal of Sensors and Sensor Systems*, vol. 2, no. 2, pp. 165169, Oct. 2013.
2. Q. Zhang, N. Pekas, and D. Juncker, Design and Fabrication of Novel Compliant Electrostatically Actuated Microvalves, *Advanced Materials Research*, vol. 74, pp. 179182, Jun. 2009.
3. M.-P. Chang and M. M. Maharbiz, Electrostatically-actuated reconfigurable elastomer microfluidics, in *Proc. 13th Solid-State Sensor, Actuator, and Microsystems Workshop (Hilton Head08)*, 2008, pp. 122125.
4. J. Xie, J. Shih, Q. Lin, B. Yang, and Y.-C. Tai, Surface micromachined electrostatically actuated micro peristaltic pump, *Lab on a Chip*, vol. 4, no. 5, p. 495, 2004.

Vedoucí bakalářské práce: **Prof. Ing. Pavel Karban, Ph.D.**  
Katedra teoretické elektrotechniky

Datum zadání bakalářské práce: **5. října 2018**

Termín odevzdání bakalářské práce: **13. června 2019**



Prof. Ing. Zdeněk Peroutka, Ph.D.  
děkan



Prof. Ing. Václav Kůs, CSc.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 5. října 2018

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této bakalářské práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této bakalářské práce, je legální.

.....  
podpis

V Plzni dne 19.5.2019

Jiří Muška



# Poděkování

Rád bych poděkoval panu prof. Ing. Pavlu Karbanovi, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a velmi vstřícný přístup na konzultacích. Dále chci poděkovat mé mamince Olze Muškové za to, že při mě vždy stála a podporovala v tom, co mě baví a naplňuje.

## **Anotace**

Bakalářská práce se zabývá návrhem a analýzou lineárního peristaltického čerpadla využívajícího pro čerpání kapaliny pěti elektromagnetických aktuátorů. V rámci analýzy byla provedena měření velikosti působících sil aktuátoru na své pohyblivé jádro, oteplení aktuátoru způsobené procházejícím elektrickým proudem, průtoku vody a výsledky jsou porovnány s výsledky matematických modelů.

## **Klíčová slova**

Peristaltické čerpadlo, objemové čerpadlo, odstředivé čerpadlo, magnetoelastická membrána, stejnosměrný mikromotor, umělý sval, termo-pneumatický aktuátor, materiál s tvarovou pamětí, DEA, elektromagnetický aktuátor, spínací cyklus

## **Annotation**

Bachelor thesis proposes a design of linear peristaltic pump utilizing five electromagnetic actuators. Measurements of force acting upon its core, change of temperature caused by passing current and flow velocity were conducted and the results are compared to the results of numeric simulations.

## **Keywords**

Peristaltic pump, positive displacement pump, centrifugal pump, magnetoelastic membrane, direct current micromotor, artificial muscle, thermo-pneumatic actuator, shape memory alloy, DEA, electromagnetic actuator, driving of linear peristaltic pump

# Obsah

<b>1. Úvod</b>	<b>10</b>
<b>2. Způsoby čerpání kapalin</b>	<b>11</b>
2.1. Objemová čerpadla . . . . .	12
2.2. Odstředivá čerpadla . . . . .	15
<b>3. Peristaltické čerpadlo</b>	<b>17</b>
3.1. Peristaltické čerpadlo realizované magnetoelastickou membránou . . . . .	19
3.2. Peristaltické čerpadlo realizované stejnosměrným mikromotorem . . . . .	20
3.3. Peristaltické čerpadlo realizované umělým svalem . . . . .	20
3.4. Peristaltické čerpadlo realizováno pomocí termo-pneumatických aktuátorů . .	22
3.5. Peristaltické čerpadlo realizované permanentním magnetem . . . . .	22
3.6. Peristaltické čerpadlo realizované laserem . . . . .	23
3.7. Peristaltické čerpadlo realizované materiálem s tvarovou pamětí . . . . .	23
3.8. Peristaltické čerpadlo realizované užitím DEA . . . . .	24
<b>4. Lineární peristaltické čerpadlo</b>	<b>25</b>
4.1. Spínací cyklus . . . . .	26
4.2. Řízení průtoku kapaliny . . . . .	26
4.3. Měření průtoku kapaliny . . . . .	27
<b>5. Analýza elektromagnetického aktuátoru</b>	<b>30</b>
5.1. Elektromagnetického pole . . . . .	30
5.2. Teplotní pole . . . . .	32
5.3. Počítačová simulace aktuátoru v prostředí COMSOL Multiphysics . . . . .	33
<b>6. Dynamika pohybu jádra</b>	<b>37</b>
6.1. Měření . . . . .	38
6.1.1. Postup měření . . . . .	38
6.1.2. Výsledky měření . . . . .	39
6.2. Řešení v prostředí Simulink . . . . .	40
6.2.1. Blok Pohyb jádra cívky . . . . .	41
6.2.2. Blok Výpočty . . . . .	42
6.3. Výsledky simulace . . . . .	43
<b>7. Proudění kapalin</b>	<b>46</b>
7.1. Počítačový model v prostředí COMSOL Multiphysics . . . . .	46
7.1.1. Deformace trubice . . . . .	47
<b>8. Závěr</b>	<b>48</b>
<b>A. Maxwellův tenzor pnutí</b>	<b>51</b>

*Obsah*

<b>B. Teplotní pole</b>	<b>53</b>
<b>C. Navier-Stokesovy rovnice</b>	<b>55</b>

# 1. Úvod

Předložená práce se zabývá návrhem a analýzou chování lineárního peristaltického čerpadla. V textu jsou uvedeny výsledky měření, realizace matematických modelů a jejich vzájemné porovnání.

Funkční princip peristaltických čerpadel je inspirován pohybem střev, která jsou součástí trávicího traktu. Požitá potrava je střevy transportována vpřed jejich opakovaným rozpínáním a stahováním. Na tomto principu pracují peristaltická čerpadla, která se různým způsobem snaží tento pohyb emulovat užitím různých druhů aktuátorů.

Běžná komerčně dostupná zařízení fungující na daném principu využívají rotačního pohybu rotoru a lze se s nimi setkat v mnoha průmyslových odvětvích (zdravotnictví, stavebnictví, potravinářství, chemie, akvaristika atd...). Mezi jejich hlavní výhody patří možnost velmi přesného dávkování a schopnost čerpat kapaliny o libovolné viskozitě, chemicky agresivní kapaliny nebo čisté kapaliny. Nevýhodou je mechanické namáhání způsobující opotřebení trubice a nutnost její výměny.

Navržené čerpadlo, na jehož analýzu je práce zaměřena, simuluje peristaltický pohyb pomocí pěti elektromagnetických aktuátorů skládajících se z měděného vinutí, magnetického obvodu a pohyblivého feromagnetického jádra. Počet aktuátorů lze změnit, avšak pro sestavení funkčního zařízení je nutné použít minimálně tři aktuátory. Aby zařízení bylo schopno čerpat kapalinu, je nutné navrhnout vhodný spínací cyklus aktuátorů tak, aby se kapalina v trubici pohybovala zvoleným směrem.

V současnosti jsou peristaltická čerpadla v popředí zájmu především v souvislosti s miniaturizací v elektronice. Miniaturizace způsobuje zvýšení koncentrace výkonu na jednotku plochy, což zvyšuje nároky na chlazení. Lineární peristaltická čerpadla jsou perfektními kandidáty pro takové využití vzhledem k jejich schopnosti (při vhodné konstrukci) čerpat libovolně malé či velké objemy kapaliny. V souvislosti s možností realizace čerpadel o velmi malých rozměrech se zvyšuje zájem o využití i ve zdravotnictví pro podávání léčiv dlouhodobě nemocným pacientům. Mikročerpadlo společně s léčivem by bylo umístěno uvnitř kapsle v těle pacienta přímo tam, kde by léčivo mělo účinkovat. Tímto způsobem se zajistí velmi přesné a kontinuální dávkování léčiva, což ušetří pacientovi například bolestivé vpichy injekční jehly a sníží namáhání jater, neboť v kapsli bude obsažena pouze aktivní látka bez jakýchkoliv přísad.

## 2. Způsoby čerpání kapalin

Čerpadlo je zařízení využívající mechanickou energii pro transport kapalin, stlačování plynů a plnění nafukovacích objektů. Nacházejí využití při čerpání vody ze studní, v energetickém průmyslu pro transport olejů a plynů, v automobilovém průmyslu pro chlazení vody a vstřikování paliva, v chemickém průmyslu a zdravotnictví (například umělé srdce). Pro pohon čerpadla byla dříve využívána převážně lidská a zvířecí síla, dnes jsou nejběžnějšími pohony čerpadel motory. Čerpadlo může být umístěno mimo i přímo uvnitř nádrže, odkud je kapalina čerpána.

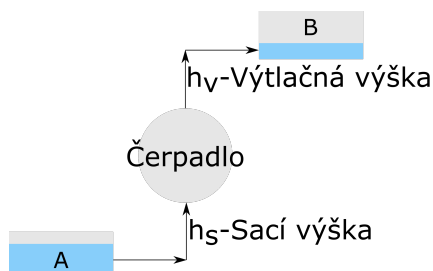
Dodaná energie zajišťuje transport kapaliny z bodu A do B a zároveň pokrytí tepelných ztrát způsobených vzájemným třením molekul o sebe/stěnu trubice. Zvýšíme-li množství dodávané energie

- Při zachování původního výškového rozdílu mezi A a B jsme schopni čerpat větší objem kapaliny
- Při zachování původního čerpaného objemu kapaliny zvýšit výškový rozdíl mezi body A a B

Snížíme-li množství dodané energie

- Při zachování původního výškového rozdílu mezi A a B budeme čerpat menší objemy kapaliny
- Za účelem zachování původního čerpaného objemu jsme nuceni snížit výškový rozdíl mezi A a B

Čerpadla lze dělit na **objemová** a **odstředivá**. [1]

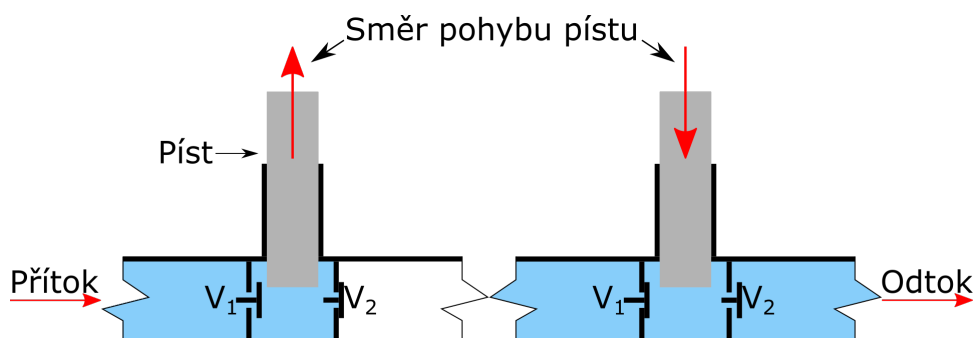


Obrázek 2.1.: Schématické znázornění funkce čerpadla

## 2.1. Objemová čerpadla

Objemová čerpadla nevyžadují zaplavení pracovní komory na začátku pracovního cyklu, neboť jsou schopna sama nasát kapalinu, bývají zpravidla označována jako samonasávací. Jejich principem je nasátí a uzavření určitého objemu kapaliny, který je fungováním zařízení kontrolovaně přenesen ze vstupu na výstup.

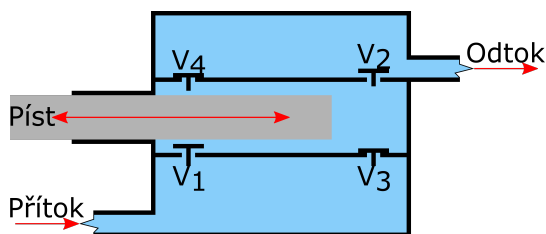
### Jednočinné pístové čerpadlo



Obrázek 2.2.: Princip pístového čerpadla - vlevo nasávání kapaliny, vpravo vytlačování kapaliny

Vlevo na obrázku 2.2 je zobrazeno nasávání kapaliny do pracovní komory pístového čerpadla. Vytahováním pístu vzniká podtlak otevírající  $V_1$ , čímž je kapalina načerpávána. Vpravo na obrázku, při pohybu pístu směrem dovnitř, je uvnitř komory vytvářen přetlak uzavírající  $V_1$  a otevírající  $V_2$ . Uzavřením  $V_1$  je znemožněno nasávání další kapaliny a otevřením  $V_2$  je vytlačována ven z pracovní komory. Pro správnou funkčnost čerpadla je nutné zajistit dokonalou těsnost systému s účelem zamezení úniku kapaliny. Čerpadlo využívá buď ručního, nebo motorového pohonu. Rychlost čerpání kapaliny je ovlivněna otáčkami motoru a rozměry samotného čerpadla. Průtok kapaliny je velmi pulzní vzhledem k neschopnosti konstrukce vytlačovat a nasávat kapalinu ve stejném okamžiku. [1]

### Dvojčinné pístové čerpadlo



Obrázek 2.3.: Dvojčinné pístové čerpadlo

Dvojčinné pístové čerpadlo funguje na stejném principu, jako jednočinné s tím rozdílem, že v každém okamžiku dochází k nasávání a vytlačování kapaliny zároveň. Pohybem pístu dovnitř je otevřen ventil  $V_1$ , přes který je do pracovní komory kapalina nasávána a skrz ventil



## 2. Způsoby čerpání kapalin

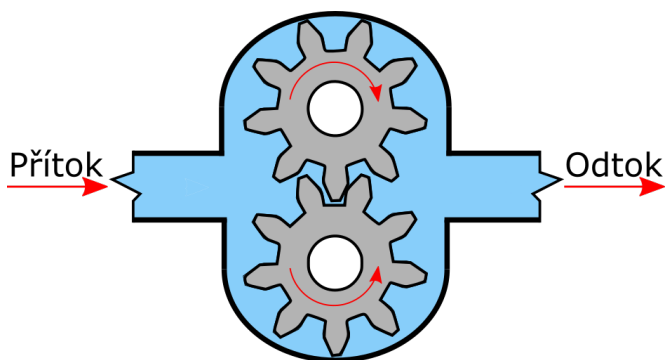
$V_2$  vytlačována. Vytahováním pístu ven z pracovní komory je kapalina nasávána přes  $V_3$  a vytlačována skrz  $V_4$ . Tento typ čerpadla je vhodný pro transport malých objemů kapaliny. [1]

**Výhody:** Schopnost vyvinout velmi velké tlaky (desítky až stovky MPa), čerpat vysoce viskózní nebo kapaliny obsahující mechanické nečistoty.

**Nevýhody:** Pulznost toku, nároky na těsnost, náročná údržba.

**Využití:** Dávkovač mýdla, ruční pumpa na vodu, injekční stříkačky, ruční pumpičky (např. pro nafukování míčů, bazénů atp...), průmyslové aplikace vyžadující vysoké tlaky (např. odsávání nadrcené horniny při vrtání ropných vrtů).

### Zubové čerpadlo



Obrázek 2.4.: Zubové čerpadlo

Ozubená kola rotují v proti směru vůči sobě, čímž na vstupu do čerpadla vzniká podtlak, který nasává kapalinu do komory. Po vstupu do komory se kapalina dostane do prostoru mezi zuby kol a tím se rozdělí do dvou proudů (proud horního a spodního kola). Kapalina v mezizubí je rotací přepravena na výstupní stranu, kde se oba proudy opět sjednotí, což vytváří přetlak nutící kapalinu opustit prostor pracovní komory. Ke zpětnému toku nedochází, neboť zuby kol na sebe při rotaci dosedají a znemožňují tak kapalině proudit jiným směrem, než kterým směrem je čerpána. [2]

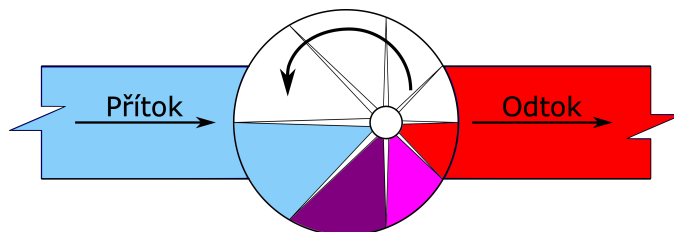
**Výhody:** Konstantní tok, schopnost transportovat kapaliny o různých viskozitách, jednoduchá údržba, možnost obousměrného toku (směr toku závisí na směru otáčení ozubených kol)

**Nevýhody:** Vysoká náročnost při výrobě na přesnost dílů, hluk, nevhodné pro čerpání kapalin obsahujících mechanické nečistoty (dochází k opotřebení ozubených kol)

**Využití:** Aplikace pracující s oleji/ropou a jejími deriváty, potravinářství (práce s čokoládou, arašídovým máslem, kukuřičným sirupem atd...), transport pryskyřic a polymerů, práce s barvami [3]

## 2. Způsoby čerpání kapalin

### Lamelové čerpadlo



Obrázek 2.5.: Lamelové čerpadlo

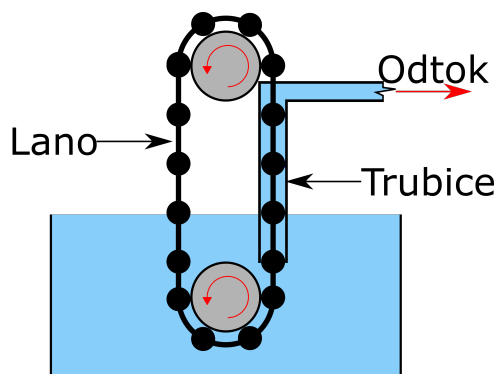
Lamelové čerpadlo má excentricky umístěný rotor s pružně připevněnými lamelami. Otáčením rotoru dochází k jejich prodlužování a zkracování. Prodloužením lamel je vytvořen podtlak nasávající kapalinu do pracovní komory. Naopak, při jejich zkrácení, dochází ke zvýšení působícího tlaku na kapalinu, která je následně vytlačena ven z pracovní komory. Barvy na obrázku 2.5 symbolizují změny tlaku (modrá-nízký tlak, červená-vysoký tlak). [2]

**Výhody:** Schopnost čerpat kapaliny s nízkou viskozitou při relativně vysokých tlacích, schopnost vakuovat nádoby.

**Nevýhody:** Složitá konstrukce, nepoužitelnost pro velmi vysoké tlaky, neschopnost čerpat kapaliny s vysokou viskozitou.

**Využití:** Laboratoře, automobilový průmysl

### Lanové čerpadlo



Obrázek 2.6.: Lanové čerpadlo

Lanové čerpadlo je konstruováno hnacím kolem, dále kolem pro zajištění dráhy lana (na obrázku 2.6 zobrazeny šedými kruhy), trubicí skrze niž je lano taženo a z lana s uzly o průměru trubice. Otáčením hnacího kola se lano pohybuje a pomocí uzlů je voda vytlačována trubicí ke spotřebiteli. [4]

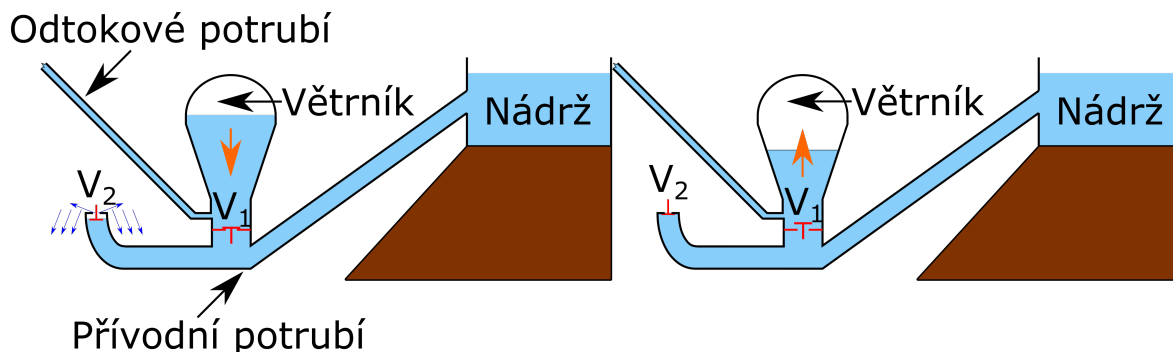
**Výhody:** Jednoduchá konstrukce

**Nevýhody:** V průmyslu nepoužitelné

**Využití:** Rozvojové země a místa, kde nemá význam/není možné zajistit dodávku vody jiným způsobem

## 2. Způsoby čerpání kapalin

### Vodní trkač



Obrázek 2.7.: Vodní trkač

Tento druh čerpadla funguje na unikátním principu. Pro čerpání využívá, na rozdíl od čerpadel využívajících mechanickou energii dodanou externím zdrojem, potenciální energii kapaliny. Na obrázku 2.7 je schématicky zobrazen pracovní princip trkače. Vlevo kapalina teče přívodním potrubím a zvyšuje se její rychlost a tím i její kinetická energie. Trkačící ventil  $V_2$  je otevřený, neboť na závaží na něm připevněné působí tíhová síla. Zároveň ve větrníku dochází k expanzi vzduchu, který tlačí na kapalinu a nutí ji odtéct odtokovým potrubím (oranžová šipka symbolizuje směr pohybu hladiny). Ve chvíli, kdy voda v přívodním potrubí nabyde dostatek kinetické energie, dochází k uzavření trkačícího ventilu  $V_2$  (pohyb vody je dostatečně silný na to, aby překonal tíhovou sílu působící na závaží připevněné k  $V_2$ ). V tomto okamžiku se v potrubí objeví přetlak otevírající ventil  $V_1$  (zobrazeno vpravo na obrázku 2.7) a voda plní větrník. Plněním větrníku je stlačován vzduch a ve chvíli, kdy již voda není schopna vzduch stlačovat, dochází k uzavření  $V_1$  a zároveň k otevření  $V_2$ , neboť se kapalina nepohybuje a závaží na  $V_2$  zajišťuje jeho otevření. Proud kapaliny opět nabývá kinetické energie a cyklus se opakuje. [5]

**Výhody:** Přímé využití potenciální energie kapaliny pro její transport, schopnost překonávat velké výškové rozdíly, nepřetržité fungování, cena

**Nevýhody:** Pouze část čerpané kapaliny se dostává ke spotřebiteli (čím vyšší výškový rozdíl spotřebitel-nádrž, tím méně kapaliny je přečerpáno), nemožnost regulace, nutnost vhodného zdroje kapaliny (např. řeka)

**Využití:** V oblastech bez elektřiny pro čerpání kapaliny mezi místy s výškovým rozdílem

## 2.2. Odstředivá čerpadla

Na rozdíl od objemových čerpadel vyžadují pro své fungování zaplavení pracovní komory. Pro svou činnost využívají Bernoulliho rovnice

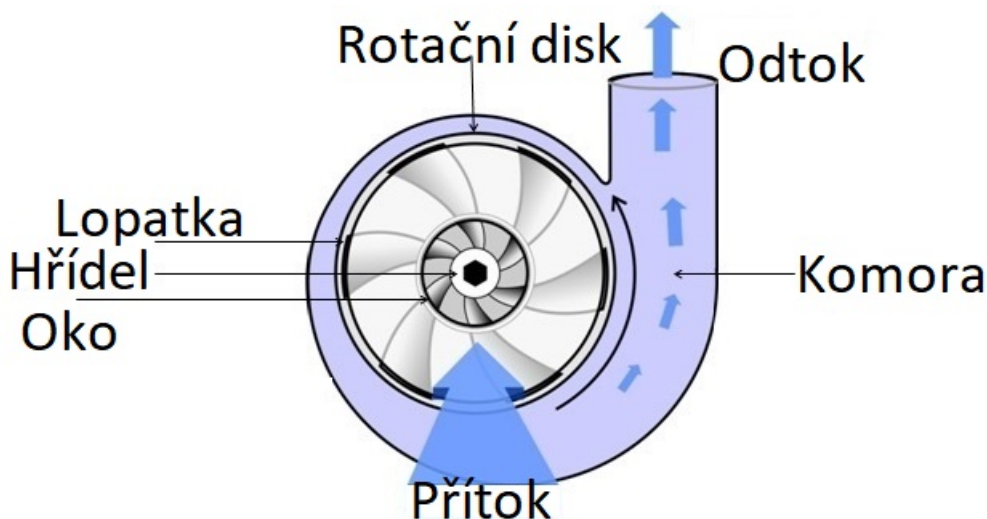
$$E_{\text{Kin}} + E_{\text{Tlak}} + E_{\text{Pot}} = \text{konst}, \quad (2.1)$$

## 2. Způsoby čerpání kapalin

kde  $E_{\text{Kin}}$  je měrná kinetická (pohybová) energie,  $E_{\text{Tlak}}$  je měrná tlaková energie a  $E_{\text{Pot}}$  je měrná potenciální (polohová) energie kapaliny kapaliny. Tyto energie jsou vyjádřeny

$$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$$
$$E_{\text{Tlak}} = p$$
$$E_{\text{Pot}} = \rho \cdot g \cdot h,$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny,  $v$  je rychlost proudění,  $p$  je tlak,  $g$  je gravitační zrychlení a  $h$  je výška potrubí nad povrchem země. Rovnice 2.1 říká, že součet kinetické, tlakové a potenciální energie je roven konstantě. Z tohoto vztahu vyplývá skutečnost, že dojde-li ke zvýšení rychlosti pohybu kapaliny, a tudíž i zvýšení kinetické energie, pak dochází k snížení tlakové energie. Zvýšení kinetické energie kapaliny dosáhneme zúžením potrubí. Naopak jeho rozšířením kapalinu zpomalíme a zvýšíme její tlakovou energii.



Obrázek 2.8.: Schématické znázornění odstředivého čerpadla [6]

Na obrázku 2.8 je schématicky znázorněné odstředivé čerpadlo. Kapalina je přiváděna do středu rotačního disku (na obrázku "Okno"). Rotací vzniká podtlak nasávající kapalinu do pracovní komory, kde jí je dodávána kinetická energie. Kapalina je vytlačována k okraji komory, čímž se snižuje její kinetická energie a zároveň s tím, dle Bernoulliho rovnice, vzrůstá její tlaková energie. [1]

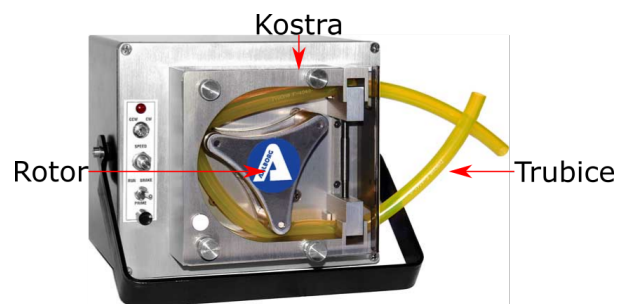
**Výhody:** Jednoduchá konstrukce a princip, minimum pohyblivých částí, konstantní tok

**Nevýhody:** Neschopnost čerpat kapaliny s vysokou viskozitou, vhodné pouze pro čerpání mezi místy s malým výškovým rozdílem, nutnost zaplavení komory před spuštěním čerpadla

**Využití:** V budovách pro čerpání vody a obecně v jakékoliv aplikaci pracující s kapalinou o nízké viskozitě

### 3. Peristaltické čerpadlo

Peristaltické čerpadlo bylo vynalezeno v USA, roku 1885 si jej nechali patentovat (US12753A) Rufus Porter a J.D. Bradley. Čerpadlo se skládá ze tří částí: kostra, rotor a trubice.



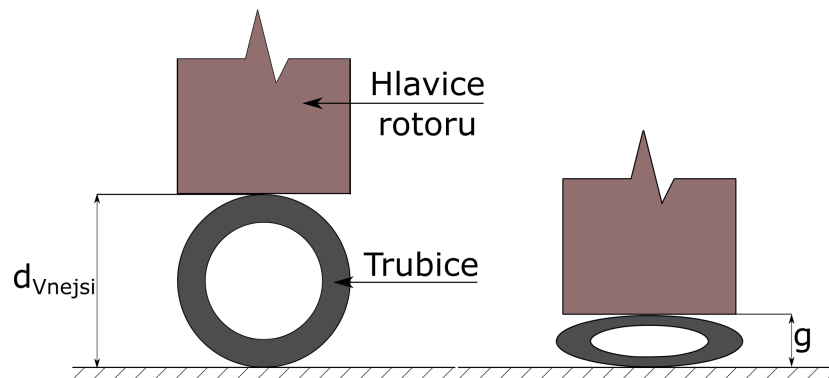
Obrázek 3.1.: Konstrukce peristaltického čerpadla [7]

**Kostra** čerpadla slouží jako mechanická ochrana zařízení a zároveň je v ní uchycená trubice, kterou je kapalina přepravována. **Rotor** je umístěn uvnitř kostry a má různé tvary dle aplikace, pro kterou je určen (různý počet hlav, velikost). Menší čerpadla mají na hlavici rotoru umístěný rotační váleček, větší mají hlavici zaoblenou. Chtěli-li bychom sestavit dokonalé peristaltické čerpadlo s konstantním tokem, pak by rotor čerpadla i zakončení hlavice musely mít nekonečný průměr, avšak takové čerpadlo je fyzicky nemožné sestavit. Nedokonalý tvar rotoru ovlivňuje průtok kapaliny následujícími způsoby:

- Počet hlavice rotoru ovlivňuje pulznost. Čím více hlav rotor má, tím nižší je pulznost toku kapaliny. Zároveň se zvyšujícím se počtem hlav se snižuje průtok kapaliny a zkracuje životnost trubice.
- Průměr hlavice tlačící na trubici ovlivňuje pulznost: se zvětšujícím se průměrem klesá.
- Zvýšením otáček rotoru se zvýší průtok čerpané kapaliny a zároveň pulznost průtoku.

Dalším důležitým parametrem, kromě otáček a rozměrů, je vzdálenost hlavice od kostry při stlačení trubice. Čím blíže je hlavice kostře při stlačení, tím více se trubice opotřebovává. Při nedostatečném stlačení trubice je výrazně snížen tlak vyvíjený na kapalinu v trubici a zároveň hrozí její proklouznutí a zpětný tok. [8]

### 3. Peristaltické čerpadlo



Obrázek 3.2.: Schématické zobrazení jedné hlavy peristaltického čerpadla

Zmáčknutí trubice  $y$  můžeme vypočítat za předpokladu, že známe vnější průměr trubice  $d_{Vnejsi}$  a požadavek na maximální vzálenost hlavy od kostry  $g$ :

$$y = d_{Vnejsi} - g$$

**Trubice** využívané peristaltickými čerpadly musí být mechanicky i chemicky odolné a dostatečně elastické, aby se po stlačení rotorem opět vrátily do původního tvaru. Pro výrobu trubíc se využívá:

- **Nitril:** Sloučenina dusíku a uhlíku s trojnou vazbou. Využívá se při výrobě bezlátexových nemocničních rukavic, superlepidel a v automobilovém průmyslu díky odolnosti vůči pohonným hmotám a olejům. [9]
- **Hypalon:** Obchodní název chlorosulfonátu polyethylenu. Jedná se o tepelně a chemicky odolný materiál. Využíván např. pro výrobu nafukovacích lodí(raftů). [10]
- **PVC:** Polyvinyl chlorid. Vyráběn buď v rigidní nebo flexibilní formě. Z PVC se vyrábí plastové láhve, obaly, bankovní karty, nafukovací balónky atd... [11]
- **EPDM:** Etylen-propylen-dienový kaučuk, též nazýván jako syntetická guma. Velmi odolný proti teplotě, stárnutí a tepelným i chemickým vjemům. Využívá se v automobilovém průmyslu. [12]
- **Kaučuk:** Přírodní guma získávaná v podobě latexu z kaučukovníků. [13]

#### Výhody

Čerpaná kapalina nepřichází do styku s čerpacím zařízením, možnost velmi přesného regulování průtoku, jednoduchá konstrukce, spolehlivost, čerpadlo je samonasávací, vhodné pro čerpání chemicky agresivních a velmi viskózních kapalin. [8]

#### Nevýhody

Provozováním čerpadla dochází k mechanickému namáhání a destrukci trubice, ve zdravotnictví při čerpání krve dochází k destrukci krvinek (nutné provést dodatečná konstrukční opatření), pulznost toku při nízkých otáčkách rotoru (nevhodné pro aplikace vyžadující konstantní tok). [8]

### 3. Peristaltické čerpadlo

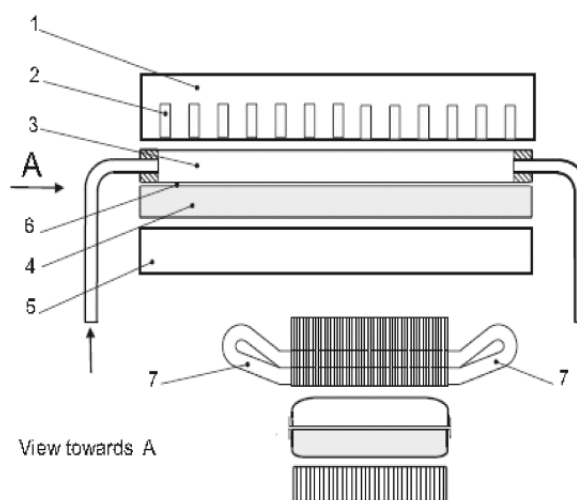
#### Využití peristaltických čerpadel

Peristaltická čerpadla jsou využívána v mnoha průmyslových odvětvích. Jako příklady jejich využití můžeme uvést:

- **Zemědělství** - V zemědělství je využíváno mnoho chemicky agresivních kapalin (např. pesticidy, hnojiva...). Peristaltická čerpadla jsou vhodná pro tyto účely z důvodu chemické odolnosti materiálů trubic.
- **Stavebnictví** - Ve stavebnictví peristaltická čerpadla využijeme při čerpání tekutého betonu.
- **Akvaristika** - Akvaristé využívají peristaltická čerpadla pro udržování konstantního chemického složení vody v akváriu.
- **Potravinářský průmysl** - Aplikace vyžadující přesné dávkování, nebo přesun vysoce viskózních kapalin (např. tekutý sýr).
- **Analytická chemie** - Aplikace vyžadující přesné dávkování, nebo při práci s chemicky agresivními látkami.
- **Zdravotnictví** - Aplikace vyžadující přesné dávkování (dlouhodobé podávání léků) nebo stroj na dialýzu. [8]

#### 3.1. Peristaltické čerpadlo realizované magnetoelastickou membránou

Čerpadlo popsané v kapitole 3 využívá pro transport kapaliny rotor tlačící na trubici. Jedná se o mechanické uspořádání a pohybem vznikají hluk a vibrace. Alternativní možností, jak takové čerpadlo sestavit, je využití magnetické kapaliny/magneto-elastického materiálu a více fázového vinutí.



Obrázek 3.3.: 1-Blok dynamo plechů, 2-Drážky pro usazení vinutí, 3-Pracovní komora, 4-Nádrž obsahující magnetickou kapalinu/magnetoelastická membrána, 5-Jho dynamo plechů, 6-Elastická membrána, 7-Vinutí [14]

### 3. Peristaltické čerpadlo

Vinutí je napájeno ze střídavého více fázového zdroje elektrické energie o nízké frekvenci (řádově jednotky Hz). Vinutí vytváří proměnlivé magnetické pole působící na magnetoelastickou membránu. Ta je jeho účinky přitahována a tlačí na pracovní komoru. Vzhledem k tomu, že magnetické pole je proměnlivé, je membrána přitahována v každém časovém okamžiku v jiném místě a dochází tak k vytváření stejného efektu, jako u čerpadla s rotorem. Čerpadlo je možné konstruovat jako lineární nebo kruhové.[14]

#### 3.2. Peristaltické čerpadlo realizované stejnosměrným mikromotorem

Pro čerpání kapaliny využívá celkem šesti miniaturních magnetů. Tři z nich jsou umístěny tak, aby mohly stlačovat trubici a zbylé tři jsou umístěny na hřídeli stejnosměrného mikromotoru. Otáčením hřídele jsou magnety přitahovány a stlačováním trubice je kapalina vytlačována vpřed.



Obrázek 3.4.: Sestavené zařízení [15]

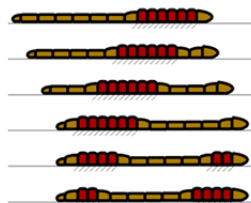
Na obrázku 3.4 vlevo je zobrazená struktura pracovní komory. V horní vrstvě jsou magnety umístěny vedle sebe tak, aby při rotaci hřídele motoru nedošlo k přitažení dvou magnetů zároveň (v případě, že by všechny magnety měly spodní pól stejný, docházelo by k jejich přitažení i přes to, že by neměly být). V prostoru mezi střední a dolní vrstvou je tekutina a mají výstup upravený tak, aby bylo možné k němu připojit trubici. Vpravo je pak vidět umístění stejnosměrného mikromotoru, na jehož hřídeli jsou rozmístěny magnety tak, aby její rotací docházelo k sekvenčnímu přitahování magnetů umístěných v horní vrstvě. [15]

#### 3.3. Peristaltické čerpadlo realizované umělým svalem

Peristaltického pohybu v přírodě využívají žížaly či housenky. Jejich těla jsou složena z jednotlivých článků skládajících se z příčných a podélných svalů. Při pohybu se nejprve příčné svaly roztahují a podélné stahují, čímž dochází k vizuálnímu zkrácení. Pro pohyb vpřed následuje proces opačný a dochází tak k prodloužení svalů podélných a stažení svalů příčných. Grafické zobrazení pohybu je zobrazeno na obrázku 3.5.

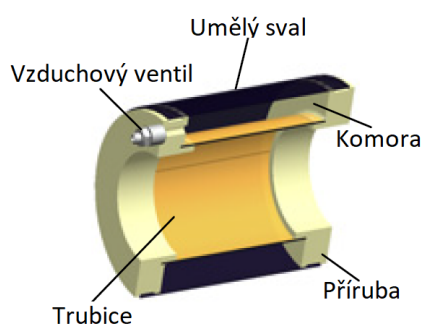


### 3. Peristaltické čerpadlo



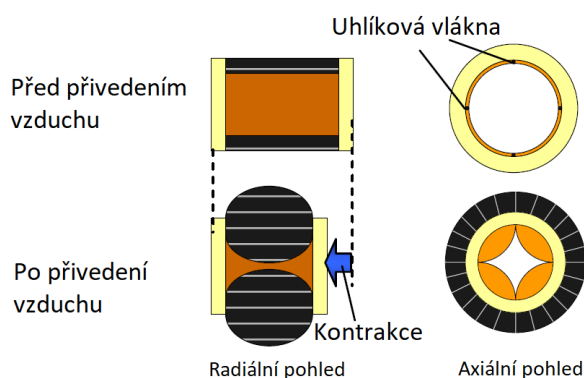
Obrázek 3.5.: Pohyb žížaly [16]

Tohoto pohybu je dosaženo užitím stlačeného vzduchu. Jeden článek zařízení je v řezu zobrazen na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6.: Umělý sval [17]

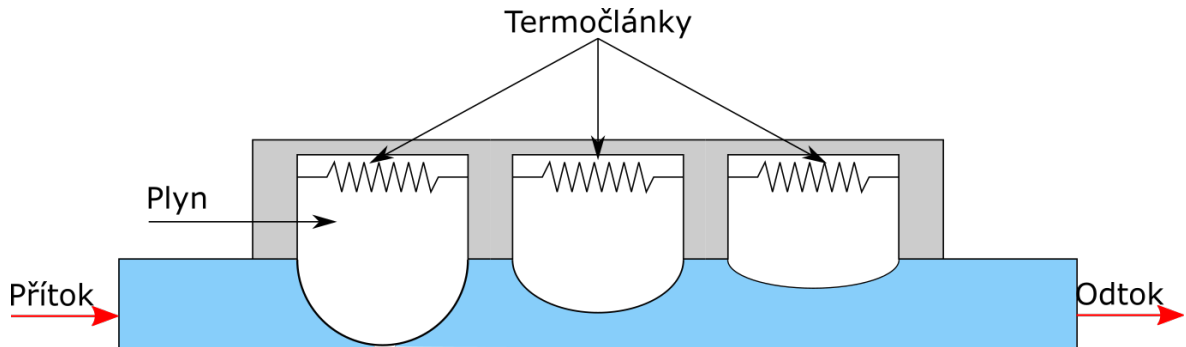
Přivedením vzduchu přes vzduchový ventil se umělý sval radiálně rozpíná a trubice je ve stejnou chvíli nucena k axiální kontrakci (schématicky zobrazeno na 3.7).



Obrázek 3.7.: Schématické znázornění funkce [17]

Zařízení je sestavováno spojením mnoha článků za sebou a jeho účelem je snížení potřebného objemu vody při splachování v domácnostech. V případě jeho masové implementace do potrubních systémů by bylo možné výrazně snížit potřebný objem vody nutný pro splachování, neboť se v principu jedná o peristaltické čerpadlo a využitím schopnosti čerpat kapaliny o vysoké viskozitě by stačil pouze zlomkový objem toho, kolik vody je pro spláchnutí běžně využíváno. [17]

### 3.4. Peristaltické čerpadlo realizováno pomocí termo-pneumatických aktuátorů

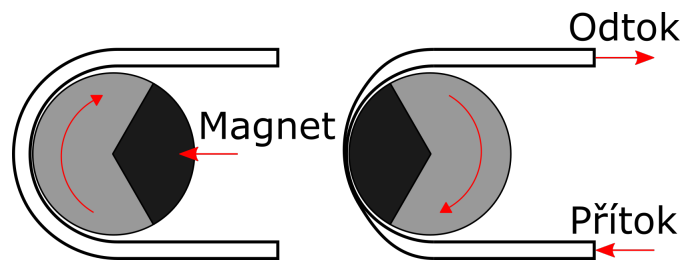


Obrázek 3.8.: Schématické zobrazení zařízení [18]

Na obrázku 3.8 je schématicky zobrazené čerpadlo sestavené s použitím termo-pneumatických aktuátorů. Ohřátím termočlánku je zároveň ohřát a rozepnut plyn v komoře, čímž je vyvinut tlak na trubici způsobující její stlačení. Stlačení trubice je kapalina vytlačována směrem vpřed. [18]

### 3.5. Peristaltické čerpadlo realizované permanentním magnetem

Další způsob, jak využít magnetické pole pro zkonstruování peristaltického čerpadla je rotačně upevněný permanentní magnet a trubice vyrobená z feromagnetického materiálu.

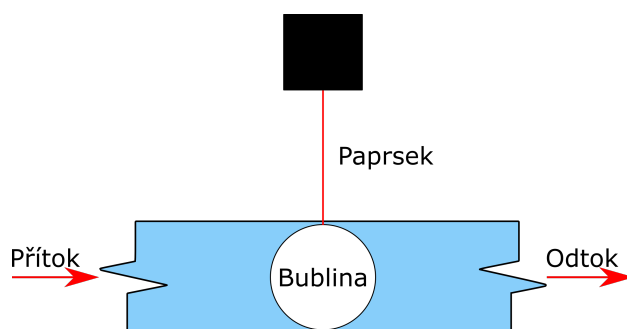


Obrázek 3.9.: Peristaltické čerpadlo-využití rotačního magnetu

Princip je velmi podobný, jako čerpadla na obrázku 3.3 s tím rozdílem, že trubice je vyrobena z feromagnetického materiálu. Díky této skutečnosti není potřeba elastická membrána ani střídavý zdroj elektrické energie. Magnet je připevněn na hřídeli motoru a jeho otáčením dochází ke stlačování trubice.

### 3.6. Peristaltické čerpadlo realizované laserem

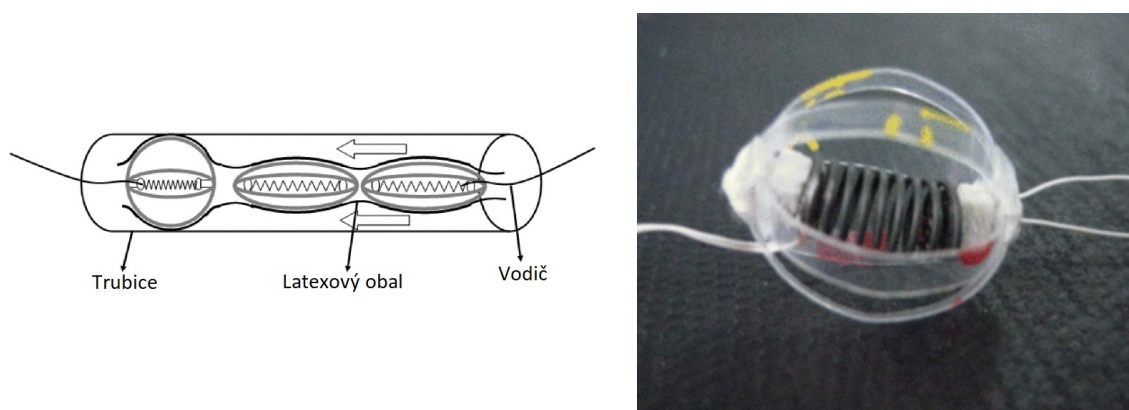
Čerpání velmi malých objemů kapalin (rychlosti čerpání dosahují stovek pikolitrů za sekundu) je dosaženo pomocí pulzně spínaného laseru. Soustředěním paprsku do jednoho bodu dochází k prudkému ohřátí miniaturního objemu kapaliny v kanálu, což způsobí její vypaření a vzniká bublina mající výrazně větší objem, než objem kapaliny, ze které vznikla. Bublina nyní nutí kapalinu pohybovat se směrem vpřed. Princip zařízení je schématicky znázorněn na obrázku 3.10. [19]



Obrázek 3.10.: Schématické znázornění [19]

### 3.7. Peristaltické čerpadlo realizované materiálem s tvarovou pamětí

Pro čerpání kapaliny je využíváno materiálů s tvarovou pamětí. Na obrázku 3.11 je vlevo schématické znázornění zařízení a vpravo fyzická jednotka.

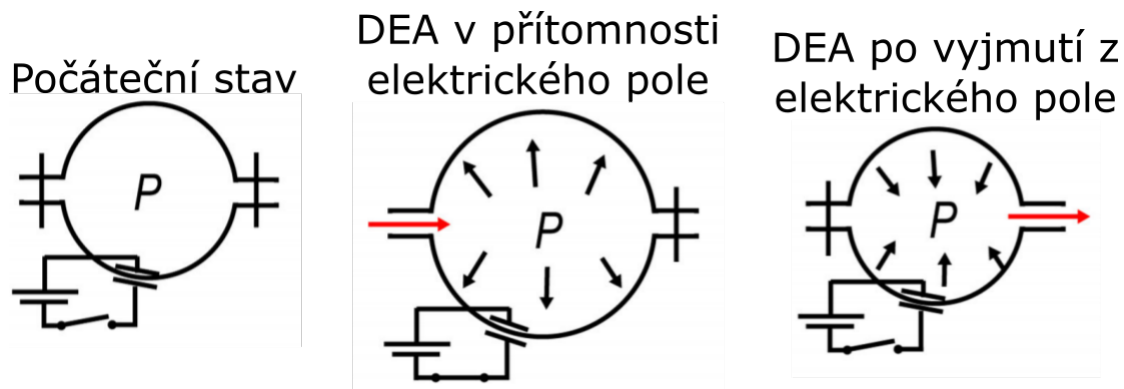


Obrázek 3.11.: Funkční zařízení [20]

Pružina je vyrobena z materiálu s tvarovou pamětí a v klidovém stavu je natažená kvůli působení sil elastomerových pruhů (zobrazeno vpravo na obrázku 3.11). Přivedením elektrické energie se pružina začíná ohřívat a díky tvarové paměti dochází k jejímu zkrácení a zároveň ke zvětšení poloměru průhybu plastových pruhů. Celá jednotka je zabalena do latexového obalu a umístěna uvnitř trubice, kde je kapalina opětovným ohříváním a ochlazováním pružiny čerpána. [20]

### 3.8. Peristaltické čerpadlo realizované užitím DEA

Dielektrický elastomerový aktuátor (zkratka DEA) je materiál měnící své geometrické rozměry v závislosti na velikosti působícího elektrického pole. Využívají podobného principu jako čerpadla v kapitole 3.7. Schématicky je chování DEA zobrazeno na obrázku 3.12.

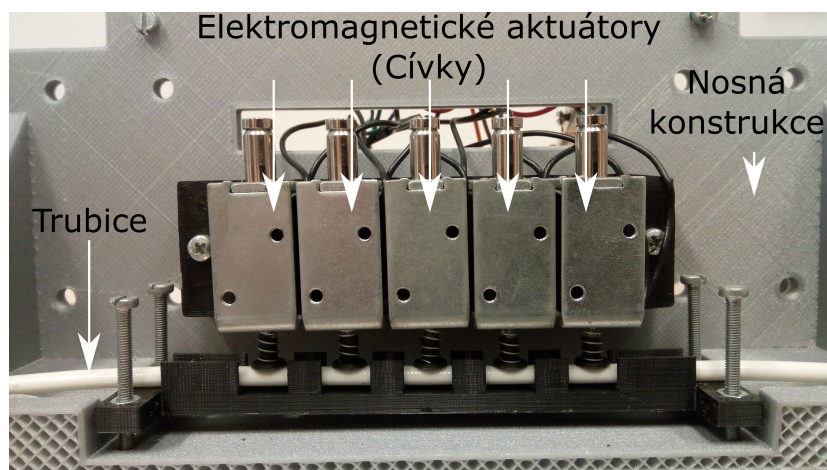


Obrázek 3.12.: Schématické zobrazení fungování DEA [21]

- Není-li materiál vystaven účinkům elektrického pole, pak se nachází v ustáleném stavu a nemění své geometrické rozměry (na obrázku vlevo).
- Vystavíme-li materiál účinkům elektrického pole, pak dochází ke změně jeho geometrických rozměrů (na obrázku uprostřed). Dochází k rozpínání, což vytváří podtlak a nasává kapalinu do pracovní komory.
- Po vyjmutí materiálu z elektrického pole (na obrázku vpravo) nastává děj opačný a DEA nabývá původních rozměrů, čímž vzniká v pracovní komoře přetlak nutící kapalinu opustit pracovní komoru.

V závislosti na tvaru průběhu a frekvence elektrického pole, jehož účinkům je DEA vystaveno (sinusový, obdélníkový či pilový), se průtoky pohybují od stovek mililitrů až po jednotky litrů za minutu. Velkou nevýhodou těchto aktuátorů je nutnost vysokého napětí (řádově jednotky až desítky kV) a z tohoto důvodu v současné době nejsou vhodné pro aplikaci v mikročerpadlech. [21]

## 4. Lineární peristaltické čerpadlo

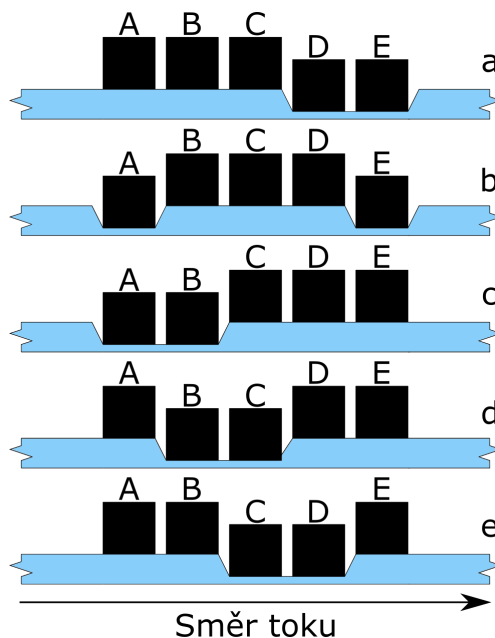


Obrázek 4.1.: Čerpadlo sestavené užitím elektromagnetických aktuátorů

Běžná peristaltická čerpadla využívají pro čerpání kapaliny rotační pohyb rotoru a jejich vlastnosti jsou popsány v kapitole 3. Lineární provedení čerpá kapalinu na základě stejného principu, avšak jeho konstrukce je upravena takovým způsobem, aby k čerpání kapaliny docházelo v rovině. Tohoto lze dosáhnout různými způsoby a některé z nich jsou popsány v kapitolách 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.6, 3.7 a 3.8. Pro sestavení funkčního demonstrátoru je v využito elektromagnetických aktuátorů viz obrázek 4.1. Pro plnění požadované funkce je nutné navrhnout vhodný spínací cyklus zajišťující transport kapaliny jedním směrem a potlačující tok směrem opačným. Tato konstrukce, stejně jako obyčejné peristaltické čerpadlo, umožňuje transport kapaliny obousměrně v závislosti na zvoleném spínacím cyklu. Pro zajištění polohy trubice bylo navrženo a na 3D tiskárně vytištěno koryto. Nosná konstrukce byla navržena užitím softwaru Fusion 360<sup>1</sup> a též vytištěna na 3D tiskárně. Konstrukce čerpadla je podobná [22].

<sup>1</sup><https://www.fusion360.cz/>

### 4.1. Spínací cyklus



Obrázek 4.2.: Algoritmus spínání aktuátorů

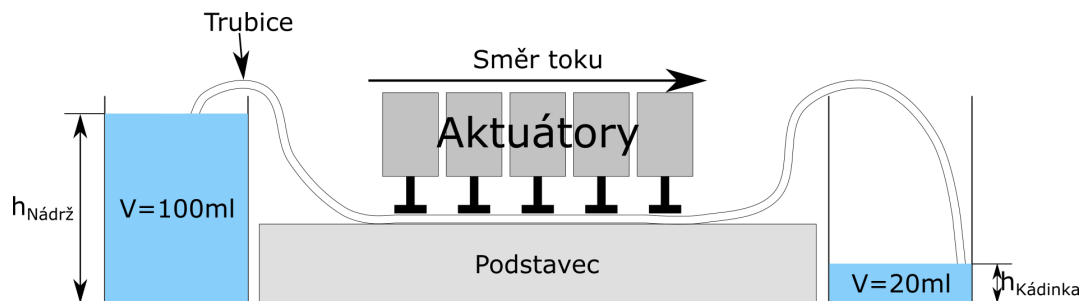
#### Popis spínacího cyklu

Ve stavu **a** jsou aktuátory **A**, **B**, **C** vypnuty a **D**, **E** sepnuty. Při přechodu ze stavu **a** do **b** je aktuátor **A** spínán a **D** vypínán. Sepnutím **A** je kapalina vytlačována ve směru toku a vypnutím **D** je nasávána v témže směru. Děj se opakuje při každém přechodu mezi dvěma stavy. Celý algoritmus je zasmyčkován a po skončení trvání stavu **e** přechází zařízení do stavu **a**. Pro sestavení tohoto typu čerpadla jsou nutné minimálně tři aktuátory.

### 4.2. Řízení průtoku kapaliny

- **Počet aktuátorů:** Změna počtu aktuátorů významně ovlivňuje rychlost čerpání. Experimentální měření byla provedena pro tři a pět aktuátorů. Výsledky jsou zobrazeny na obrázku 4.5.
- **Počet sepnutých aktuátorů:** Pro provoz zařízení byla zvolena varianta viz obrázek 4.2 (tři aktuátory vypnuty, dva sepnuty). Rychlost průtoku kapaliny již nelze s využitím uvedeného spínacího cyklu zvýšit, neboť při spínání pouze jednoho aktuátoru je kapalina vytlačována oběma směry. Naopak snížení rychlosti průtoku docílíme spínáním tří nebo čtyř aktuátorů.
- **Doba trvání stavu:** Rychlost průtoku též ovlivňuje frekvence, s jakou dochází k přechodu mezi jednotlivými stavy. Do jisté frekvence platí, že se zvyšující se frekvencí spínání dochází ke zvyšování průtoku kapaliny. Dostaneme-li se však na frekvenci spínání, kdy už aktuátor není schopen včas zareagovat (přitáhnout své jádro), pak dochází k velmi výraznému poklesu.

### 4.3. Měření průtoku kapaliny



Obrázek 4.3.: Schématické zobrazení čerpadla

Na obrázku 4.3 jsou zobrazeny počáteční podmínky měření: Trubice je již plně zaplavena vodou. Nádrž je naplněna objemem  $V \doteq 100$  ml a kádinka  $V \doteq 20$  ml. Podmínky jsou takto zvoleny vzhledem k neschopnosti čerpadla vytlačit vzduch z trubice a nasát kapalinu.

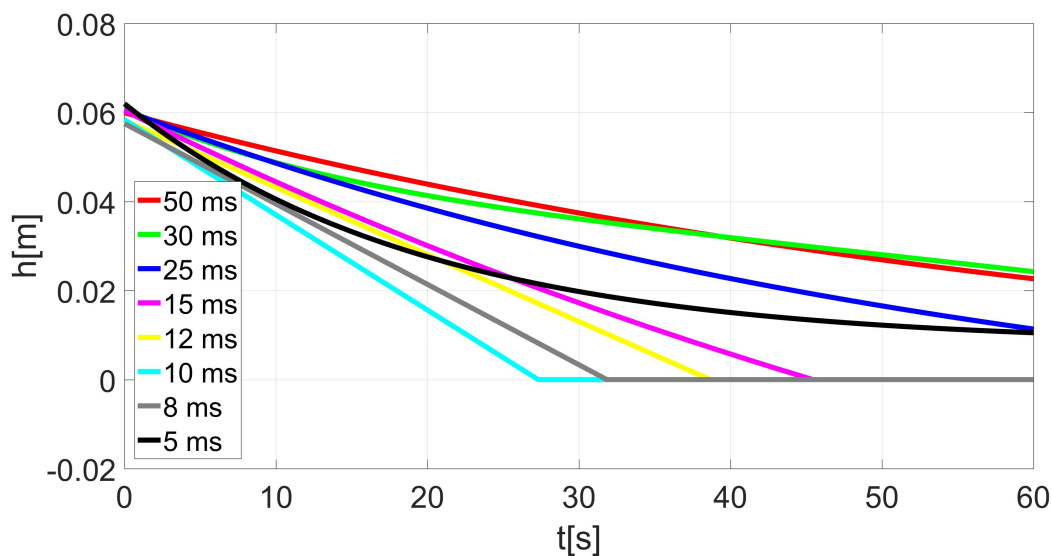
#### Postup měření

1. Nastavení počátečních podmínek viz obrázek 4.3.
2. Umístění indikátoru hladiny na hladinu nádrže.
3. Během čerpání je pořízen vizuální záznam pohybu indikátoru hladiny.
4. Měření je provedeno pro  $t_{Stav} = 5, 8, 10, 12, 15, 25, 30, 50$  ms.
5. Pořízené záznamy měření jsou analyzovány pomocí softwaru Tracker<sup>2</sup>.
6. Data získaná analýzou vizuálních záznamů jsou aproximována vhodnými funkcemi.

<sup>2</sup><https://physlets.org/tracker/>

#### 4. Lineární peristaltické čerpadlo

##### Výsledky měření



Obrázek 4.4.: Výsledky měření průtoku kapaliny

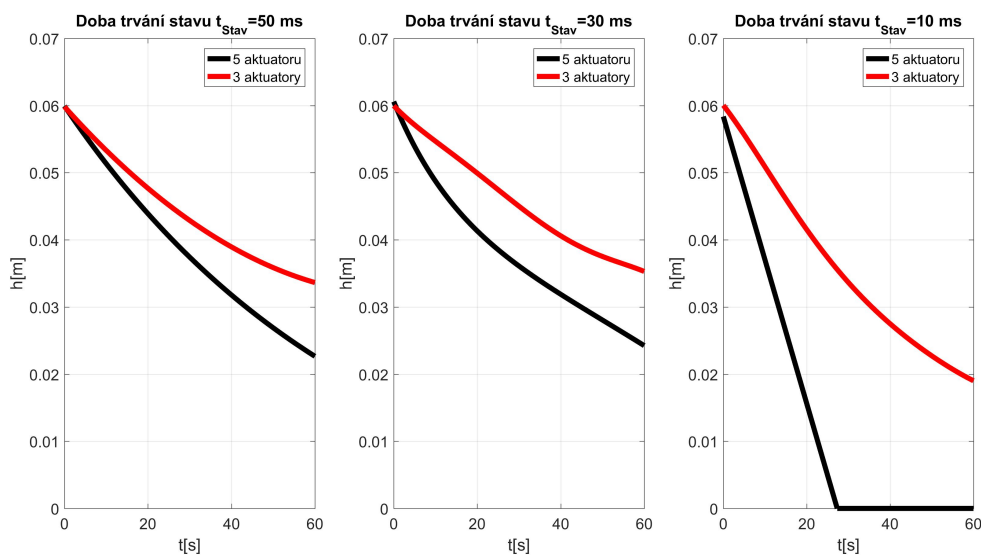
Graf 4.4 zobrazuje časový průběh změny výšky vodního sloupce nádrže.

- Pro  $t_{\text{Stav}} = 50, 30, 25, 5$  ms jsou rychlosti průtoku závislé na vztahu výšek vodních sloupců kádinky a nádrže. V případě, že rozdíl mezi výškami je malý, či platí  $h_{\text{Nadrz}} < h_{\text{Kadinka}}$ , pak je pozorováno výrazné snížení průtoku.
- Pro  $t_{\text{Stav}} = 8, 10, 12, 15$  ms jsou rychlosti průtoku téměř konstantní (výška vodního sloupce klesá lineárně) a nezáleží na vztahu výšek vodních sloupců nádrže a kádinky. K přečerpání celého objemu nádrže dochází za kratší časový interval, než jednu minutu.
- Pro rychlosti průtoku platí  $Q_{15\text{ms}} < Q_{12\text{ms}} < Q_{10\text{ms}}$  a zároveň pro  $t_{\text{Stav}} \leq 10$  ms platí  $Q_{10\text{ms}} > Q_{8\text{ms}} > Q_{5\text{ms}}$ . Při  $t_{\text{Stav}} < 10$  ms dochází k nedostatečnému stlačení trubice a výraznému snížení rychlosti průtoku.
- K nejrychlejšímu přečerpání objemu nádrže dochází při  $t_{\text{Stav}} = 10$  ms za dobu  $t \doteq 28$  s.



#### 4. Lineární peristaltické čerpadlo

##### Porovnání průtoků s různým počtem aktuátorů



Obrázek 4.5.: Porovnání průtoků při použití různého počtu aktuátorů pro různé  $t_{Stav}$

Grafy na obrázku 4.5 zobrazují výšku hladiny nádrže v závislosti na čase (stejná informace, jako je zobrazována na obrázku 4.4) pro různé trvání  $t_{Stav}$  a pro různý počet použitých aktuátorů.

- Zařízení čerpá rychleji při použití vyššího počtu aktuátorů. Rozdíl v rychlosti čerpání se zvyšuje při zkracování  $t_{Stav}$ .
- Při použití tří aktuátorů zařízení dosahuje nejvyšší rychlosti průtoku při  $t_{Stav} = 10$  ms. Rychlost průtoku již však není konstantní (klesání hladiny nádrže není lineárně závislé na čase) a závisí na vztahu mezi výškami hladin nádrže a kádinky.
- Z grafů je patrné, že zařízení dosahuje vyšších rychlostí průtoku při použití většího počtu aktuátorů a zároveň se pak stává odolnějším vůči působení zpětného tlaku.

## 5. Analýza elektromagnetického aktuátoru

Analýza použitého aktuátoru je rozdělena do tří částí: pohyb jádra, elektromagnetické a tepelné pole. Výsledky numerických modelů vypracovaných v softwarech COMSOL a Simulink jsou pak porovnávány s hodnotami získanými měřeními.

### 5.1. Elektromagnetického pole

#### První Maxwellova rovnice

V integrálním tvaru

$$\oint_K \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad (5.1)$$

též známá jako Ampérův zákon celkového proudu říká, že křivkový integrál druhého druhu po uzavřené křivce  $K$  intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$  je roven celkovému proudu  $I + \frac{d\Psi}{dt}$ . Při analýze je člen  $\frac{d\Psi}{dt}$  symbolizující posuvné proudy zanedbán.

V diferenciálním tvaru

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Nám říká, že rotace vektoru intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$  je rovna součtu vektorů proudové hustoty  $\mathbf{J}$  a časové změny elektrické indukce  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ . Budeme-li uvažovat statické, a nebo pomalu-se měnící pole, můžeme druhý z členů zanedbat a psát pouze

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.2)$$

Užitím Stokesovy věty je vztah 5.1 přepsán do podoby

$$I = \iint_S \text{rot } \mathbf{H} \, d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{J} \, d\mathbf{S},$$

vztah čteme tak, že plošný integrál druhého druhu proudové hustoty  $\mathbf{J}$  přes plochu  $S$ , kterou ohraničuje křivka  $K$ , je roven celkovému protékajícímu proudu  $I$ .

#### Vektorový potenciál magnetického pole

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (5.3)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (5.4)$$

Potenciály jsou v teorii elektromagnetického pole numericky zavedené veličiny tak, aby byly všude spojitě a zároveň diferencovatelné. Nevýhodou magnetického vektorového potenciálu  $\mathbf{A}$  je, že se řešení liší o konstantní vektor. Vztah 5.4 je doplňující Coloumbovská podmínka respektující nezřídlovost magnetického pole

## 5. Analýza elektromagnetického aktuátoru

### Druhá Maxwellova rovnice

V integrálním tvaru

$$\oint_K \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.5)$$

též známá jako Faradayův indukční zákon říká, že křivkový integrál druhého druhu po uzavřené křivce  $K$  intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  je roven obrácené hodnotě časové změny magnetického toku.

V diferenciálním tvaru

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.6)$$

říká, že rotace intenzity elektrického pole  $\mathbf{E}$  je rovna vektoru opačného směru časové změny magnetické indukce. Dosazením vztahu 5.3 do rovnice 5.6 získáváme

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi + \mathbf{K} \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde členy  $-\text{grad } \varphi$  a  $\mathbf{K}$  jsou integrační konstanty. Provedením těchto úprav jsme získali druhou Maxwellovu rovnici v diferenciálním tvaru pro potenciály.

### Coloumbova síla

Působí v elektrostatickém poli mezi dvěma bodovými náboji, nebo mezi dvěma nabitými tělesy. V tomto textu se těmito silami nebudeme zabývat.

### Lorentzova síla

Působí v elektromagnetickém poli na pohybující-se náboj nebo na proudovodič, kterým protéká elektrický proud. Tuto sílu vyjadřujeme vztahem

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

### Maxwellovy síly

Vyskytují v elektrickém i magnetickém poli. V poli elektrickém se projevují přitažením dielektrika mezi dvě nábojem nabitě desky. V magnetickém poli cívka protékaná proudem vytváří své vlastní pole působící na její jádro, které je vlivem působící síly přitaženo. Tyto síly lze vyjádřit dvěma různými způsoby:

#### 1. Rozdíl energií

$$\mathbf{F} = \mp \frac{\partial W}{\partial \mathbf{s}} \quad (5.8)$$

při numerických výpočtech se tento vztah převádí do podoby

$$\mathbf{F} = \mp \frac{W_2 - W_1}{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1} \quad (5.9)$$

## 5. Analýza elektromagnetického aktuátoru

Pro výpočet energie magnetického pole je nutné znát vektory intenzity magnetického pole  $\mathbf{H}$  a magnetické indukce  $\mathbf{B}$ . S jejich znalostí můžeme vyjádřit vektor měrné energie

$$w_m = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B}$$

a pro výpočet celkové energie provedeme integraci přes objem, kde magnetické pole působí

$$W = \iiint_V w_m dV \quad (5.10)$$

tento postup je vhodný užít v případech, že známe vektory  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{B}$ , nebo přímo energie systému. V případě, že tyto údaje neznáme, je vhodnější využít druhého způsobu výpočtu těchto sil.

2. **Maxwellův tenzor pnutí** popisuje vztah mezi účinky elektromagnetického pole a mechanickým namáháním

$$\mathbf{F}_m = \oint_S \mathbf{S}^m d\mathbf{S}, \quad (5.11)$$

kde  $\mathbf{F}$  je magnetická síla a  $\mathbf{S}^m$  je Maxwellův tenzor pnutí. [23] Podrobné odvození je uvedeno v příloze A.

## 5.2. Teplotní pole

Elektromagnetické pole má kromě silových účinků také účinky tepelné. Při jejich řešení využíváme prvního termodynamického zákona

$$\frac{dU}{dt} = P - Q \quad (5.12)$$

kde  $U$  je vnitřní energie systému,  $P$  je energie do systému přivedena a  $Q$  je práce systémem vykonaná. Vztah je upraven do vhodné podoby umožňující vypočítat tepelné účinky elektromagnetického pole

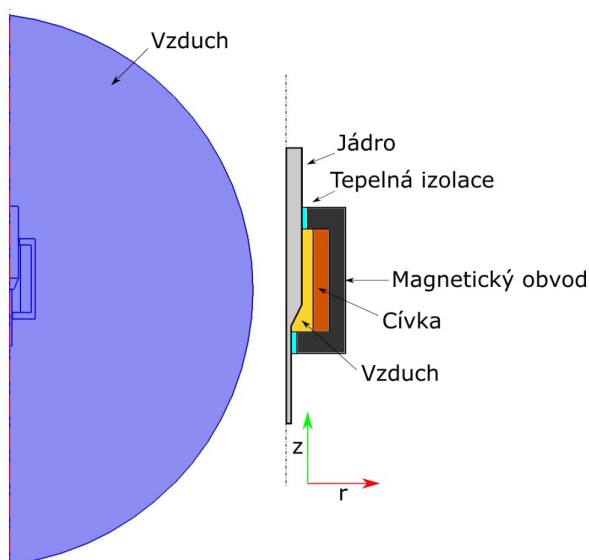
$$\operatorname{div} (\lambda \cdot \operatorname{grad} T) = \rho \cdot C_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T \right) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma}, \quad (5.13)$$

kde  $\lambda$  je tepelná vodivost,  $T$  je teplota,  $\rho$  je hustota,  $C_p$  je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku,  $\mathbf{v}$  je rychlost pohybu,  $\mathbf{J}$  je proudová hustota a  $\gamma$  je vodivost. [24] Podrobné odvození je uvedeno v příloze B.

### 5.3. Počítačová simulace aktuátoru v prostředí COMSOL Multiphysics

COMSOL je počítačový program určený pro numerické řešení fyzikálních problémů. Jeho užitím jsme schopni simulovat akustické, chemické, elektrochemické, optické, plasmatické, elektro-magnetické, tepelné, mechanické a mnohé další fyzikální děje. Software je zároveň schopen řešit úlohy sdružené (např. ohřev elektrickým proudem). V případě, že by uživateli pro řešení úlohy nevyhovoval žádný z modulů, COMSOL umožňuje naprogramování modulu vlastního. Při navrhování čerpadla je program využíván pro analýzu elektromagnetického pole aktuátoru a jeho účinků. Při simulacích je aktuátor uvažován jako dokonale symetrické těleso. Touto úvahou je výrazně snížena časová i výpočtová náročnost simulace za cenu zanedbatelných odchylek výsledků.

#### Geometrie



Obrázek 5.1.: Vlevo kompletní geometrie, vpravo detailní pohled na aktuátor

#### Materiálové vlastnosti

Vlastnost	Jádro Niklová ocel 4750	Mag. obvod Nerezoá ocel 405
Elektrická vodivost $\sigma$ $\left[\frac{\text{M}\cdot\text{S}}{\text{m}}\right]$	2,088	1,74
Relativní permitivita $\epsilon_r$ [-]	1	1
Relativní permeabilita $\mu_r$ [-]	1000	1000
Tepelná kapacita $C_p$ $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}\right]$	440	480
Hustota $\rho$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	7700	7700
Tepelná vodivost $\lambda$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}\right]$	16	16

## 5. Analýza elektromagnetického aktuátoru

Vlastnost	Vinutí cívky Měď	Vzduch	Tepelná izolace
Elektrická vodivost $\sigma \left[ \frac{\text{MS}}{\text{m}} \right]$	5,99	0	0
Relativní permitivita $\varepsilon_r [-]$	1	1	1
Relativní permeabilita $\mu_r [-]$	1	1	1
Tepelná kapacita $C_p \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \right]$	385	$C_p = f(T)$	970
Hustota $\rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	8700	$\rho = f(T, p)$	2200
Tepelná vodivost $\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \right]$	400	$\lambda = f(T)$	0.1

Přesné informace o fyzikálních vlastnostech materiálů, ze kterých jsou jádro a magnetický obvod aktuátoru vyrobeny, výrobce nebyl schopen poskytnout. Na základě této skutečnosti jsou výše uvedené materiály vybrány z materiálové knihovny COMSOLu tak, aby se výsledky simulace blížily výsledkům měření.

### Matematický model aktuátoru

V modelu jsou numericky řešené rovnice 5.2, 5.3, 5.7 a Ohmův zákon v diferenciálním tvaru  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ . Okrajová podmínka pro magnetický potenciál  $\mathbf{A}$  je nastavena na nulovou hodnotu. Vinutí cívky je v simulaci reprezentováno obdélníkem (viz obrázek 5.1) a numerický model je zvolen "Homogenized multi-turn":

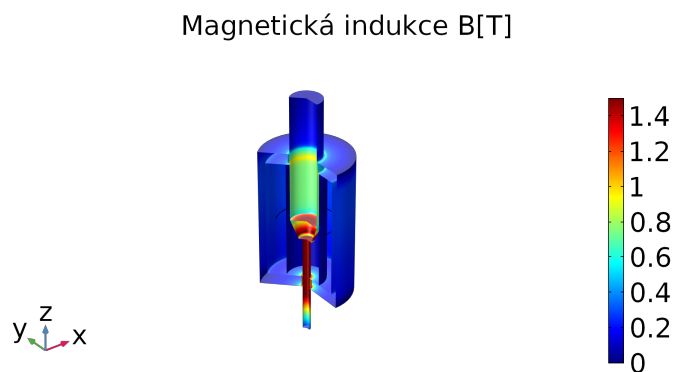
Počet závitů $N [-]$	2160
Vodivost $\sigma \left[ \frac{\text{MS}}{\text{m}} \right]$	6
Průměr vodiče $d_{\text{vodic}} [\text{mm}]$	0,2
Protékající proud $I [\text{A}]$	0,25

Zvolením tohoto numerického modelu je časová i výpočtová náročnost simulace výrazně snížena. Pro výpočet působící síly je využita rovnice A.8 ve tvaru vhodném pro válcové souřadnice:

$$\mathbf{F} = \iint_S 2\pi r n S^m dS$$

## 5. Analýza elektromagnetického aktuátoru

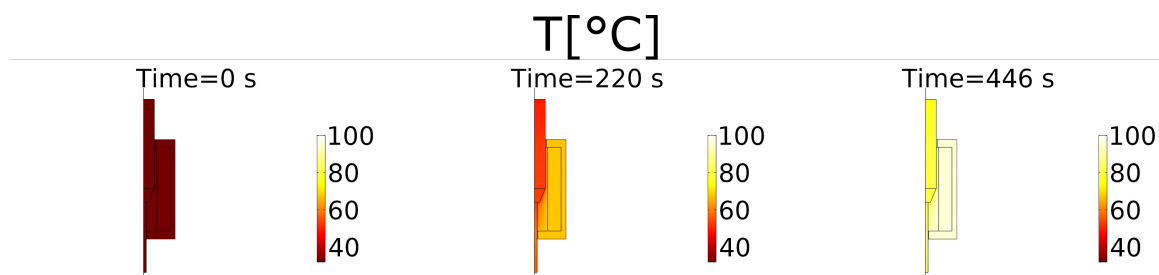
### Výsledky simulace magnetického pole



Obrázek 5.2.: Rozložení magnetické indukce

Výsledek rozložení magnetické indukce, zobrazený na obrázku 5.2, potvrzuje teoretický předpoklad, neboť magnetické pole je soustředěno uvnitř vinutí cívky. V oblasti zúžení jádra je materiál výrazně magneticky přesycen, což opět odpovídá teoretickým předpokladům. Velikost působící síly na jádro je dle výsledku simulace  $|F| = 8,25 \text{ N}$ . Skutečná, naměřená hodnota v této poloze jádra je  $|F| = 7,24 \text{ N}$ . Nachází-li se jádro v simulaci v jiné, než této poloze, dochází k velmi výrazným odchylkám od hodnot naměřených. Skutečnost je způsobena neznalostí materiálových vlastností.

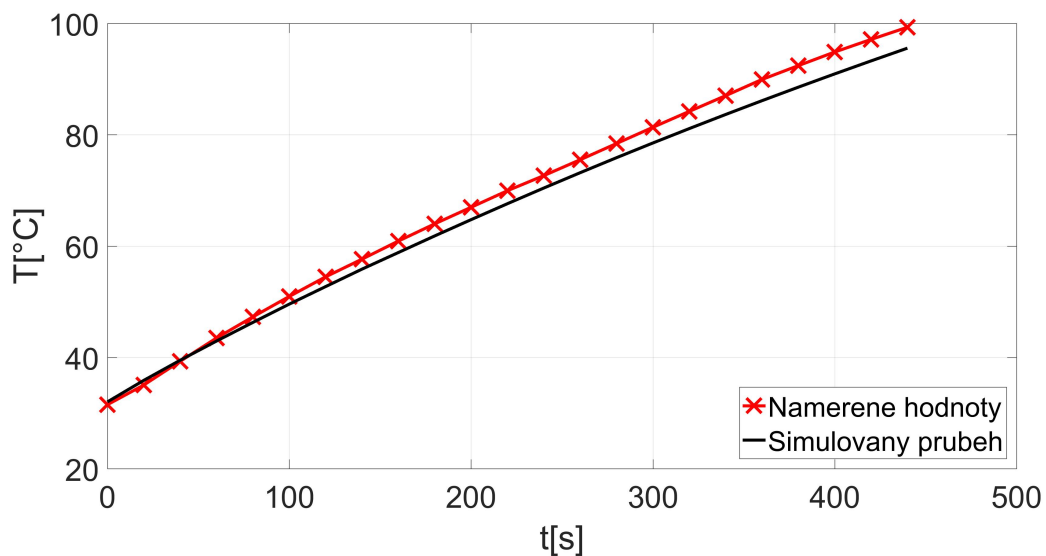
### Výsledky simulace teplotního pole



Obrázek 5.3.: Rozložení teploty aktuátoru v různých časech

Pro měření byl využit program LabVIEW.

## 5. Analýza elektromagnetického aktuátoru



Obrázek 5.4.: Porovnání výsledků měření a simulace

Obrázek 5.4 zobrazuje porovnání výsledků měřeného a simulovaného průběhu teploty aktuátoru v závislosti na čase při konstantním proudu  $I = 0,25$  A. Průběhy se téměř překrývají až do času  $t \doteq 200$  s. Od tohoto času se průběhy liší přibližně o  $\Delta T = 3 - 5$  K s tím, že průběhy simulace mají nižší hodnotu. I přes to, že neznáme přesné údaje o materiálech, ze kterých je aktuátor vyroben, jsou si oba průběhy velmi blízké z důvodu, že tepelné vlastnosti námi zvoleného materiálu jsou pravděpodobně velmi blízké materiálu, ze kterého je aktuátor vyroben.



## 6. Dynamika pohybu jádra

Pro popis dynamiky pohybu jádra aktuátoru je využit druhý Newtonův zákon

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t) = m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}, \quad (6.1)$$

kde  $\mathbf{F}$  je celková síla,  $m$  je hmotnost jádra cívky,  $\mathbf{a}$  je zrychlení a  $\mathbf{v}$  je okamžitá rychlost pohybu jádra. Ta je z rovnice vyjádřena

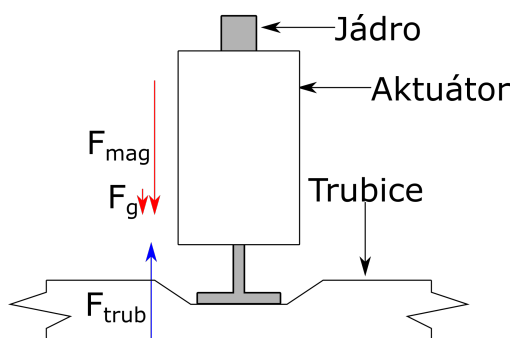
$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} &= \frac{\mathbf{F}}{m} \\ \mathbf{v}(t) &= \int_0^t \frac{\mathbf{F}}{m} dt + \mathbf{v}_0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

kde  $\mathbf{v}_0$  je rychlost pohybu jádra, kterou se pohybovalo v čase  $t = 0$ . Ze znalosti  $\mathbf{v}(t)$  je odvozena časová závislost polohy jádra  $\mathbf{s}(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \mathbf{s} &= \int_0^t \mathbf{v} dt + \mathbf{s}_0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

kde  $\mathbf{s}_0$  je poloha jádra v čase  $t = 0$ . Na jádro aktuátoru působí tři dílčí síly

$$\mathbf{F}_{\text{celk}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{mag}} + \mathbf{F}_{\text{trub}} + \mathbf{k}, \quad (6.4)$$



Obrázek 6.1.: Zobrazení dílčích sil působících na jádro aktuátoru

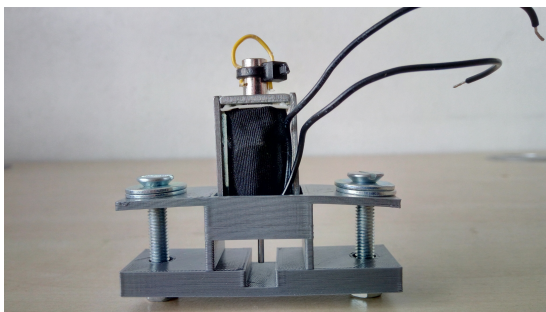
kde  $\mathbf{F}_{\text{celk}}$  je vektorový součet všech dílčích sil,  $\mathbf{F}_g$  je tíhová síla,  $\mathbf{F}_{\text{mag}}$  je magnetická síla,  $\mathbf{F}_{\text{trub}}$  je síla odporu trubice a  $\mathbf{k}$  je tlumící člen zahrnující nejistoty měření a modelu.

## 6.1. Měření

Pro sestavení matematického modelu je provedeno měření velikostí působící síly na jádro v jeho různých polohách  $\mathbf{F}_{\text{mag}+g}$ . Tato závislost je měřena bez stlačování trubice. Velikost tíhové síly  $\mathbf{F}_g$  je vypočtena ze znalosti hmotnosti jádra aktuátoru a gravitačního zrychlení  $g$ . Velikosti působící síly  $\mathbf{F}_{\text{mag}}$  jsou určeny

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{mag}+g} &= \mathbf{F}_{\text{mag}} + \mathbf{F}_g \\ \mathbf{F}_{\text{mag}} &= \mathbf{F}_{\text{mag}+g} - \mathbf{F}_g\end{aligned}$$

Pro účely měření byl navrhnut a pomocí 3D tiskárny vytištěn nástavec pro usazení cívky po dobu měření (viz obrázek 6.2)



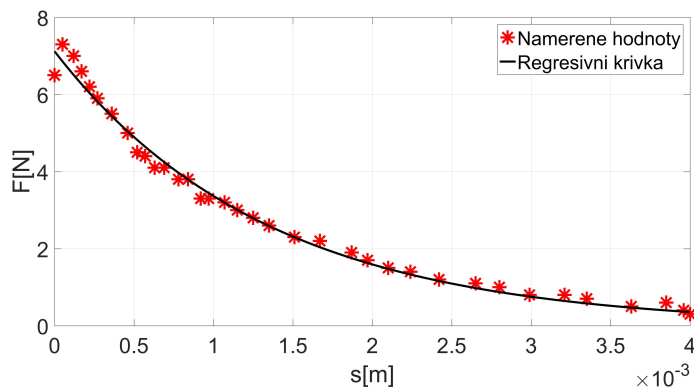
Obrázek 6.2.: Aktuátor usazený v nástavci

Dále je provedené měření velikosti síly  $\mathbf{F}_{\text{trub}}$ . Postupy měření jednotlivých sil jsou popsány níže. Užitím softwaru Simulink jsou závislosti převedeny z polohových na časové.

### 6.1.1. Postup měření

1. Jádro aktuátoru je připevněno k siloměru.
2. Posouváním siloměru měníme polohu jádra v magnetickém poli aktuátoru. Tyto změny se projevují změnou velikosti působící síly na jádro. V tomto kroku je měřena síla  $\mathbf{F}_{\text{mag}+g}$ .
3. Měříme velikosti  $\mathbf{F}_{\text{trub}}$  v závislosti na různém stlačení trubice.
4. Užitím vysokorychlostní kamery je pořízen vizuální záznam pohybu jádra aktuátoru. Výsledek jeho analýzy je porovnán s výsledkem matematického modelu.

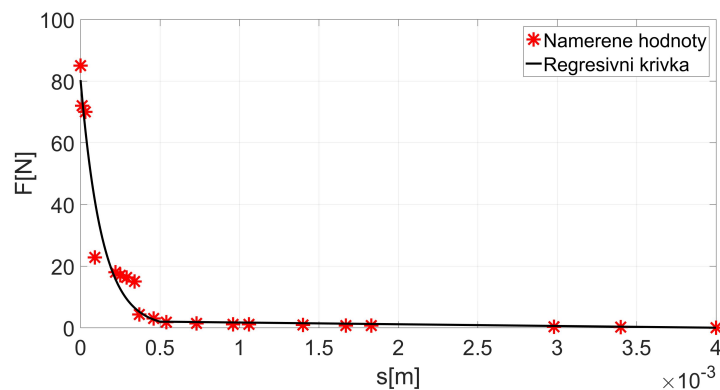
## 6.1.2. Výsledky měření



Obrázek 6.3.: Síla působící na jádro cívky

Obrázek 6.3 zobrazuje velikosti  $F_{\text{mag+g}}$  při různých polohách jádra  $s$  v magnetickém poli (0 mm-jádro zasunuto, 4 mm-jádro vysunuto). Pro aproximaci naměřených dat je zvolena křivka

$$F_{\text{mag+g}}(s) = 7,12e^{-749,2s}, \quad (6.5)$$

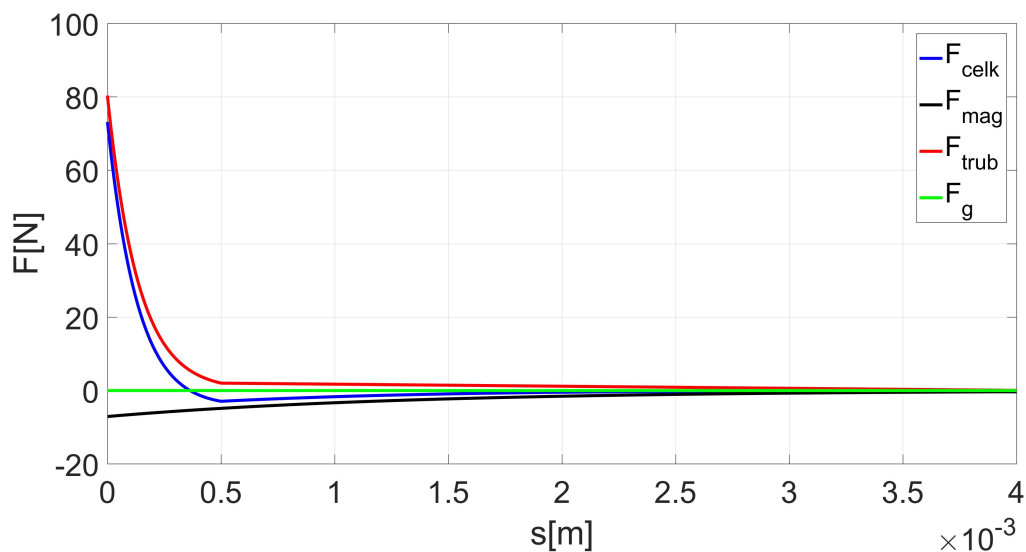


Obrázek 6.4.: Síla odporu trubice

Obrázek 6.4 zobrazuje velikosti  $F_{\text{trub}}$  v závislosti na různém stlačení trubice  $s$  (0 mm-trubice stlačena, 4 mm-trubice není stlačena). Pro aproximaci naměřených dat je zvolena křivka

$$F_{\text{trub}}(s) = \begin{cases} 80,32e^{-7411s}; & s \in (0; 5 \cdot 10^{-4}) \\ -562,7s + 2,256; & s \in (5 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^{-3}) \\ 0; & s \in (4 \cdot 10^{-3}; \infty) \end{cases} \quad (6.6)$$

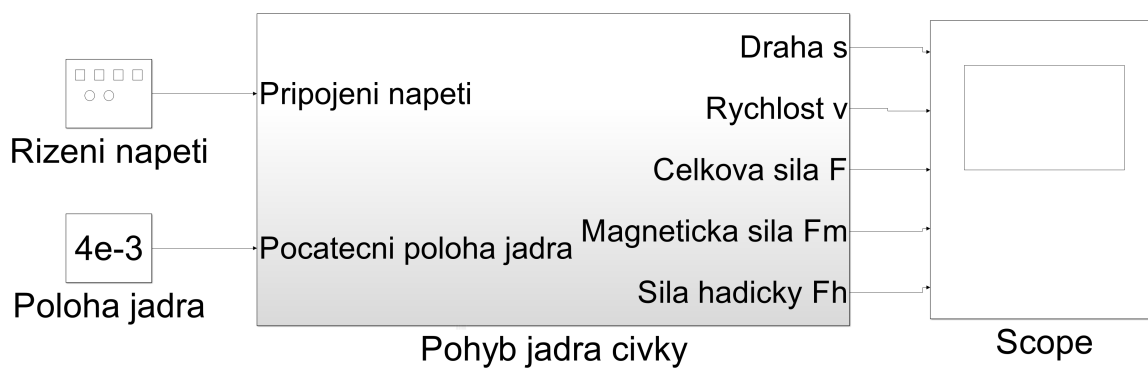
## 6. Dynamika pohybu jádra



Obrázek 6.5.: Celková a dílčí síly rovnice 6.4

Obrázek 6.5 zobrazuje dílčí síly působící na jádro aktuátoru a jejich výsledný součet.

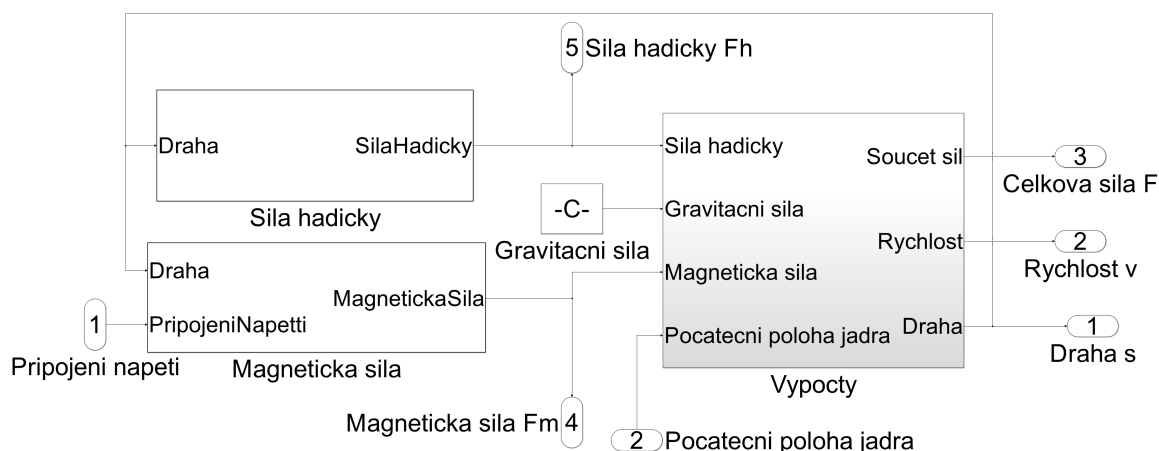
## 6.2. Řešení v prostředí Simulink



Obrázek 6.6.: Blokové schéma matematického modelu pohybu jádra cívky

Na obrázku 6.6 je zobrazeno blokové schéma matematického modelu dynamiky pohybu jádra aktuátoru. Blok **Poloha jádra** je informace o poloze jádra na začátku simulace. Blok **Rizeni napeti** simuluje spínání aktuátoru. Blok **Pohyb jádra cívky** je složen z dalších bloků popsaných níže. Blok **Scope** slouží pro zobrazení simulovaných průběhů.

## 6. Dynamika pohybu jádra

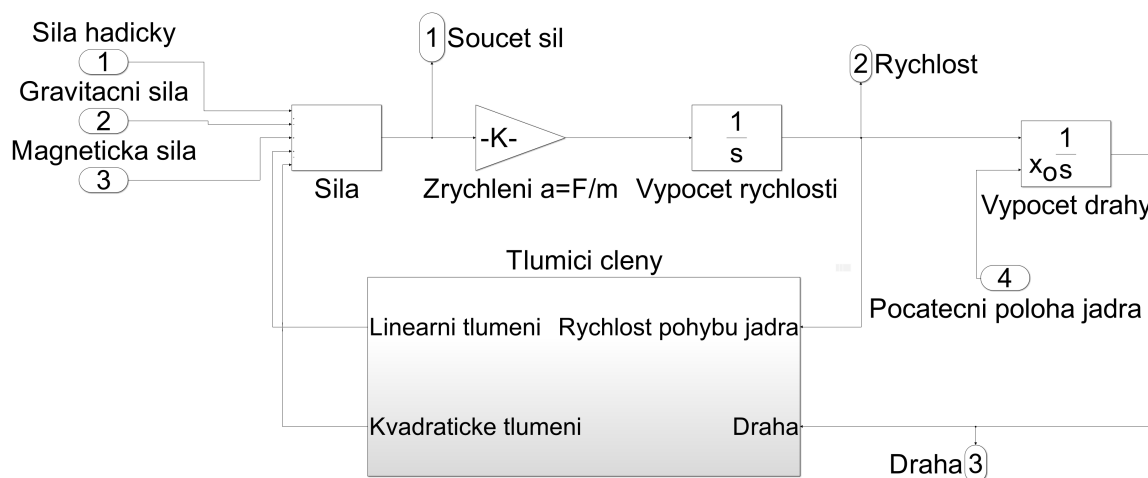


Obrázek 6.7.: Struktura bloku **Pohyb jádra cívky**

### 6.2.1. Blok Pohyb jádra cívky

**Pripojeni napeti** a **Pocatecni poloha jadra** jsou vstupními informacemi a jejich význam je popsán výše. Blok **Sila hadicky** reprezentuje sílu  $F_{\text{trub}}$  rovnicí (6.6). Vstupní proměnná této funkce je poloha jádra **Draha**. Výstupní proměnná **SilaHadicky** je velikost síly, kterou trubice při daném stlačení působí. Blok **Magneticka sila** reprezentuje sílu  $F_{\text{mag}}$  rovnicí (6.5). Vstupní proměnné této funkce jsou **Draha** a **PripojeniNapetti**. Blok **Gravitacni sila** je velikost tíhové síly působící na jádro aktuátoru. Blok **Vypocty** je složen z dalších bloků, které jsou popsány níže. **Sila hadicky Fh**, **Celkova sila F**, **Rychlost v**, **Draha s** jsou výstupní hodnoty, které zobrazujeme pomocí bloku **Scope**.

## 6. Dynamika pohybu jádra

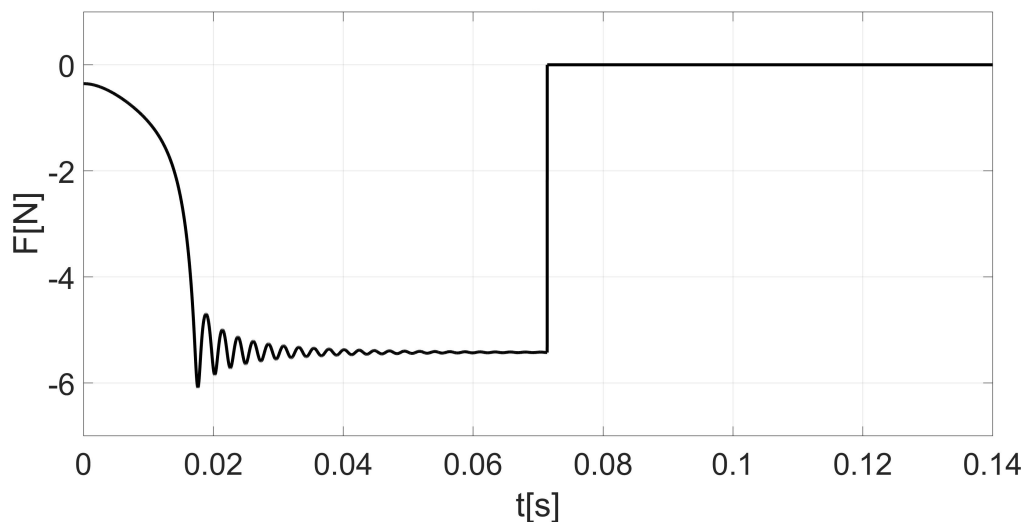


Obrázek 6.8.: Struktura bloku **Vypocty**

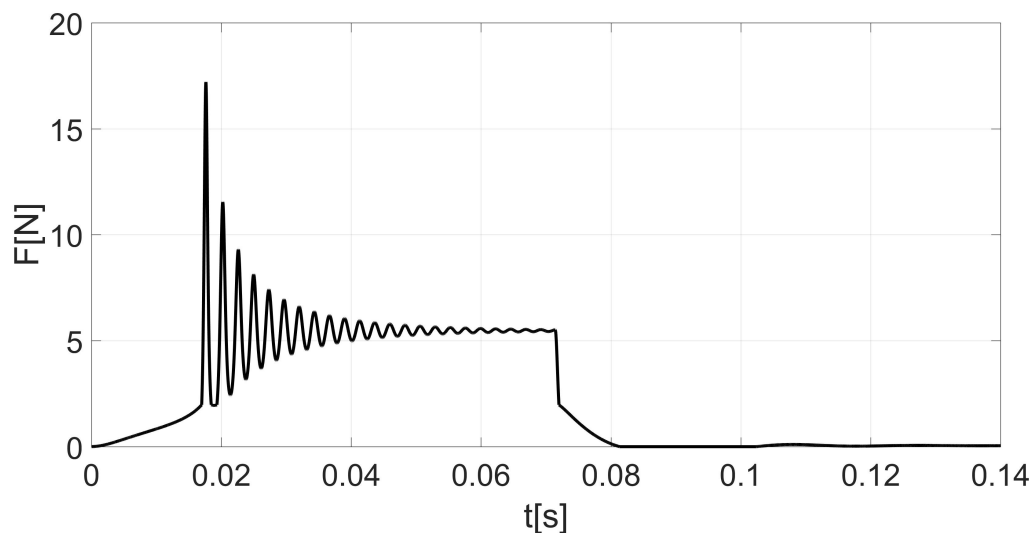
### 6.2.2. Blok Výpočty

**Sila hadicky**, **Gravitacni sila**, **Magneticka sila**, **Pocatecni poloha jádra** jsou vstupními informacemi. Jejich významy jsou popsány výše. Blok **Sila** sčítá všechny síly a tlumící členy v systému působící. Blok **Zrychleni  $a=F/m$**  převádí sílu  $F_{\text{celk}}$ , dle vztahu (6.1), na zrychlení  $a$ . Blok **Tlumici členy** obsahuje tlumící členy, které zajišťují stabilitu simulace. Pomocí vysoko rychlostní kamery byl pořízen záznam velmi přesně dokumentující pohyb jádra. Po analýze tohoto záznamu byly tlumící členy nastaveny tak, aby se výsledky simulace blížily natočenému záznamu. Blok **Vypocet rychlosti** koná matematickou operaci viz rovnice (6.2). Blok **Vypocet drahy** koná matematickou operaci viz rovnice (6.3) **Soucet sil** je výstupní informací, kterou zobrazujeme pomocí **Scope**. **Draha** je vstupní informací bloků zobrazených v 6.8 a pro **Tlumici členy**. Zároveň je zobrazována pomocí **Scope**. **Rychlost** je vstupní informací tlumících členů a zároveň je zobrazována pomocí **Scope**.

## 6.3. Výsledky simulace

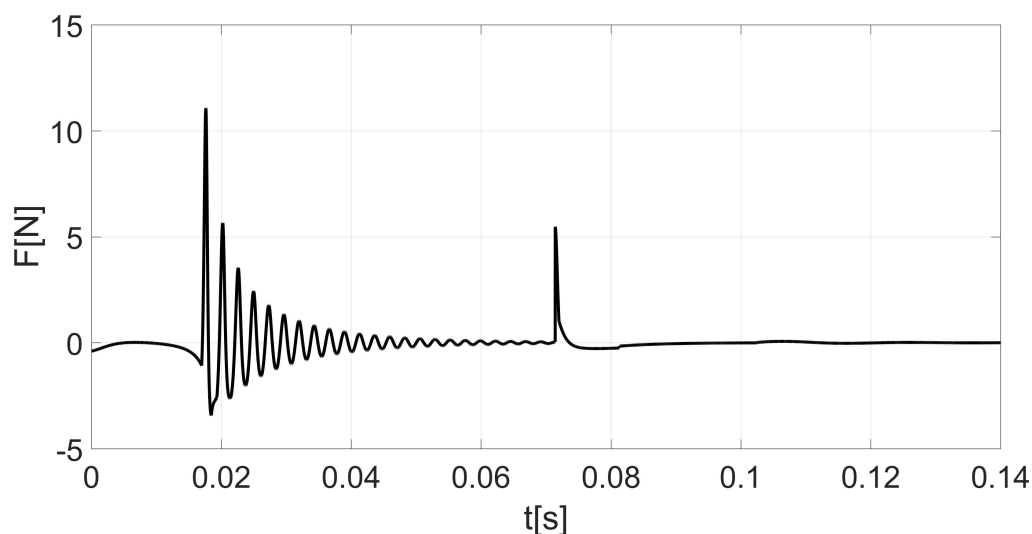
Obrázek 6.9.: Magnetická síla působící na jádro cívky  $F_{\text{mag}}$ 

Obrázek 6.9 zobrazuje časovou závislost síly  $F_{\text{mag}}$  působící na jádro aktuátoru. V čase  $t = 0$  s je aktuátor sepnut a v čase  $t \doteq 0,04$  s dochází k ustálení velikosti působící síly na hodnotě  $|F_{\text{mag}}| \doteq 5,5$  N. V čase  $t \doteq 0,07$  s je aktuátor vypnut a přestává silově působit na své jádro.

Obrázek 6.10.: Síla odporu trubice  $F_{\text{trub}}$ 

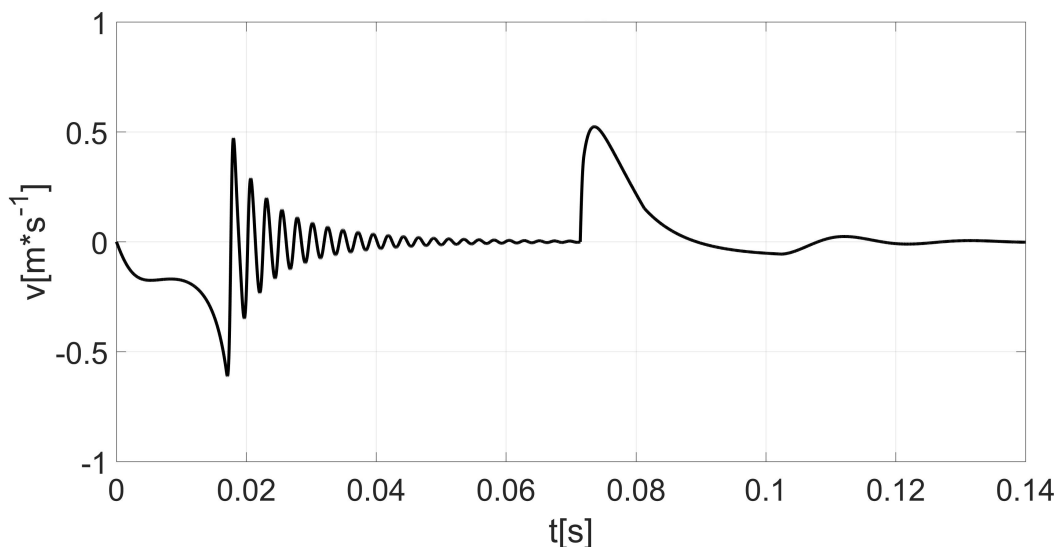
Obrázek 6.10 zobrazuje časovou závislost  $F_{\text{trub}}$ . V čase přibližně  $t = 0,04$  s dochází k ustálení a platí  $|F_{\text{trub}}| = |F_{\text{mag}}|$ . V čase přibližně  $t = 0,07$  s při vypnutí aktuátoru se trubice začíná rozpínat a v čase  $t \doteq 0,08$  s nabývá svého plného průřezu.

## 6. Dynamika pohybu jádra



Obrázek 6.11.: Celková síla

Obrázek 6.11 zobrazuje časový průběh součtu všech sil  $F_{\text{celk}}$ . K vyrovnání všech působících sil dochází v čase  $t \doteq 0,04$  s a pak znovu v čase  $t \doteq 0,08$  s po úplném rozeznutí trubice.

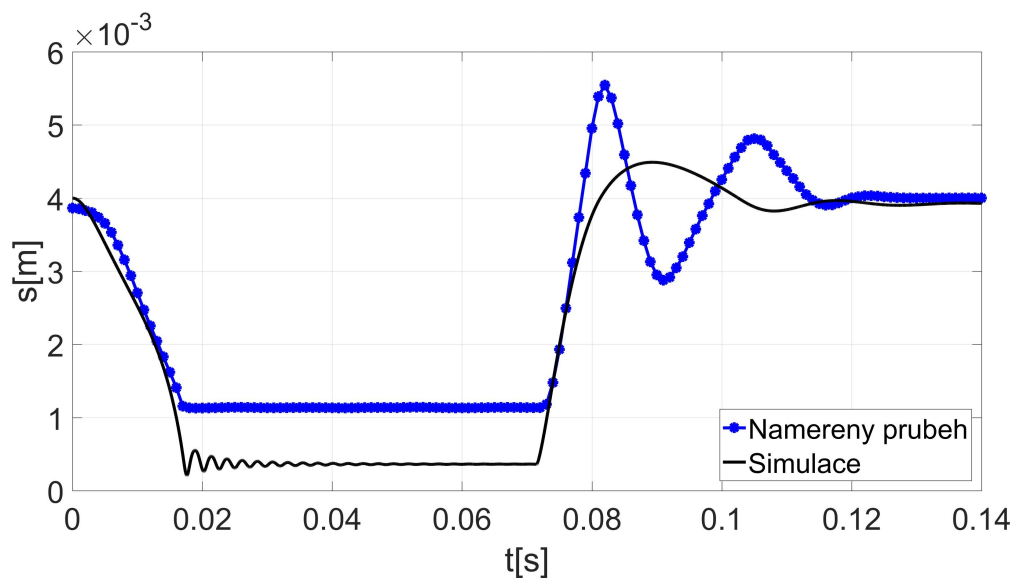


Obrázek 6.12.: Rychlost pohybu jádra

Obrázek 6.12 zobrazuje časový průběh okamžité rychlosti pohybu jádra. V čase  $t \doteq 0,04$  s je rychlost pohybu  $|v| \doteq 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  a aktuátor již není schopen trubicí stlačit více, neboť jsou velikosti sil vyrovnány. V čase  $t \doteq 0,07$  s po odpojení aktuátoru je rozpínáním trubice jádro "vystřeleno" a v čase  $t \doteq 0,12$  s již leží na trubicí a nepohybuje se.



## 6. Dynamika pohybu jádra



Obrázek 6.13.: Poloha jádra, porovnání naměřeného a simulovaného průběhu

Obrázek 6.13 zobrazuje porovnání výsledků simulace a naměřené časové závislosti polohy jádra aktuátoru. Průběhy jsou si tvarově nepříliš blízké, neboť podle simulace je aktuátor schopen stlačit trubici o Stlačení  $\hat{=} 3,6$  mm, avšak reálné je Stlačení  $\hat{=} 2,9$  mm. Toto je způsobeno aproximačními funkcemi a nepřesným nastavením tlumících členů  $k$ .

## 7. Proudění kapalin

Pro popis proudění plynu/kapalin se využívají Navier-Stokesovy rovnice. V praxi jsou využívány např. pro modelování počasí, oceánských proudů, toku vzduchu kolem křídla letadla (důležité pro návrh správného tvaru), navrhování tvaru karoserie vozidel (optimalizace proudění vzduchu), znečištění ovzduší, toku krve a ve videohrách pro simulování vodních povrchů. Přidáním Maxwellových rovnic můžeme řešit i magneto-hydro-dynamické děje.

Z čistě matematického pohledu se též jedná o velmi zajímavé téma. V současné době **neexistuje** důkaz řešitelnosti v 3D prostoru. Pokud řešení existuje, pak nevíme, zda je hladké a spojité, či nikoliv. Clay Mathematics Institute (CMI) označuje tento problém za jeden ze 7 nejdůležitějších problémů matematiky 21. století a vypsala odměnu jeden milion dolarů tomu, kdo dokáže či vyvrátí existenci řešení těchto rovnic. [25]

Princip těchto rovnic demonstruje vztah

$$\frac{\sum F_x}{V} = \frac{m \cdot a_x}{V}, \quad (7.1)$$

kde  $\sum F_x$  je součet všech sil působících ve směru osy  $x$ ,  $V$  je objem tělesa,  $m$  je hmotnost tělesa a  $a_x$  je velikost zrychlení pohybu tělesa v ose  $x$ . Rovnice 7.1 říká, že součet všech sil působících ve stejném směru (na příkladu zvolen index  $x$  říkájící, že síly působí ve směru osy  $x$ ) na objem tělesa je roven podílu hmotnosti a objemu vynásobeným velikostí zrychlení ve stejném směru, v jakém na těleso působí síla. V podstatě se jedná o Newtonův pohybový zákon aplikovaný na pohyb plynů/kapalin. [26] Jejich odvození je uvedeno v příloze C.

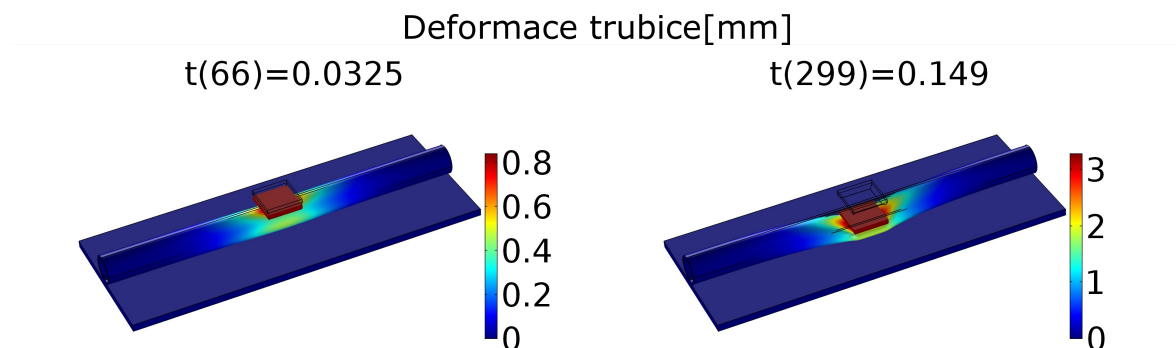
### 7.1. Počítačový model v prostředí COMSOL Multiphysics

Sestavený model v prostředí COMSOL simulace vytlačování kapaliny z trubice je numericky nestabilní. Nestabilitu způsobují:

- **Výpočetní síť** je velmi složité správně nastavit, neboť při výpočtu dochází k její deformaci. Tento problém nebyl vyřešen ani nastavením adaptivního síťování.
- **Gradienty rychlostí pohybu jednotlivých vrstev.** Při výpočtu je kapalina rozdělena do vrstev. Tloušťka vrstev se liší v závislosti na vzdálenosti od trubice (vrstvy blíže jsou užší, vrstvy blíže středu širší). Vrstvy velmi blízko trubice se pohybují výrazně pomaleji, než vrstvy vzdálenější. Při stlačování trubice je na kapalinu vyvíjen tlak, který způsobuje vytlačování kapaliny. Rychlost pohybu jednotlivých vrstev v tomto případě je však výrazně odlišná a výpočet se stává numericky nestabilním.
- **Změna průřezu trubice.** Vlivem stlačování trubice dochází ke změně tvaru průřezu trubice, což následně působí deformaci výpočetní sítě, což má za následek numerickou nestabilitu simulace.

## 7. Proudění kapalin

### 7.1.1. Deformace trubice



Obrázek 7.1.: Deformace trubice při různém stlačení

Model pro proudění kapaliny je v tuto chvíli numericky nestabilní (viz výše). Uvažujeme-li však pouze samotnou trubici a její deformaci, pak již model stabilní je a jeho výsledky jsou zobrazeny na obrázku 7.1. Na modelu se dále pracuje a je předmětem dalšího studia.

## 8. Závěr

Předložená bakalářská práce je zaměřena na analýzu funkčního lineárního peristaltického čerpadla. Samotná práce je pak rozdělena do dvou hlavních částí.

V první části jsou obecně popsány způsoby čerpání kapalin a následně je více přiblížena funkce peristaltického čerpadla. Dále jsou zde uvedeny možnosti konstrukce peristaltických čerpadel využívajících aktuátorů fungujících na různých fyzikálních principech.

Druhá část je zaměřena na analýzu funkčního demonstrátoru lineárního peristaltického čerpadla sestaveného v rámci bakalářské práce. Navržené zařízení využívá pro čerpání kapaliny pěti elektromagnetických aktuátorů.

Nejprve byla měření zjištěna **velikost působící síly na jádro aktuátoru** v jeho různých polohách. Po provedeném měření byl pro účely dalších výpočtů sestaven matematický model. Výsledky měření a modelu si nejsou příliš blízké, což může být způsobeno nízkou přesností siloměru použitého při měření, lidskou chybou, využitými zjednodušujícími předpoklady při tvorbě modelu a neznalostí fyzikálních vlastností materiálů, z nichž je aktuátor vyroben.

V dalším kroku bylo provedeno **měření oteplení aktuátoru** způsobené protékajícím elektrickým proudem a zároveň byl matematický model aktuátoru upraven tak, aby bylo možné simulovat jeho oteplení. Mezi průběhy získanými měřeními a simulací jsou jen velmi malé rozdíly (hodnoty se liší přibližně o 3 – 5 K při teplotách  $T > 60 K$ ).

Dále byla užitím vysokorychlostní kamery natočena **dynamika pohybu jádra aktuátoru** a záznam byl následně analyzován pomocí programu Tracker. Po provedeném měření byl sestaven matematický model dynamiky pohybu jádra aktuátoru. Výsledky měření a modelu si nejsou příliš blízké z důvodu několikanásobné aproximace a pouze orientačně nastavených členů zajišťujících stabilitu simulace.

Posledním provedeným měřením bylo měření **rychlosti průtoku kapaliny**. Jeho výsledky ukazují, že nejvyšších rychlostí průtoku  $Q = 200 \frac{\text{ml}}{\text{min}}$  je dosahováno (při užití v práci uvedeném spínacím cyklu) pro  $t_{\text{stav}} = 10\text{ms}$ . Tato data není možné porovnat s výsledky simulace, neboť model je numericky nestabilní z důvodu deformace výpočetní sítě v průběhu výpočtu.

Na všech matematických modelech se dále pracuje, neboť poznatky a zkušenosti získané při vypracovávání této práce budou využity v rámci práce na projektu, jehož cílem je vyvinout mikročerpadlo pro zdravotnictví.

## Literatura

- [1] Prof. Ing. Otakar Söhnel, Dr.Sc. a Ing. Miroslav Richter, Ph.D., EUR ING, přednášky předmětu IPT3 na FŽP UJEP
- [2] YouTube kanál "Engineering Technology Simulation Learning Videos", video "Types of Hydraulic Pumps"
- [3] PumpSchool.com, Internal Gear Pumps
- [4] Wikipedia, Rope pump
- [5] Wikipedia, Hydraulic ram
- [6] Manish Nidhi, M.Sc. Mechanical Design & Manufacturing & Engineering, Tribhuvan University (2020)
- [7] <http://pumpsupplydepot.com/>
- [8] Wikipedia, Peristaltic pump
- [9] Wikipedia, Nitrile
- [10] Wikipedia, Hypalon
- [11] Wikipedia, Polyvinyl chloride
- [12] Wikipedia, EPDM rubber
- [13] Wikipedia, Natural rubber
- [14] M. Stork and D. Mayer, "Peristaltic Pump With Magnetoelastic Drive," in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 54, no. 5, pp. 1-4, May 2018, Art no. 4600404
- [15] T. Pan, E. Kai, M. Stay, V. Barocas and B. Ziaie, "A magnetically driven PDMS peristaltic micropump," The 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, San Francisco, CA, 2004, pp. 2639-2642.
- [16] ChuoOnline, Advanced Robotic Developments from Animal Behavior Robots Taught by Earthworms?
- [17] Development of a Peristaltic Pump Based on Bowel Peristalsis Using for Artificial Rubber Muscle, Authors Kazuyuki Suzuki and Taro Nakamura
- [18] J. A. Folta, N. F. Raley and E. W. Hee, "Design, fabrication and testing of a miniature peristaltic membrane pump," Technical Digest IEEE Solid-State Sensor and Actuator Workshop, Hilton Head Island, SC, USA, 1992, pp. 186-189. doi: 10.1109/SOL-SEN.1992.228296

### *Literatura*

- [19] Y. Chen, T. Wu and P. Chiou, "Driving multilayer PDMS based peristaltic pump with laser pulses," 2011 IEEE 24th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, Cancun, 2011, pp. 1111-1114. doi: 10.1109/MEMSYS.2011.5734624
- [20] Xuesong Sun, Yanling Hao, S. Guo, Xiufen Ye and Xiaonan Yan, "The development of a new type of compound peristaltic micropump," 2008 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, Bangkok, 2009, pp. 698-702. doi: 10.1109/RO-BIO.2009.4913086
- [21] G. Mao et al., "Design and Characterization of a Soft Dielectric Elastomer Peristaltic Pump Driven by Electromechanical Load," in IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 23, no. 5, pp. 2132-2143, Oct. 2018. doi: 10.1109/TMECH.2018.2864252
- [22] Linear Peristaltic Pump Based on Electromagnetic Actuators Authors: Lotfi Maddoui, Fatima Zohra Kadid, Rachid Abdessemed
- [23] prof. Ing. Ivo Doležel, CSc., Electromagnetic field
- [24] prof. Ing. Ivo Doležel, CSc., Temperature field
- [25] Wikipedia, Navier-Stokes equations
- [26] Jeffrey Knutsen, PhD., Description and derivation of Navier-Stokes equations

## A. Maxwellův tenzor pnutí

Při tomto způsobu výpočtu budeme vycházet z první Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru se zanedbáním časově proměnného členu (vztah 5.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \\ \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} &= \mathbf{J} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

kde  $\mu$  je permeabilita prostředí, ve kterém magnetické pole působí-jedná se o součin  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  kde  $\mu_0$  je permeabilita vakua a  $\mu_r$  je relativní permeabilita prostředí. Teď celý vztah A.1 vektorově vynásobíme vektorem  $\mathbf{B}$

$$\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.2})$$

budeme-li uvažovat kartézský souřadný systém a vektory o složkách  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  a  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  pak provedením naznačených matematických úprav dostáváme výraz

$$\mathbf{f}_m = \frac{1}{\mu} \left( \begin{array}{l} \mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (B_x^2 - \frac{1}{2} B^2) + \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z) \right) + \\ + \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (B_y^2 - \frac{1}{2} B^2) + \frac{\partial}{\partial z} (B_y B_z) \right) + \\ + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_z) + \frac{\partial}{\partial y} (B_y B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z^2 - \frac{1}{2} B^2) \right) \end{array} \right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.3})$$

kde  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  jsou jednotkové bázové vektory. Vektor

$$\frac{1}{\mu} \left( \begin{array}{l} \mathbf{i} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (B_x^2 - \frac{1}{2} B^2) + \frac{\partial}{\partial y} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (B_x B_z) \right) + \\ + \mathbf{j} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (B_y^2 - \frac{1}{2} B^2) + \frac{\partial}{\partial z} (B_y B_z) \right) + \\ + \mathbf{k} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} (B_x B_z) + \frac{\partial}{\partial y} (B_y B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (B_z^2 - \frac{1}{2} B^2) \right) \end{array} \right) \quad (\text{A.4})$$

je divergencí Maxwellova tenzoru pnutí

$$\mathbf{S}^m = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_x B_y & B_y^2 - \frac{1}{2} B^2 & B_y B_z \\ B_x B_z & B_y B_z & B_z^2 - \frac{1}{2} B^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{div } \mathbf{S}^m = \mathbf{f}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{A.6})$$

### A. Maxwellův tenzor pnutí

Maxwellův tenzor pnutí nám popisuje vztah mezi silovými účinky elektro-magnetického pole a mechanickým namáháním. Chceme-li znát celkovou sílu, která působí na jádro cívky, pak musíme provést

$$\mathbf{F}_m = \iiint_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV = \iiint_V \mathbf{f}_m dV = \iiint_V \operatorname{div}^2 \mathbf{S}^m dV \quad (\text{A.7})$$

a s užitím Gaussovy věty tento vztah můžeme přepsat do podoby

$$\mathbf{F}_m = \oiint_S \mathbf{S}^m d\mathbf{S} \quad (\text{A.8})$$

vztah nyní čteme následovně: Celková magnetická síla působící na jádro cívky je rovna plošnému integrálu druhého druhu Maxwellova tenzoru pnutí přes plochu jádra.[23]



## B. Teplotní pole

Elektromagnetické pole má kromě silových účinků také účinky tepelné, které v tomto případě nemůžeme zanedbat. Při řešení teplotního pole vycházíme z prvního termodynamického zákona

$$\frac{dU(t)}{dt} = P(t) - Q(t) \quad (\text{B.1})$$

který nám říká, že časová změna vnitřní energie systému  $\frac{dU(t)}{dt}$  se rovná rozdílu přivedeného množství energie do systému  $P(t)$  a vykonané práce systémem  $Q(t)$ . Pro výpočet vnitřní energie využijeme

$$U = m \cdot C_p \cdot (T_2(t) - T_1)$$
$$U = \iiint_V \rho \cdot C_p \cdot (T_2(t) - T_1) dV$$

kde  $T_1$  je teplota v čase  $t = 0$  s,  $T_2(t)$  je teplota v čase  $t = t$ ,  $\rho$  je hustota a  $C_p$  je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku která říká, kolik energie musíme dodat, abychom zvýšili teplotu 1 kg materiálu o 1 K. Pomocí tohoto vztahu můžeme vyjádřit člen  $\frac{dU}{dt}$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \iiint_V \rho \cdot C_p \cdot (T(t) - T_1) dV \right]$$
$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \frac{d}{dt} \rho \cdot C_p \cdot (T(t) - T_1) dV$$
$$\frac{dU}{dt} = \iiint_V \frac{dT(t)}{dt} \cdot \rho \cdot C_p dV \quad (\text{B.2})$$

Dalším důležitým vztahem je

$$\mathbf{q} = -\lambda \cdot \text{grad } T(t)$$

kde  $\mathbf{q}$  je vektor teplotního toku, který říká, kolik energie proteče jednotkou plochy za vteřinu,  $\lambda$  je tepelná vodivost, která charakterizuje schopnost materiálu vést teplo a  $T(t)$  je teplota závislá na poloze a času. Pomocí tohoto vektoru vypočteme celkovou práci systémem vykonanou

$$Q(t) = \oiint_S \mathbf{q}(t) \cdot d\mathbf{S}$$

a využitím Gaussovy věty

$$Q(t) = \iiint_V \text{div } \mathbf{q}(t) dV \quad (\text{B.3})$$

## B. Teplotní pole

nyní můžeme dosadit B.2 a B.3 za členy v B.1

$$\iiint_V \frac{dT(t)}{dt} \cdot \rho \cdot C_p dV = \iiint_V p(t) dV - \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{q}(t) dV$$

a protože se rovnají celkové výrazy po integraci, musí se rovnat i měrné veličny. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{dT(t)}{dt} \cdot \rho \cdot C_p &= p(t) - \operatorname{div} \mathbf{q}(t) \\ \operatorname{div} (\lambda \cdot \operatorname{grad} T(t)) &= \frac{dT(t)}{dt} \cdot \rho \cdot C_p - p(t) \end{aligned}$$

a provedením naznačené operace  $\frac{dT(t)}{dt}$  získáme

$$\operatorname{div} (\lambda \cdot \operatorname{grad} T(t)) = \rho \cdot C_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T(t) \right) - p(t) \quad (\text{B.4})$$

v tomto případě jsou zdrojem tepla Joulovy ztráty

$$p(t) = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma} \quad (\text{B.5})$$

a dosazením B.5 do B.4 získáme finální podobu prvního termodynamického zákona, kterou budeme řešit

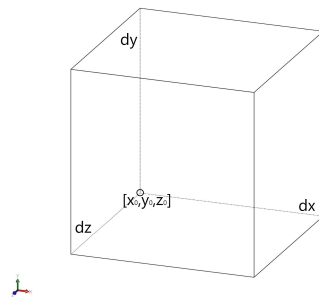
$$\operatorname{div} (\lambda \cdot \operatorname{grad} T(t)) = \rho \cdot C_p \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T(t) \right) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\gamma} \quad (\text{B.6})$$

Jedná se o tvar prvního termodynamického zákona upraveného do vhodné podoby pro výpočty tepelných účinků elektromagnetického pole.[24]

## C. Navier-Stokesovy rovnice

Při odvozování budeme uvažovat nekonečně malý objem kapaliny o rozměrech  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  a hmotnosti

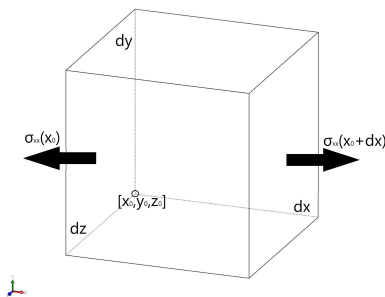
$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot V \\ m &= \rho \cdot dx dy dz \end{aligned} \tag{C.1}$$



na který působí gravitační zrychlení ve směru osy  $x$  a mechanické namáhání popsané tenzorem

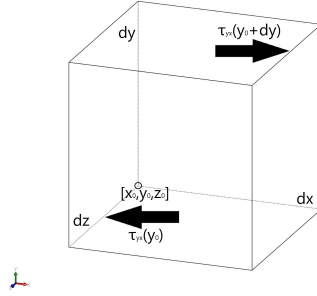
$$\sigma_{i,j} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

Na plochy  $dy dz$  působí ve směru osy  $x$  namáhání  $\sigma_{xx}(x_0)$  a  $\sigma_{xx}(x_0 + dx)$

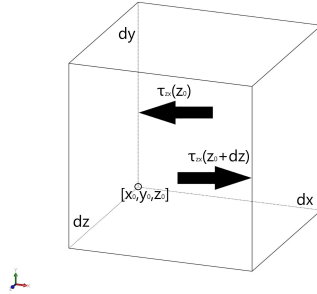


Na plochy  $dz dx$  působí ve směru osy  $x$  namáhání  $\tau_{yx}(y_0)$  a  $\tau_{yx}(y_0 + dy)$

### C. Navier-Stokesovy rovnice



Na plochy  $dx dy$  působí ve směru osy  $x$  namáhání  $\tau_{zx}(z_0)$  a  $\tau_{zx}(z_0 + dz)$



Nyní můžeme vyjádřit celkovou sílu působící ve směru osy  $x$

$$\sum F_x = \rho \cdot dx dy dz \cdot g_x + dy dz \cdot \left( \sigma_{xx}(x_0 + dx) - \sigma_{xx}(x_0) \right) + dz dx \cdot \left( \tau_{yx}(y_0 + dy) - \tau_{yx}(y_0) \right) + dx dy \cdot \left( \tau_{zx}(z_0 + dz) - \tau_{zx}(z_0) \right)$$

Vydělení této rovnice objemem  $dx dy dz$  získáme

$$\begin{aligned} \frac{\sum F_x}{dx dy dz} &= \rho \cdot \frac{dx dy dz \cdot g_x}{dx dy dz} + \frac{dy dz}{dx dy dz} \cdot \left( \sigma_{xx}(x_0 + dx) - \sigma_{xx}(x_0) \right) + \\ &+ \frac{dz dx}{dx dy dz} \cdot \left( \tau_{yx}(y_0 + dy) - \tau_{yx}(y_0) \right) + \frac{dx dy}{dx dy dz} \cdot \left( \tau_{zx}(z_0 + dz) - \tau_{zx}(z_0) \right) \\ \frac{\sum F_x}{V} &= \rho \cdot g_x + \frac{\sigma_{xx}(x_0 + dx) - \sigma_{xx}(x_0)}{dx} + \frac{\tau_{yx}(y_0 + dy) - \tau_{yx}(y_0)}{dy} + \frac{\tau_{zx}(z_0 + dz) - \tau_{zx}(z_0)}{dz} \end{aligned} \quad (C.3)$$

Díky skutečnosti  $dx, dy, dz \rightarrow 0$  můžeme vztah C.3 přepsat do podoby

$$\frac{\sum F_x}{V} = \rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (C.4)$$

Dosazením C.4 a C.1 do 7.1 získáváme

$$\rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \cdot a_x \quad (C.5)$$

Rychlost pohybu kapaliny má složky  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  přičemž každá z nich je funkcí polohy a času  $v_x, v_y, v_z = f(x, y, z, t)$ . Stejně tak i zrychlení pohybu kapaliny má složky  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$

### C. Navier-Stokesovy rovnice

kteřé jsou též funkcemi polohy a času  $a_x, a_y, a_z = f(x, y, z, t)$ . Zrychlení pohybu kapaliny můžeme vyjádřit následovně

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$(a_x, a_y, a_z) = \frac{d}{dt}(v_x, v_y, v_z)$$

Pro vyjádření  $a_x$  vyjdeme tedy ze vztahu

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

Vztah nyní upravíme

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \quad (\text{C.6})$$

a dosazením C.6 do C.5 získáváme

$$\rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \right) \quad (\text{C.7})$$

Odvození pro síly působící ve směru osy  $y$  a  $z$  využívá totožného postupu. Napíšeme tedy

$$\rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \right) \quad (\text{C.8})$$

$$\rho \cdot g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \cdot \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot v_z \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\rho \cdot g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z \right) \quad (\text{C.10})$$

Členy tenzoru C.2 můžeme z obecného zápisu přepsat do jejich podoby pro Newtonovské kapaliny

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (\text{C.11}) \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (\text{C.14})$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (\text{C.12}) \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (\text{C.15})$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{C.13}) \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (\text{C.16})$$

Dosazením C.11, C.14 a C.16 do levé strany C.8 získáme

$$\begin{aligned} \rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \cdot g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \\ &= \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \\ &+ \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial z} = \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

### C. Navier-Stokesovy rovnice

Dle rovnice kontinuity je člen  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$  roven nule. Levá strana rovnice C.8 po provedení naznačených matematických operací má podobu

$$\rho \cdot g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (\text{C.17})$$

Dosazením C.17 do C.8 dostaneme finální podobu Navier-Stokesovy rovnice pro Newtonovské kapaliny pro síly působící ve směru osy x

$$\rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \rho \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \right) \quad (\text{C.18})$$

Podobný výsledek pro síly působící v ose y bychom získali dosazením C.14, C.12 a C.15 do C.9 a pro síly působící v ose z C.16, C.15 a C.13 do C.10. Navier-Stokesovy rovnice mají následující podobu pro síly působící ve směru os x, y a z

$$\begin{aligned} \rho \cdot g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) &= \rho \cdot \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z \right) \\ \rho \cdot g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) &= \rho \cdot \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot v_z \right) \\ \rho \cdot g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) &= \rho \cdot \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot v_z \right) \end{aligned}$$

Toto je standardní tvar, ve kterém jsou Navier-Stokesovy rovnice běžně uváděny.[26]