

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY



**Modelování tření a jeho vliv při numerických
simulacích rychlých dějů**

Diplomová práce

Vedoucí práce:
doc. Ing. Michal Hajžman, Ph.D.

Vypracovala:
Bc. Pavla Macháňová

Plzeň 2019/2020

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Pavla MACHÁŇOVÁ**
Osobní číslo: **A18N0113P**
Studijní program: **N3955 Počítačové modelování v inženýrství**
Studijní obor: **Dynamika konstrukcí a mechatronika**
Téma práce: **Modelování tření a jeho vliv při numerických simulacích rychlých dějů**
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Přehled přístupů k modelování tření.
2. Základní principy simulací rychlých dějů.
3. Implementace modelů tření a identifikace jejich parametrů.
4. Analýza vlivu tření na výsledky vybraných simulací rychlých dějů.

Rozsah diplomové práce: **40 – 60 stran A4 včetně příloh**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. PENNESTRÍ, Ettore a kol. Review and comparison of dry friction force models. Nonlinear Dynamics 83, pp.1785-1801, 2016.
2. MARQUES, Filipe a kol. A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems. Nonlinear Dynamics 86, pp. 1407-1443, 2016.
3. Dokumentace k softwaru LS-DYNA. Dostupné na <https://www.dynasupport.com/manuals>.
4. SEXTRO, Walter. Dynamical contact problems with friction: models, methods, experiments and applications. 2nd ed. New York: Springer; 2007.

Vedoucí diplomové práce: **Doc. Ing. Michal Hajžman, Ph.D.**
Katedra mechaniky

Konzultant diplomové práce: **Ing. Jiří Jankovec, Ph.D.**
Lear Corporation Czech Republic s.r.o.

Datum zadání diplomové práce: **1. října 2019**
Termín odevzdání diplomové práce: **29. května 2020**

Radová

Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
děkanka



Jan Vimmr

Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu doc. Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph.D., za jeho vedení a podporu při vypracovávání mé diplomové práce. Děkuji také společnosti Lear Corporation za poskytnuté zázemí a výpočetní prostředky. Jmenovitě děkuji panu Ing. Jiřímu Jankovci, Ph.D., a Ing. Davidu Fukalovi z výpočetního oddělení. Za spolupráci při návrhu a realizaci experimentálního měření děkuji kolegům z oddělení Testing, jmenovitě Ing. Janu Pěnkavovi, Miroslavu Špačkovi a Jiřímu Boškovi. Jsem vděčná také mé rodině a přátelům za podporu během celého studia.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením a odborným dohledem pana doc. Ing. Michala Hajžmana, Ph.D., a za konzultace s Ing. Jiřím Jankovcem, Ph.D. Použité zdroje informací jsou uvedeny na konci textu.

V Plzni dne

.....

Bc. Pavla Macháňová

Abstrakt

Tato práce se zabývá modelováním suchého tření se zaměřením na aplikace v numerických simulacích nárazu při vývoji automobilových sedaček. Práce obsahuje přehled statických a dynamických modelů tření používaných v dynamice poddajných těles. Vybrané modely byly implementovány v programu Matlab na různých úlohách. Součástí práce je přehled existujících experimentálních měření prováděných za účelem identifikace parametrů modelů tření.

Dále je v práci popsán výpočetní software LS-Dyna, princip výpočtů, integrační metody, kontaktní algoritmy, zahrnutí tlumení a tření do simulací a příklady výpočtů z automobilového prostředí. V programu LS-Dyna byly také provedeny výpočty zaměřené na nastavení kontaktních parametrů včetně koeficientů tření. Následně bylo provedeno porovnání výsledků získaných z programů Matlab a LS-Dyna. Vybrané úlohy se podařilo v obou programech úspěšně simulovat se srovnatelnými výstupy.

Ve spolupráci s oddělením Testing společnosti Lear Corporation Czech Republic, s. r. o. byl proveden návrh a realizace experimentálního měření za účelem analýzy průběhu třecí síly při kontaktu těles z různých materiálů. Z naměřených dat bylo provedeno určení parametrů modelů tření. Přínos získaných výsledků je jak v jejich aplikaci ve výpočtech, tak i v návrhu samotné testovací metody, která může být v budoucnu použita pro stanovení parametrů tření u nových kombinací materiálů.

Abstract

This master thesis is aimed to study dry friction modeling focusing on applications in impact numerical simulations during development of new car seats. It contains an overview of static and dynamic friction models that are used in dynamics of elastic bodies. Selected models were implemented in Matlab system in various examples. An overview of existing experimental measurements performed to identify the parameters of friction models is also included.

Further this work describes LS-Dyna computer software, the calculation principle, integration methods, contact algorithms, the inclusion of damping and friction in simulations and examples of calculations from the automotive industry. Calculations focused on contact parameters, including friction coefficients, were also performed in this software. Subsequently, a comparison of the results obtained from Matlab and LS-Dyna programs is presented. Selected tasks were successfully simulated using both programs with comparable outputs.

An experimental measurement was designed and performed in cooperation with Testing Department of Lear Corporation Czech Republic, s. r. o. in order to analyze the friction force in the course of contact of bodies made from various materials. The parameters of the friction models were determined from the measured data. The benefit of the obtained results is both in their application in numerical simulations and in the design of the test method itself, which can be used as well in the future to determine the parameters of new combinations of materials.

Obsah

1	Úvod	1
2	Modely tření používané v dynamice poddajných těles	3
2.1	Statické modely tření	3
2.2	Dynamické modely tření	5
2.3	Experimentální identifikace parametrů modelů tření	8
2.4	Experimentální soustavy z automobilového průmyslu	11
3	Výpočetní program LS-Dyna	14
3.1	Princip výpočtů	15
3.1.1	Časový krok	16
3.1.2	Explicitní a implicitní metoda	17
3.2	Kontakty ve výpočetním modelu	19
3.2.1	Kontaktní algoritmy v LS-Dyna	20
3.2.2	Tlumení v kontaktu	22
3.3	Zahrnutí tření do výpočtových modelů v programu LS-Dyna	23
3.4	Počítačové modelování rychlých dějů v automobilovém prostředí	24
3.5	Citlivost numerických simulací	29
4	Simulace v Matlabu	30
4.1	Pohyb tělesa s nenulovou počáteční rychlostí	30
4.1.1	Statický Coulombův model se Stribeckovým efektem	31
4.1.2	Dynamický LuGre model	33
4.2	Pohyb tělesa při působení budicí síly	34
4.2.1	Statický Coulombův model se Stribeckovým efektem	35
4.2.2	Dynamický LuGre model	37
4.3	Kinematické buzení	39
4.4	Porovnání výpočtů ODE funkcí	43
5	Simulace v LS-Dyna	47
5.1	Preprocessing: příprava modelu	47
5.2	Výpočet v programu LS-Dyna	50
5.3	Postprocessing: vyhodnocení dat	51
5.3.1	Pohyb tělesa s nenulovou počáteční rychlostí	52
5.3.2	Pohyb tělesa při působení budicí síly	59
6	Experimentální měření a určení parametrů tření	65
6.1	Návrh a provedení experimentálního měření	65
6.1.1	Komponenty testovací soustavy	65
6.1.2	Další varianta testovací soustavy	72
6.1.3	Popis provedených experimentálních měření	74
6.2	Výsledky experimentálního měření	75

6.3	Určení parametrů tření z experimentálních dat	79
7	Závěr	83
8	Seznam použité literatury	87
A	Přehled provedených výpočtů v programu LS-Dyna	90

1 Úvod

Počítačové modelování hraje v dnešní době nezastupitelnou roli při vývoji a implementaci nových strojů a zařízení v průmyslovém prostředí. Správné výsledky simulací pomáhají s dosažením vysoké efektivity ve využití času, finančních zdrojů i materiálů. Díky počítačovým simulacím je možné vyvíjet rychleji, levněji a efektivněji ve srovnání pouze s fyzickým testováním prototypů. K zajištění takovýchto požadovaných výsledků je ale nutná vysoká kvalita modelu, který musí věrně simulovat reálná tělesa nebo děje. Za tímto účelem je potřeba znát geometrii modelu, materiálové vlastnosti všech komponentů, počáteční a okrajové podmínky, popsat chování v kontaktech, správně simulovat spoje a další. Důležitou součástí výpočtu je simulace interakcí mezi jednotlivými komponenty modelu. Na všechna tělesa, která jsou spolu v kontaktu, působí třecí síla. Tření je obecně velmi komplexní a nelineární jev, který představuje odpor těles vůči kluzu. Z tohoto důvodu má důležitou roli v dynamice inženýrských systémů, a proto je potřeba ho správně modelovat.

Motivací pro vznik této práce je zejména potřeba znalosti reálných parametrů tření pro numerické simulace nárazu při vývoji automobilových sedaček. Mezi cíle práce patří

- (a) uvést přehled modelů suchého tření včetně možného experimentálního určení modelových parametrů,
- (b) implementovat vybrané modely tření v programu Matlab,
- (c) popsat výpočetní software LS-Dyna se zaměřením na problematiku kontaktních algoritmů a tření,
- (d) v programu LS-Dyna realizovat simulace vybraných úloh se zahrnutím tření,
- (e) porovnat výsledky simulovaných úloh z programů Matlab a LS-Dyna,
- (f) navrhnout a realizovat experimentální metodu pro stanovení koeficientů tření a určit koeficienty tření vybraných kombinací materiálů z experimentálních dat.

Hlavní část textu práce je rozdělena do pěti kapitol. V kapitole 2 jsou popsány statické a dynamické modely suchého tření, jejich omezení i možnosti využití. Dále jsou představeny experimentální soustavy, které slouží k získání potřebných parametrů tření. Uvedeny jsou obecné příklady i měření z oblasti automobilového prostředí. V kapitole 3 je představen výpočetní program LS-Dyna, který je jedním z komerčně používaných a široce rozšířených softwarů pro aplikace výpočtů v průmyslu i vědě. S ohledem na téma práce je důraz kladen na kontaktní algoritmy a zahrnutí tření do výpočtových modelů. Uveden je i přehled konkrétních výpočtů z prostředí vývoje nových automobilových sedaček.

V kapitole 4 jsou implementovány vybrané modely tření v programu Matlab. Ze statických modelů jde o Coulombův model se Stribeckovým efektem a z dynamických o LuGre model. Tyto modely jsou aplikovány v úlohách dobržďování tělesa s definovanou počáteční rychlostí a roztlačování tělesa konstantní a lineárně rostoucí silou. Je zkoumáno, jaký vliv mají jednotlivé parametry modelů tření. Na úlohách je testováno, jak účinné a rychlé jsou

při výpočtu různé varianty řešičů z rodiny funkcí ODE. Dále je simulováno kinematické buzení přes pružný člen s uvažováním tuhosti a tlumení. Zkoumán je také vliv hodnoty tuhosti a tlumení na výsledný pohyb tělesa.

Kapitola 5 je rovněž věnována simulacím dobržďování tělesa s počáteční rychlostí a roz-tlačování lineárně rostoucí silou, ale tentokrát v programu LS-Dyna. Účelem simulací je zkoumat vliv různých parametrů na výsledek a stabilitu výpočtu. Upravované parametry jsou velikost konečných prvků v modelu, použitý kontaktní algoritmus, časový krok, tvar tělesa a další. Následně jsou porovnány a diskutovány výsledky z výpočtů provedených v Matlabu a LS-Dyna.

V kapitole 6 je popsán návrh a realizace dvou typů experimentálního měření dvanácti kombinací materiálů. Při prvním testu je těleso buzeno po částech konstantní rychlostí. Při druhém testu koná těleso vlivem buzení periodický pohyb s proměnnou rychlostí. Výstupem z obou testů je průběh třecí síly při předepsaném kinematickém buzení. Z naměřených dat jsou získány koeficienty tření, které jsou potřebné pro vybrané modely.

2 Modely tření používané v dynamice poddajných těles

Třecí síla se vyskytuje v případě všech mechanických systémů, které mají své povrchy ve vzájemném kontaktu. Suché tření je způsobeno drsností povrchů těles v kontaktu. Velikost třecí síly se liší podle toho, zda jsou tělesa vůči sobě v klidu nebo v relativním pohybu. Tření při pohybu mechanických soustav je často nežádoucím efektem, protože na překonání třecích sil musí být vynaložena práce, čímž se snižuje účinnost dané soustavy. Vynaložená práce navíc vede k přírůstku vnitřní energie, a tedy ke zvýšení teploty. V jiných případech je tření naopak požadované pro správné fungování daného stroje. Tření také hraje důležitou roli v řídicích systémech, protože omezuje přesnost polohovacích systémů a může vést ke zvýšení nestability. Při simulaci mechanických systémů je vhodná volba modelu tření a nastavení jeho parametrů důležitým faktorem, který může rozhodnout o shodě výpočetního modelu s reálnou soustavou a díky tomu o schopnosti předvídat chování systému na základě výsledků modelu (např. energetické ztráty při různých provozních stavech [1]).

Tření je velmi komplexní a nelineární jev, který zahrnuje různé režimy a aspekty chování. K dispozici není žádný model tření, který by byl univerzálně použitelný pro libovolnou simulaci. Pro různé provozní podmínky a vlastnosti mechanických systémů je tedy třeba volit různé modely tření, protože každý má svá omezení. Vhodný model je vybírán dle výpočetní efektivity algoritmu pro konkrétní úlohu a schopnosti adekvátně simulovat probíhající jevy, kterými mohou být statické tření, Stribeckův efekt, viskózní tlumení, kinematické tření a další. V této části práce je představeno několik základních modelů tření, jejich porovnání a příklady využití.

2.1 Statické modely tření

Statické modely jsou obecně jednodušší a popisují chování třecí síly v ustáleném stavu. Kvůli tomu není většina těchto modelů schopná správně popsat všechny účinky tření na těleso. Některé ze statických modelů jsou nespojitě v okolí nuly, což vede k problémům při numerických výpočtech.

Základním modelem popisujícím tření je *Coulombův model* [2], který definuje třecí sílu vztahem

$$F \begin{cases} \leq \mu_s F_n & \text{pro } v = 0, \\ = -\mu_d F_n \operatorname{sgn}(v) & \text{pro } v \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

V rovnici (1) představuje v relativní rychlost mezi dvěma tělesy, která jsou v kontaktu, μ_s součinitel klidového (statického) tření, μ_d součinitel smykového tření a F_n kolmou tlakovou sílu. Jak je ze vztahu patrné, velikost třecí síly je aproximována konstantou $F_d = \mu_d F_n$ v případě, že je rychlost nenulová, a hodnotou $F_s \leq \mu_s F_n$ v případě nulové rychlosti. Ve většině případů platí, že klidová třecí síla má vyšší hodnotu než smyková třecí síla: $F_s > F_d$. Odpovídající vztah platí i pro součinitele tření $\mu_s > \mu_d$. Dle Coulombova zákona tření není velikost třecí síly závislá na velikosti rychlosti. Rychlost ovlivňuje pouze směr třecí síly. Třecí síla působí proti pohybu tělesa.

Model tření v tomto tvaru není vždy vhodný kvůli nespojitosti závislosti třecí síly na rychlosti při nulové rychlosti. Skoková změna třecí síly je nefyzikální zjednodušení. Coulombův model je pro svou jednoduchost běžně používán např. k výpočtu síly řezu u mechanických nástrojů. Často může být ale problém s použitím tohoto modelu z důvodu nepřesně definované třecí síly pro $v = 0$.

Spojité přechod mezi hodnotou F_d a F_s popisuje Stribeckův efekt. **Bensonův model tření** [3] je jeden z modelů, který Stribeckův efekt zahrnují v nejjednodušší formě, tedy pomocí jediného parametru. Třecí síla je popsána rovnicí

$$F = -(F_d + (F_s - F_d)e^{-c|v|})\text{sgn}(v), \quad (2)$$

kde c je exponenciální konstanta přechodu. Stribeckův jev popisuje fázi, kdy třecí síla klesá z hodnoty statického tření F_s s rostoucí rychlostí na hodnotu dynamického tření F_d . V následující části budou představeny modely tření, které rozvíjejí popsané základní vztahy [4].

Hladký Coulombův model (*Smooth Coulomb model*) [5] vychází z klasického Coulombova modelu, ale odstraňuje jeho problém s nespojitostí v okolí nuly, která způsobuje problémy při výpočtech. Průběh třecí síly je aproximován spojitou křivkou, která může být lineární, exponenciální nebo trigonometrická. Jako příklad je uvedena varianta vztahu pro třecí sílu s funkcí hyperbolický tangens

$$F = -F_d \tanh\left(\frac{v}{v_d}\right), \quad (3)$$

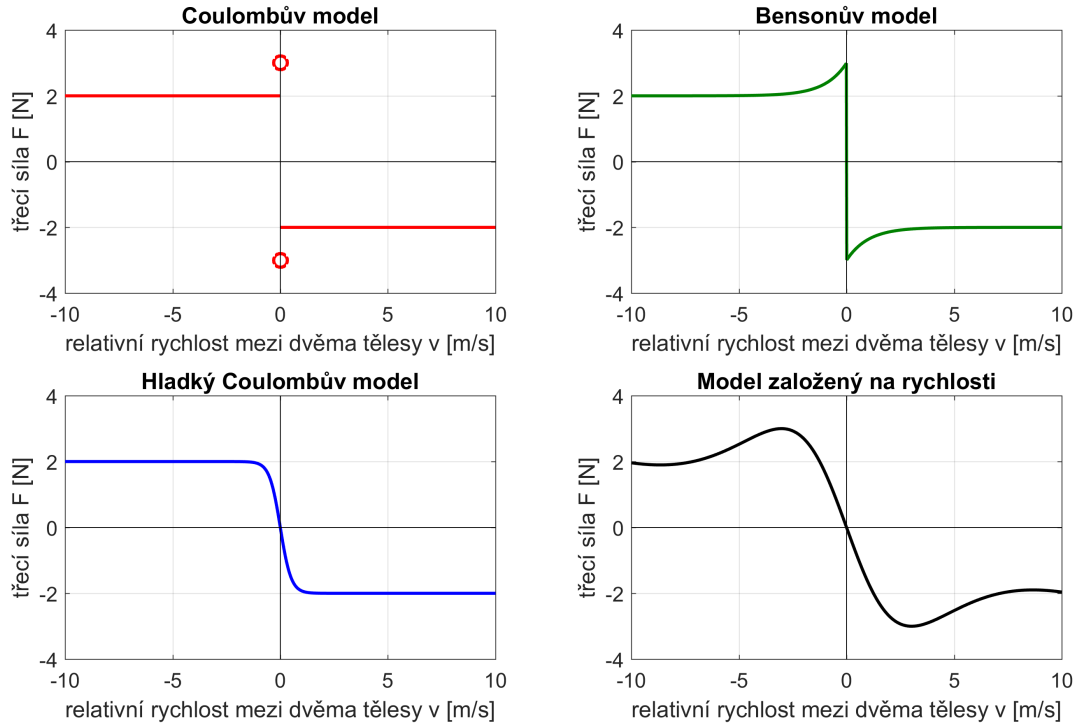
kde v_d je dynamická tolerance rychlosti. Tento model nelze použít pro popis statického tření, protože síla je zde nulová pro nulovou rychlost, což obecně neodpovídá realitě.

Model založený na rychlosti [6] má podobný průběh jako předchozí model, ale je rozšířen o popis oblasti v okolí nulové rychlosti tak, aby modeloval i statické tření. Vztah pro třecí sílu zahrnuje statickou třecí sílu F_s a statickou toleranci rychlosti v_s a může být popsán vztahem

$$F = -F_s \sin\left[C \arctan(Bv) - E\left((Bv) - \arctan(Bv)\right)\right]. \quad (4)$$

U řady modelů tření platí, že konkrétní tvar průběhu funkce třecí síly v závislosti na rychlosti je možno tvarovat pomocí parametrů tak, aby se shodoval co nejlépe s experimentálními výsledky. U tohoto modelu se jedná o parametry C , B a E , uvedené ve vztahu (4).

Na obr. 1 jsou graficky znázorněny průběhy třecí síly v závislosti na relativní rychlosti čtyř výše uvedených statických modelů tření.



Obr. 1: Průběhy třecí síly u vybraných statických modelů tření pro statickou třecí sílu $F_s = 3$, N a pro dynamickou $F_d = 2$ N

Karnoppův model [7] popisuje třecí sílu v závislosti na velikosti rychlosti vztahem

$$F = \begin{cases} -\min(\max(-F_s, F_{\text{ext}}), F_s) & \text{pro } |v| \leq v_d, \\ -F_d \operatorname{sgn}(v) & \text{pro } |v| > v_d. \end{cases} \quad (5)$$

Pro rychlost větší než v_d je vztah pro třecí sílu stejný jako u Coulombova modelu. Pro relativní rychlost těles v kontaktu $|v| < v_d$ je rychlost považována za nulovou a ve vztahu pro hodnotu třecí síly se již neprojevuje. Třecí síla je pak rovna záporně vzaté hodnotě, která je vždy menší nebo rovna výsledné vnější síle F_{ext} . Je důležité vhodně volit toleranci v_d pro rozsah nulových rychlostí. Tento způsob modelování je výhodný z výpočetního hlediska. Použít lze ale pouze v případě, že je možno určit výslednou vnější sílu, což není snadné v případě modelování mechanických systémů s tělesy mající více kontaktů.

2.2 Dynamické modely tření

Dynamické modely popisují tření přesněji, protože pracují s přídatnou stavovou proměnnou, díky které dokážou popsat další fyzikální jevy, jako je závislost na rychlosti, viskozita a hystereze. Dynamické modely bývají složitější a pro jejich použití je potřeba stanovit více parametrů. Hodnoty parametrů se určují porovnáním s experimentálním měřením nebo

empiricky. Některé parametry si zachovávají svůj význam nezávisle na modelu tření. Jen málo z nich, například koeficient tlumení, má různý efekt na základě použitého modelu třecí síly [8].

Dahlův model [9] je prvním příkladem dynamického modelu tření. Dahlův model přidává popis zpoždění ve změně třecí síly během přepínání směru pohybu. Myšlenku Dahlova modelu je možno demonstrovat na představě tělesa jakožto kartáče se štětinami. Ty, když jsou zatíženy silou, jsou elasticky deformovány a vytvářejí odpor. Pohyb tělesa je možný až po překonání tohoto odporu. Třecí síla je tedy v tomto případě popsána analogicky jako síla pružiny závislá na tuhosti štětiny σ_0 a relativním prodloužení z , které je vnitřní (stavovou) proměnnou,

$$F = -\sigma_0 z, \quad (6)$$

kde pro stavovou proměnnou z platí

$$\dot{z} = v \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{F_d} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha, \quad (7)$$

kde α je parametr, kterým je možno tvarovat průběh třecí síly. Stavová proměnná z je stanovována numerickou integrací v průběhu simulace. Zavedením další proměnné do modelu se eliminuje nespojitost v okolí nulové rychlosti.

S využitím Dahlova modelu je možno modelovat statické tření, nikoliv ale Stribeckův efekt, protože tvar dynamické třecí síly nezávisí na relativní rychlosti. Když systém dosáhne rovnovážného stavu, tak se třecí síla zjednoduší na tvar popsaný v Coulombově modelu. Dahlův model byl použit pro simulaci leteckých systémů nebo ve stavebnictví k popisu reakce konkrétních struktur na silná zemětřesení. Z Dahlova modelu byla odvozena řada dalších modelů za účelem zvýšení přesnosti výsledků simulace.

Příkladem modelu vzniklého rozšířením Dahlova modelu je **LuGre model** [10], který ve vztahu pro třecí sílu zahrnuje kromě tuhosti σ_0 i mikro a viskózní tlumení σ_1 a σ_2 , jak je popsáno ve vztahu

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v. \quad (8)$$

Model opět pracuje se stavovou proměnnou z , která je popsána

$$\dot{z} = v \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{g(v)} \operatorname{sgn}(v) \right). \quad (9)$$

V tomto vztahu je $g(v)$ funkce závislá na rychlosti, proto může tento model kromě Coulombova tření reprodukovat i Stribeckův efekt a tedy zahrnout i tzv. *stick-slip* pohyb. Jev popsaný jako *Stick-slip* nastává v situaci, kdy na těleso působí vnější síla přes pružný prvek. Síla roste plynule z nuly. Těleso se nepohybuje, dokud se nepřekoná klidové tření (*stick motion*), následně se těleso trhavě posune do vzdálenosti, která odpovídá energii nahromaděné v pružném prvku (*slip motion*). Poté se těleso zastaví a děj se opakuje. S ohledem na běžnou aproximaci Stribeckova efektu je vhodné vyjádřit $g(v)$ jako

$$g(v) = F_d + (F_s - F_d) e^{-(v/v_s)^\gamma}. \quad (10)$$

Ve vztahu (10) je v_S Stribeckova rychlost, při níž tření v ustáleném stavu začíná klesat. Koeficient γ je pro většinu případů nastaven na $\gamma = 2$. LuGre model je možné zjednodušit do kvazistatického tvaru, kdy platí $\dot{z} \rightarrow 0$.

Dalším vylepšením LuGre modelu dostaneme **Elasticko plastický model** [11]. Tento model je již schopen popsat statické tření, které je definováno za podmínky, že relativní prodloužení je menší než koeficient odtržení $z < z_{ba}$. V tomto případě je pohyb povrchu tvořen pouze elastickým posunutím. Jedná se o jev popsáný jako *pre-sliding*. Hodnota posunutí při odtržení z_{ba} odpovídá přetvoření v okamžiku, kdy začíná docházet k plastické deformaci. Třecí síla je opět popsána vztahem (8), ale stavová proměnná je vypočítávána z rovnice

$$\dot{z} = v \left(1 - \alpha(z, v) \frac{\sigma z}{g(v)} \operatorname{sgn}(v) \right), \quad (11)$$

kdy $\alpha(z, v)$ je parametr, kterým se do modelu zavádí posunutí a statické tření během fáze před kluzem (*pre-sliding*).

Další model, který pracuje se stavovou proměnnou z , je tzv. **Stick-slip model** [12]. Třecí síla je opět popisována jako síla pružiny. V tomto případě je ale rozdělena na příspěvky ve statické fázi F_{stiction} a ve fázi v kluzu F_{sliding}

$$F_{\text{stiction}} = -(1 - \beta)F_s \operatorname{sgn}(\Delta). \quad (12)$$

Parametr Δ v rovnici (12) odpovídá stavové proměnné z z Dahlova modelu. Parametr β závisí na rychlosti

$$F_{\text{sliding}} = -F_d \operatorname{sgn}(v). \quad (13)$$

Další z pokročilých modelů, který vychází z představy tření jako chování štětin, je **Gonthierův model** [13]. Třecí síla je opět vyjádřena v závislosti na tuhosti σ_0 , tlumení σ_1 a vnitřní stavové proměnné z

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z}. \quad (14)$$

Proměnná z se v tomto případě skládá ze dvou složek, které odpovídají fázi, kdy je těleso tzv. přilepeno k danému povrchu (*sticking*) a fázi pohybu tělesa (*sliding*)

$$\dot{z} = s \dot{z}_{st} + (1 - s) \dot{z}_{sl}, \quad (15)$$

kde s je proměnnou, která umožňuje hladký přechod mezi popsánymi režimy. Maximální hodnota statické třecí síly závisí na další vnitřní stavové proměnné s_{dw}

$$F_{\text{max}} = F_d + (F_s - F_d) s_{dw}. \quad (16)$$

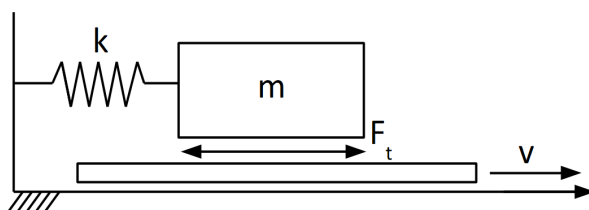
Proměnná s_{dw} zahrnuje efekt prodlevy a závisí na časové konstantě dynamiky prodlevy τ_{dw} a dynamiky štětin $\tau_{br} = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$. Gonthierův model je tedy příkladem přístupu, který pracuje s více vnitřními stavovými proměnnými (z , s_{dw}) a pro jeho definování je již potřeba vyšší množství definovaných parametrů (celkem sedm F_d , F_s , σ_0 , σ_1 , σ_2 , τ_{dw} , v_{Stribeck}).

2.3 Experimentální identifikace parametrů modelů tření

Proměnné parametry v modelech z kapitoly 2 je možné stanovit empiricky nebo na základě dat z experimentálních měření. Koeficienty tření záleží na materiálech, které jsou spolu v kontaktu, ale i na opracovanosti a opotřebenosti jejich povrchu. Obecný postup identifikace parametrů různých modelů a jejich porovnání je následující:

- (a) Získání experimentálních dat, například průběhu závislosti posuvu na čase $x(t)$ při daných podmínkách (budící vnější síle, počáteční rychlosti, frekvenci oscilace ...).
- (b) Sestavení matematického modelu experimentálního zařízení.
- (c) Určení hodnoty neznámých parametrů modelu srovnáním výstupu simulace a experimentu.
- (d) Porovnání výsledků více třecích modelů podle předpovědi posuvu, třecí síly a relativní rychlosti mezi tělesem a podložkou.

V následující části práce je představeno několik variant experimentálních testů a příklady jejich využití při odvození modelů uvedených v kapitole 2. **Rabinowiczův test** je příkladem měření, které zkoumá *stick-slip* jev [14]. Jedná se o těleso na desce, připevněné ke kolmé stěně pružinou o tuhosti k . Deska pod tělesem je posouvána konstantní rychlostí v . Na styčné ploše mezi tělesem a deskou vzniká třecí síla F_t . Pružina stáhne těleso zpátky ve chvíli, kdy síla pružiny je větší než statická třecí síla. Během posouvání tělesa po desce působí na těleso dynamická třecí síla, která je menší než statická. Po zastavení tělesa začne opět působit statická třecí síla a děj se opakuje. Schematicky je Rabinowiczův test znázorněn na obr. 2.



Obr. 2: Schéma Rabinowiczova testu

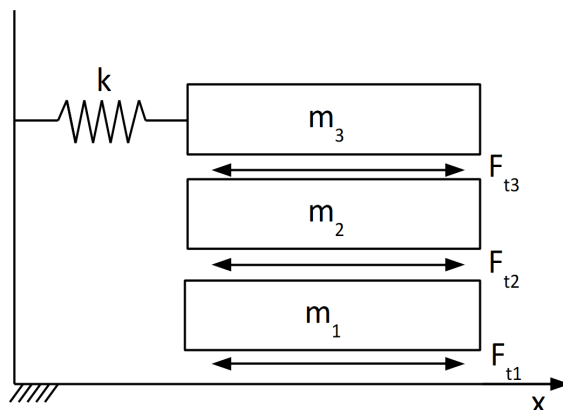
Znázorněné schéma může být rozšířeno o zapojení tlumiče paralelně k pružině, případně uvažováním tlumicích účinků pružiny [15]. V takovém případě je pak soustava popsána rovnicí

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + \mu mg = 0, \quad (17)$$

kde b je tlumení, μ součinitel tření a proměnná x je posuv hmoty v závislosti na čase.

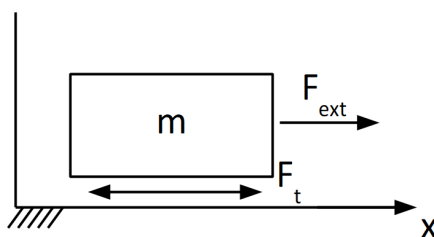
Další varianta testovací soustavy je v literatuře [4] popsána jako **3-DOF**. Tento název odkazuje na fakt, že soustava má tři stupně volnosti (*degrees of freedom*). Jedná se

o tři tělesa naskládaná na sobě a o pružinu připevněnou k nejvyššímu z nich. Ve styčných plochách mezi tělesy je předpokládáno suché tření F_{t1} , F_{t2} a F_{t3} . Tento typ testu je přínosný pro zhodnocení, jak modely tření zvládají popsat případ více třecích sil působících na stejné těleso. Schéma modelu je uvedeno na obr. 3.



Obr. 3: Schéma 3DOF testu

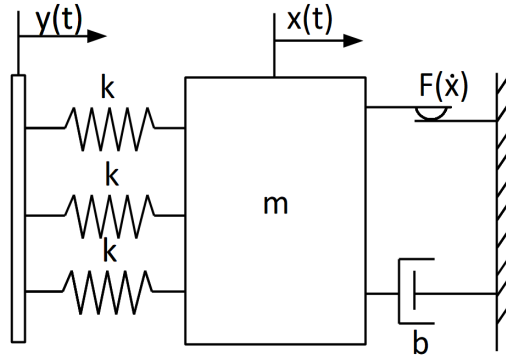
Experimentální soustavy se nemusejí odlišovat pouze v komponentech, které ji tvoří, ale i v budících silách. **Předkluzná testovací soustava** (*Pre-sliding test case*) je tvořena jednoduchým systémem s jedním stupněm volnosti [11]. Jak ukazuje obr. 4, jedná se o jediné těleso na podložce, na které působí vnější budící síla, která je pro účel tohoto testu ve speciálním tvaru. Na začátku je velikost síly skokově změněna na hodnotu vyšší, než je statická třecí síla. Tím dojde k „utržení“ tělesa. Následně velikost působící síly harmonicky kmitá. Po prvotní skokové hodnotě má vnější síla velikost menší než statická třecí síla. Její velikost tedy nestačí k tomu, aby došlo k „utržení“ tělesa, které by začalo konat posuvný pohyb. Proto jediný pohyb, který je za takovýchto podmínek možný, je tzv. posunutí před skluzem (*pre-sliding displacement*).



Obr. 4: Schéma předkluzné testovací soustavy (*Pre-sliding test case*)

Buzený duálně tlumený oscilátor (*Forced Dual-Damped-Oscillators*) je experimentální soustava, která obsahuje Coulombovo i viskózní tření [16]. Jedná se o model průmyslového lineárního ložiskového systému s viskózním i suchým třením. Jejich hodnoty

jsou voleny tak, aby představovaly tlumení v kuličkových ložiskách. Schéma na obr. 5 znázorňuje lineární oscilátor s jedním stupněm volnosti s viskózním i Coulombovým třením a s buzením realizovaným přes pružný člen.



Obr. 5: Schéma oscilátoru s viskozitou, Coulombovým třením a vnějším buzením

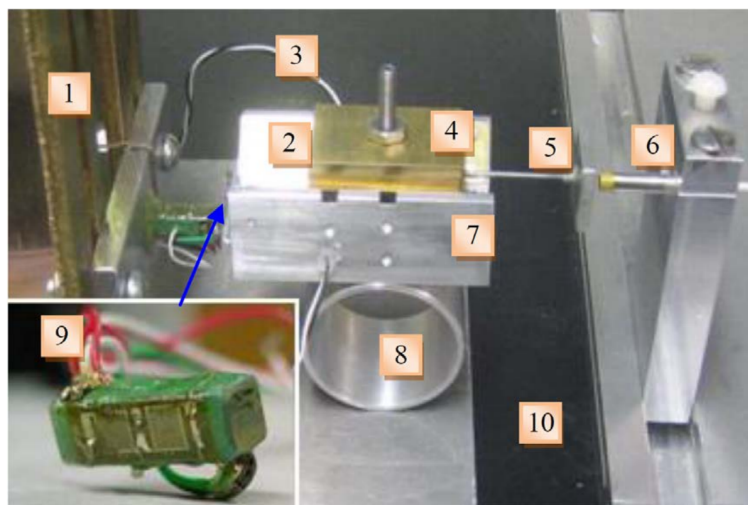
Matematicky je soustava popsána diferenciální rovnicí 2. řádu

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + F(\dot{x}) = ky(t). \quad (18)$$

Buzení je harmonické, tedy může být vyjádřeno vztahem: $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Coulombova třecí síla se rovná $F(\dot{x}) = F_d \operatorname{sgn}(\dot{x})$ pro případ nenulové rychlosti (viz rovnice (1)).

Další experimentální soustava využívá **piezoelektrický pohon** (*piezoelectric stick-slip actuators = PE-SSA*) [17]. Testovací procedura posloužila k porovnání různých přístupů k modelování mikro pohybu. Princip testu spočívá v tom, že na piezoelektrický pohon (PEA) je aplikováno napětí, které způsobí jeho relativně pomalé rozpínání, jež posouvá podstavec směrem doprava. Tření mezi podstavcem a koncovým efektem způsobuje ulpívání. Při rychlém odpojení působícího napětí je piezoelektrický pohon rychle smrštěn, přičemž dochází ke klouzání mezi podstavcem a efektem díky setrvačnosti koncového efektoru, který překonává třecí odpor. Celý proces je periodicky opakován.

Experimentální soustava je zobrazena na obr. 6, kde jsou také očíslovány komponenty, ze kterých se skládá: rám (1), třecí plechy (2), tepelný senzor (3), závaží (4), koncová zarážka (5), senzor pohybu (6), podstavec (7), kolo (8), piezoelektrický pohon (9) a testovací podložka (10), která je odizolovaná od vibrací, jež snižují rušení od okolí. Piezoelektrický pohon je propojen z jedné strany s rámem a z druhé s podstavcem. Třecí plechy jsou připojeny ke koncové zarážce a s pomocí šroubů k podstavci. Závaží pomáhají přizpůsobit tlak mezi koncovou zarážkou a podstavcem. Kolo je použito pro podepření podstavce.



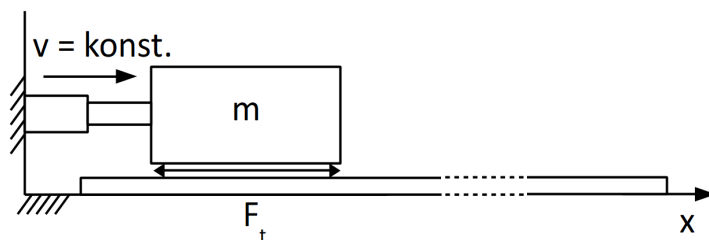
Obr. 6: Experimentální soustava PE-SSA, převzato z [17]

Popsanou soustavu je možno řídit regulací v otevřené smyčce. Během experimentu bylo na piezoelektrický pohon aplikováno napětí s pilovitým průběhem pro zajištění periodického pohybu. Posunutí koncového efektoru bylo měřeno s mimořádně přesným rozlišením $0,01 \mu\text{m}$. Následně byl získaný průběh posuvu v závislosti na čase použit ke stanovení parametrů v různých typech modelů. Vyhodnocení kvality modelů bylo provedeno porovnáním shody v predikovaném posunutí, třecí síle a rychlosti klouzání.

2.4 Experimentální soustavy z automobilového průmyslu

Příkladem experimentálních studií tření z automobilového prostředí je měření zabývající se stanovením koeficientů tření mezi figurínou a sedačkou. Přesné stanovení těchto parametrů je velice důležité. Součástí automobilu jsou aktivní a pasivní bezpečnostní prvky. Sedačka s pásem patří mezi pasivní. Jedná o hlavní kontaktní body pasažéra s vozidlem a tudíž hrají koeficienty tření mezi těmito povrchy významnou roli při simulaci nárazu (např. přední náraz, zadní náraz, ochrana před zavazadly – viz podkapitola 3.4). Koeficienty tření sedadla jsou užitečné pro výrobce při optimalizaci zádržného systému cestujících během kolize automobilu. Celkový výsledek zátěžové zkoušky z hlediska bezpečnosti pasažéra závisí na způsobu, kterým se osoba při nehodě pohybuje uvnitř interiéru vozidla. To ovlivňuje především kontakt pásu a těla figuríny, způsob pohybu figuríny po sedačce a interakce figuríny s airbagem a dalšími zádržnými i jinými komponenty v automobilu.

První popsany experiment má za účel stanovit **dynamický třecí koeficient mezi různými materiály potahů sedačky a oděvu figuríny** [18]. První zkoumaná kombinace kontaktu je oděv figuríny a potah sedačky (látka, látka se silikonovým prošíváním, kůže). Druhá varianta je pak samotný materiál tvořící figurínu a oděv figuríny nebo látkový potah sedačky. Testovací soustava je složena z tělesa, dlouhé kovové desky a pohonného systému, který působí konstantní rychlostí v přímém směru. Schéma soustavy je znázorněno na obr. 7.



Obr. 7: Schéma testovací soustavy pro experimentální měření dynamického třecího koeficientu mezi figurínou a sedačkou

Během měření senzory zaznamenávají budicí sílu a tečné i normálové zrychlení. Dynamický koeficient tření je stanoven jako podíl dynamické třecí síly a tíhové síly, resp. podíl zrychlení ve směru pohybu tělesa (tečný směr) a normálového zrychlení

$$\mu_d = \frac{F_d}{F_n} = \frac{a_t}{a_n}. \quad (19)$$

Tento vztah je nazýván Amontosův zákon. Pro rozsah zvolených působících rychlostí $v \in [1, 7]$ m/s se získané výsledné hodnoty dynamického koeficientu pro kontakt oděvu figuríny a potahu sedačky nacházely v rozsahu $\mu_d = 0,4$ až $0,7$. Vyšším hodnotám budicí rychlosti odpovídaly vyšší hodnoty koeficientu, a naopak. Statický koeficient tření mezi oděvem figuríny a samotnou figurínou vyšel ve všech případech více než 1. U materiálů jako je guma nebo tkanina se projevila vysoká citlivost na vlhkosti.

Další uvedené experimentální měření zkoumá **statický i dynamický koeficient tření** mezi různými materiály potahů sedačky a oděvu pasažéra [19]. Tento test je prováděn přímo s figurínou a maketou sedačky, která je potažena zkoumaným materiálem. Na figurínu působí vnější síla, jejíž velikost je v průběhu experimentu zaznamenávána.

Na začátku měření je sedačka nejprve pevně uchycena k rámu. Následně je potažena zkoumanou tkaninou, na kterou je posazena figurína. Tažné kabely jsou přichyceny jak k figuríně, tak i k vrstvě tkaniny. Následně je přes tažné kabely aplikována vnější síla. Snímací zařízení zaznamenává působící sílu, potenciometr měří lineární pohyb figuríny a akcelerometr zaznamenává zrychlení. Měření je opakováno pro různé sedačky a kombinace materiálů: bavlna, kůže, džínovina, vlna a vinyl. Testovací procedura je nejprve vhodně otestována na materiálech se známými vlastnostmi a následně je postup opakován s tkaninami, jejichž parametry tření ještě nejsou známy.

Statický koeficient tření je v tomto případě stanoven na základě průběhu třecího koeficientu na čase jako maximální hodnota v grafu. Dynamický koeficient tření je stanoven ze stejného grafu, a to jako průměrná hodnota od výskytu statického koeficientu tření až do chvíle, kdy figurína spadne ze sedačky. Tento okamžik je stanoven z průběhu rychlosti na čase, jelikož v okamžiku pádu figuríny ze sedačky dojde k prudkému nárůstu rychlosti.

Výsledky jsou stanoveny jako průměrné hodnoty z více různých měření. Vyhodnoceny jsou i směrodatné odchylky jednotlivých výsledků. Ty ukazují, do jaké míry jsou měření přesná a opakovatelná. Na závěr byly zprůměrovány výsledky mezi všemi materiály oděvů

v kontaktu s látkovým, koženým nebo vinylovým potahem sedačky. Pro daný materiál čalounění vycházely nízké směrodatné odchylky pro všechny oděvní textilie. Větší odchylky tření byly mezi jednotlivými materiály čalounění (látka, kůže, vinyl). Tento výsledek ukazuje, že oděvní materiál má malý dopad na tření v kontaktu mezi oděvem a sedadlem, zatímco materiál čalounění má značný vliv. Tento závěr je pozitivní z hlediska vývoje sedadel v automobilu, protože ukazuje, že vhodnou volbou potahu sedačky je možné zajistit dostatečně velké tření mezi pasažérem a sedadlem bez ohledu na oděv, který má cestující na sobě.

3 Výpočetní program LS-Dyna

LS-Dyna je pokročilý multifunkční softwarový program, který slouží k simulacím v široké oblasti aplikací. Patří do skupiny komerčních softwarů, které pracují na principu metody konečných prvků. Typické využití je v automobilovém průmyslu, kde se pomocí tohoto programu simulují havárie zahrnující deformace karosérie, nafukování airbagu či napínání bezpečnostního pásu. Možnosti simulací dále zahrnují výbuchy, tavení, lisování nebo pádové zkoušky. Výpočty v programu LS-Dyna jsou kromě automobilů součástí vývoje i u autobusů, tramvají, vlaků, lodí, letadel či kosmické techniky.

Program LS-Dyna byl vyvinut jako DYNA3D v Lawrensově národní laboratoři v Livermore ve Spojených státech v roce 1976 týmem vedeným Johnem O. Hallquistem. Původní účel byl vytvořit program schopný počítat napěťovou analýzu při různých zatíženích pro 3D elementy. Software nabízel možnost simulovat 3D vazníky, membrány a různé varianty objemových elementů. Současně byla vyvinuta i dvoudimenzionální verze programu, DYNA2D [27]. V následujících letech byly zveřejněny další verze, které rozšířily možnosti prováděných výpočtů až do dnešní podoby.

S ohledem na téma této práce jsou dále uvedeny důležité milníky ve vývoji tohoto programu v rámci simulací tření. Simulace tření na rozhraní dvou těles byla poprvé v programu zahrnuta ve verzi 1986 [28]. Během let 1989–1990 byla přidána možnost simulace viskózního a Coulombovského tření a následně v letech 1991–1992 tření v kontaktních prvcích. V roce 1995 bylo umožněno, aby měl v automatickém kontaktu každý komponent unikátní parametry: statický (klidový) i dynamický součinitel tření, exponenciální konstantu přechodu, viskózní koeficient tření, volitelnou tloušťku kontaktu, volitelný faktor měřítka tloušťky a faktor lokální penalizace. Od let 1998–2000 je možné volitelně počítat třecí energii rozhraní při generování tepla a výsledek zapisovat do výstupního souboru síly rozhraní.

V letech 2001–2002 bylo přidáno tření spoje s využitím vyhledávací tabulky tak, že třecí moment může být funkcí výsledné translační síly. Oproti předchozím verzím bylo také umožněno nastavit současně statický i dynamický součinitel tření pro kluzné kroužky u bezpečnostních pásů u sedačky (*seat belt slip ring*). Mezi lety 2003–2005 byl vyvinut příkaz `*DEFINE_FRICTION`, který umožňuje nadefinovat tření mezi dvojicí komponent. Příkaz `*DEFINE_FRICTION_ORIENTATION` byl vyvinut v období 2008–2010. Pomocí něj je možné nadefinovat součinitel smykového tření do zvoleného směru specifikovaného vektorem a úhlem ve stupních. Navíc může být tření stupňované podle velikosti tlaku generovaného na rozhraní kontaktu.

V letech 2012–2013 byla vytvořena verze uvedená pod označením R7.0, která obsahovala negativní faktor tření nadefinovaný v `*AIRBAG_PARTICLE`. Částice v airbagu jsou díky tomu po kontaktu schopny odskočit na trajektorii blíže k povrchu tkaniny. Příkazem `*CONTACT_ENTITY` je umožněno nastavit tření jako křivku s průběhem hodnoty součinitele tření v závislosti na čase. Pro nastavení parametru $FS = 2$ je tření definováno ve formě tabulky. Takovým způsobem je možné do průběhu tření zahrnout kromě závislosti na rychlosti i závislost na tlaku. Toto nastavení je doporučeno použít společně s parametrem $SOFT = 2$ (viz oddíl 3.2.1).

Dále bylo přidáno měřítko pro změnu tuhosti tření pro kontakt. Jedná se o volitelný parametr FRICSF na kartě E. Tato varianta je podporována pouze pro segmentově založený kontakt (SOFT = 2). Motivací pro toto nastavení byla úloha smýkání gumy po silnici, kdy tření bylo definováno koeficienty statickým, dynamickým a přechodu. Růst třecí síly byl příliš pomalý, takže nebylo možné dosáhnout Coulombovy statické hodnoty. Zvýšením škály třecí tuhosti již tato hodnota byla dosažena. Od verze z roku 2012 je také možné zahrnout do modelů kontaktní tření pro hydrodynamiku hladkých částic (*SPH = Smooth Particle Hydrodynamics*). Jedná se o simulace mechaniky kontinuálního média, jako je mechanika pevných látek a proudění tekutin.

Další verze R7.1 vyvinutá v letech 2013–2014 umožnila přeměnu energie třecího kontaktu na teplo během výpočtu tepelně-mechanického problému SPH. Převod energie probíhá přidáním parametru FRCENG = 1 v *CONTROL_CONTACT [30]. S touto verzí programu jsou provedeny simulace popsány v této práci (viz kapitola 5), a proto již následující aktualizace nejsou popsány.

3.1 Princip výpočtů

Jak již bylo uvedeno, LS-Dyna je obsáhlý program pracující na principu metody konečných prvků. Výpočty je možno provádět jak v explicitním, tak i implicitním módu. Převážná část výpočtů v LS-Dyna je počítána explicitně. Obě varianty jsou popsány v následujícím oddíle 3.1.2. Řešené úlohy jsou jak z 2D, tak i 3D oblastí a spadají do nich dynamika tuhých těles, modální analýza, teplotní analýza, nelineární dynamika, analýzy porušování materiálu a šíření trhlin, akustické problémy, radiace, elektromagnetismus, proudění plynů a další.

Počítačový model je zapsán v textovém souboru, který je pro účely výpočtu v programu LS-Dyna ve formátu *.key*. Tento soubor obsahuje souřadnice všech uzlů, které jsou v modelu přítomny. Dále pak popisuje použité elementy, materiály, počáteční a okrajové podmínky, kontakty a parametry simulace. Jednotlivé příkazy se nazývají *key wordy* a v textu jsou vždy uvedeny symbolem: *. Příkaz je popsán pomocí parametrů, kterých je na jednom řádku až osm. Pro jeden příkaz může být i více řádků s parametry. Každý parametr je zadán až osmi znaky. Varianty příkazů jsou rozšířené přidáváním dalších možností (tzv. *option*) k základním příkazům přes symbol *_*. Jednotlivé členy stejného příkazu jsou odlišeny jedinečným ID číslem, pod kterým jsou odkazovány v jiných příkazech.

Jednoduché úpravy modelu je možné provádět v textovém editoru. Pro sestavování modelu a složitější operace se využívají preprocessingové softwary, pomocí kterých jsou potřebné příkazy a parametry zadávány v uživatelsky přívětivějším prostředí, kde je možné model zároveň vizualizovat. Prvním krokem přípravy modelu je proces síťování. Na základě geometrie soustavy je vytvořena síť 1D (*beam*), plošných (*shell*) nebo objemových (*solid*) elementů. LS-Dyna obsahuje širokou knihovnu konečných prvků: 1D elementy (*beam*), které představují vazníky, kabely a svary, dále diskrétní prvky představující tlumiče nebo pružiny, plošné elementy (*shell*), objemové elementy (*solid*), mezi které patří čtyřstěny o čtyřech nebo deseti uzlech (ve vrcholech a na hranách), pětistěny se šesti uzly nebo šestistěny s osmi, předepínače, senzory a další. Materiálová knihovna pokrývá kovy, plasty,

pěny, gumy, kompozitní materiály, kapaliny, sklo, keramiku, tkaniny i biologické materiály.

Tuhá tělesa jsou modelována jako síť uzlů, které tvoří elementy. Mezi nimi jsou definovány vazby. V tomto softwaru jsou implementovány kontaktní algoritmy, přes které lze zadat kontakty deformovatelných těles (do všech je možno zadávat tření), kontakt deformovatelného a tuhého tělesa (*rigid*) a kontakt dvou tuhých těles (*rigid to rigid*). Během výpočtu je možné přepínat mezi tuhým a deformovatelným tělesem.

3.1.1 Časový krok

Při spouštění simulace je důležitým parametrem časový krok. Časový krok může být pro všechny elementy stejný anebo mohou být vytvářeny skupiny elementů s různými hodnotami časového kroku (metoda *Subcycling*, obecně není doporučována). Všechny elementy musí splnit Courant-Levyho kritérium stability [29]

$$\Delta t^{crit} = \frac{Le}{Q + \sqrt{Q^2 + c^2}} \approx \frac{Le}{c}. \quad (20)$$

Minimální velikost časového kroku elementu závisí na jeho délce (L) a hustotě (ρ), která ovlivňuje, jakou rychlostí se v materiálu šíří vlny (c). V rovnici (20) je Q funkce koeficientů objemové viskozity C_0 a C_1 . Le je charakteristická délka elementu, která závisí na jeho tvaru. Pro elementy tvaru kvádrů se spočítá jako podíl objemu a maximální plochy průřezu. Pro elementy ve tvaru jehlanu se spočítá jako násobek minimální výšky (koeficient násobení závisí na formě elementu: ELFORM). Pro adiabatickou rychlost zvuku c platí

$$c = \sqrt{\left(\frac{4G}{3\rho_0} + \frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}, \quad (21)$$

kde G je modul pružnosti ve smyku, ρ_0 počáteční hustota, $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ derivace tlaku podle hustoty. Výpočet je prováděn za konstantní entropie s . V případě elastického materiálu závisí rychlost zvuku na modulu pružnosti E , Poissonově čísle ν a hustotě materiálu ρ

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}. \quad (22)$$

Obecně platí, že krátká délka elementu, nízká hustota a zvýšená tuhost snižuje délku časového kroku. Při přípravě modelu na simulaci je tedy zapotřebí vytvořit pravidelnou síť, používat skutečné materiálové vlastnosti a brát v úvahu, že zhuštění sítě navýší výpočetní čas.

Na začátku výpočtu LS-Dyna automaticky spočítá z podmínky (20) velikost časového kroku pro všechny elementy v modelu. Do souboru D3HSP je následně zapsáno 100 elementů, pro které vyšel nejkratší časový krok. Časový krok použitý pro výpočet se pak spočítá jako minimum ze všech elementů přenásobené škálovacím faktorem *TSSFAC*, který je standardně roven 0,9, ale může být změněn. Tento parametr se nachází v příkazu *CONTROL_TIMESTEP.

Uživatel může nadefinovat časový krok parametrem DT2MS. Při zadání kladné hodnoty se předepsaná velikost přiřadí všem elementům v modelu. Toto nastavení je používáno pro kvazi-statické výpočty a není vhodné pro dynamické simulace. Záporná hodnota parametru přiřadí nastavenou velikost jen těm elementům, které mají časový krok nižší než uvedená hodnota. Elementům, které podmínku nesplní, je lokálně navýšena hmotnost tak, aby časový krok odpovídal předepsané hodnotě. Tento proces se nazývá škálování hmotností (*Mass scaling*).

3.1.2 Explicitní a implicitní metoda

Při provádění výpočtů platí dynamická podmínka rovnováhy sil ve tvaru

$$\mathbf{F}_S(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{F}(t). \quad (23)$$

Na levé straně rovnice (23) jsou setrvačné síly $\mathbf{F}_S = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}$, tlumicí síly $\mathbf{F}_D = \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}$ a elastické síly $\mathbf{F}_E = \mathbf{K}\mathbf{q}$. Na pravé straně jsou pak vnější síly. Po dosazení je řešena pohybová rovnice

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (24)$$

Pohybová rovnice (24) je časově závislá. Při numerickém řešení se přejde k časové diskretizaci. Je možné zvolit implicitní nebo explicitní časovou integraci.

Implicitní metoda [29] se používá v LS-Dyna k výrazně menšímu množství aplikací než explicitní a stále dochází k jejímu vývoji. Pomocí implicitní metody je možno počítat statické úlohy, předepnutí nebo modální analýzu. Rychlost nárazu je v řádu do několika desítek m/s a rychlost přetvoření je v rozsahu do 10^{-1} s^{-1} .

Implicitní časová integrace (např. Newmarkova metoda) řeší pohybovou rovnici v čase t_{n+1} , tedy na konci aktuálního časového kroku

$$\mathbf{M}_{n+1}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{B}_{n+1}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} + \mathbf{K}_{n+1}\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}. \quad (25)$$

Je předpokládána lineární změna zrychlení. Posuv a rychlost jsou aproximovány vztahy

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{3}\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{6}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}, \quad (26)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}. \quad (27)$$

Po dosazení rovnic (26) a (27) do rovnice (25) a vyjádření posuvu v čase t_{n+1} je získán vztah

$$\mathbf{q}_{n+1} = \frac{\mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M}_n \left(\frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{q}_n + \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_n + 2\ddot{\mathbf{q}}_n \right) + \mathbf{B}_n \left(\frac{3}{\Delta t} \mathbf{q}_n + 2\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{q}}_n \right)}{\left(\frac{6}{\Delta t^2} \mathbf{M}_{n+1} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{B}_{n+1} + \mathbf{K}_{n+1} \right)}. \quad (28)$$

Dále je řešena maticová soustava rovnic

$$\mathbf{K}^* \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{F}. \quad (29)$$

Pro pravou stranu platí $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{Ext} - \mathbf{F}_{Int}$ a matice \mathbf{K}^* je funkcí matic hmotnosti \mathbf{M} , tlumení \mathbf{B} , tuhosti \mathbf{K} a času t . Matice tuhosti je na straně neznámých, proto je složité řešit velký počet rovnic. Pro řešení ve tvaru

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{K}^{*-1} \Delta \mathbf{F} \quad (30)$$

je potřeba vyjádřit inverzní matici \mathbf{K}^{*-1} , která je řídká a nedigonální.

V případě implicitní časové integrace je získána soustava velkého množství rovnic. Volba časového kroku je podle požadované četnosti ukládání výsledků, je tedy obvykle delší než u explicitní metody. Pro lineární problémy je tato metoda vždy stabilní a nezávisí na délce použitého časového kroku. Pro nelineární výpočty se pak časový krok musí volit dostatečně malý, aby byla dosažena konvergence.

Explicitní metoda [29] je v programu LS-Dyna používána pro výpočet rychlých dynamických dějů a dějů, při kterých dochází k velkým deformacím. Při rychlostech nárazu překračujících 12 km/s a rychlosti přetvoření vyšší než 10^8 s^{-1} může docházet k vypařování tuhých částic.

Mezi typické použití explicitních řešičů je možné zařadit simulace nárazu dopravních prostředků, teplotní a elektromagnetické analýzy, jako je například tváření plechů, svařování či indukční ohřev. Simulováno je také šíření rázových vln, proudění stlačitelných i nestlačitelných látek, průstřely, výbuchy a další porušování materiálu.

Explicitní časová integrace (např. Metoda centrálních diferencí) řeší pohybovou rovnici v čase t_n , tedy na začátku aktuálního časového kroku

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{B}_n \dot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{K}_n \mathbf{q}_n = \mathbf{F}_n. \quad (31)$$

Je předpokládána lineární změna deformace. Rychlost a zrychlení jsou aproximovány vztahy

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{\Delta t_{n+\frac{1}{2}}} (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n), \quad (32)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{\Delta t_n} (\dot{\mathbf{q}}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{\mathbf{q}}_{n-\frac{1}{2}}). \quad (33)$$

Po dosazení rovnic (32) a (33) do rovnice (31) a vyjádření posuvu v čase t_{n+1} je získána rovnice

$$\mathbf{q}_{n+1} = \frac{\mathbf{F}_n - \left(\mathbf{K}_n - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}_n \right) \mathbf{q}_n - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}_n - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{B}_n \right) \mathbf{q}_{n-1}}{\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}_n + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{B}_n}. \quad (34)$$

Dále je řešena maticová soustava rovnic

$$\mathbf{D} \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{F}. \quad (35)$$

Pro pravou stranu platí $\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{Ext} - \mathbf{F}_{Int} - \mathbf{K} \Delta \mathbf{q}$ a matice \mathbf{D} je funkcí matic hmotnosti \mathbf{M} , tlumení \mathbf{B} a času t . Pro řešení je potřeba opět vyjádřit inverzní matici \mathbf{D}^{-1} , ale ta již nezávisí na tuhosti. Matice tuhosti \mathbf{K} je na straně známých. Řešení je ve tvaru

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{D}^{-1} \Delta \mathbf{F}. \quad (36)$$

Při explicitní časové integraci obvykle nenastávají problémy s konvergencí. Stabilita je pouze podmíněná, musí být zvolený dostatečně malý časový krok, který závisí na nejvyšší vlastní frekvenci, jak je popsáno v podmínce stability

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}. \quad (37)$$

Při malém časovém kroku (řádově 10^{-6}) dochází k malým přírůstkům, a tedy je výpočet stabilní. Důsledkem je ale dlouhý výpočet a velký nárok na výpočetní i paměťovou kapacitu počítače.

3.2 Kontakty ve výpočetním modelu

Součástí sestavování výpočtu v programu LS-Dyna je popis kontaktních problémů mezi různými částmi modelu, který má podstatný vliv především při simulacích s velkými deformacemi. Pro dobré predikční schopnosti numerické simulace je důležité správné zahrnutí chování kontaktních rozhraní mezi subjekty. Rozhraní lze v prostoru definovat tak, že se v libovolném pořadí uvedou všechny trojúhelníkové a čtyřúhelníkové segmenty, které tvoří každou stranu rozhraní. V kontaktu dvou těles nebo skupin těles je jedna strana vždy označena jako hlavní (*master*) a druhá jako podřízená (*slave*). Stejně tak uzly příslušné daným povrchům se dělí na hlavní a podřízené.

V některých přístupech modelování kontaktu povrchů nemá toto rozdělení důsledek pro výpočet (např. symetrická penaltová metoda). V jiných metodách jsou ale podřízené uzly nuceny v případě nárazu klouzat po hlavní ploše a musí na ní zůstat, dokud se mezi uzlem a povrchem nevyvine tahová síla. Rozdělení rozhraní na hlavní a vedlejší může být zadáno uživatelem nebo být provedeno automaticky. U modelů automobilových havárií je celkem běžné zahrnout celé vozidlo v jedné jediné definici povrchového kontaktu, kde všechny uzly a prvky v rámci rozhraní mohou interagovat. Kromě toho jsou definovány další kontakty mezi jednotlivými komponenty, které jsou spolu v kontaktu na počátku simulace nebo se předpokládá, že k němu dojde v průběhu výpočtu. Při vytváření sítě konečných prvků je třeba brát v úvahu tloušťku kontaktu u plošných elementů.

Přítomnost počáteční penetrace v modelu může vést k závažným numerickým problémům, které způsobují nestabilitu výpočtu. Indikátorem existence počáteční penetrace je často záporná kontaktní energie. Po spuštění simulace jsou vypsány penetrující uzly a elementy do výstupních souborů D3HSP a MESSAG. V případě jednostranného kontaktu jsou uzly penetrující i v druhém časovém kroku vyjmuty z kontaktu a jsou zaznamenány do varovné zprávy. Počáteční penetrace v modelu je možné odstranit úpravou sítě, pokud je to možné s ohledem na předepsanou geometrii modelované soustavy. Další možností je

pak upravit tloušťku komponentu nebo kontaktní tloušťku v přijatelné míře. Obecně platí, že dobrá kvalita sítě zlepšuje výpočetní stabilitu, schopnost nalézt kontaktní segmenty i vyhledat penetrace.

V knihovně LS-Dyna je obsaženo mnoho typů kontaktů. Některé mají všestranné využití, jiné jsou vytvořeny pro konkrétní aplikace. Jako příklad je možné uvést speciální kontakt entity pro tuhé části figuríny (*CONTACT_GEBOD), kontakt pro modelování silničních povrchů (*CONTACT_RIGID_SURFACE) nebo kontakt vnitřních hran elementů měkkých pěn (*CONTACT_INTERIOR) [30]. Chování v kontaktu mezi komponenty modelovanými v programu LS-Dyna je možné popsat pomocí tří různých algoritmů. Rozdíl je dán různým přístupem při výpočtu kontaktní tuhosti.

3.2.1 Kontaktní algoritmy v LS-Dyna

V tomto oddíle jsou představeny tři algoritmy pro výpočet kontaktní tuhosti v programu LS-Dyna [29].

Standardní penaltová formulace (*Standard Penalty Formulation*) je nejobecnější a nejčastěji používaná. V kartě kontaktu je zadána parametrem SOFT = 0. Při její aplikaci je každý uzel na podřízené straně kontrolován na penetraci s hlavní stranou. Při nalezení penetrace je aplikována kontaktní penaltová síla F_i , která tlačí tělesa zpátky od sebe, což je možné představit si jako přidání pružiny v rozhraní. Směr působení síly je ve směru vnější normály k hlavní straně v kontaktním bodě a velikost této síly je přímo úměrná hloubce průniku y_i a kontaktní tuhosti k_i

$$F_i = y_i \cdot k_i. \quad (38)$$

Výpočet kontaktní tuhosti je proveden pro každý uzel segmentu a liší se podle typu elementu. Ve výchozím nastavení je kontaktní tuhost vypočítaná pro všechny uzly na hlavní i podřízené straně a následně je použita minimální hodnota. Pro objemové elementy je kontaktní tuhost získána z rovnice

$$k_i = \frac{f_{si} K_i A_i^2}{V_i} \quad (39)$$

a pro plošné elementy z

$$k_i = \frac{f_{si} K_i A_i}{\max(\text{shell diagonal})}. \quad (40)$$

V rovnicích (39) a (40) se vyskytují tyto veličiny: modul objemové pružnosti (převrácená hodnota stlačitelnosti) K_i , objem elementu V_i a plocha kontaktního segmentu A_i . Parametr f_{si} je škálovací faktor pro tuhost rozhraní (*scale factor for the interface stiffness*). Kontaktní tuhost je možné změnit pro jednotlivé kontakty škálovacími faktory SFS (*scale factor on default slave penalty stiffness*) a SFM (*slave factor on default master penalty stiffness*) z výchozí hodnoty rovné 1. Tyto parametry ovlivňují kontaktní tuhost pro typ kontaktu SOFT = 0 a SOFT = 2. Úpravu kontaktní tuhosti je možno také provést globálně

pro všechny kontakty přítomné v modelu přes příkaz *CONTROL_CONTACT nastavením parametru SLSFAC (*scale factor for sliding interface penalties*). Výchozí hodnota je $SLSFAC = 0,1$. Pro měkké materiály vychází nízká hodnota kontaktní tuhosti a nastává problém s vysokou penetrací. Při škálování tuhosti na příliš vysokou hodnotu může dojít k nestabilitě způsobené vibracemi s vysokou frekvencí.

Algoritmus penaltové metody je možné použít nejen na příklady simulované metodou konečných prvků, ale i pro výpočty kombinující diskrétní a konečné elementy. Metoda diskrétních prvků (*Discrete element method*) je numerická metoda na simulování chování systému velkého množství malých nezávislých částic. Jedná se o efektivní přístup řešení technických problémů nespojitých materiálů. Každá částice je numericky reprezentována a identifikována svými specifickými vlastnostmi (tvar, velikost, materiál...). Při aplikování popsaného penaltového algoritmu je každý sférický diskrétní prvek považován za podřízený uzel a povrchy konečných prvků za hlavní plochy [32].

Penaltová formulace s měkkou vazbou (*Soft Constraint Penalty Formulation*) slouží k eliminování výrazných penetrací použitím jiného předpisu pro kontaktní tuhost k_i . Ta již nezávisí na materiálu nebo velikosti elementu, ale na časovém kroku a hmotnosti. V kartě kontaktu je tato formulace aktivována nastavením parametru $SOFT = 1$. Aplikace tohoto algoritmu může být nezbytné, pokud komponenty, které tvoří kontaktní plochy, mají výrazně jiné materiálové vlastnosti, především pak hustotu, tuhost a modul objemové pružnosti K_i . Při výpočtu kontaktní tuhosti pomocí penaltové formulace s měkkou vazbou se vybírá maximální výsledek z hodnot $k_{SOFT=0}$ a k_{CS}

$$k_{SOFT=1} = \max(k_{SOFT=0}, k_{CS}), \quad (41)$$

kde $k_{SOFT=0}$ je vypočítaná kontaktní tuhost podle standardní penaltové formulace popsané rovnicemi ((39) a (40)). Druhá hodnota k_{CS} je založena na Courantově kritériu stability a při jejím výpočtu záleží na hmotnosti a velikosti globálního časového kroku $\Delta t_c(t)$

$$k_{CS}(t) = 0,5 \cdot SOFCSL \cdot m^* \cdot \left(\frac{1}{\Delta t_c(t)} \right)^2, \quad (42)$$

kde m^* je funkcí hmotností podřízeného uzlu a hlavních uzlů. Parametr SOFCSL je škálovací faktor (*scale factor for constraint forces of soft constraint*), kterým je možno upravovat výslednou hodnotu ve volitelné kartě kontaktu. Popsaný předpis $k_{CS}(t)$ je časově závislý z důvodu přítomnosti parametru $\Delta t_c(t)$. Ten je na začátku simulace nastaven na počáteční výpočtový časový krok. V případě, že během výpočtu časový krok roste, je hodnota $\Delta t_c(t)$ změněna na aktuální hodnotu časového kroku, aby došlo k zamezení nestabilního chování.

Penaltová formulace s měkkou vazbou obvykle dává mnohem vyšší kontaktní tuhosti, než jaké by bylo dosaženo standardní penaltovou metodou, kdy je výsledek úměrný modulu objemové pružnosti dle rovnic (39) a (40). Z tohoto důvodu je tato metoda preferovanou volbou např. při interagování materiálu pěny s kovy, tváření kovů s vysokým tlakem na vnější plochy nebo pro kontakt velké plochy v rozsáhlém modelu s různými tuhostmi kontaktních dvojic, protože použitá hodnota je skoro stejná pro celý model. Při práci s pěnamí

je důležité kontrolovat, zda výsledná kontaktní tuhost není příliš vysoká, a tedy nevyvolává velké síly, které vedou ke zborcení elementů. Uživatel je v takovém případě informován varovnou zprávou o negativním objemu v objemových elementech.

Segmentově založená penaltová formulace (*Segment-based Penalty Formulation*) má podobný předpis a motivaci jako penaltová formulace s měkkou vazbou. Hodnota kontaktní tuhosti opět nezávisí na použitém materiálu a objemu elementů, ale na časovém kroku a hmotnosti. Formulace je aktivována zadáním parametru $\text{SOFT} = 2$ v kartě kontaktu.

Při výpočtu kontaktní tuhosti je opět vybíráno maximum z hodnot $k_{\text{SOFT}=0}$ a k_{CS}

$$k_{\text{SOFT}=2} = \max(k_{\text{SOFT}=0}, k_{\text{CS}}). \quad (43)$$

Předpis pro k_{CS} má pro segmentovou formulaci tvar

$$k_{\text{CS}} = 0,5 \cdot \text{SLSFAC} \cdot \{\text{SFS/SFM}\} \cdot \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\Delta t_c(t)} \right)^2. \quad (44)$$

Ve srovnání s rovnicí (42) pro $\text{SOFT} = 1$ se v tomto případě ve výpočtu pracuje s hmotností segmentů místo uzlů. Z toho plyne název této metody. Segmentová hmotnost je pro plošné prvky rovna hmotnosti elementů a pro objemové elementy je poloviční. V tomto případě je možné škálovat tuhost nejen parametrem SLSFAC, ale také úpravou tuhosti podřízených (SFS) nebo hlavních (SFM) segmentů v kontaktu stejně jako pro variantu $\text{SOFT} = 0$.

Formulace se liší v procesu úpravy časového kroku $\Delta t_c(t)$. Ke změně hodnoty z velikosti počátečního časového kroku dojde pouze v případě, že aktuální výpočtový časový krok roste o více než 5 %. Díky tomu zůstává parametr konstantní i v případech, kdy dochází během výpočtu k nepatrnému růstu časového kroku. Tento algoritmus je vhodný např. pro plošné elementy s kontaktem hran nebo objemové elementy s volnými hranami v kontaktu. Pro 1D elementy není toto nastavení podporováno.

3.2.2 Tlumení v kontaktu

Možnost přidat do výpočtu viskózní tlumení je součástí všech typů kontaktů. Zadáváno je parametrem VDC (*viscous damping coefficient*). V kolmém směru ke kontaktnímu povrchu je aplikováno kontaktní tlumení ξ , aby bylo zabráněno nežádoucím oscilacím. Hodnota tlumení je vyjádřena ve vztahu

$$\xi = \frac{\text{VDC}}{100} \xi_{\text{crit}}. \quad (45)$$

Parametr VDC je zadáván jako procentuální hodnota kritického tlumení ξ_{crit}

$$\xi_{\text{crit}} = 2m\omega, \quad (46)$$

kteřé závisí na vlastní frekvenci ω a na uzlové hmotnosti, která je minimem z hmotností hlavního a podřízeného uzlu $m = \min(m_{\text{slave}}, m_{\text{master}})$. Vlastní frekvence pro podřízený uzel

ω je dána vztahem

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_{\text{slave}} + m_{\text{master}})}{m_{\text{slave}}m_{\text{master}}}}, \quad (47)$$

kde m je hmotnost a k označuje kontaktní tuhost. Původním záměrem zavedení parametru VDC bylo tlumit oscilace během modelování tváření kovů. Později však bylo zjištěno, že toto opatření účinně funguje i při odstraňování vysokofrekvenčního šumu u simulací nárazu [29].

3.3 Zahrnutí tření do výpočtových modelů v programu LS-Dyna

Třecí síla se vyskytuje v případě všech mechanických systémů, které mají své povrchy ve vzájemném kontaktu, z tohoto důvodu se tření zadává v programu LS-Dyna v kartě kontaktu. Simulace tření v LS-Dyna je založena na Coulombově modelu tření se zahrnutím Stribeckova efektu. Závislost mezi třecí silou a rychlostí je modelována pomocí tří parametrů

$$\mu = \mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c|\mathbf{v}|}, \quad (48)$$

součinitel klidového tření μ_s , součinitel smykového tření μ_d a exponenciální konstanta přechodu c , která vyhlazuje přechod mezi klidovým a smykovým součinitelem tření. Relativní rychlost \mathbf{v} mezi tělesy je vyjádřena jako podíl mezi přírůstkem pohybu $\Delta \mathbf{e}$ a velikostí časového kroku Δt (viz oddíl 3.1.1)

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{e}}{\Delta t}. \quad (49)$$

V příkazu *CONTACT jsou koeficienty tření zadány v kartě 2 jako parametry FS = μ_s (statický koeficient tření), FD = μ_d (dynamický koeficient tření) a DC = c (exponenciální konstanta přechodu, také koeficient rychlosti). Dynamický koeficient tření FD je aplikován, pouze pokud je zároveň definován koeficient DC.

Algoritmus výpočtu třecí síly využívá ekvivalenci s elasto-plastickou pružinou. Jednotlivé kroky výpočtu jsou popsány níže. V uvedených vztazích je F^* zkušební síla, F_n normálová síla, k kontaktní rozhraní (*interface stiffness*, tj. tuhost rozhraní), μ součinitel tření ze vztahu (48) a F^n je třecí síla v časovém kroku n .

1. Výpočet síly F_y (*yield force*)

$$F_y = \mu |\mathbf{F}_n| \quad (50)$$

2. Výpočet přírůstku pohybu podřízeného uzlu jako rozdíl polohových vektorů vyjádřených v souřadnicích bodu kontaktu ξ_c a μ_c

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{r}^{n+1}(\xi_c^{n+1}, \mu_c^{n+1}) - \mathbf{r}^{n+1}(\xi_c^n, \mu_c^{n+1}) \quad (51)$$

3. Aktualizování síly rozhraní na zkušební hodnotu

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^n - k \Delta \mathbf{e} \quad (52)$$

4. Kontrola podmínky meze prokluzu

$$\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{F}^*, \text{ pokud platí } |\mathbf{F}^*| \leq F_y \quad (53)$$

5. Přeškálování zkušební hodnoty, pokud je příliš vysoká

$$\mathbf{F}^{n+1} = \frac{F_y \mathbf{F}^*}{|\mathbf{F}^*|}, \text{ pokud platí } |\mathbf{F}^*| > F_y \quad (54)$$

Důsledkem Coulombova tření vzniká smykové napětí rozhraní (*interface shear stress*), které může být v některých případech velmi vysoké. Může nastat případ, že jeho velikost překročí hodnotu, kterou je materiál schopen snést. Z tohoto důvodu je možné zadat další omezení pro velikost třecí síly

$$F^{n+1} = \min(F_{\text{Coulomb}}^{n+1}, \kappa A_{\text{master}}), \quad (55)$$

kde A_{master} je oblast na hlavním segmentu a κ je viskózní koeficient. Ke smykovému napětí rozhraní může přispět více než jen jeden uzel, proto v některých případech může napětí překročit limit κ [29]. Tato hodnota je v příkazu *CONTACT zadána jako parametr $VC = \kappa$ (koeficient pro viskózní tření). Doporučená hodnota κ je mez kluzu ve smyku $\kappa = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$, kde σ_0 je mez kluzu materiálu, který je v kontaktu [30].

3.4 Počítačové modelování rychlých dějů v automobilovém prostředí

Numerické simulace pomáhají rozpoznat a vyhodnotit vlastnosti modelovaných objektů v brzké fázi vývoje, aniž by bylo nutné stavět reálné konstrukce či prototypy. Vývojový proces nových průmyslových zařízení je s podporou numerických výpočtů často rychlejší a efektivnější. S pomocí počítačového modelování se redukuje počet potřebných prototypů, zvyšují se znalosti o vlastnostech zařízení a návrhy na změny v designu je možné vyhodnocovat značně rychleji než v případě fyzického testování.

Díky pokročilým numerickým metodám, znalostem aplikované mechaniky a výpočetním technologiím je v dnešní době možné simulovat komplexní děje z automobilového prostředí. Tyto simulace slouží k analyzování a optimalizování funkčnosti a bezpečnosti zařízení. V oblasti automotive jsou výpočetně i časově nejnáročnější simulace nárazu. Velké úsilí je věnováno zlepšení odolnosti automobilů vůči nárazu za účelem zvýšení ochrany účastníků silničního provozu. Automobilová technika zahrnuje optimalizaci absorpce kinetické energie pomocí vysoce sofistikovaných kombinací materiálů a konstrukčních řešení. Během vývoje se pracuje s protichůdnými požadavky dosáhnout co možná nejvyšší bezpečnosti při co

nejnižších nákladech (množství a kvalita materiálů, použité technologie...) navíc v rámci vymezeného času daném plánem projektu [21].

V této podkapitole je uveden přehled simulací využívaných při vývoji nových autoseďadek. Pro sestavování modelu z automobilového prostředí je třeba získat inženýrské a výpočetní vstupy. Mezi inženýrské vstupy se řadí geometrie modelu dodaná ve většině případů z CAD systému. Dále pak materiálové vlastnosti jednotlivých komponent, definice spojů (svary, šrouby, slepení...) a zátěžové parametry konkrétního simulovaného děje (rychlost, zrychlení, síla, čas...). Při modelování automobilových sedaček je pak nutné znát i testovanou pozici sedačky a mít k dispozici model rámu či karoserie vozu, do které je sedačka uchycena. Příklady zadní řady sedaček uchycených k testovacímu rámu jsou na obrázcích 8a, 8b, 8d, 8f, 8g a 8h. Sedačka uchycená přímo do karoserie vyvíjeného automobilu je zobrazena na obr. 8e.

Mezi výpočetní vstupy patří znalost fyzikálních jednotek, ve kterých požaduje zákazník výpočet provést. Dalšími vstupy jsou pak koeficienty tření v kontaktech a řídicí nastavení, jako je délka simulace, typy výstupů a výstupní frekvence. Při simulacích s figurínou je třeba dodatečných informací o požadované verzi, pozici figuríny (souřadnice H bodu (pomyslný bod odpovídající poloze uprostřed, mezi kyčlemi cestujícího) a pat, úhel trupu, pozice rukou...) a bezpečnostních pásech (předpětí, polohy navijče, přezky, kluzného kroužku).

Požadavky a vyhodnocovací kritéria se liší podle konkrétního typu simulace. Obecné požadavky na bezpečné zvládnutí zátěžové zkoušky jsou: žádné selhání v rámu nebo ukotvení sedačky, v seřizovacích a posuvných systémech, žádné uvolnění zamykacích mechanismů systémů, zadržovací systémy se nesmí poškodit, žádné ostré hrany, nepřipojené části a přemístění mechanismu, žádná zlomení ani trhliny. U simulací s figurínou navíc musí figurína zůstat po celou dobu na sedačce a nesmí dojít k tzv. *Submarining* efektu, kdy se kyčelní kloub dostane pod břišní část bezpečnostního pásu (figurína sklouzne dopředu pod pás). Pro testování sedadel určených dospělým pasažérům se používají tři typy figurín, které se liší ve velikosti a hmotnosti. Figuríny mají takovou hmotnost, aby odpovídaly 5 % nejlehčí části populace (5 %), průměrné váze (50 %) a 5 % nejtěžší části populace (95 %).

Mezi základní výpočty prováděné během vývoje a testování automobilového sedadla patří osm typů zátěžových zkoušek. Paralelně s virtuálními modely je prováděno i experimentální testování na prototypových sedadlech. Výsledky jsou následně porovnávány a slouží k validaci modelu, který je pak možné spolehlivě použít pro širší množství vývojových variant, než pro které se provádí fyzické testy. Podoba testů a požadované výsledky jsou specifikovány v řadě norem a nařízeních státních i mezinárodních orgánů. Pro Severní Ameriku, Evropu a Asii jsou platné normy Evropské hospodářské komise OSN (*United Nations Economic Commission for Europe* = UNECE). Tématem sedadel se pak zabývají čísla 14 a 17. Norma 14 zahrnuje Jednotná ustanovení pro schvalování vozidel z hlediska ukotvení bezpečnostních pásů, systémů ISOFIX a jejich horních popruhů (ECE14) [22]. Norma 17 řeší Jednotná ustanovení pro schvalování vozidel s ohledem na sedadla, jejich ukotvení a jakékoli opěrky hlavy (ECE17) [23].

Pravidla pro uchycování dětské sedačky jsou definována v australské normě Ukotvení dětských zadržných systémů (*Australian design rule 34/02* = ADR34) [25]. Automobily vyráběné pro severoamerický trh musí také splňovat Federální bezpečnostní normy pro

motorová vozidla (FMVSS). Ty jsou rozděleny do třech kategorií: zabránění srážce, odolnost proti nárazu a schopnost přežít po nárazu. Tématu automobilových sedaček se věnují normy č. 207: Systém sedadel, č. 208: Ochrana pasažéra při nárazu, č. 209 a 210: Systém bezpečnostního pásu a jeho ukotvení, č. 213 a 225: Systém dětského zádržného systému a jeho ukotvení [24]. Dále jsou popsány konkrétní počítačové simulace pro testování sedaček během vývojové fáze ve společnosti Lear Corporation. Použití simulací během vývoje je na základě dohody se zákazníkem s ohledem na platné normy nebo normy, které budou platné v době uvedení nového automobilu na trh.

Model testující **Úchyty dětských zádržných systémů** je na obr. 8a. Tato zkouška prověřuje především pevnost zadních sedadel a na nich umístěných úchytů pro dětské sedačky. Mezi vstupy patří poloha a provedení uchycení horního řemene a připevnění klipu k hornímu ukotvení. V případě fyzického testu se jedná o statickou zkoušku, kdy jsou úchyty taženy dopředu předepsanou silou. Odpovídající numerická simulace je prováděna dynamicky z důvodu využití explicitního řešiče. Porovnání výsledků je prováděno na základě průběhu posuvu a síly na čase. Požadovaný výsledek zátěže je, aby nedošlo k oddělení ukotvení od přilehlé struktury sedačky nebo karoserie a aby nenastalo žádné obecné strukturální selhání [25].

Zkouška ukotvení bezpečnostního pásu je zobrazena na obr. 8b. Soustava obsahuje testovací zařízení s minimálně třemi válci, které simulují figurínu či skutečného pasažéra. Pás je natažen kolem bloků představujících oblast ramene a klínu. Vstupy do modelu jsou váha a těžiště opěradla sedadla, délka a pozice pásu (navíječ, přezky, kluzný kroužek) a souřadnice zatížení jednotlivých komponentů zařízení. V prvním kroku je působeno silou na ramenní i klínový blok o velikosti $13,5 \pm 0,2$ kN. Amplituda síly v druhém kroku zatížení již závisí na požadavcích zákazníka. Úhel působení síly je 10° nad horizontální osou. Při vyhodnocování testu se zkoumá vychýlení opěradla sedadla. Dopředné posunutí horního ukotvení pásu nesmí přesáhnou příčnou rovinu procházející přes H bod sedadla. Horní ukotvení pásu má být umístěno nad horizontální rovinou, která prochází bodem 450 mm kolmo nad H bodem [22].

Parametry zkoušky **Výbuch airbagu** jsou specifikovány jednotlivými zákazníky (automobilové koncerny). Ve srovnání s minulostí obsahují nové automobily velké množství airbagů. Ty jsou umístěny nejen v palubní desce, volantu a bočních sloupcích vozu, ale jsou i přímo integrované v bočních částech sedaček, což by mělo být v budoucnosti povinné pro všechny nově vyráběné automobilové sedačky. Průběh výbuchu airbagu umístěného v sedačce je zobrazen na obr. 8c. Při nastavení testu je důležité uvažovat teplotu, protože ta ovlivňuje čas nafukování airbagu (expanzi vzduchu). Z tohoto důvodu se fyzické testování provádí v klimatických komorách za extrémního rozsahu teplot -40 až $+80$ stupňů Celsia. Při fyzickém i počítačovém testování je vedle sedačky umístěna mřížka s čtverci o rozměru 10 cm, která slouží k podrobnějšímu přehledu a srovnání průběhu pohybu rozevírajícího se airbagu. Při vyhodnocování se zaznamenává první objevení se airbagového vaku a čas do úplného rozevření. Typická doba, která mezitím uběhne, je při pokojové teplotě do 20 ms.

Statická zkouška hlavové opěrky na obr. 8d testuje účinnost hlavových opěrek. Nastavitelná hlavová opěrka je umístěna do nejméně výhodné polohy (většinou nejvyšší pozice). Na zádovou část sedačky působí silou zařízení simulující záda pasažéra. Na hlavo-

vou opěrku tlačí sférická maketa hlavy o průměru 165 mm, která působí momentem síly 373 Nm okolo H bodu. Následně se zatížení maketou hlavy zvýší na 890 N. Úspěšný výsledek testu je, pokud nedojde k poškození opěrky hlavy a jejího ukotvení a pokud maximální posunutí makety hlavy ve směru osy x je do 102 mm.

Disipace energie nárazem do hlavové opěrky na obr. 8e se provádí dopadem makety hlavy umístěné na dlouhém kyvadle. Sférická maketa hlavy má průměr 165 mm a redukovanou hmotnost 6,8 kg soustředěnou ve středu. Nárazová rychlost je 24,1 km/h. Směr nárazu záleží na konkrétní testované pozici. V normě je definována oblast, která musí splnit tuto zkoušku. Běžně se na jedné sedačce testuje a modeluje několik desítek pozic. Pozice se liší ve směru působení síly (zepředu, zezadu, pod úhlem) i v místě nárazu (do středu hlavové opěrky, mimo střed hlavové opěrky, do horní části zádové pěny sedačky...). Schopnost disipace energie hlavové opěrky je měřena pomocí zrychlení makety hlavy. Maximální dovolená hodnota zrychlení po dobu delší než 3 ms je 80 g. Po proběhnutí testu nesmí vyčnívat tuhé nebo nebezpečné části polstrování hlavové opěrky nebo jejího připevnění k opěradlu sedadla. Při porovnání výpočetního modelu s fyzickým testem jsou v grafu srovnávány průběhy zrychlení středu makety hlavy v závislosti na čase. Dále je porovnán průběh simulace pomocí videí z modelu a z testu a řezu modelem přes video z testu.

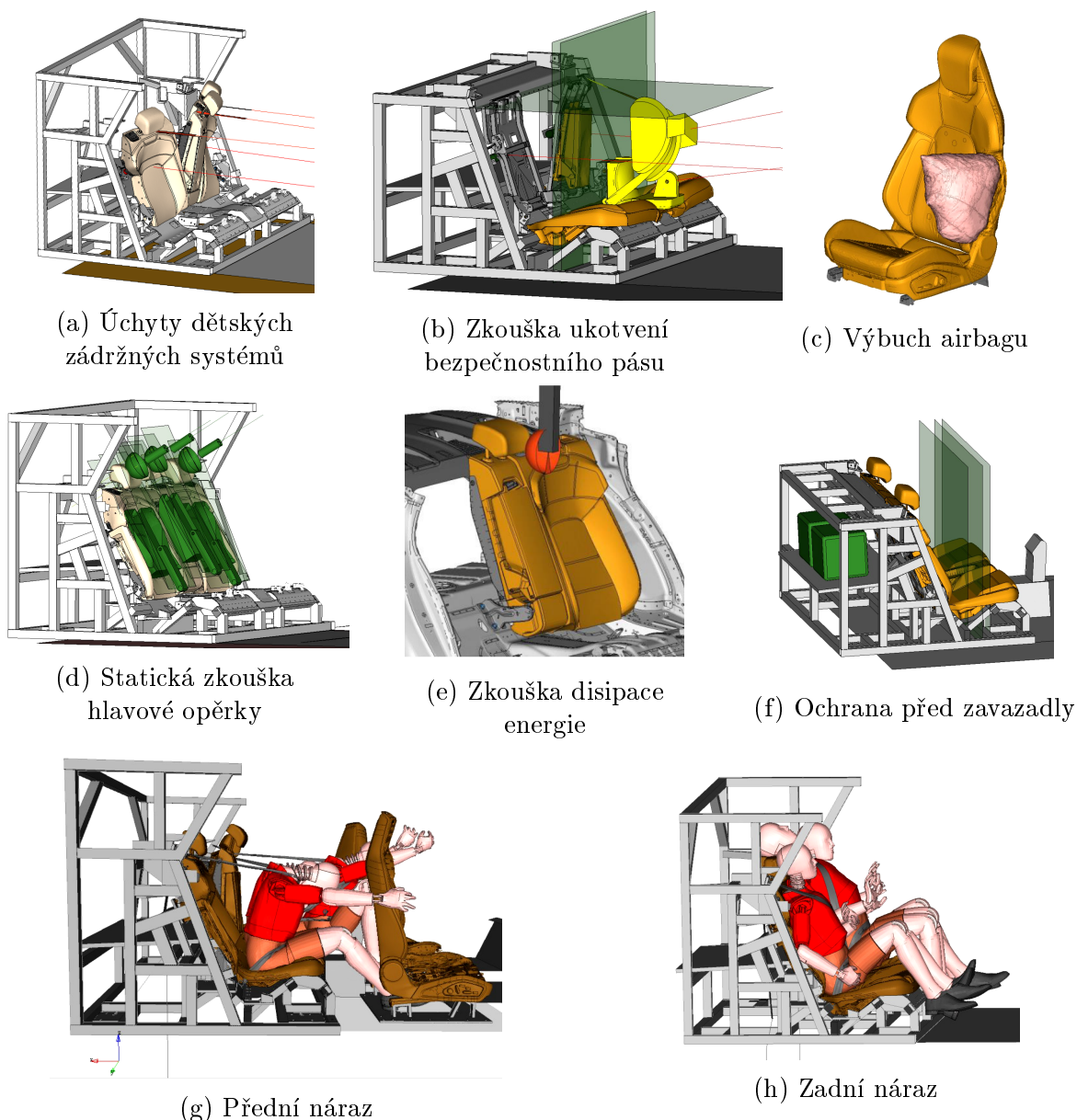
Ochrana před zavazadly na obr. 8f je testovací procedura pro zařízení určené k ochraně cestujících před přemístěním zavazadel. Vstupy pro simulaci jsou pozice a úhel podlahy zavazadlového prostoru, na kterém jsou postaveny dvě testovací kostky. Soustavě je uděleno zrychlení směrem vpřed. Důležitým parametrem, který ovlivňuje vývoj simulovaného jevu, je tření mezi podlahou a testovacími kostkami. Jedná se o tuhé bloky se středem setrvačnosti v geometrickém středu a zaoblenými hranami s průměrem 20 mm. Používány jsou dva typy kostek. Typ 1 má rozměry 300 x 300 x 300 mm a hmotnost 18 kg. Typ 2 má rozměry 500 x 350 x 125 mm a hmotnost 10 kg. Testováno je vychýlení sedaček. Záda sedačky nesmí protnout kolmou rovinu ve vzdálenosti 100 mm od H bodu a hlavová opěrka nesmí protnout rovinu ve vzdálenosti 150 mm od H bodu (viz obr. 8f). Další požadavky jsou, aby testovací bloky zůstaly za opěradly sedadel a mechanismy sedačky a opěradla na svých místech.

Přední náraz může být simulován s prázdným sedadlem nebo s obsazenými figurínami, jak je znázorněn na obr. 8g. Vstupy do simulace zahrnují nárazový pulz, který musí dosahovat hodnoty zrychlení alespoň 20 g po dobu 30 ms. Model obsahuje dohodnuté překážky pro pohyb figurín. U předních sedadel se jedná o palubní desku nebo volant. U zadních sedadel jde o přední sedačky. Při vyhodnocování výsledků se zaměřuje na síly v pásech a napětí a deformace na struktuře. Při porovnání výsledků simulace s experimentálním testem jsou vyhodnocovány průběhy posuvů vybraných bodů v modelu, zrychlení v oblasti hlavy, hrudi a pánve figuríny, video porovnání, překryv či řez z levého, pravého a horního pohledu.

Stejně výpočetní vstupy a hodnocené výstupy má i **Zadní náraz** zobrazený na obr. 8h. Rozdílný je pouze směr působícího zrychlení, které je v tomto případě proti směru jízdy. Zvláště podstatné u této simulace je správné nastavení a modelování hlavové opěrky. Pravidla pro sestavení testovací soustavy a požadované výsledky testů – Statická zkouška hlavové opěrky, Zkouška disipace energie, Ochrana před zavazadly, Přední náraz a Zadní

náraz – jsou součástí normy ECE17 [23].

Boční náraz nepatří mezi testy nařízené normami nebo předpisy. Jedná se ale o test, který může být vyžadován ze strany zákazníka (automobilové společnosti). Důvodem může být specifická konstrukce nebo materiálové složení sedačky. V tomto případě je sedačka ze strany udeřena zařízením o předepsaném průběhu zrychlení. Při vyhodnocování se sleduje deformace částí sedačky. Při porovnání s fyzickým testem jsou srovnány průběhy posuvů vybraných částí sedačky.



Obr. 8: Přehled typů modelovaných testů při vývoji automobilových sedaček. Uvedené modely pocházejí z archivních dat výpočetního oddělení společnosti Lear Corporation.

3.5 Citlivost numerických simulací

Citlivostní analýza kvantifikuje změny zkoumaných veličin v závislosti na změně vstupních parametrů. V případě numerických simulací mohou být zkoumané veličiny poloha, rychlost a zrychlení uzlů, síly, napětí a další. Vstupní parametry jsou pak např. velikost sítě, typ elementu (objemové nebo plošné), použitá varianta numerické integrace apod. Pro praktické využití numerických simulací v průmyslovém prostředí je důležité, aby byly jejich výsledky spolehlivé a reprodukovatelné. V případě modelování simulací nárazu, jaké jsou popsány např. v podkapitole 3.4, se ale jedná o nelineární a velmi komplexní simulace. Malé změny ve vstupech (okrajové a počáteční podmínky, souřadnice uzlů, rychlost nárazu, materiálové vlastnosti ...) mohou vést k velkým rozdílům ve výsledcích výpočtu. Toto je způsobeno jak fyzikální nestabilitou, tak i numerickou. Fyzikální nestabilita je způsobena např. bifurkačním chováním materiálů při asymetrickém zatížení [20].

Výsledek simulace pracující s explicitní integrací může být ve srovnání s experimentálním měřením značně rozdílný při téměř identických počátečních hodnotách. Cílem simulací je popsat celkové chování a vlastnosti modelu, spíše než získat výsledek jednotlivého výpočtu. Rozdíly v průbězích zkoumaných veličin při opakování fyzického experimentu nebo od více variant modelu jsou označeny jako rozptyl. Při vyhodnocování výsledků simulací je důležité rozlišit vliv fyzikálního a numerického rozptylu. Snahou výpočetního inženýra je vyhnout se nefyzikálnímu rozptylu ve výsledcích simulace. Numerická citlivost v simulacích nárazu je ovlivněna formulací elementů, velikostí elementů, časovým krokem (viz oddíl 3.1.1), kontaktním algoritmem (viz oddíl 3.2.1), tlumením (viz oddíl 3.2.2), třením (viz oddíl 3.3) a dalším.

Obzvláště důležitý vliv na rozptyl výsledků má časová diskretizace a formulace kontaktů (kontaktní tuhost). Časový krok použitý ve výpočtu musí být dostatečně krátký, aby splnil podmínku stability (viz rovnice (37)). Zároveň je ale kladen požadavek na co nejkratší výpočetní čas, tedy použití časového kroku co nejdelšího. Použitá hodnota by tedy měla ležet těsně pod kritickou hodnotou. Volba časového kroku v rozsahu stabilních hodnot značně snižuje rozptyl výsledků. Dalšími faktory, které ovlivňují stabilitu výpočtu a rozptyl jeho výsledků, jsou formulace elementů a tlumení, které působí pouze na rotační stupně volnosti.

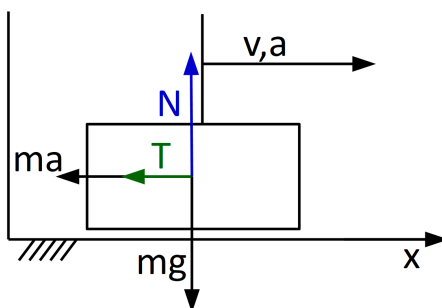
Na citlivost simulace mohou mít vliv nejen fyzikální vlastnosti a nastavení modelu, ale i výpočetní hardware. Existuje řada postupů i programů, jak tento vliv ve výpočtech vyhodnocovat a řešit. Příkladem je nástroj DIFF-CRASH, který je schopný provést analýzu stability simulací nárazu. Pomocí shlukového (klastrového) algoritmu jsou porovnávány výsledky více simulací a tříděny uzly do kategorií podle velikosti rozptylu v jejich polohách v průběhu simulace. Na základě těchto informací se identifikuje skupina nejkritičtějších uzlů a případně modifikuje model. Klastrový algoritmus pomáhá najít skupiny uzlů a časové kroky (p, t) , které vzájemně souvisejí. Díky tomu je urychlen proces vyhodnocování modelu, protože není nutné porovnat mezi sebou kombinace pozic všech uzlů ve všech časových krocích [26].

4 Simulace v Matlabu

Za účelem vyšetřování vlivů modelů třecích sil byly v prostředí Matlab zpracovány základní testovací příklady. V této kapitole jsou uvedeny pohybové rovnice tělesa, které se pohybuje po desce při uvažování působící třecí síly. Vyšetřen je nejprve případ pohybu tělesa s nenulovou počáteční rychlostí. Následně je zpracován pohyb tělesa při působení budící síly, a to konstantní a lineárně rostoucí. Ve třetí podkapitole je popsán případ kinematického buzení tělesa. Jako poslední je uvedeno porovnání výpočtů ODE funkcí v Matlabu.

4.1 Pohyb tělesa s nenulovou počáteční rychlostí

Uvažujeme těleso o hmotnosti m , které se pohybuje po podložce rychlostí v a se zrychlením a . Na počátku má těleso polohu $x(0) = 0$ a nenulovou počáteční rychlost $v(0) = v_0$. Na obr. 9 jsou znázorněny síly, které působí na těleso.



Obr. 9: Schéma modelu tělesa pohybujícího se po desce při působení třecí síly T

Na těleso působí svisle dolů tíhová síla $F = mg$. V opačném směru působí normálová reakce N . Proti směru pohybu působí setrvačná síla $F_s = ma$ a třecí síla F_t . Ze silové podmínky rovnováhy mohou být sestaveny dvě rovnice

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad mg - N = 0, \quad (56)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad ma + T = 0. \quad (57)$$

Z rovnice (56) plyne, že normálová složka reakce je rovna tíhové síle. Pro tečnou složku reakce platí $T = \mu N$, tedy $T = \mu mg$, kde μ je koeficient (součinitel) tření, jehož hodnota závisí na zvoleném modelu. Dosazením do rovnice (57) a její úpravou je získána pohybová rovnice

$$m\ddot{x} + \mu mg = 0, \quad (58)$$

$$\ddot{x} = -\mu g. \quad (59)$$

4.1.1 Statický Coulombův model se Stribeckovým efektem

Při volbě Coulombova třecího modelu se Stribeckovým efektem, který je popsán vztahem (2), je získána výsledná diferenciální rovnice 2. řádu

$$\ddot{x} = -(\mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c|\dot{x}|})\text{sgn}(\dot{x})g, \quad (60)$$

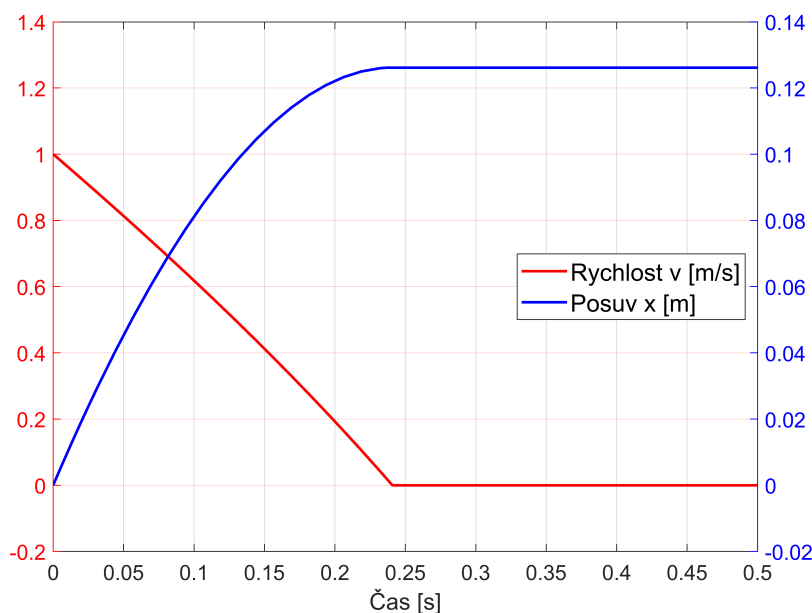
ze které je možné při uvažování počátečních podmínek zjistit dráhu a rychlost tělesa. Pro řešení pohybové rovnice v prostředí Matlab s využitím funkcí z rodiny *ode* je rovnice (60) převedena na soustavu dvou rovnic

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (61)$$

$$\dot{x}_2 = -(\mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c|x_2|})\text{sgn}(x_2)g, \quad (62)$$

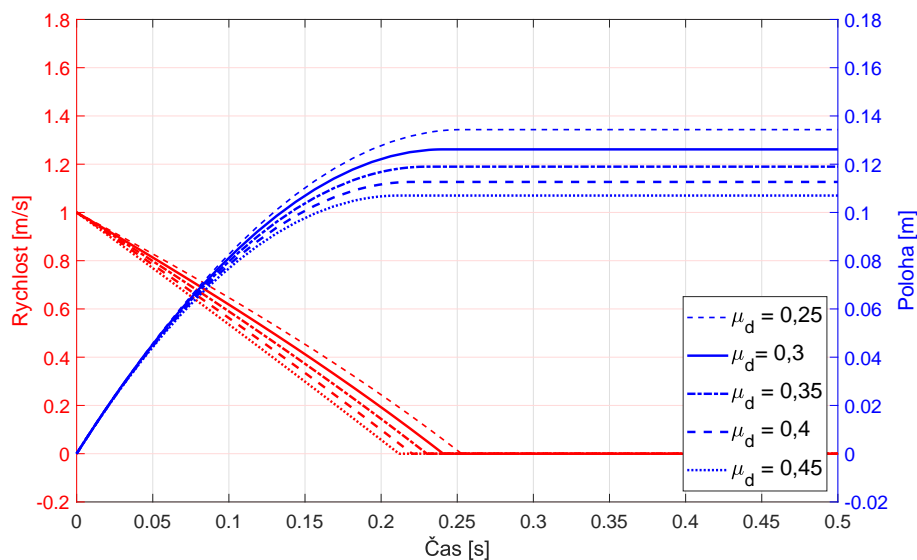
pro které platí: $x_1 = x$ a $x_2 = \dot{x}$.

Řešení popsané soustavy je graficky znázorněno na obr. 10 pro zvolené hodnoty nenulové počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficienty tření $\mu_s = 0,5$ a $\mu_d = 0,3$. Z průběhu rychlosti je vidět, že její hodnota klesá nejprve lineárně, ale pro oblast nízké rychlosti je její pokles již strmější. Důvodem je nárůst třecí síly v oblasti rychlosti blízké nule, kdy z hodnoty dynamické třecí síly F_d roste hodnota k statické třecí síle F_s , jak je znázorněno na obr. 1 pro Bensonův model. Výsledky této simulace nejsou závislé na hmotnosti tělesa, protože hmotnost byla při úpravě rovnice (58) zkrácena a žádná proměnná ve výsledném předpisu pro zrychlení tělesa (60) nezávisí na hmotnosti.



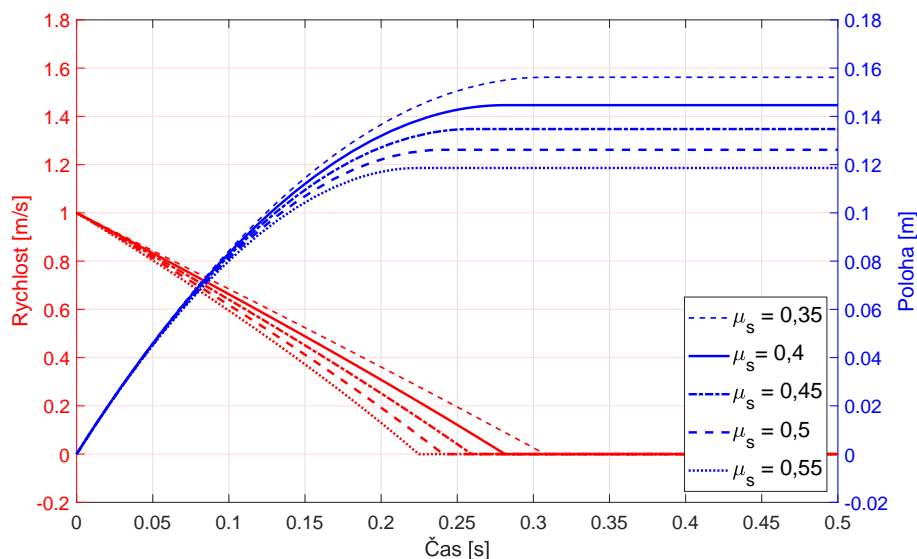
Obr. 10: Průběh posuvu a rychlosti při pohybu tělesa se třením při nenulové počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

Dále je ukázáno, jaký vliv mají na průběh posuvu a rychlosti tělesa jednotlivé parametry v modelu třecí síly. Na obr. 11 je vidět vliv dynamického koeficientu tření μ_d .



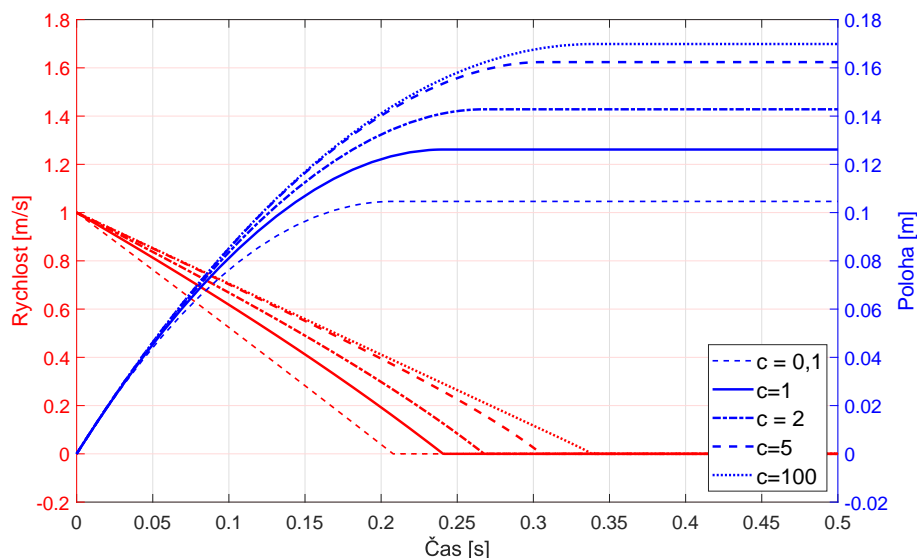
Obr. 11: Vliv dynamického koeficientu tření μ_d na průběh posuvu a rychlosti tělesa při pohybu s počáteční rychlostí $v_0 = 1$ m/s a se třením s koeficienty tření $\mu_s = 0,5$ a $c = 1$

Z výsledků na obr. 11 je patrné, že čím vyšší je hodnota dynamického koeficientu tření μ_d , tím působí vyšší třecí síla, a tedy dojde rychleji k zastavení tělesa, které proto urazí kratší vzdálenost. Na obr. 12 je zobrazen vliv statického koeficientu tření μ_s .



Obr. 12: Vliv statického koeficientu tření μ_s na průběh posuvu a rychlosti tělesa při pohybu s počáteční rychlostí $v_0 = 1$ m/s a se třením s koeficienty tření $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

Podle výsledků na obr. 12 je patrné, že čím vyšší je hodnota statického koeficientu tření μ_s , tím působí vyšší třecí síla, a tedy dojde rychleji k zastavení tělesa, které proto urazí kratší vzdálenost. Ve srovnání s vlivem dynamického koeficientu μ_d na obr. 11 je vliv statického koeficientu μ_s větší. Při stejně širokém zkoumaném rozsahu hodnot je rozdíl v krajních hodnotách času zastavení téměř dvojnásobný. Větší rozdíl je i v průběhu polohy tělesa. Na obr. 13 je vidět vliv exponenciální konstanty c .



Obr. 13: Vliv statické exponenciální konstanty c na průběh posuvu a rychlosti tělesa při pohybu s počáteční rychlostí $v_0 = 1$ m/s a se třením s koeficienty tření $\mu_s = 0,5$ a $\mu_d = 0,3$

Výsledky na obr. 13 ukazují, že při vyšší hodnotě statického koeficientu c působí na těleso nižší třecí síla, a tedy dojde k pozdějšímu zastavení tělesa, které díky tomu urazí delší vzdálenost.

4.1.2 Dynamický LuGre model

Pro soustavu zobrazenou na obr. 9 a popsanou v podkapitole 4.1 je odvozen matematický model s dynamickým modelem tření. Opět se vyjde ze silové podmínky rovnováhy

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad m\ddot{x} + F_t = 0 \quad (63)$$

$$\ddot{x} = -\frac{F_t}{m} \quad (64)$$

Za třecí sílu je dosazeno podle LuGre modelu tření předepsaného v rovnici (8)

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}(\sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v). \quad (65)$$

Rychlost v je možno zapsat jako derivaci dráhy \dot{x}

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}(\sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x}). \quad (66)$$

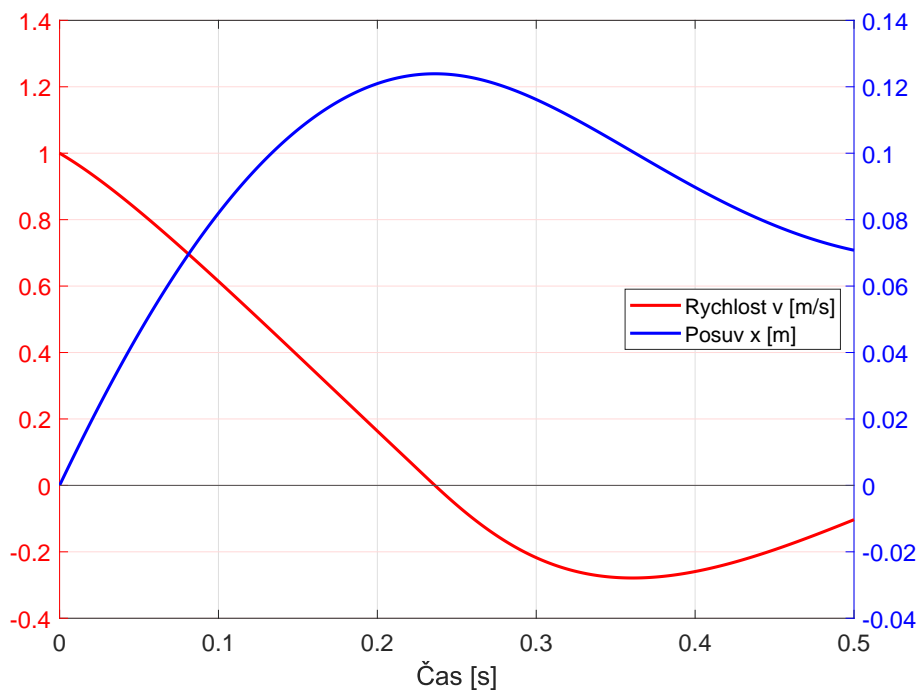
Rovnice je opět přepsána do soustavy rovnic

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (67)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{m}(\sigma_0 x_3 + \sigma_1 \dot{x}_3 + \sigma_2 x_2), \quad (68)$$

$$\dot{x}_3 = x_2 \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{F_d + (F_s - F_d)e^{-(v/v_s)^\gamma} \operatorname{sgn}(x_2)} \right). \quad (69)$$

kde platí $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ jako u statického modelu. Soustava je rozšířena o stavovou proměnnou $x_3 = \dot{z}$, která je definovaná v rovnici (9). Za parametr $g(v)$ je dosazeno podle rovnice (10). Výsledek simulace je zobrazen na obr. 14. Je patrné, že fyzikálně správný výsledek dává model pouze pro kladné hodnoty rychlosti.

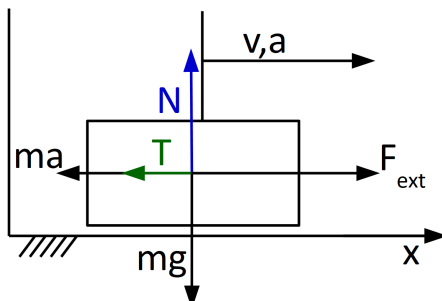


Obr. 14: Průběh posuvu a rychlosti při pohybu tělesa s nenulovou počáteční rychlostí $v_0 = 1$ m/s a s dynamickým modelem tření s parametry $\sigma_0 = 100$, $\sigma_1 = 2,5$, $\sigma_2 = 0,3$, $\gamma = 2$, $v_{\text{stribeck}} = 3$

4.2 Pohyb tělesa při působení budící síly

V případě druhého modelu uvažujeme opět těleso o hmotnosti m , které se pohybuje po podložce rychlostí v a se zrychlením a . Na počátku má těleso polohu $x(0) = 0$ a počáteční

rychlost tentokrát nulovou $v(0) = 0$. Jeho pohyb je vybuzen vnější silou F_{ext} . Na obr. 15 jsou znázorněny síly, které působí na těleso.



Obr. 15: Schéma modelu tělesa pohybujícího se po desce při působení třecí síly T a vnější budící síly F_{ext}

Oproti prvnímu modelu se změní pouze pohybová rovnice ve směru x , a to na tvar

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad ma + T - F_{ext} = 0. \quad (70)$$

Kromě setrvačné síly $F_s = ma$ a třecí síly $F_t = T$ působí ve směru pohybu (tedy opačně k předchozím dvěma silám) budící síla F_{ext} . Vztah (56) ze silové podmínky rovnováhy ve směru y platí u tohoto modelu stejně jako v předchozí podkapitole.

Opět platí: $T = \mu N$, tedy $T = \mu mg$, kde μ je koeficient (součinitel) tření, jehož hodnota závisí na zvoleném modelu. Dosazením do rovnice (70) a její úpravou je získána pohybová rovnice

$$m\ddot{x} + \mu mg - F_{ext} = 0, \quad (71)$$

$$\ddot{x} = \frac{F_{ext}}{m} - \mu g. \quad (72)$$

4.2.1 Statický Coulombův model se Stribeckovým efektem

Při volbě třecího modelu se Stribeckovým efektem, který je popsán vztahem (2), je získána výsledná diferenciální rovnice 2. řádu

$$\ddot{x} = \frac{F_{ext}}{m} - (\mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c|\dot{x}|})\text{sgn}(\dot{x})g, \quad (73)$$

jejímž řešením je možné při uvažování počátečních podmínek zjistit dráhu a rychlost tělesa. Pro řešení této pohybové rovnice v prostředí Matlab s využitím funkce ODE je rovnice (73) převedena na soustavu dvou rovnic

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (74)$$

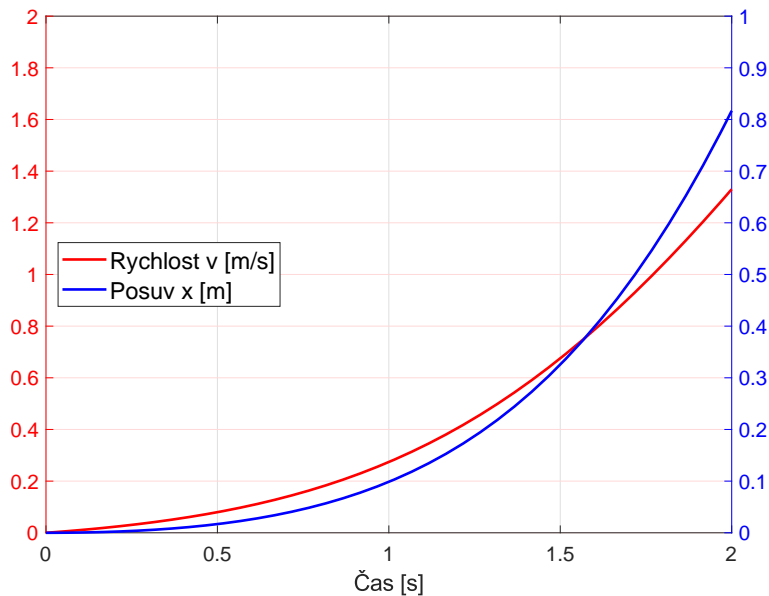
$$\dot{x}_2 = \frac{F_{ext}}{m} - (\mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c|x_2|})\text{sgn}(x_2)g, \quad (75)$$

pro které platí: $x_1 = x$ a $x_2 = \dot{x}$.

Pro případ, kdy má budící síla konstantní velikost, závisí řešení této soustavy (74)–(75) na velikosti vnější budící síly F_{ext} ve srovnání se statickou třecí silou F_s . Pokud bude tato velikost menší než statická třecí síla F_s , nedojde k roztlačení tělesa a poloha i rychlost zůstanou nulové. Pro případ, kdy je uvažováno těleso o hmotnosti $m = 1$ kg a statický součinitel tření $\mu_s = 0,5$, je tedy velikost hraniční síly pro roztlačení tělesa F_{ext}^{hr} rovna

$$F_s = F_{ext}^{hr} = m \cdot g \cdot \mu_s = 1 \cdot 9,81 \cdot 0,5 = 4,905 \text{ N}. \quad (76)$$

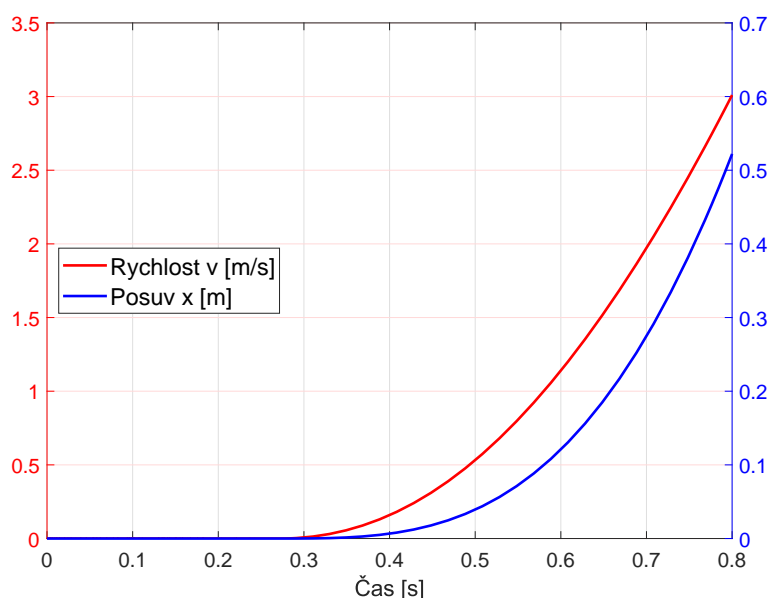
Na obr. 16 je znázorněn průběh posuvu a rychlosti při konstantní vnější budící síle $F_{ext} = 5 \text{ N}$. Tato hodnota splňuje výše popsanou podmínku pro roztlačení tělesa již od začátku simulace, proto je možné pozorovat nárůst síly i rychlosti. Tento model je již závislý na hmotnosti tělesa. Jak je vidět ve výsledné diferenciální rovnici (73), hmotnost m ze vztahu nevymizí. Pro větší hmotnost tělesa musí působit větší budící síla, aby došlo k jeho roztlačení. Mezi hmotností a vnější budící silou nutnou k uvedení tělesa do pohybu platí přímá úměra.



Obr. 16: Průběh posuvu a rychlosti při pohybu tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg se třením s koeficienty tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ a při působení konstantní vnější budící síly $F_{ext} = 5 \text{ N}$

Na obr. 17 je zobrazen výsledek stejného modelu, ale při nekonstantní budící síle $F_{ext}(t)$. V tomto případě je uvažována lineárně rostoucí síla o hodnotě $F_{ext}(t) = 18 \cdot t \text{ [N]}$. Směrnice růstu vnější síly v závislosti na čase je volena 18 s ohledem na porovnání s výsledky v oddíle 5.3.2.

V případě, že má těleso na počátku nulovou rychlost $v(0) = 0$, je pohyb tělesa iniciován vnější budící silou. K pohybu tělesa dojde ve chvíli, kdy velikost vnější budící síly dosáhne větší hodnoty než statická třecí síla. Ta má pro tento model hodnotu 4,905 N, jak bylo ukázáno v rovnici (76). Vzhledem k předpisu lineárně rostoucí třecí síly tedy k pohybu dojde v čase $t = \frac{4,905}{18} \doteq 0,27$ s. Výsledek na obr. 17 tomu odpovídá s dobrou shodou.



Obr. 17: Průběh posuvu a rychlosti při pohybu tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg se třením s koeficienty tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ a při působení lineárně rostoucí vnější budící síly $F_{ext}(t) = 18 \cdot t$ [N]

4.2.2 Dynamický LuGre model

Pro soustavu zobrazenou na obr. 15 a popsanou v podkapitole 4.2 je odvozen matematický model s dynamickým modelem tření. Opět se vyjde ze silové podmínky rovnováhy

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad m\ddot{x} + F_t = F_{ext} \quad (77)$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(F_{ext} - F_t) \quad (78)$$

Za třecí sílu je dosazeno podle LuGre modelu tření předepsaného v rovnici (8)

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(F_{ext} - \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 v). \quad (79)$$

Rychlost v je možno zapsat jako derivaci dráhy \dot{x}

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(F_{ext} - \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x}). \quad (80)$$

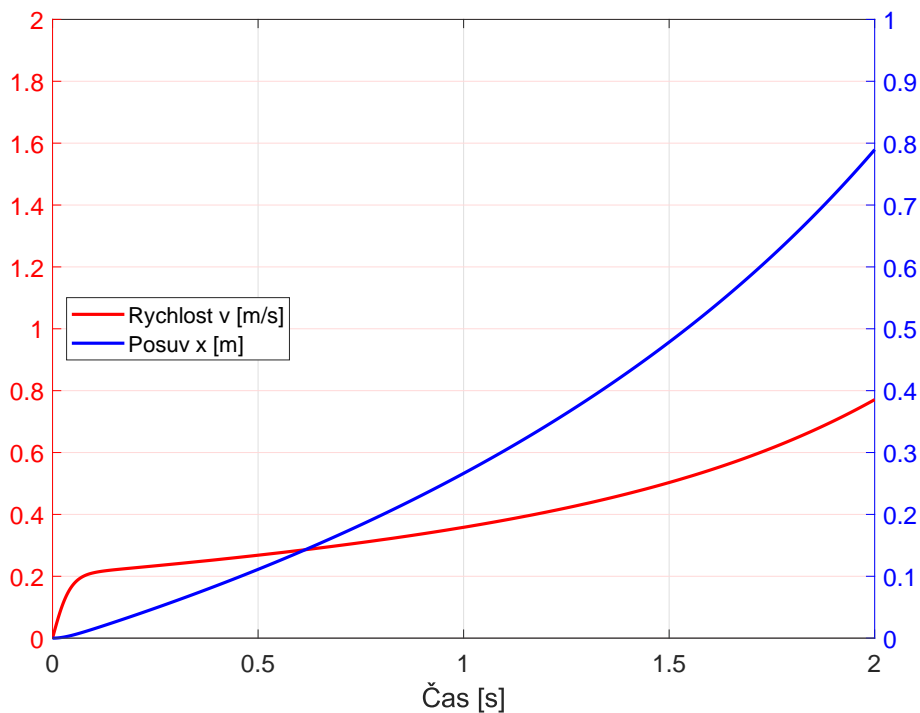
Rovnice je opět přepsána na soustavu rovnic

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (81)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m}(F_{\text{ext}} - \sigma_0 x_3 + \sigma_1 \dot{x}_3 + \sigma_2 x_2), \quad (82)$$

$$\dot{x}_3 = x_2 \left(1 - \frac{\sigma_0 z}{F_d + (F_s - F_d)e^{-(v/v_s)^\gamma} \text{sgn}(x_2)}\right). \quad (83)$$

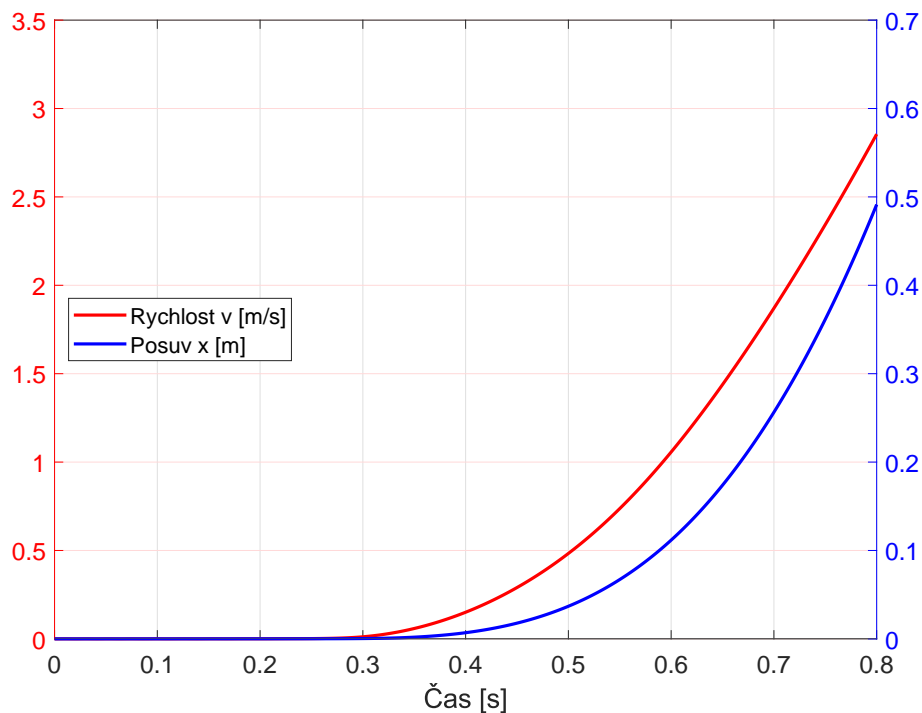
kde platí $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ jako u statického modelu. Soustava je rozšířena o stavovou proměnnou $x_3 = \dot{z}$, která je definovaná v rovnici (9). Za parametr $g(v)$ je dosazeno podle rovnice (10). Model popsáný v rovnicích (81)–(83) je možné použít jak pro konstantní, tak i proměnný průběh vnější budící síly F_{ext} . Do modelu je možné zahrnout i nenulovou počáteční rychlost přidáním počátečních podmínek. Výsledek simulace pohybu tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg, které je buzeno konstantní vnější silou $F_{\text{ext}} = 5$ N, je zobrazen na obr. 18.



Obr. 18: Průběh posuvu a rychlosti při pohybu tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg při působení konstantní vnější budící síly $F_{\text{ext}} = 5$ N a s dynamickým modelem tření s parametry $\sigma_0 = 1000$, $\sigma_1 = 2,5$, $\sigma_2 = 0,3$, $\gamma = 2$, $v_{\text{strobeck}} = 1$

Na obr. 19 je zobrazen výsledek stejného modelu, ale při nekonstantní budící síle $F_{\text{ext}}(t)$. V tomto případě je opět uvažována lineárně rostoucí síla o hodnotě $F_{\text{ext}}(t) = 18 \cdot t$ [N], se směrnicí $s = 18$ zvolenou s ohledem na oddíl 5.3.2. K roztažení tělesa má opět dojít vlivem působení vnější budící síly v okamžiku, kdy její velikost je rovna statické klidové síle. Ta

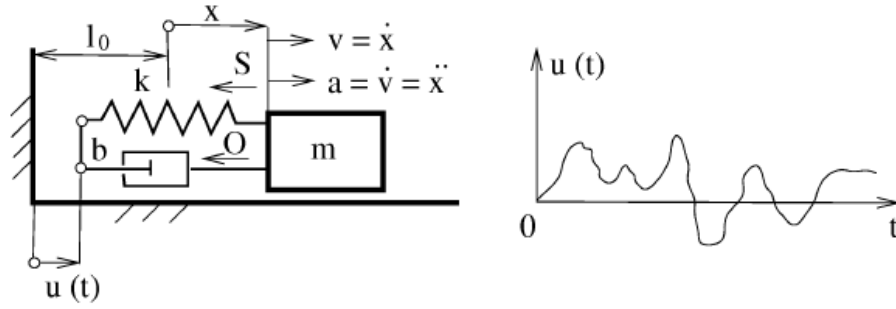
má pro uvedený model hodnotu $F_s = 4,905$ N, jak bylo ukázáno v rovnici (76). Vzhledem k předpisu lineárně rostoucí třecí síly má tedy k pohybu dojít v čase $t = \frac{4,905}{18} \doteq 0,27$ s. Výsledek na obr. 19 tomu odpovídá s dobrou shodou.



Obr. 19: Průběh posuvu a rychlosti při pohybu tělesa při působení lineárně rostoucí vnější budící síly $F_{ext}(t) = 18 \cdot t$ [N] a s dynamickým modelem tření s parametry $\sigma_0 = 100000$, $\sigma_1 = 2,5$, $\sigma_2 = 0,3$, $\gamma = 2$, $v_{stribeck} = 0,9$

4.3 Kinematické buzení

V následujícím podkapitole je opět uvažováno těleso o hmotnosti m , které se pohybuje po podložce rychlostí v a se zrychlením a . Na počátku má těleso polohu $x(0) = 0$ a počáteční rychlost tentokrát nulovou $v(0) = 0$. Jeho pohyb je vybuzen vnějším kinematickým buzením $u(t)$, které může mít v čase různý průběh. Těleso je buzeno přes pružný člen o tuhosti k a tlumení b , jak je znázorněno na obr. 20.



Obr. 20: Schéma modelu tělesa pohybujícího se po desce při působení třecí síly T a kinematického budiče $u(t)$ připojeného přes pružný člen o tuhosti k a tlumení b

Ze silové podmínky rovnováhy ve směru osy y je získána rovnice

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad F_s + S + O + F_t = 0, \quad (84)$$

kde se vyskytují setrvačná síla $F_s = ma$, třecí síla $F_t = \mu mg$ a síla od pružného prvku, která v případě lineárního matematického modelu je tvořena členem od tuhosti $S = k(x - u(t))$ a tlumení $O = b(\dot{x} - \dot{u}(t))$. Dosazením a úpravou je získán další tvar matematického modelu

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + \mu mg = ku(t) + b\dot{u}(t), \quad (85)$$

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x - \mu g + \frac{k}{m}u(t) + \frac{b}{m}\dot{u}(t). \quad (86)$$

Při volbě třecího modelu se Striebeckovým efektem, který je popsán vztahem (2), je získána výsledná diferenciální rovnici 2. řádu

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x - (\mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c|\dot{x}|})\text{sgn}(\dot{x})g + \frac{k}{m}u(t) + \frac{b}{m}\dot{u}(t), \quad (87)$$

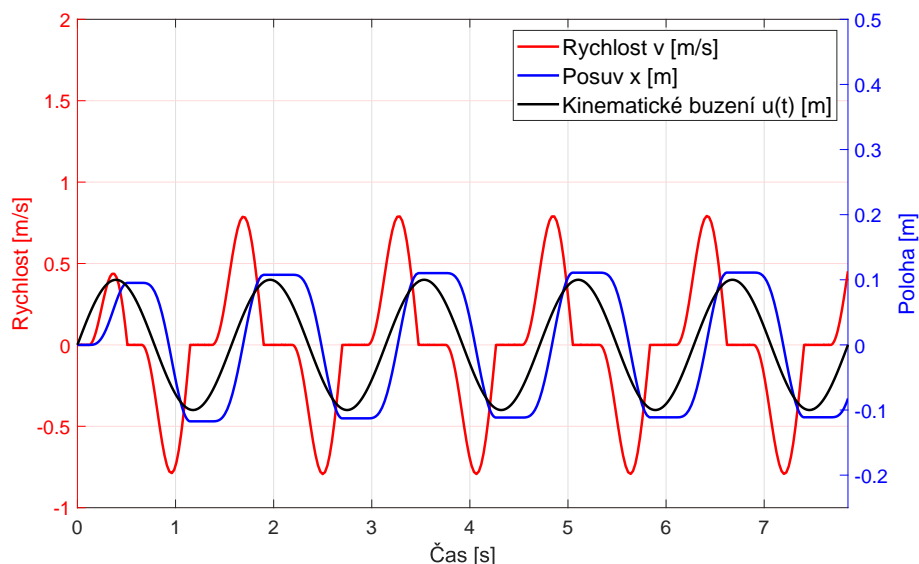
ze které je možné při uvažování počátečních podmínek zjistit dráhu a rychlost tělesa. Pro řešení této pohybové rovnice v prostředí Matlab s využitím funkce ODE je rovnice (86) převedena na soustavu dvou rovnic

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (88)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 - (\mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c|x_2|})\text{sgn}(x_2)g + \frac{k}{m}u(t) + \frac{b}{m}\dot{u}(t), \quad (89)$$

pro které platí: $x_1 = x$ a $x_2 = \dot{x}$. Matematický model uvedený v rovnicích (88) a (89) je možné aplikovat na libovolné buzení. V případě, že je těleso buzeno harmonickým pohybem, platí $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$. V předpisu harmonického pohybu značí A amplitudu (maximální výchylku) a ω úhlovou rychlost. Těleso, které je buzeno harmonickým pohybem, koná také harmonický pohyb s rozdílnou amplitudou A_1 a s fázovým posunem $\Delta\varphi$. Pohyb tělesa se dá tedy popsat vztahem $x(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \Delta\varphi)$. Na obr. 21 je znázorněn průběh polohy

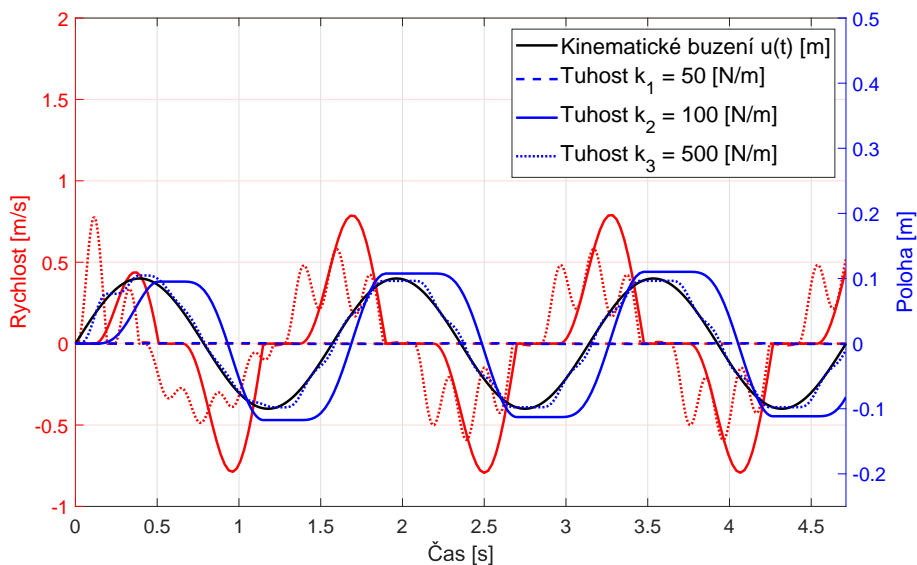
a rychlosti tělesa, které je buzeno pomocí kinematického pohybu s harmonickým průběhem s předpisem $u(t) = 0,1 \cdot \sin(4 \cdot t)$.



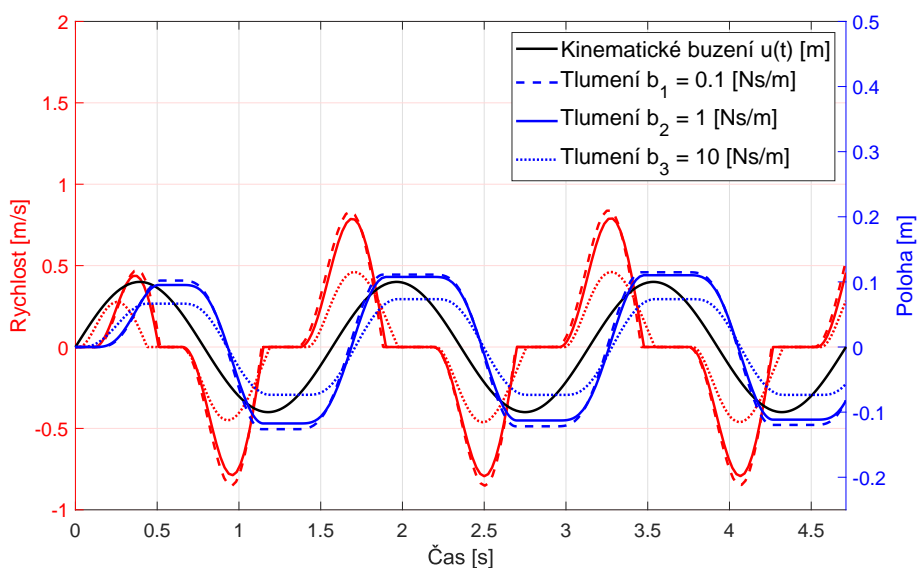
Obr. 21: Průběh posuvu a rychlosti při pohybu tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg se třením s koeficienty tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ a při působení kinematického buzení $u(t) = 0,1 \cdot \sin(4 \cdot t)$ spojeným s tělesem pružinou o tuhosti $k = 100$ N/m a tlumení $b = 1$ Ns/m

Na obr. 22 a 23 je znázorněno, jaký vliv mají na pohyb tělesa parametry pružiny, tj. tuhost k a tlumení b . Z výsledků je patrné, že tuhost má na pohyb tělesa velký vliv. Pokud má pružný člen v soustavě příliš vysokou tuhost, kinematické buzení se přenáší jako tuhé a těleso koná téměř identický pohyb jako budící zařízení. Vliv tření je pak velmi malý. Např. u modelu na obr. 22 se pro tuhost $k_3 = 500$ N/m (tečkovaně) těleso pohybuje skoro stejně jako buzení a pro vyšší tuhost by byl rozdíl ještě menší.

Naopak pokud je tuhost pružiny příliš nízká, může nastat situace, kdy se pohyb na těleso vůbec nepřenese. Na obr. 22 je vidět, že pro tuhost $k_1 = 50$ N/m (čárkovaně) se těleso vůbec nepohybuje (poloha i rychlost mají po celou dobu nulovou hodnotu). Při návrhu experimentální soustavy zobrazené na obr. 20 je tedy třeba volit vhodnou tuhost pružiny s ohledem na hmotnost tělesa, koeficienty tření a amplitudu a periodu buzení. Vliv tlumení na pohyb tělesa není pro nízké hodnoty koeficientu tlumení b tak významný. Důležité je, aby tlumení nebylo příliš vysoké, protože potom vlivem jeho působení disipuje energie a není pak možné snadno rozlišit vliv ztráty energie z důvodu tření a z důvodu tlumení. Na obr. 23 je vidět, že pro hodnotu $b_3 = 10$ Ns/m významně klesá amplituda polohy a rychlosti buzeného tělesa.



Obr. 22: Vliv tuhosti pružiny na pohyb tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg se třením s koeficienty tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ a při působení kinematického buzení $u(t) = 0,1 \cdot \sin(4 \cdot t)$ spojeným s tělesem pružinou o tuhosti $k_1 = 50$ N/m, $k_2 = 100$ N/m, $k_3 = 500$ N/m a tlumení $b = 1$ Ns/m



Obr. 23: Vliv tlumení pružiny na pohyb tělesa o hmotnosti $m = 1$ kg se třením s koeficienty tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ a při působení kinematického buzení $u(t) = 0,1 \cdot \sin(4 \cdot t)$ spojeným s tělesem pružinou o tuhosti $k_1 = 100$ N/m a tlumení $b_1 = 0,1$ Ns/m, $b_2 = 1$ Ns/m, $b_3 = 10$ Ns/m

4.4 Porovnání výpočtů ODE funkcí

V prostředí Matlab je možné využít řadu funkcí pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic (*Ordinary differential equation = ODE*). Řešení v čase (t_0, t_f) je získáváno iterativně. V každém kroku (iteraci) aplikuje řešič příslušný algoritmus na výsledky získané z předchozích kroků. V případě prvního kroku se vychází ze znalosti počátečních podmínek. Řešiče vracejí výsledek jako vektor časových kroků $t = [t_0, t_1, t_2, \dots, t_f]$ a příslušných řešení $y = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_f]$ v daných časových krocích.

Řešiče ODE dostupné v programu Matlab řeší pouze diferenciální rovnice prvního řádu. Rovnice vyšších řádů musí být přepsány na ekvivalentní systém užitím generické substituce $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$. Tento postup byl aplikován i v případě této práce, konkrétně při úpravách rovnic (60) a (73).

Při výběru vhodného algoritmického zařízení jsou zvažována dvě hlediska. Na jedné straně je potřeba dosažení správného a dostatečně přesného výsledku. Proti tomu stojí výpočtová složitost a časová náročnost. Vždy musí být zvaženo, zda potenciální přínosy složitějšího výpočetního postupu stojí za zvýšené časové a režijní náklady [31]. Pro úlohy uvedené v podkapitolách 4.1 a 4.2 bylo provedeno porovnání aplikovatelnosti a časové náročnosti sedmi ODE numerických řešičů: ODE23, ODE23t, ODE23tb, ODE15s, ODE45, ODE23s a ODE113. Řešené úlohy byly: vyšetření pohybu tělesa na podložce s nenulovou počáteční rychlostí, s konstantní budicí silou a s lineárně rostoucí silou při uvažování Coulombovy třecí síly se Stribeckovým efektem (parametry μ_s, μ_d, c).

Nejprve byla vždy provedena kontrola, zda daná funkce dává pro konkrétní úlohu správné řešení. Byl proveden jeden výpočet včetně vykreslení výsledků, které byly porovnány s grafickými výstupy na obr. 10, 16 a 17 pro příslušné úlohy. Následně bylo pro každou úlohu a řešič provedeno sedm výpočtů. Časová nákladnost byla spočtena jako průměr z pěti výsledků. První dvě hodnoty nebyly uvažovány. Porovnání délek výpočtů je zapsáno v tabulce 1.

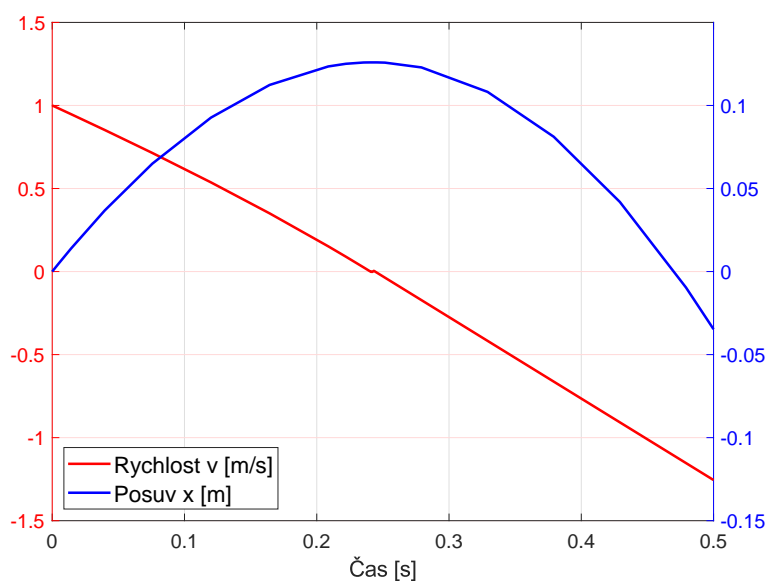
řešená úloha \ ODE řešič	23	23t	23tb	15s	45	23s	113
počáteční rychlost	55,6	~ 3,9	945,1	~ 0,06	20,0	1916,8	568,2
konstantní budicí síla	0,005	0,018	0,013	0,038	0,048	0,014	0,014
lineární rostoucí síla	200,4	>7000	X	>7000	133,7	>7000	275,2

Tab. 1: Porovnání časové nákladnosti ODE funkcí v prostředí Matlab při řešení různých úloh problémů se třením [s]

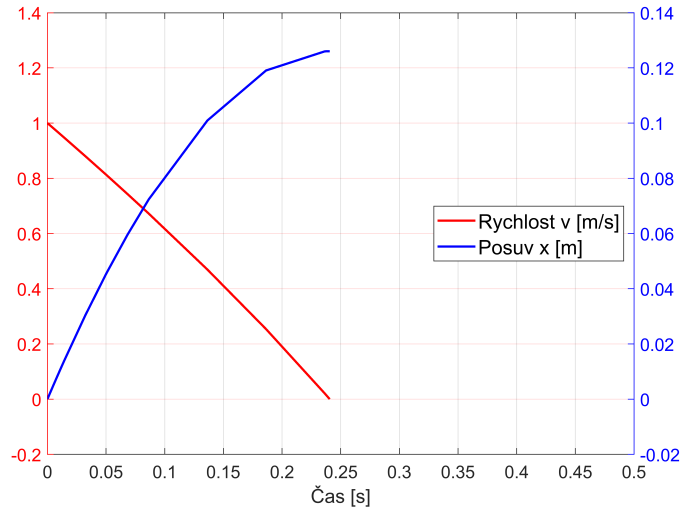
První řešenou úlohu, tedy vyšetřování pohybu tělesa s nenulovou počáteční rychlostí po desce, zvládlo v rozumném čase dopočítat všech sedm testovaných funkcí. V případě řešiče ODE23t a ODE15s ale nedošlo k vypočítání správného výsledku. Obě numerické metody dosahovaly správného řešení až do chvíle, kdy rychlost dosáhla nulové hodnoty. Pro zvolené parametry řešené úlohy jde o čas 3,2 s, jak je patrné z obr. 10. Funkce ODE23t úlohu dopočítala až do konce (čas simulace 5 s), ale od zmíněného časového okamžiku místo

nulové hodnoty rychlosti v a konstantní hodnoty posuvu x vypočítala zápornou hodnotu rychlosti, tedy klesající hodnotu posuvu, jak je vykresleno na obr. 24. Tento výsledek není fyzikálně správný. V reálu by to znamenalo, že místo zastavení tělesa vlivem tření by došlo k obrácení směru jeho pohybu.

Výpočet funkcí ODE15s je ukončen v okamžiku, kdy dosáhne rychlost nulové hodnoty. Dle Matlabem vypsané varovné hlášky nelze dosáhnout integrační tolerance, aniž by se velikost kroku zmenšila pod nejmenší povolenou hodnotu, která je na úrovni strojové přesnosti. Nedokončený výsledek je zobrazen na obr. 25. I přes krátký čas výpočtu (viz tabulka 1) jsou tedy obě metody pro tuto úlohu nepoužitelné. Z dalších zkoumaných funkcí pak časově nejlépe vychází ODE45 (s časem 20 s) a ODE23 (s časem 55,5 s).



Obr. 24: Výpočet funkcí ODE23t průběhu posuvu a rychlosti při pohybu tělesa se třením při nenulové počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ Problém výpočtu: simulace pokračuje do záporných hodnot rychlosti, místo aby zůstala nulová rychlost a konstantní posuv



Obr. 25: Výpočet funkcí ODE15s průběhu posuvu a rychlosti při pohybu tělesa se třením při nenulové počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$, problém výpočtu: ukončení simulace při dosažení nulové rychlosti

Dalším závěrem je, že úlohu s konstantní budicí silou působící na těleso na desce zvládne pro budicí sílu větší než statická třecí síla $F_{ext} > F_s$ správně dopočítat každý ze sedmi uvedených řešičů. Všechny funkce navíc výpočet provedou ve velmi krátkém čase (řádově setiny sekundy). Jediná funkce, která je ještě o řád rychlejší, je ODE23 (tisíciny sekundy).

Poslední zkoumanou úlohou bylo roztlačování tělesa na desce působením vnější budicí síly s lineárně rostoucím průběhem. Tento případ byl numericky nejobtížnější. S jeho správným dořešením v rozumném čase měla problém většina zkoumaných funkcí. Řešiče ODE23t, ODE15s a ODE23s tuto úlohu nedopočítaly ani po více jak dvou hodinách. Vzhledem k triviálnosti výpočtu jsou tedy pro tento problém neaplikovatelné. Řešič ODE23tb se ukončil s chybovou hláškou již v čase 0,03 s. Důvodem bylo opět nedosažení integrační tolerance, aniž by se velikost kroku zmenšila pod nejmenší povolenou hodnotu na úrovni strojové přesnosti. Výpočet správně provést dokázaly jen funkce ODE45 (134 s), ODE23 (200 s) a ODE113 (275 s).

Celkovým zhodnocením všech tří zkoumaných úloh je vyšetřeno, že univerzálně lze použít jen funkce ODE23, ODE45 a ODE113. Nejrychleji výsledky vypočítá funkce ODE45, následně ODE23 a nejdelší čas výpočtu má ODE113. Vzhledem k závěru provedeného srovnání budou tyto 3 funkce stručně popsány [31].

Funkce **ODE45** a ODE23 jsou založeny na explicitní Rungeově-Kuttově metodě. ODE45 je základní funkce pro úlohy s tuhými tělesy. Během výpočtu je zohledňována hladkost zobrazeného řešení. Komponenty řešení se mohou v průběhu jednoho kroku podstatně změnit. Hodnota vypočítaná na konci kroku pak nemusí poskytovat dostatečné rozlišení pro grafické zobrazení řešení. Toto je řešeno výpočtem čtyř hodnot rozložených rovnoměrně v rozsahu každého kroku.

Ve výchozích tolerancích je obecně **ODE23** nákladnější než ODE45, nikoliv však zna-

čně. Je preferována při hrubší toleranci, díky tomu, že má o polovinu méně nákladný krok než ODE45. Díky tomu je velikost kroku častěji upravována. Pokud krok výpočtu selže, dojde ke ztrátě menší části vyhodnocení, což je zvláště důležité v případě mírné tuhosti, kdy je mnoho selhávajících kroků.

Funkce **ODE113** obsahuje explicitní Adams kód založený na PECE implementaci metody Adams-Bashforth-Moulton. Adamsovy metody jsou založeny na polynomiální interpolaci, která se používá k získání výstupu ve specifických bodech. Funkce ODE113 nedává nejrychlejší výsledky, ale dosahuje vysoké přesnosti díky pečlivému sledování průběhu integrace a využití vzorců vysokých řádů. Je také relativně efektivní v přítomnosti mírné tuhosti [31].

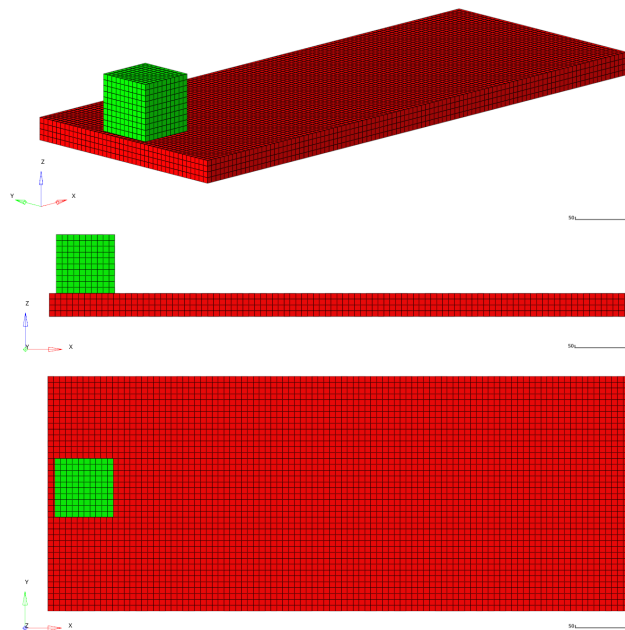
5 Simulace v LS-Dyna

V následující části práce je popsán model tělesa pohybujícího se po podložce se třením a jeho simulace v programu LS-Dyna. Model je navržen a sestaven tak, aby odpovídal matematickému modelu řešeném pomocí Matlabu v kapitole 4. Výsledky obou simulací jsou následně porovnány a diskutovány. Přehled všech 63 provedených výpočtů je v tabulce v příloze A.

5.1 Preprocessing: příprava modelu

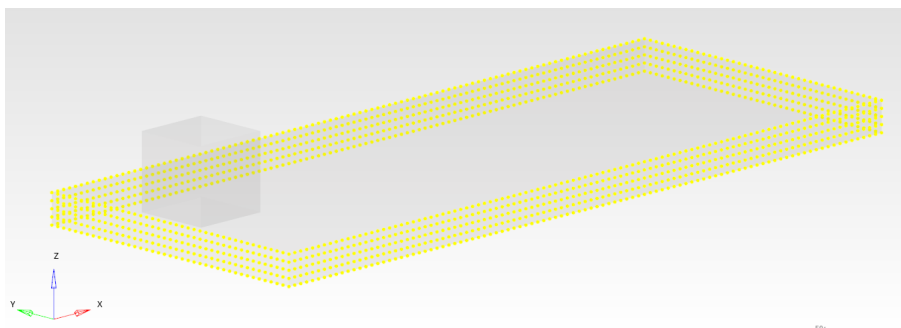
Popsaný model je sestaven v softwaru Hyper Mesh. Kontrola modelu je prováděna v programu Oasys Primer. Jako první jsou vytvořeny objemové elementy, ze kterých se skládá deska a těleso. V hlavním souboru s modelem (*key file*) jsou vypsány souřadnice všech uzlů pod příkazem *NODE. Každému elementu je přiřazeno osm uzlů přes *ELEMENT_SOLID. Vytvořené elementy a uzly jsou přiřazeny daným komponentám přes příkaz *PART. Síť uzlů je sestavena tak, aby počátek souřadnicového systému xyz $[0, 0, 0]$ ležel v prostředním uzlu spodní řady zadní strany tělesa. Kladný směr posuvu tělesa je ve směru osy x .

Výpočet je proveden v jednotkách pro hmotnost kilogramy (kg), pro délku milimetry (mm) a pro čas milisekundy (ms). Odpovídající jednotky dalších použitých veličin jsou pak pro sílu kilonewtony (kN), pro napětí gigapascaly (GPa) a pro energii Jouly (J). Deska má tvar kvádra a rozměry 500 x 200 x 20 mm. Těleso má tvar krychle o hraně 50 mm. Cílová velikost strany elementu byla zvolena 5 mm. Vzhledem k jednoduché geometrii obou těles byla tato hodnota ve většině případů (viz dále zvednutí předních uzlů, obr. 33) splněna zcela přesně. Pohled na soustavu v rovině v izometrickém pohledu xyz , v rovině xz a xy je uveden na obr. 26.



Obr. 26: Diskretizovaný model desky a tělesa

Pomocí příkazu `*MAT_PIECEWISE_LINEAR_PLASTICITY` je zadán materiál desky. Definované parametry jsou hustota $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, modul pružnosti v tahu $E = 2 \text{ GPa}$, Poissonovo číslo $\nu = 0,4$ a mez kluzu $\sigma_k = 0,002 \text{ GPa}$. Tato kombinace vlastností odpovídá materiálu dřevo. Materiál tělesa je zadán příkazem `*MAT_ELASTIC`. Zadané hodnoty jsou pro zvolený materiál ocel: hustota $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$, modul pružnosti v tahu $E = 210 \text{ GPa}$ a Poissonovo číslo $\nu = 0,3$. U obou komponentů modelu se jedná o objemové elementy. Pomocí příkazu `*SECTION_SOLID` je zvolen typ elementu `ELFORM = 2`. Jedná se o šestistěn (hexahedron) s plnou integrací (8 integračních bodů). Dále jsou vytvořeny sety uzlů `*SET_NODE_LIST` za účelem nadefinování okrajových podmínek. Do prvního setu jsou uloženy všechny okrajové uzly desky, jak je znázorněno na obr. 27. Okrajová podmínka `*BOUNDARY_SPC_SET` omezuje translační stupně volnosti ve směru x , y i z .



Obr. 27: Set uzlů pro nadefinování okrajové podmínky desky omezující pohyb ve směru os x , y a z

Pro správné fungování kontaktu včetně třecí síly je potřeba, aby v modelu fungovala gravitace, protože při vyšetřování tření mezi tělesem a podložkou je třecí síla úměrná velikosti tíhové síly tělesa. Gravitace je do modelu dosazena přes příkaz `*LOAD_BODY_Z`, který odkazuje na konstantní křivku `*DEFINE_CURVE` o hodnotě $9,81 \text{ m/s}^2$. Vzhledem k jednotkám použitým ve výpočtu je v modelu zadána hodnota $0,00981 \text{ mm/ms}^2$.

Mezi tělesem a podložkou je v `*CONTACT_AUTOMATIC_GENERAL` nadefinován jednopovrchový kontakt. Statický i dynamický koeficient tření je nastaven na $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$. Koeficient přechodu je zadán $c = 1$. V případě kontaktu kombinace materiálů ocel a dřevo mohou koeficienty tření ležet v širokém intervalu hodnot v závislosti na typu dřeviny, její opracovanosti, drsnosti povrchu ocele a vliv může mít i úhel mezi směrem vláken dřeviny a směrem kluzu. Například statický koeficient tření při posuvu oceli po dřevě může být s pískovaným (drsným) povrchem ve srovnání s leštěným hladkým povrchem až trojnásobný ($\mu_s = 0,2$ pro hladký povrch, $\mu_s = 0,6$ pro drsný povrch) [33]. Zadané hodnoty jsou voleny stejně jako v kapitole 4 pro možnost srovnání výsledků. Opět je vyšetřován pohyb tělesa při nenulové počáteční rychlosti a při působení budicí síly. V modelu LS-Dyna se tyto dvě úlohy liší pouze v nadefinování následujícího příkazu.

(a) ***Nenulová počáteční rychlost***

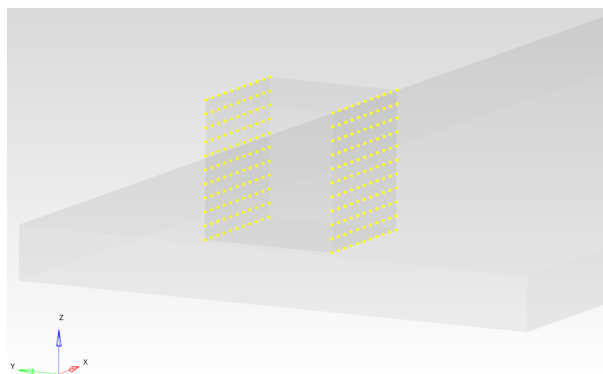
Příkazem `*INITIAL_VELOCITY_GENERATION` je tělesu zadána počáteční rychlost ve směru osy x o velikosti $v_0 = 1 \text{ m/s}$, tj. $v_0 = 1 \text{ mm/ms}$.

(b) ***Budicí síla***

Pro případ roztlačování tělesa po desce pomocí působící síly je vytvořen set devíti uzlů (obr. 29). Na ně je aplikována síla příkazem `*LOAD_NODE_SET`. Simulovány jsou varianty konstantní i lineárně rostoucí budicí síly. Tyto dva případy se liší pouze v průběhu zátěžné křivky, která je opět jako u gravitace popsána v `*DEFINE_CURVE`. Je potřeba brát ohled na to, že působící síla se násobí počtem uzlů v setu, tudíž požadovaná hodnota budicí síly musí být vydělena devíti.

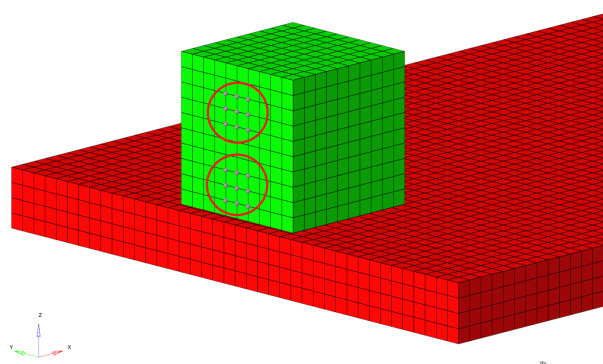
Pro účely přehlednější práce s větším modelem je v programu LS-Dyna možné rozdělit model na samostatné soubory ve formátu key, které se volají z hlavního (*master*) souboru příkazem `*INCLUDE`. V případě úlohy roztlačování tělesa působící silou byla zátěžná křivka uložena do samostatného souboru (*include*) pro rychlé vyhledávání a editaci.

V průběhu provádění výpočtů na zadané úloze byl popsán model dále rozšířen. Pro variantu nenulové počáteční rychlosti i budicí síly bylo nutné zavést okrajovou podmínku zamezující pohyb bočním uzlům tělesa ve směru osy y , jak je ukázáno na obr. 28. Bez této podmínky těleso při pohybu vpřed zatáčí. Nejedná se pak o přímočarý pohyb a výsledek neodpovídá výsledkům simulace v Matlabu.



Obr. 28: Set bočních uzlů tělesa pro okrajovou podmínku omezení posuvu ve směru osy y

Další úprava, která vyplynula z provedených výpočtů (viz podkapitola 5.3), je změna působiště zatěžující síly. Set, na který působí síla, je přesunut z horní polohy do spodní pro zamezení překlápění tělesa. Obě varianty setů s uzly jsou zobrazeny na obr. 29.



Obr. 29: Horní a dolní varianta setu s uzly pro působení budící síly

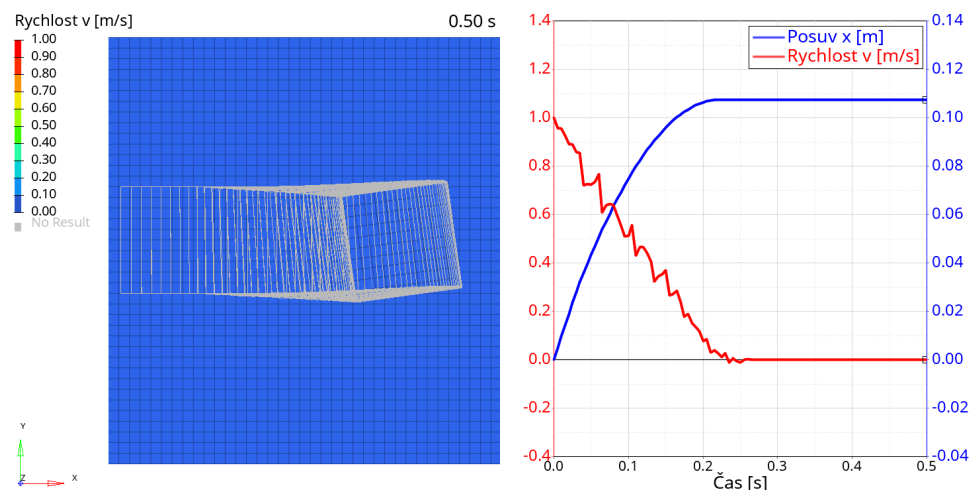
5.2 Výpočet v programu LS-Dyna

Stejně jako síťování a příprava modelu jsou i parametry analýzy zadávány v prostředí Hyper Mesh. Čas trvání simulace `*CONTROL_TERMINATION` je po několika spočítaných variantách stanoven na 500 ms. Parametry časového kroku jsou zadány přes `*CONTROL_TIMESTEP` a škálovací faktor pro vypočítaný časový krok `TSSFAC` je ponechán na výchozí hodnotě 0,9. Následně je stanoveno, v jakém formátu a v jaké frekvenci budou výsledky vypisovány příkazem `*DATABASE_BINARY_D3PLOT`. Frekvence vypisování výsledků pro všechny uzly a elementy je stanovena parametrem `DT` na 5 ms. Po provedení simulace jsou výsledky zobrazeny v jednotlivých snímcích (*frames*). Po zadání všech parametrů a vlastností potřebných ke spuštění simulace je z programu Hyper Mesh vyexportován textový soubor ve formátu `.key`, který je následně použit jako vstup pro řešič LS-Dyna.

5.3 Postprocessing: vyhodnocení dat

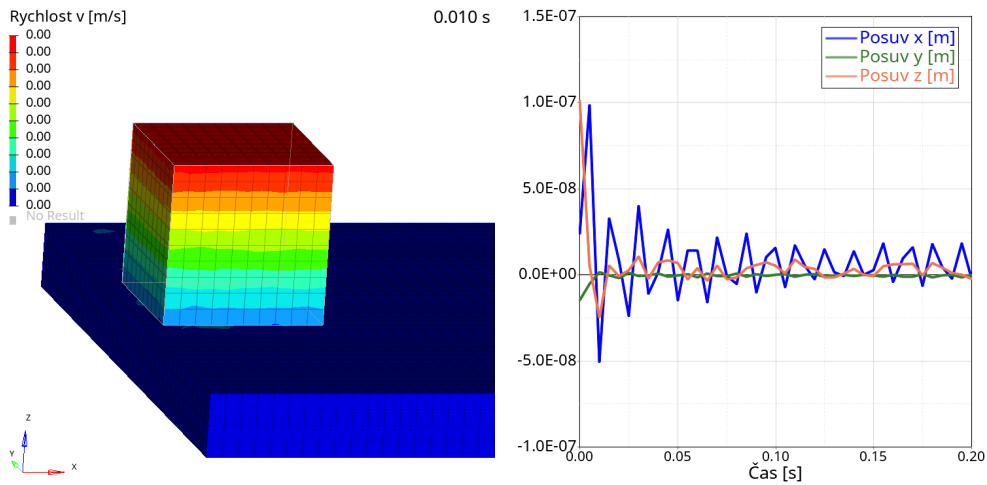
Výsledky simulace jsou vypsané v textovém souboru ve formátu *d3plot*. Výstup obsahuje ve výchozím tvaru posuvy uzlů v průběhu simulace. Na základě toho je možné vizualizovat průběh pohybu soustavy těles. Soubor výsledků zahrnuje také rychlosti a zrychlení všech uzlů. Dále jsou vypočítané hodnoty tenzorů napětí a deformace, které je možno graficky znázornit pomocí vrstevnicového grafu (*contour plot*).

Zpracování výsledků je provedeno v programu Hyper View. V rámci postprocessingu je možno vyhodnocovat řadu veličin a parametrů simulace. Při odladování modelu byla provedena série simulací. První úspěšný výpočet při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$ a $\mu_d = 0,3$ je zobrazen na obr. 30. Jak je vidět v grafickém znázornění průběhu posuvu a rychlosti, těleso vlivem tření postupně zpomaluje. Průběh rychlosti ve směru osy x ale není hladký. Důvodem je, že se těleso nepohybuje po přímce, ale během simulace zatáčí, jak je vidět v rovině xy (pohled „shora“) v posledním snímku simulace.



Obr. 30: Průběh posuvu a rychlosti tělesa ve směru osy x při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ Problém: těleso se nepohybuje po přímce.

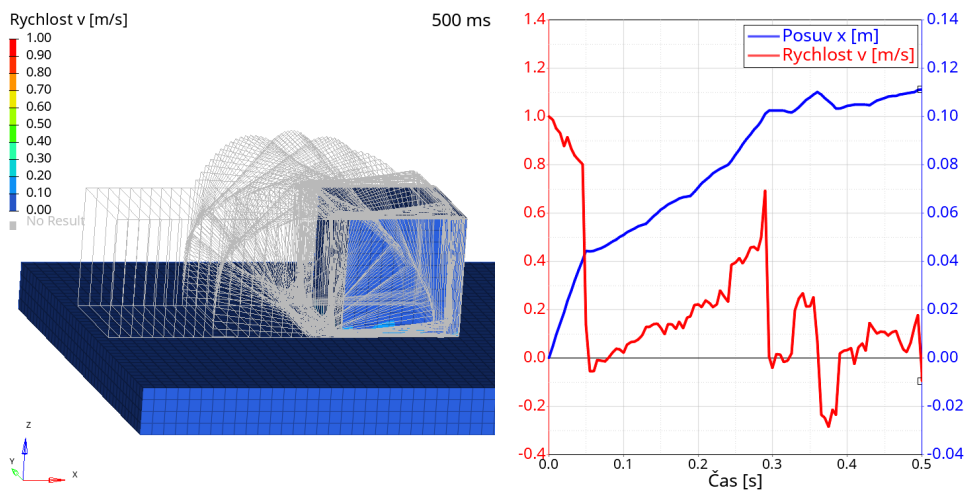
Pro porovnání výsledků simulace z programu LS-Dyna a Matlab je třeba omezit pohyb tělesa pouze do směru osy x . Z tohoto důvodu je do modelu zařazena další okrajová podmínka pro set uzlů na okrajích tělesa, která omezuje pohyb ve směru osy y (viz obr. 28). Přestože je vyšetřován pohyb ve směru x , musí být ponechán stupeň volnosti i ve směru z z důvodu působení gravitace. I těleso, které je ponecháno v klidu (nulová počáteční rychlost, nulové budící síly), má v průběhu simulace nenulový průběh posuvu ve směru osy z . Řádově prvních 20 ms simulace dochází k „usazování“ tělesa, až poté se posuv ve směru osy z ustálí a na těleso působí plně tíhová síla. Popsaná okrajová podmínka je aplikovaná na model v případě vyšetřování obou úloh. Dále jsou v textu práce popsány výsledky simulace zvlášť.



Obr. 31: Průběh posuvů ve směru os x , y a z při simulaci tělesa v klidu (nulová počáteční rychlost, nulové budící síly)

5.3.1 Pohyb tělesa s nenulovou počáteční rychlostí

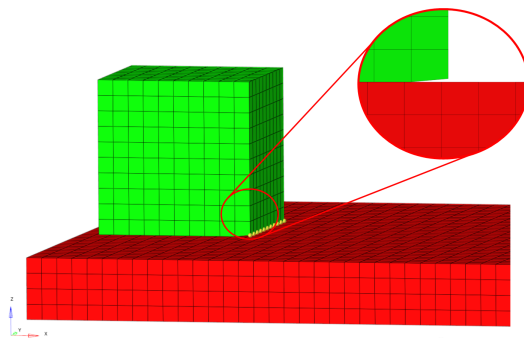
Další varianta výpočtu ukazuje problém s nenadálým překlápěním tělesa. Prvních 50 ms probíhá výpočet podle očekávání, rychlost se postupně snižuje. Následně se ale těleso začne překlápět, důsledkem čehož je průběh rychlosti i posuvu neuspořádaný. Vizualizace překlápění krychle je znázorněna na obr. 32.



Obr. 32: Průběh posuvu a rychlosti krychle ve směru osy x při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ Problém: překlápění krychle.

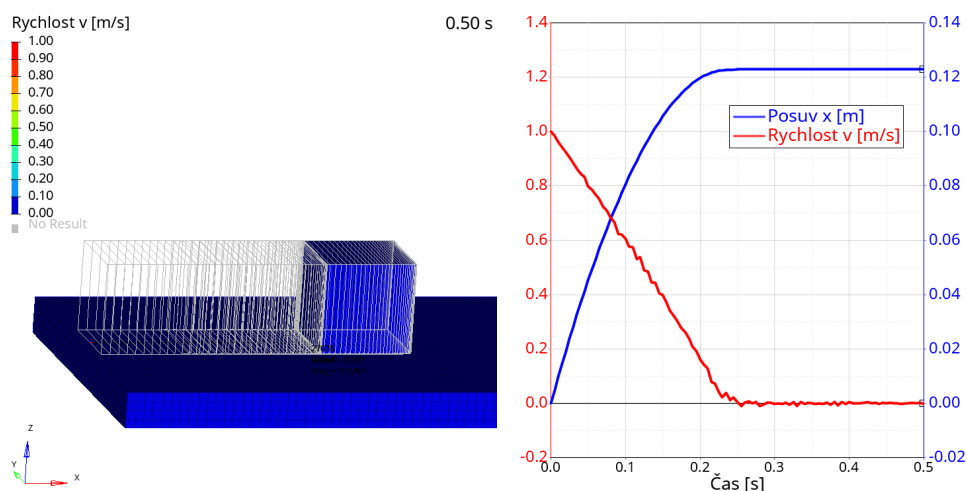
Po analýze problému je na dalších výpočtech ověřeno, že kolize vzniká kvůli kontaktu ostré hrany krychle a podložky. Odstranění nežádoucího překlápění je provedeno pomocí upravení sítě elementů na přední spodní hraně krychle. Řada uzlů je zvednuta o 10 %

délky elementu (tedy 0,5 mm), jak je ukázáno na obr. 33. Tímto je ostrá hrana zaoblená. Zkrácení hrany o 10 % stále dostatečně respektuje krychlovou geometrii tělesa.



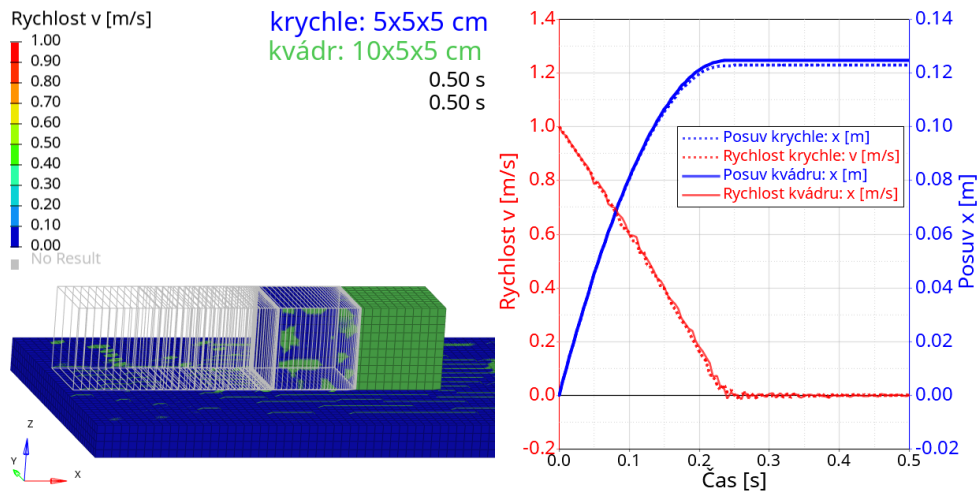
Obr. 33: Úprava sítě krychle pro zamezení překlápění tělesa zaoblením hran (zvednutím spodních uzlů o 10 % délky hrany elementu)

Po úpravě sítě se již těleso posouvá po podložce bez překlápění až do zastavení. Průběh posuvu a rychlosti a vizualizace pohybu tělesa je možno vidět na obr. 34.



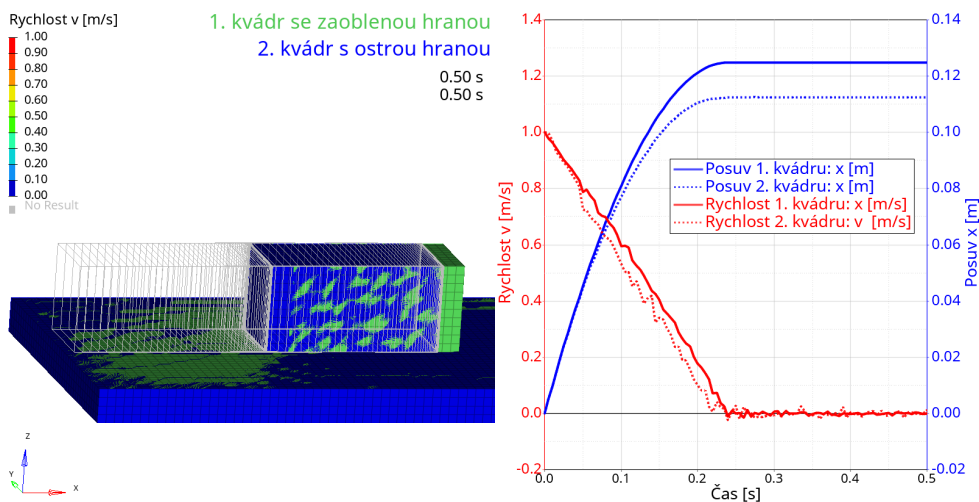
Obr. 34: Průběh posuvu a rychlosti krychle se zaoblenou hranou ve směru osy x při počáteční rychlosti $v_0 = 1 \text{ m/s}$ a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

Následná simulace obsahuje model nadefinovaný stejně, jak je popsáno v podkapitole 5.1. Změněné je pouze těleso, které je upravené z krychle na kvádr o rozměrech 100 x 50 x 50 mm. Jak je vidět na obr. 35, při stejné počáteční rychlosti je průběh posuvu a rychlosti téměř stejný. Toto plyne z nezávislosti posuvu na hmotnosti, jak je ukázáno v rovnici (60).



Obr. 35: Porovnání průběhu posuvu a rychlosti ve směru osy x krychle a kvádrů se zaoblenou hranou při počáteční rychlosti $v_0 = 1 \text{ m/s}$ a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

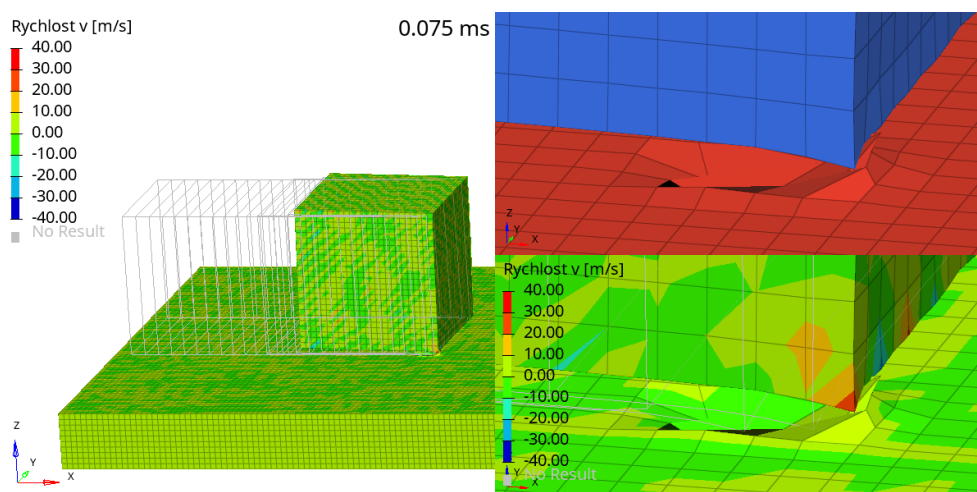
Pro variantu výpočtu s tělesem tvaru kvádrů je opět porovnán vliv tvaru hrany tělesa. Na obr. 36 je vykreslen posuv a rychlost varianty kvádrů se zaoblenou hranou (dle obr. 33) a s ostrým přechodem. Ostatní parametry modelu i simulace jsou zachovány. Jak je vidět z průběhu grafů i vizualizace, tvar hrany má výrazný vliv na chování tělesa během pohybu. Ve výpočtu s krychlí vedla ostrá hrana k nežádoucímu překlápění tělesa. V případě kvádrů zůstává těleso nepřeklápěno, ostrá hrana má ale za důsledek rychlejší zastavení tělesa, a tedy kratší dráhu posuvu (řádově o 10 %).



Obr. 36: Porovnání průběhu posuvu a rychlosti ve směru osy x kvádrů s ostrou a zaoblenou hranou při počáteční rychlosti $v_0 = 1 \text{ m/s}$ a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

Dalším parametrem modelu, který byl zkoumán, je velikost elementů sítě. První varianta modelu, popsána v předcházející části, byla vysítována objemovými elementy o hraně 5 mm. V následující části práce je model přesítován menšími elementy o hraně délky 2 mm. Úměrně tomu jsou upravené sety definující okrajové podmínky desky i tělesa. Ostatní nastavení modelu (materiály, počáteční podmínka, typ elementů apod.) zůstávají stejná. Snížení velikost hrany elementu má vliv na počet elementů, a tedy i výpočetní náročnost. Celkové množství elementů v modelu stoupl z 9 000 na 256 525, tedy více jak 28x. Z tohoto důvodu je pro další variantu výpočtů změněn rozměr desky z 500 x 200 x 20 mm na 300 x 10 x 10 mm. Tento rozměr je i nadále dostačující pro vyšetření pohybu tělesa a umožňuje rychlejší výpočet (na 16 CPU 1,5 hodiny místo 6,5 hodiny).

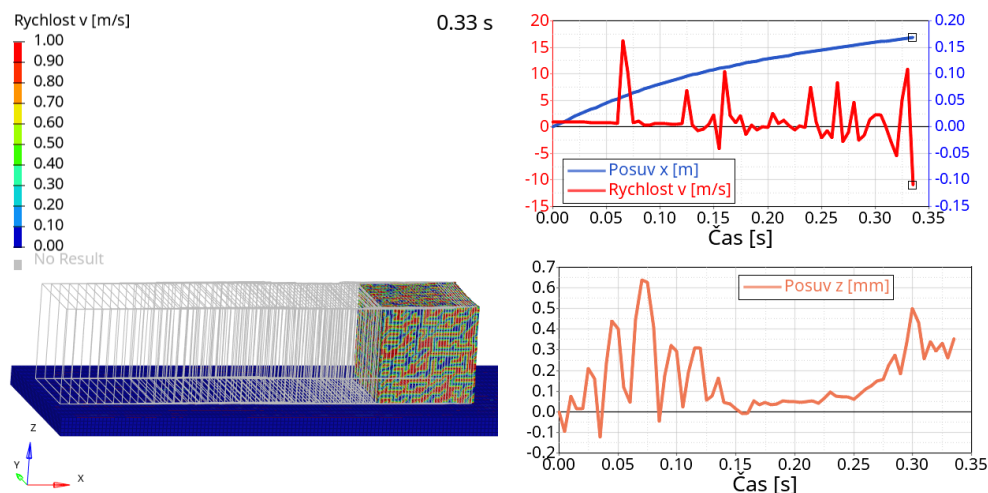
Oproti předchozím modelům s velikostí elementu 5 mm se při stejných parametrech v průběhu výpočtu u modelu s elementy o velikosti 2 mm vyskytuje problém s negativní energií na některých elementech. Z tohoto důvodu výpočet neproběhne v požadovaném čase 500 ms, ale skončí dříve s chybovou hláškou už po 75 ms. Přestože těleso začíná svůj pohyb přímo na desce a počáteční rychlost působí rovnoběžně ve směru osy x , dojde v průběhu pohybu k rozkmitání tělesa ve směru osy z s rostoucí výchylkou až na 2,5 mm (125 % velikosti elementu). Před ukončením výpočtu dojde k výrazné deformaci elementů na hraně kostky a příslušných elementů v kontaktu na desce, což je možné vidět na obr. 37.



Obr. 37: Model se sítí o velikosti hrany elementu 2 mm
Deformace desky při pohybu kvádrů se zaoblenou hranou s počáteční rychlostí
 $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

Další variantou výpočtu je spuštění stejně nastavené simulace, ale s tělesem na začátku zdviženým o 0,1 mm nahoru, aby nebylo v těsném kontaktu s podložkou již od začátku simulace. Doba průběhu výpočtu se výrazně prodloužila z 75 na 330 ms, přesto ale výpočet skončil předčasně s chybovou hláškou, která opět informovala o negativní energii několika objemových elementů. Při analýze výstupních dat se ukazuje výrazná oscilace rychlosti tělesa ve směru osy x . Očekávaný průběh rychlosti je od $v_0 = 0$ m/s až do zastavení ($v = 0$ m/s). Místo toho rychlost kolísá v rozsahu -12 až +16 m/s. Další problematické

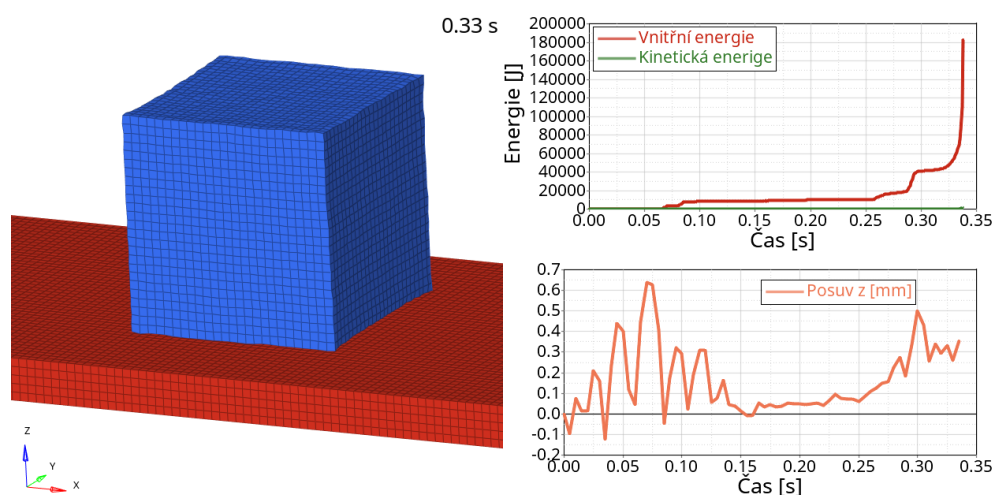
chování je, že v průběhu simulace dochází k výkyvům tělesa ve směru osy z . Průběh simulace a popsané veličiny jsou znázorněny na obr. 38.



Obr. 38: Model se sítí o velikosti hrany elementu 2 mm

Porovnání průběhu posuvu ve směru osy x a z a rychlosti ve směru osy x kvádru se zaoblenou hranou při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

Při zhodnocení průběhu globálních energií soustavy je vidět, že důsledkem tohoto nežádoucího pohybu roste vnitřní energie tělesa. To má také za důsledek deformaci tělesa před ukončením simulace, jak je vidět na obr. 39.



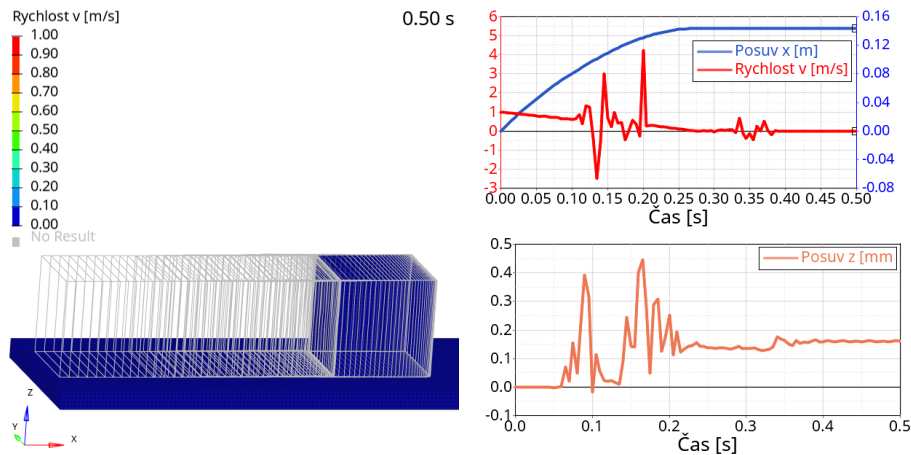
Obr. 39: Model se sítí o velikosti hrany elementu 2 mm

Porovnání průběhu energie modelu a posuvu ve směru osy z kvádru se zaoblenou hranou při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

Další varianty výpočtu modifikují parametry kontaktu ve snaze nalézt vhodné řešení. Během analýzy chování modelu jsou využita i data získaná ze souboru D3HSP, který je součástí výstupů simulace LS-Dyna a obsahuje celý popis interpretace vstupních souborů. V tomto souboru je na začátku výpočtu stanoven a vypsán výpočetní krok, který je potřeba pro udržení stability kontaktu (*surface time step*). Tento časový krok by se měl co nejvíce shodovat s tím, který zvolí software na základě podmínky stability (37), viz oddíl 3.1.1 Časový krok.

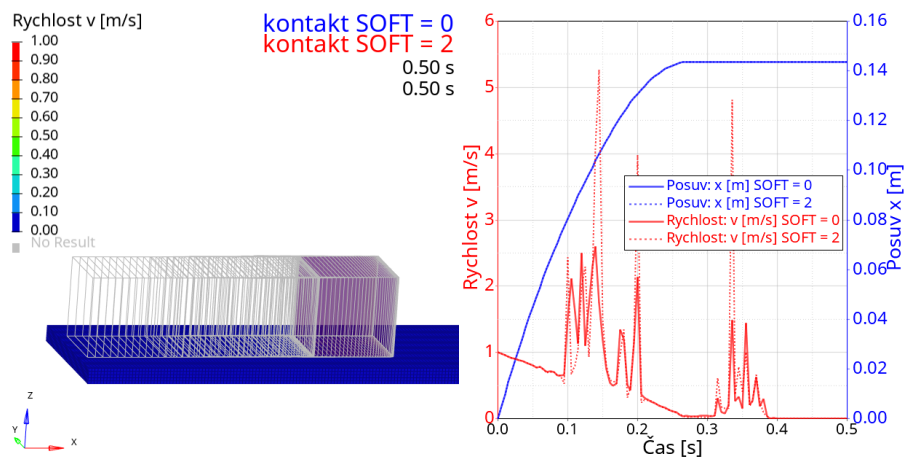
V případě řešených simulací je výpočtový časový krok ($2,63 \cdot 10^{-4}$) menší než doporučená hodnota ($4,64 \cdot 10^{-4}$). Před ukončením výpočtu s chybou navíc časový krok ještě klesá (až k hodnotě $1,46 \cdot 10^{-4}$). Takovýto případ, kdy je kontaktní výpočetní krok větší než krok vlastního výpočtu, znamená, že je kontakt příliš měkký. Tato vlastnost je viditelná i na získaných výsledcích na obr. 37. Vhodným řešením je zvýšení kontaktní tuhosti (viz podkapitola 3.3). Pro další variantu výpočtu jsou tedy zadány parametry SFS, SFM = 2 v příkazu *CONTROL_CONTACT. Díky tomu se zvýší kontaktní tuhost, doporučený čas pro stabilitu výpočtu klesne na ($3,28 \cdot 10^{-4}$) a doba proběhlé simulace se prodlouží na 365 ms. I nadále se ale projevuje problém s výrazným pohybem ve směru osy z až do hodnoty 2,5 mm (125 % velikosti elementu).

Problém s nežádoucí oscilací je řešen pomocí parametru viskózního koeficientu tlumení VDC (viz podkapitola 3.2). Při nastavení VDC = 20 již výpočet doběhne bez chybové hlášky. Výkyv ve směru osy z se sníží na 0,8 mm (40 % velikosti elementu). Kombinací parametrů VDC = 30 a SFS, SFM = 2 je získán výpočet, který skončí v požadovaném čase a nevykazuje výraznou oscilaci ve směru osy z . Výsledek této varianty je na obr. 40. I nadále je patrná oscilace rychlosti, průběh posuvu je ale hladký a oscilace nezpůsobuje ve výpočtu nestabilitu ani výrazně neovlivňuje výsledek. Další varianty se zvýšením viskózního koeficientu tlumení VDC na 50 nebo škálovacích faktorů SFS a SFM na 3 nevykazovaly zlepšení v chování modelu.



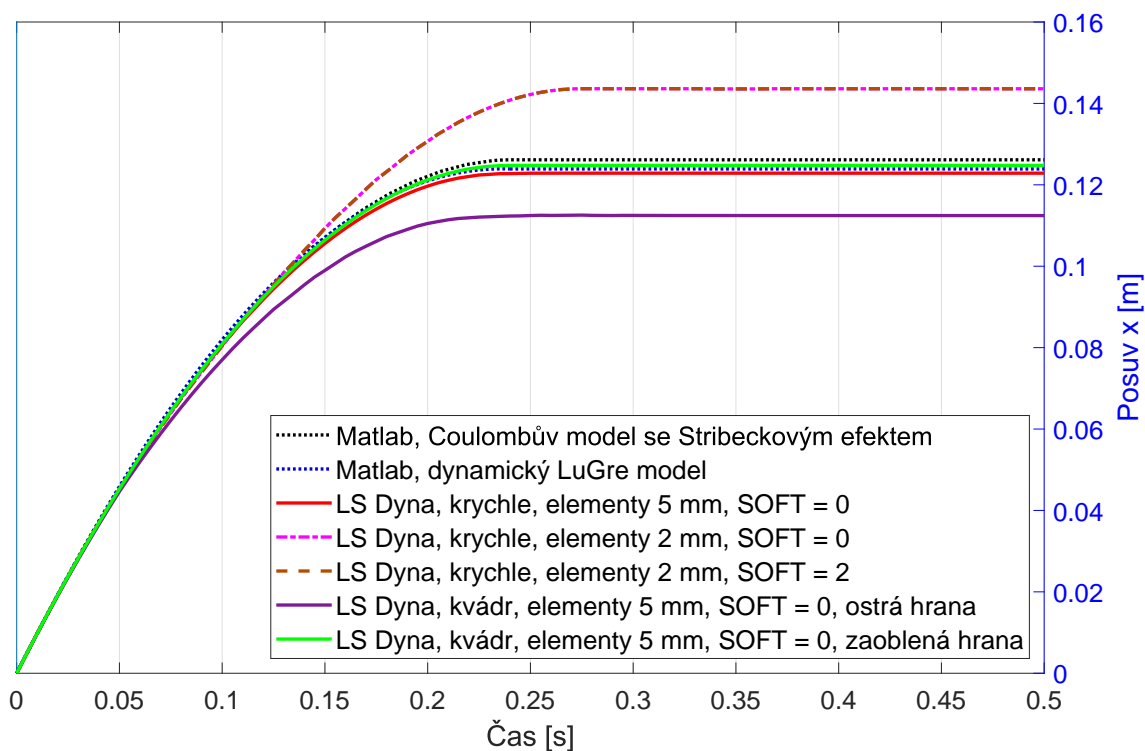
Obr. 40: Model se sítí o velikosti hrany elementu 2 mm
 Průběh posuvu a rychlosti krychle ve směru osy x při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s
 a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ při nastavení parametrů kontaktu
 $VDC = 30$ a $SFS, SFM = 2$

Jako další byla vyzkoušena varianta výpočtu se změnou kontaktního algoritmu. Místo standardní penaltové formulace ($SOFT = 0$), byl výpočet spuštěn se segmentově založenou penaltovou formulací ($SOFT = 2$), viz oddíl 3.2.1. Ostatní nastavení modelu zůstalo stejné. Při nastavení $SOFT = 2$ je za kontaktní tuhost vybrána hodnota stejná nebo vyšší než při $SOFT = 0$ (viz rovnice (43)). Třecí síla tedy podle vztahu (52) může být stejně velká nebo vyšší. V případě simulované úlohy vyšel průběh posuvu u obou nastavení kontaktu stejný. Rozdíl byl pouze v oscilaci rychlosti, která byla vyšší pro $SOFT = 2$, jak je vidět na obr. 41.



Obr. 41: Porovnání výsledků s kontaktním algoritmem $SOFT = 0$ a $SOFT = 2$, průběh posuvu a rychlosti krychle ve směru osy x při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s
 a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ při nastavení parametrů kontaktu
 $VDC = 30$ a $SFS, SFM = 2$

Na obr. 42 jsou zobrazené výsledky průběhu posuvu tělesa s nenulovou počáteční rychlostí $v_0 = 0$ m/s modelovaném v Matlabu a v programu LS-Dyna. Je patrné, že modelům v Matlabu odpovídá v LS-Dyna z křehčí nejlépe varianta s velikostí elementů 5 mm a kontaktním algoritmem SOFT = 0. Pro variantu modelu v LS-Dyna s jemnější sítí o velikosti elementů 2 mm je celková dráha, kterou těleso urazilo, vyšší pro kontaktní algoritmus SOFT = 0 i SOFT = 2. V případě tělesa tvaru kvádru odpovídá výsledkům v Matlabu varianta se zaoblenou hranou (zvednutá přední řada elementů). Ostrá hrana vnáší do modelu nežádoucí dřívější brždění. Při porovnání statického a dynamického modelu z Matlabu je zřejmé, že oba odpovídají výsledkům z LS-Dyna velmi dobře. Dynamický model je možné upravovat více parametry než statický (Coulombův se Stribeckovým efektem). Proto je možné dosáhnout ještě větší shody (viz obr. 42), je ale nutné přidat podmínku, že při dosažení nulové rychlosti zůstává posuv konstantní. Parametry statického i dynamického modelu tření v Matlabu jsou na obr. 42 stejné jako v podkapitole 4.1 na obrázcích 10 a 14.

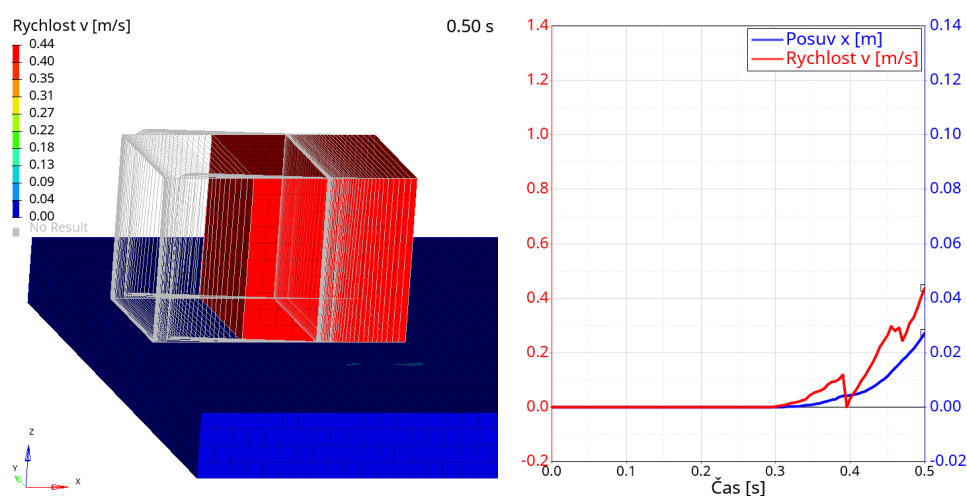


Obr. 42: Porovnání výsledků z průběhu posuvu při počáteční rychlosti $v_0 = 1$ m/s a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$, dynamické parametry tření $\sigma_0 = 100$, $\sigma_1 = 2,5$, $\sigma_2 = 0,3$, $\gamma = 2$, $v_{stribek} = 3$

5.3.2 Pohyb tělesa při působení budící síly

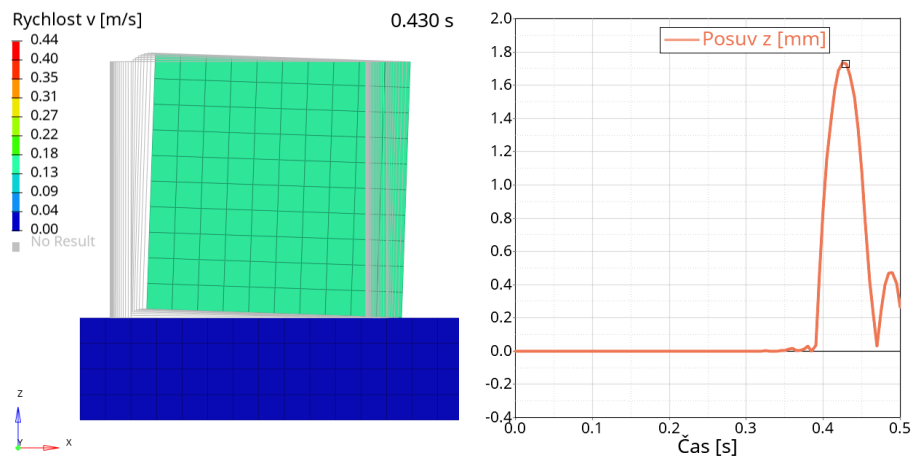
Model roztlačovaného tělesa je sestaven podle popisu v podkapitole 5.1. Při vytváření modelu je uvažováno, že posuv tělesa je v případě působící budící síly již závislý na hmotnosti, jak je popsáno v rovnici (73). Nadefinovaný rozměr a hustota tělesa odpovídají hmot-

nosti 1 kg, stejně jako při simulaci v Matlabu v kapitole 4. Při vyšetřování roztlačování tělesa působením lineárně rostoucí budící síly je uvažována síla na jeden uzel o předpisu $F = 2 \cdot t$. Na začátku simulace v čase $t = 0$ ms tedy působí síla $F = 0$ N. V průběhu simulace síla lineárně roste až do konce, kdy má v čase $t = 500$ ms velikost $F = 1$ N. Při započtení všech uzlů, na které síla působí, pak platí $F = 9$ N. Těleso se začne pohybovat, až když působící síla překoná velikost klidové (statické) třecí síly F_s . Z průběhu rychlosti na obr. 43 je vidět, že k pohybu dojde poprvé v čase 300 ms, což odpovídá budící síle 5,4 N. Na základě výpočtu v rovnici (16) by pro dané parametry soustavy tato hodnota měla být 4,905 N. Při prvotní simulaci opět dochází k problému s nežádoucím překlápěním. Na obr. 43 je znázorněn průběh posuvu a rychlosti tělesa při působení lineárně rostoucí budící síly.



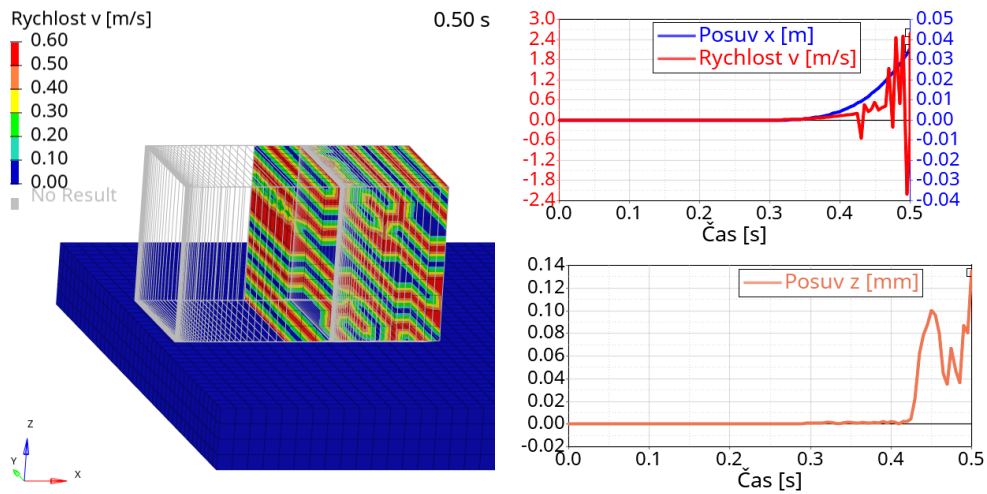
Obr. 43: Průběh posuvu a rychlosti kvádrů ve směru osy x při budící síle $F = 0,018 \cdot t$ [ms] N a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$
 Problém: výchylka ve směru osy z způsobuje nežádoucí brždění tělesa

Jak je patrné z grafického průběhu i vizualizace pohybu tělesa, v čase 390 ms dochází ke zvedání tělesa ve směru osy z . Průběh posuvu ve směru osy z a pohled na soustavu v rovině xy („z boku“) je na obr. 44. Přestože se nejedná o tak zásadní překlápění jako v případě znázorněném na obr. 32, má i toto chování nežádoucí důsledek na zkoumané výstupy. Rychlost tělesa má nehladký průběh a hodnota posuvu je výrazně nižší, než by měla být, jelikož se část energie od působící síly spotřebuje na pohyb ve směru osy z , nikoliv x . Jak je vidět v grafu na obr. 44, maximální výchylka ve směru osy z je přibližně 1,7 mm, což odpovídá 34 % velikosti hrany elementu.



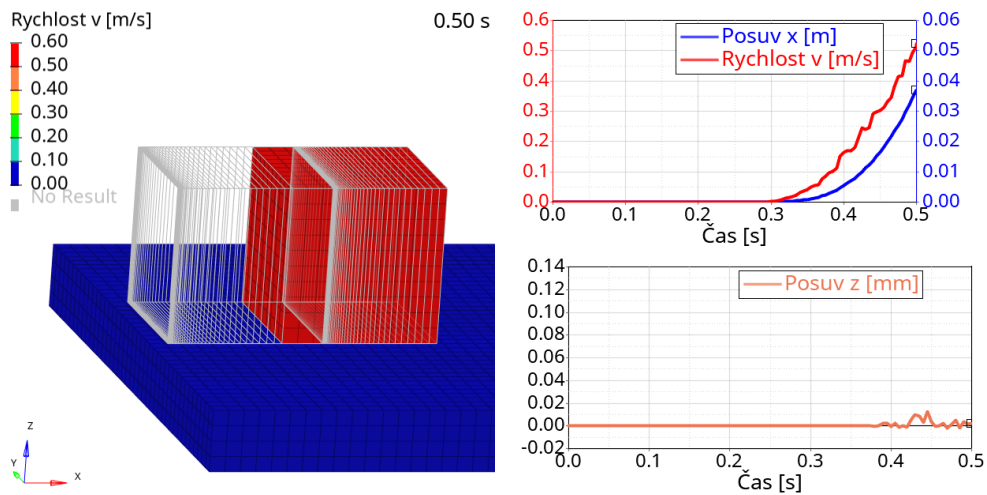
Obr. 44: Průběh posuvu ve směru osy z při budící síle $F = 0,018 \cdot t$ a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$. Problém: výchylka ve směru osy z

Tato situace je následně řešena dvěma přístupy. Nejprve je vyzkoušeno stejné řešení jako v případě nenulové počáteční rychlosti, tedy úprava sítě zvednutím spodní přední řady uzlů o 10 % velikosti hrany elementu, jak je znázorněno na obr. 33. Na rozdíl od předchozí úlohy ale toto řešení nevede ke správnému výsledku. Maximální výchylka ve směru osy z se sice řádově zmenší na hodnotu 0,13 mm (2,6 % velikosti hrany elementu), nikoliv však dostatečně na to, aby simulace dávala správné výsledky. Přestože již výchylka není vizuálně patrná, má opět za důsledek oscilování rychlosti, tentokrát dokonce i do záporného směru, jak je vidět v grafu na obr. 45. Průběh výchylky ve směru z navíc na konci simulace roste, což naznačuje další nestabilitu v průběhu delšího výpočtu. Tento model také dává méně přesné výsledky z hlediska začátku pohybu. K roztlačení tělesa dojde až v čase $t = 320$ ms, což odpovídá působící síle $F = 5,76$ N. Tato hodnota má oproti vypočítané hodnotě 4,905 N ještě větší odchylku než předchozí varianta modelu.



Obr. 45: Průběh posuvu a rychlosti ve směru osy x a posuvu ve směru osy z při budící síle $F = 0,018 \cdot t$ [ms] N a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ při úpravě sítě zvednutím přední řady uzlů. Problém: výchylka ve směru z , výkyvy v rychlosti ve směru osy x , pozdější čas roztlačení tělesa

Jako další možnost řešení tohoto problematického chování je zvolen nový set uzlů, na které působí budící síla. Na obr. 29 je znázorněna původní (horní) a nová (dolní) skupina uzlů. Výsledkem této varianty při zachování ostatních parametrů simulace stejných pak je vychýlení ve směru osy z pouze o 0,013 mm, tedy 0,26 % velikosti hrany elementu. Čas rozjždění kostky také zůstává 300 ms.

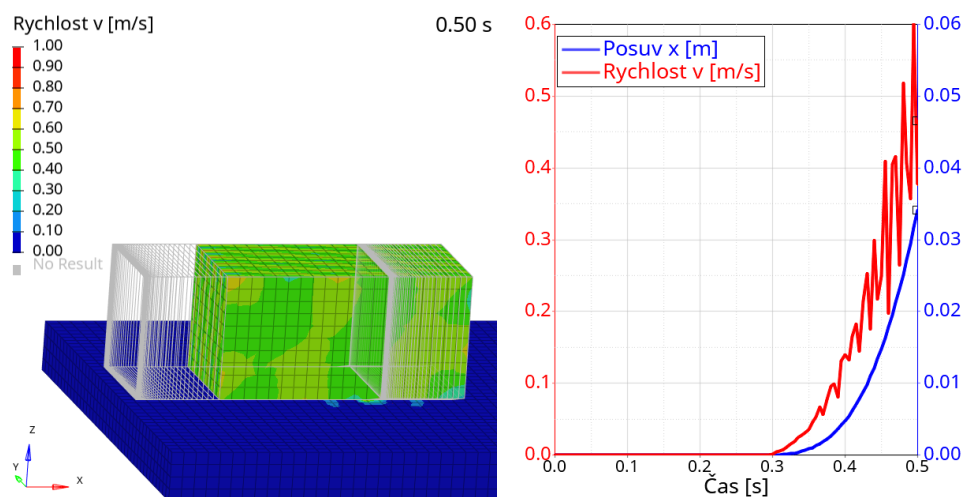


Obr. 46: Průběh posuvu a rychlosti krychle ve směru osy x a posuvu ve směru osy z při budící síle $F = 0,018 \cdot t$ [ms] N a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$

V rámci provedených simulací byla otestována i kombinace těchto přístupů (zvednutí řady uzlů a změna působiště síly). Výsledek byl ale velmi blízký pouze variantě se změnou

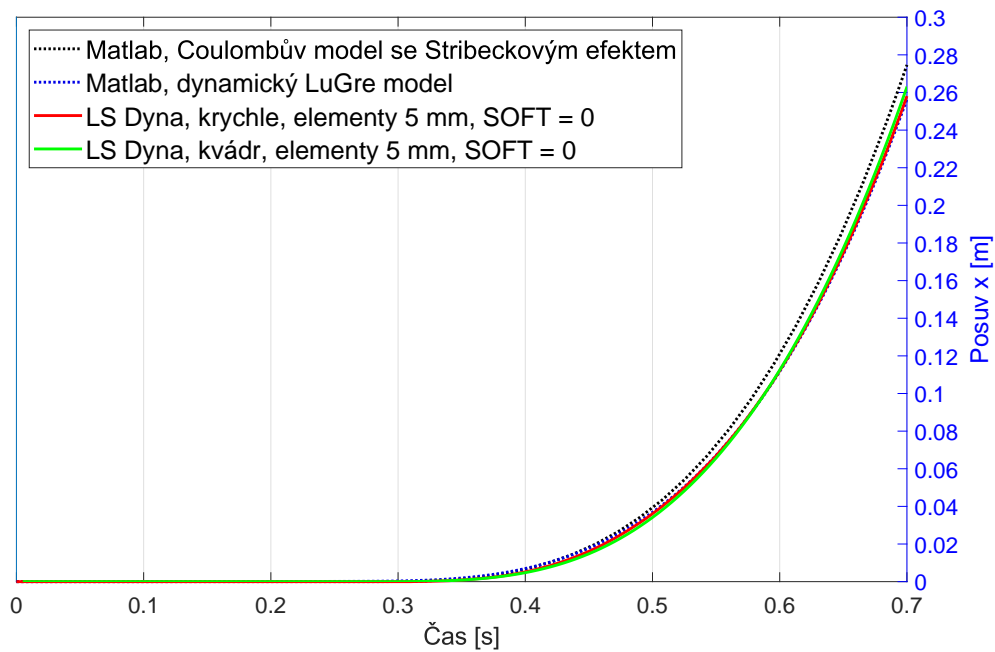
působí síly. Výrazné zlepšení není pozorováno ani v hladkosti průběhu síly, ani v čase začátku pohybu tělesa. Při návrhu experimentální soustavy je tedy uvažována informace o tom, že pro posuvný pohyb je vhodnější volit působí síly pod těžiště tělesa. Pokud by byla řešena úloha, kdy je působí síly již dané, může být řešením při modelování již uvedená varianta zaoblení hran, případně další přístupy.

Následně byla provedena další série výpočtů se změněným tělesem, které se posouvá po podložce. Stejně jako v oddíle 5.3.1 byla krychle ve výpočtech nahrazena kvádrem o rozměrech 100 x 50 x 50 mm. Kvádr má oproti krychli dvojnásobný objem, a protože se jedná o homogenní těleso, má i dvojnásobnou hmotnost. Průběh posuvu tělesa při působení vnější silou již závisí na hmotnosti, jak je ukázáno v rovnici (72). Směrnice růstu síly je tedy volena dvojnásobná, aby bylo možné adekvátně porovnat výsledky. Na obr. 47 je zobrazen průběh posuvu a rychlosti. Při porovnání s výsledky simulace krychle na obr. 46 je patrné, že dráha, kterou těleso urazilo, dosahuje téměř shodné hodnoty. V průběhu rychlosti je v případě kvádrů větší oscilace. Omezení oscilace může být opět řešeno pomocí přidání parametru VDC do definice kontaktu.



Obr. 47: Průběh posuvu a rychlosti kvádrů ve směru osy x při budící síle $F = 0,036 \cdot t$ [ms] N a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$ při úpravě působí síly

Na obr. 48 je porovnání průběhu posuvu tělesa roztlačovaného lineárně rostoucí silou modelovaného v Matlabu a v programu LS-Dyna. Z grafického zobrazení je patrná dobrá shoda mezi výsledky obou softwarů. Odchylka mezi průběhem polohy kvádrů a krychle v LS-Dyna je minimální. Dráha, kterou těleso urazilo v Matlabu při Coulombově modelu tření se Stribeckovým efektem (statický model), je ve srovnání s posuvem spočítaným v LS-Dyna jen o málo vyšší (řádově o 6 %). Dynamický model je možné upravovat více parametry než statický. Proto je možné dosáhnout ještě větší shody (viz obr. 48). Parametry statického i dynamického modelu tření v Matlabu jsou na obr. 42 stejné jako v podkapitole 4.2 na obrázcích 17 a 19.



Obr. 48: Průběh posuvu tělesa při budící síle $F = 18 \cdot t \cdot m$ [N] a koeficientech tření $\mu_s = 0,5$, $\mu_d = 0,3$ a $c = 1$, dynamické parametry tření $\sigma_0 = 100000$, $\sigma_1 = 2,5$, $\sigma_2 = 0,3$, $\gamma = 2$, $v_{stribeck} = 0,9$

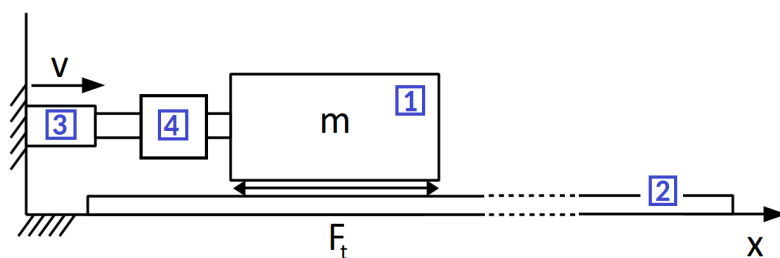
6 Experimentální měření a určení parametrů tření

V průmyslovém či výzkumném prostředí nastávají situace, kdy je potřeba získat pro účely numerických simulací třecí koeficienty pro nové kombinace materiálů. Ne vždy je možné tuto hodnotu zjistit z literatury nebo empiricky. Při možnosti validace modelu pomocí fyzického testování je teoreticky možné provést výpočet opakovaně s různými hodnotami koeficientu tření. Tento postup je ale velmi náročný z hlediska výpočtové kapacity a času na vyhodnocení výsledků. Zároveň v případě komplexního modelu je ve výpočtu celá řada parametrů, které mají na výsledek značný vliv (viz podkapitola 3.5 Citlivost numerických simulací).

V některých případech je tedy třeba navrhnout vhodné experimentální měření ke stanovení parametrů tření. V následující kapitole je popsán průběh návrhu a provedení experimentálního měření, dále přehled výsledků a proces určení parametrů tření z experimentálních dat. Příprava a realizace měření byla provedena ve spolupráci s oddělením Testing společnosti Lear Corporation Czech Republic, s. r. o.

6.1 Návrh a provedení experimentálního měření

Snahou při definování testovací procedury je, aby byl experiment natolik jednoduchý, aby bylo možné jej modelovat s co nejmenším možným počtem parametrů, které by ovlivňovaly výsledek. Uvedené experimentální měření má za účel stanovit koeficienty tření v kontaktu mezi dvěma materiály. Soustava se skládá z tělesa na podložce, které je uváděno do pohybu kinematickým buzením. Schéma testovací soustavy je znázorněno na obr. 49. Dále jsou podrobně popsány všechny komponenty testovací soustavy.



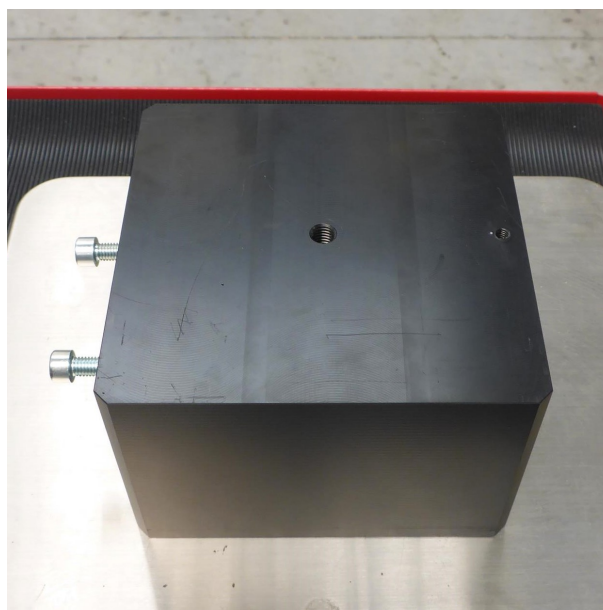
Obr. 49: Schéma experimentální soustavy pro měření koeficientů tření s tělesem (1), podložkou (2), budicím zařízením (3) a siloměrem (4)

6.1.1 Komponenty testovací soustavy

Jak je uvedeno na obr. 49 testovací soustava byla složena z tělesa, podložky, budicího zařízení a siloměru. Jako *těleso*, které se v průběhu experimentu pohybuje po podložce, byla použita kostka z materiálu polyoximetylen (také ertacetal C, označení POM-C). Materiál na těleso byl dodán společností EPP Plasty a.s., která deklaruje, že se jedná o čistý acetalový kopolymer (POM-C). Ertacetal C se velmi dobře obrábí a je tedy vhodný pro

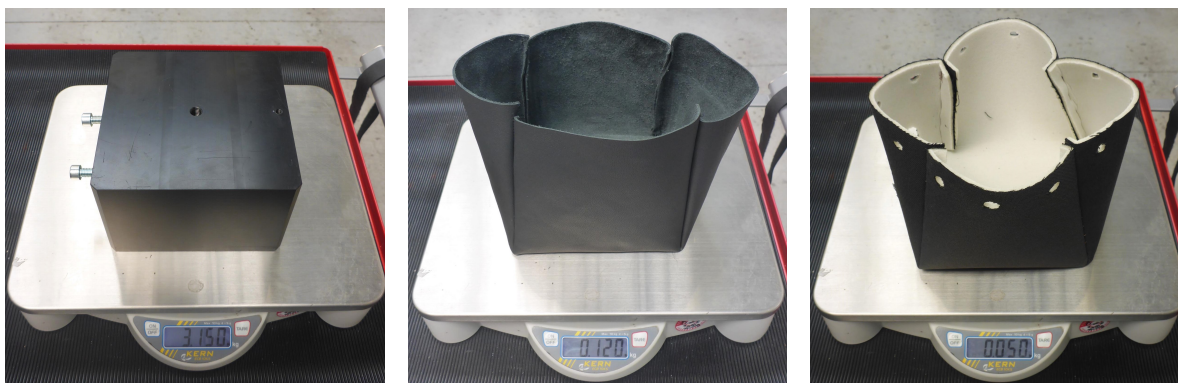
výrobu přesných mechanických součástí. Mezi další užitečné vlastnosti patří vysoká mechanická pevnost a tuhost, rázová houževnatost, nízká absorpce vlhkosti, rozměrová a tepelná stabilita a obrobiteľnosť. Díky tomu je tento materiál hojně využíván jak v průmyslovém prostředí, tak i v potravinářství a lékařství. Parametry materiálu zajišťují konstantní fyzikální vlastnosti v různých prostředích a během různého zatěžování, což je pro experimentální měření vhodné.

Těleso použité v experimentu je tvaru kvádrů o rozměrech 15 x 15 x 10 cm se zaoblenými rohy. Váha tělesa je 3,15 kg. Těleso bylo vyrobeno tak, že uprostřed obsahuje otvor, do kterého je možné umístit nástavec na kotoučová závaží. Ta slouží k regulaci hmotnosti celé soustavy. Použité těleso bylo připraveno na míru pro účely experimentu společností Koraform s. r. o. a je zobrazeno na obr. 50.



Obr. 50: Těleso tvaru zaobleného kvádrů z materiálu POM-C o rozměrech 15 x 15 x 10 cm

V dalších variantách měření byla kontaktní strana tělesa opatřena látkovým nebo koženým potahem pro možnost otestování více kombinací materiálů. Těleso a jeho látkový a kožený potah je zobrazeno na str. 51. Celkem tedy byly měřeny tři varianty povrchu na tělese. Materiál kůže byl pořízen od společnosti BOXMARK Leather GmbH & Co KG a jednalo se o typ Perlappa DO. Látka byla dodána od společnosti Wilhelm Kneitz AG a jednalo se o KARAT Micro s 3,5 mm laminací RG 38 a kruhovým úpletem 012. Jedná se o materiály, které se používají jako potahy na automobilové sedačky i jiné části interiéru vozu.



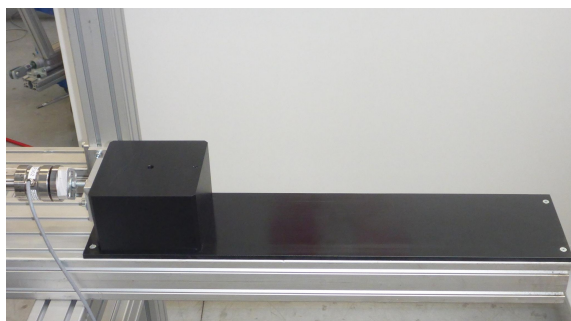
(a) Těleso z materiálu polyoximetylen POM-C

(b) Kožený potah typu Perlnappa DO

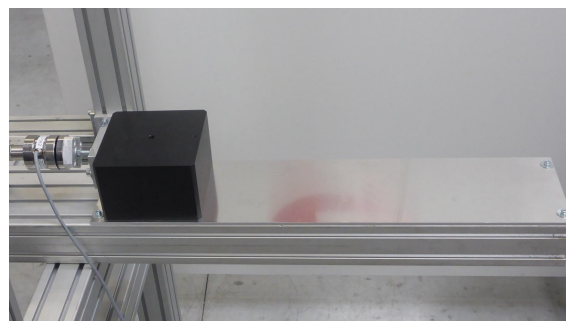
(c) Látkový potah Karat Micro s 3,5 mm laminací

Obr. 51: Přehled tělesa a jeho potahů (látka, kůže) použitých při experimentálním měření.

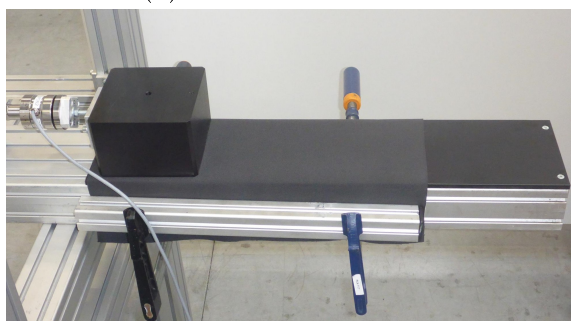
Podložka slouží v experimentální soustavě k zajištění plochy pro pohyb tělesa. Zároveň se jedná o druhou kontaktní stranu. Základním komponentem je deska o rozměrech 70 x 16 cm. K dispozici byly během měření desky z materiálu POM-C (stejný materiál jako těleso) a z hliníku. Další varianty kontaktní plochy vznikají potažením povrchu látkou a kůží (stejný materiál jako pro potažení tělesa). Celkem tedy bylo měření provedeno pro čtyři varianty povrchu na podložce. Přehled kombinací všech dvanácti materiálů na kontaktní straně tělesa a podložky je uveden na obr. 52.



(a) POM-C na POM-C



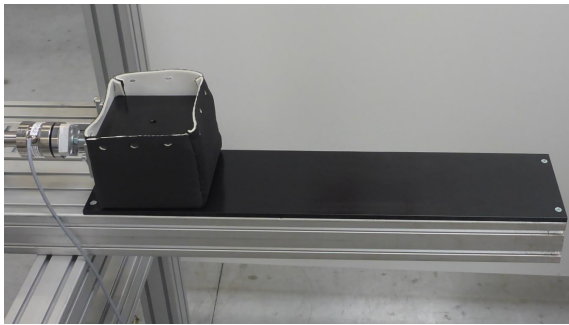
(b) POM-C na hliníku



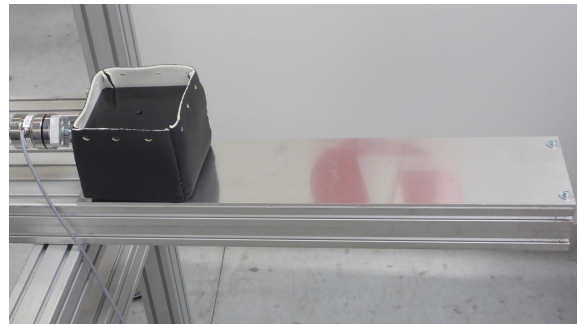
(c) POM-C na látce



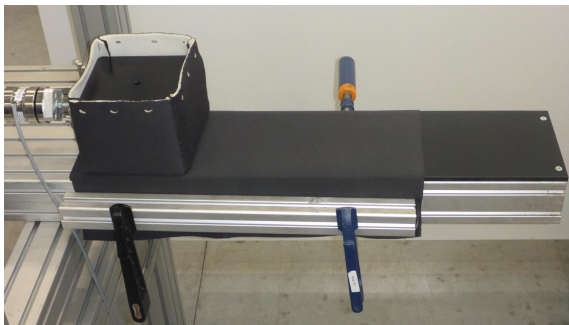
(d) POM-C na kůži



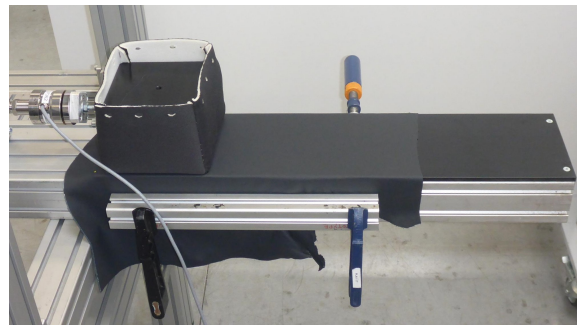
(e) Látka na POM-C



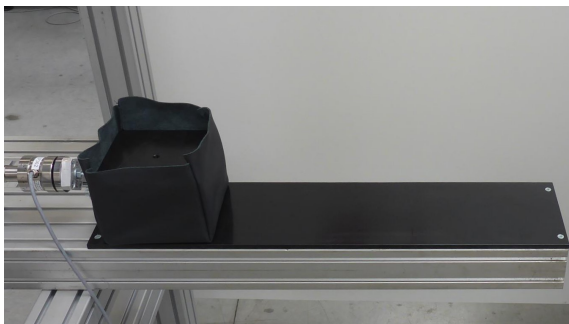
(f) Látka na hliníku



(g) Látka na látce



(h) Látka na kůži



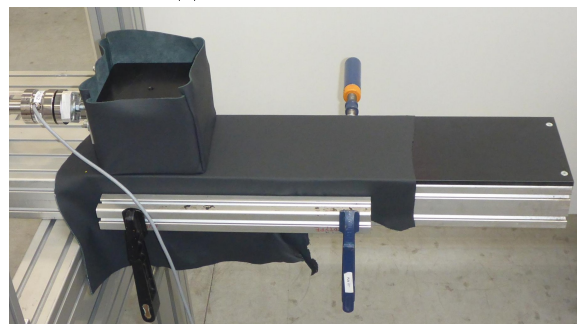
(i) Kůže na POM-C



(j) Kůže na hliníku



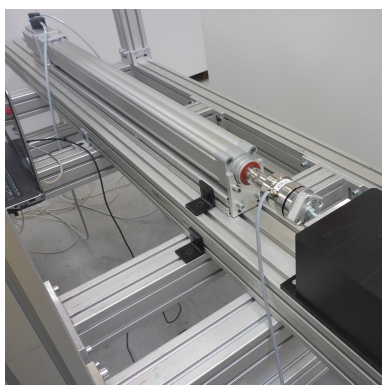
(k) Kůže na látce



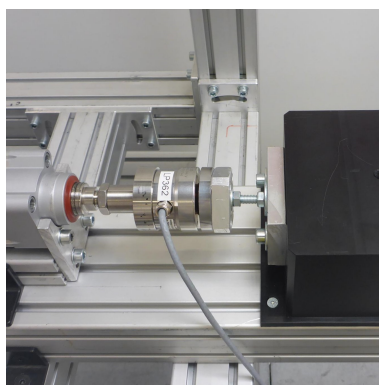
(l) Kůže na kůži

Obr. 52: Přehled kombinací materiálů povrchu tělesa a podložky v měřených experimentálních soustavách

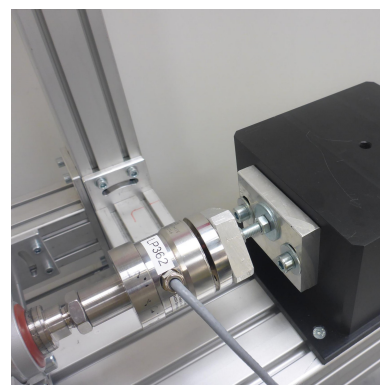
Kromě tělesa a podložky byla experimentální soustava složena také z **budicího zařízení**, které tvořilo elektrický válec ESBF-BS-50-800-5P, viz obr. 53a. Tento válec je poháněn vřetenem s kuličkovým závitem a zdvih 80 cm. Během měření je možné přes ovládací program nadefinovat elektrickému válci průběh rychlosti, se kterou se má pohybovat. Válec je schopen pohybu se zrychlením minimálně $0,002 \text{ m/s}^2$ a maximálně $0,2 \text{ m/s}^2$. Válec přizpůsobuje působící sílu tak, aby dodržel předepsaný pohyb. K válci je uchycen **siloměr**, který zaznamenává průběh působící síly. Siloměr v sobě obsahuje tenzometr a má měřicí rozsah od 0 do 500 N s třídou přesnosti 0,2. Tento rotačně symetrický snímač síly řady U3 splňuje nejvyšší požadavky na stabilitu při bočním zatížení s maximálním potlačení vlivu těchto sil na měření a životnost snímače. Jedná se o snímač tahové i tlakové síly, který byl dodán firmou HBP měřicí technika s. r. o., a je zobrazen na obr. 53b. Celá testovací soustava pro měření síly při pohybu tělesa po podložce za předepsané rychlosti je zobrazena na obr. 53.



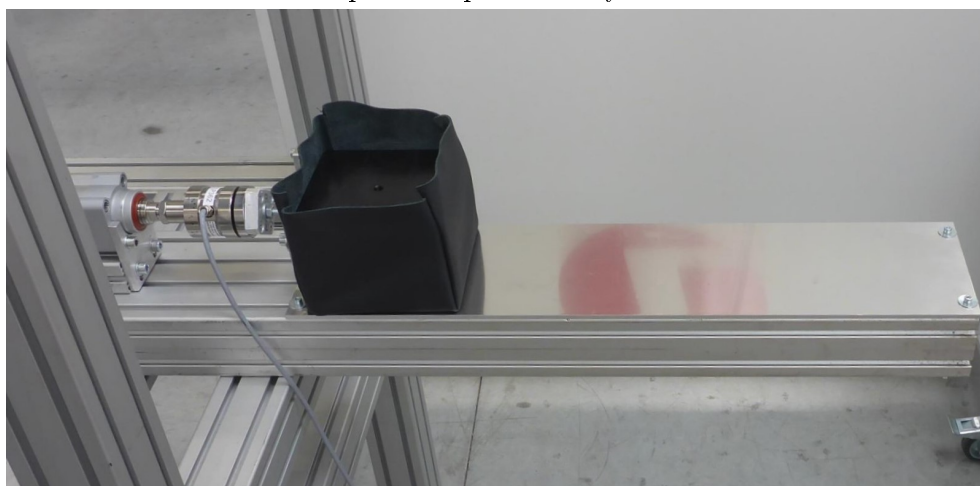
(a) Elektrický válec ESBF-BS-50-800-5P



(b) Siloměr pro měření průběhu působící síly



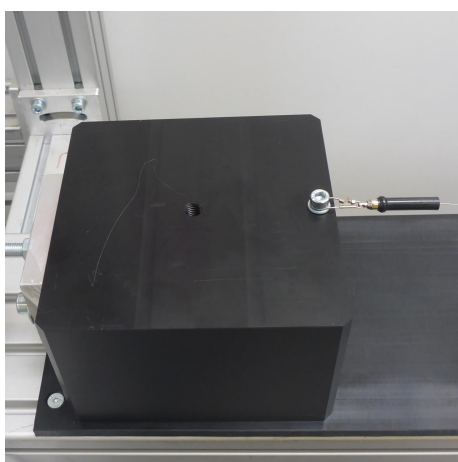
(c) Uchycení elektrického válce se siloměrem k tělesu



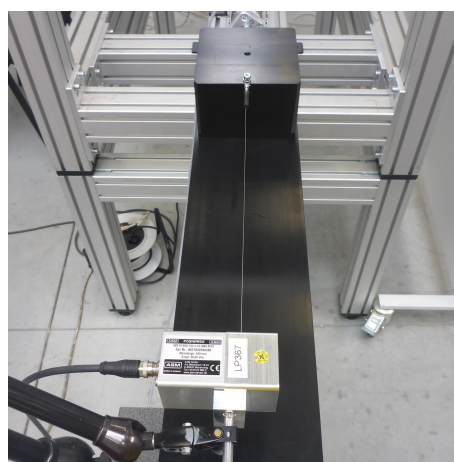
(d) Testovací soustava pro měření síly při pohybu tělesa po podložce za předepsané rychlosti

Obr. 53: Přehled experimentální soustavy a jejích komponentů pro měření třecí síly při pohybu tělesa po podložce

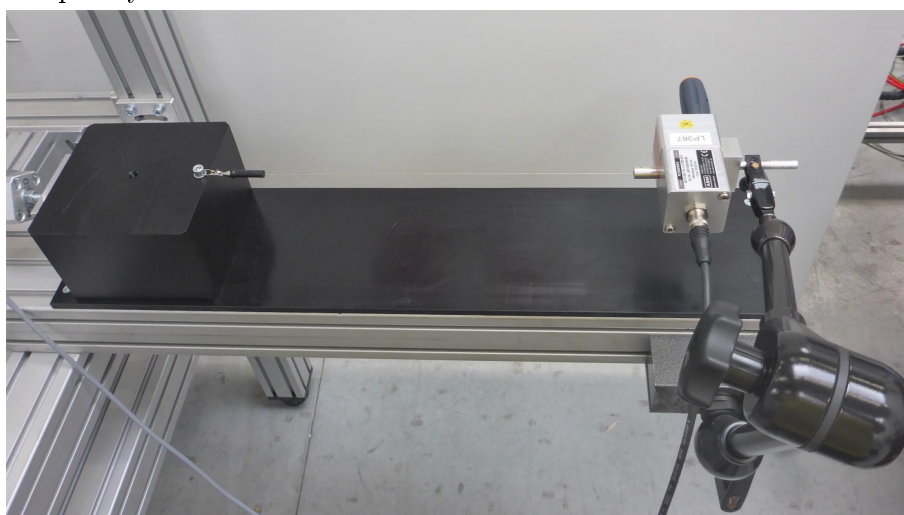
Pro záznam průběhu polohy tělesa na čase během experimentálního měření slouží zařízení WS10 Cable Extension Position Sensor, který je na obr. 54b. Jedná se o měřič s navíjecím drátem, který je možné uchytit k tělesu pomocí připevněného oka, viz obr. 54a. Rozsah zařízení je 50 cm, proto byly provedené testy nadefinovány tak, aby tuto hodnotu amplituda pohybu nepřesáhla. Maximální síla tažení je 5,5 N a tlačení 2,8 N. Při přípravném měření bylo zjištěno, že toto zařízení vnáší do záznamu síly pro měřený rozsah rychlostí chybu zhruba 4 N, což je vzhledem k měřeným rozsahům síly v řádech desítek Newtonů velmi vysoká hodnota. Z tohoto důvodu byl záznam průběhu polohy tělesa během experimentu odměřen zvlášť před samotným měřením síly. Vzhledem k preciznosti budicího zařízení byl průběh posuvu na čase při měření stejný bez ohledu na testovaném materiálu povrchu tělesa a podložky, změna byla pouze v průběhu působící síly.



(a) Uchycení zařízení pro měření polohy k tělesu



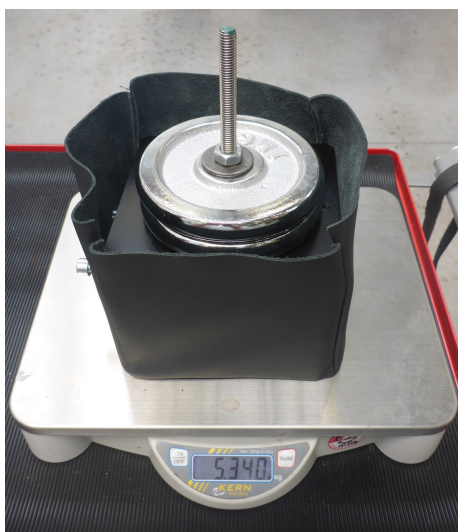
(b) Zařízení WS10 Cable Extension Position Sensor



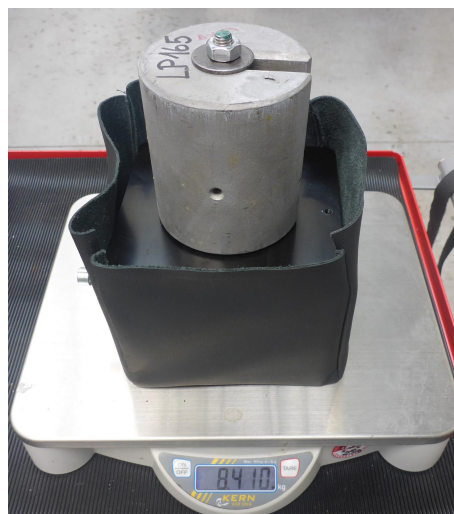
(c) Experimentální soustava pro měření polohy tělesa

Obr. 54: Přehled částí experimentální soustavy pro měření polohy tělesa

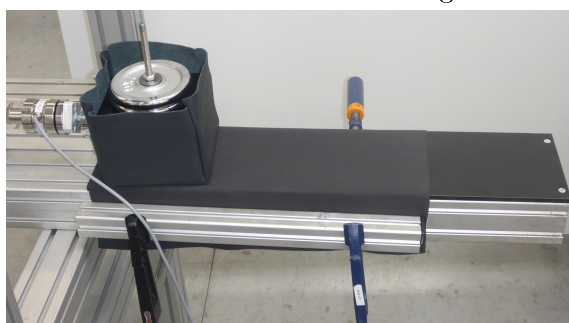
Pro variantu tělesa v koženém potahu pohybujícího se po podložce potažené látkou byly provedené dodatečné varianty testu se závažím na tělese. U této kombinace materiálů byly přidány další dvě sady testů s přípevním závažím o hmotnosti 2 kg a 5 kg. Opakováním obou nadefinovaných experimentálních měření (viz oddíl 6.1.3) bylo možné získat více dat, porovnat získané koeficienty (viz podkapitola 6.2, tabulka 4) a na základě jejich shody ohodnotit kvalitu provedení testu.



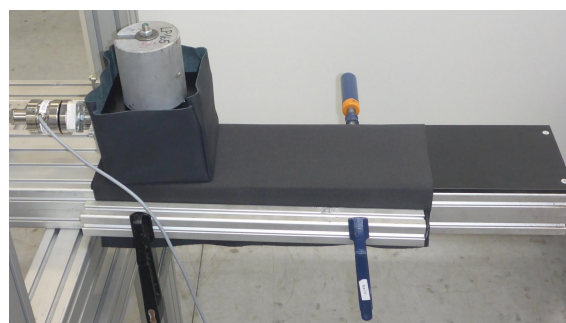
(a) Těleso v koženém potahu se závažím o hmotnosti 2 kg



(b) Těleso v koženém potahu se závažím o hmotnosti 5 kg



(c) Experimentální soustava tělesa v koženém potahu se závažím o hmotnosti 2 kg na podložce potažené látkou



(d) Experimentální soustava tělesa v koženém potahu se závažím o hmotnosti 5 kg na podložce potažené látkou

Obr. 55: Tělesa v koženém potahu se závažími na látce a příslušné experimentální soustavy

V tabulce 2 je uveden přehled hmotností všech variant tělesa, které byly během experimentálních měření použity. Hmotnost tělesa je důležitým parametrem, protože je úměrná tíhové síle, která je úměrná třecí síle, jež je hlavním předmětem zkoumání tohoto měření.

varianta tělesa	celková hmotnost [kg]
kostka POM-C, viz obr. 51a	3,150
kostka POM-C v látkovém potahu, viz obr. 51b	3,200
kostka POM-C v koženém potahu, viz obr. 51c	3,270
kostka POM-C kostka POM-C v koženém potahu se závažím 2 kg, viz obr. 55a	5,340
kostka POM-C kostka POM-C v koženém potahu se závažím 5 kg, viz obr. 55b	8,410

Tab. 2: Tabulka hmotností všech variant tělesa při experimentálních měření

6.1.2 Další varianta testovací soustavy

Dále byla zkoumána možnost rozšířit testovací soustavu o pružný člen, který by byl zařazen mezi budící zařízení se siloměrem a těleso. První možná varianta pružného členu v experimentální soustavě je kovová pružina. Informace o výrobě a provedení pružin byly získány z osobní konzultace ve společnosti IVEZA Výroba pružin Plzeň. Experiment je navržen tak, že těleso má být buzeno periodickým pohybem. Pružný člen tedy musí být schopen se smršťovat i roztahovat. Většina vyráběných pružin je tažná nebo tlačná. Tažná pružina je na začátku tvořena závity, které jsou těsně u sebe. Není tedy možné ji už dále stlačovat. Během roztahování pružiny působí proti směru pohybu síla pružiny přímo úměrná tuhosti a výchylce z rovnovážné polohy. Po uvolnění pružiny se vrátí do původního stavu. Tažná pružina může být bez předpětí, což znamená, že závity mají mezi sebou malou vůli (ideálně nulovou). Druhé provedení tažné pružiny je s předpětím, kdy je třeba vyvinout počáteční sílu, aby se pružina začala natahovat. Konce tlačných pružin mohou být otevřené nebo uzavřené a obrobené nebo neobrobené.

Druhým typem je tlačná pružina sloužící k pružnému stlačování. Mezi závity jsou mezery, takže při působení vnější síly se pružina stlačuje a působí opět silou proti směru pohybu o velikosti úměrné tuhosti pružiny a délce stlačení. Když na tlačnou pružinu přestane působit vnější síla, vrátí se do svého rovnovážného stavu. Pokud by se za tlačnou pružinu zatáhlo, došlo by k trvalé deformaci a pružina by již neměla svou původní tuhost.

Ani jedna z těchto pružin tedy není vhodná pro periodický pohyb v okolí rovnovážné polohy. Pružina, která by byla vhodná, je tzv. tažno-tlačná. Jedná se v podstatě o tlačnou pružinu (mezi závity jsou v rovnovážné poloze mezery), kterou je ale možné také roztahovat bez trvalé deformace. Takováto pružina ale nemá obecně symetrickou tuhost pro stlačování i roztahování, což komplikuje modelování pohybu tělesa, které je k ní přichycené. Příklad tažno-tlačné pružiny je na obr. 56.



Obr. 56: Příklad tažno-tlačných pružin zakončených celými otevřenými neobrobenými oky, fotka pořízena ve společnosti IVEZA Výroba pružin Plzeň

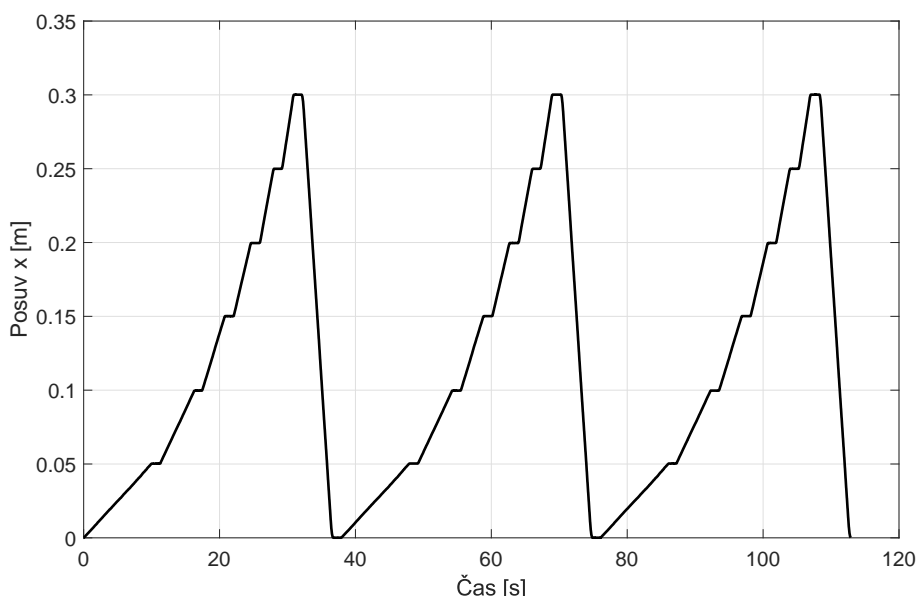
V případě objednání pružiny je třeba poskytnout výrobcí parametry pružiny: d průměr drátu, D střední průměr vinutí (vnější průměr celé pružiny), i počet činných závitů, délku těla (závitové části), závěsnou délku (mezi vnitřky ok) a materiál. Standardní pružiny jsou vyrobeny z pružinové oceli (patentovaný drát) nebo z nerezové oceli. V případě, že zadavatel požaduje od pružiny určitou tuhost, musí konkrétní parametry dopočítat. Pro účely experimentu je důležité zvolit vhodnou tuhost, protože při použití pružiny s příliš nízkou tuhostí nedojde k přenesení pohybu od budicího zařízení a zároveň příliš vysoká tuhost přenáší pohyb jako tuhá vazba a snižuje se pak přidaná hodnota použití pružiny (viz obr. 22). Vzorec pro výpočet tuhosti šroubové pružiny je [11]

$$k = \frac{Gd^4}{iD^3}, \quad (90)$$

kde d je průměr drátu, D střední průměr vinutí, i počet činných závitů a G modul pružnosti ve smyku. Použití pružiny jako pružného členu pro experimentální soustavu se ukázalo problematické nejen v nesymetričnosti tuhosti tažno-tlačné pružiny a v komplikovanosti při objednání vhodné pružiny, ale i v uchycení ke zbytku experimentální soustavy. Provedení konců pružin je půl oko, celé oko, vmáčknuté oko nebo prodloužené oko. Vzhledem k tomu, že jsou pružiny zakončeny oky, je těžké je pevně uchytit a zajistit přímočarý pohyb tak, aby se připojené těleso neodchylovalo od směru buzení. Technické provedení uchycení pružiny bez nežádoucího ovlivnění kvality měření nebylo v testovacím oddělení možné. Jako další varianta pružného členu byl zvažován tlumič. Vysoká hodnota tlumení by ale vnášela do experimentu disipaci energie a bylo by těžké rozpoznat ztrátu energie vlivem tření a tlumení. Z tohoto důvodu byla nakonec zvolena experimentální soustava bez pružného členu v podobě uvedené na obr. 49.

6.1.3 Popis provedených experimentálních měření

Během experimentálního měření byly provedeny dva typy testů. Jako první byla nadefinována procedura roztlačování tělesa konstantní rychlostí postupně 5, 10, 15, 20, 25 a 30 mm/s. Každou rychlostí se těleso v jednom cyklu pohybovalo po dráze 5 cm, celkem tedy 30 cm, a mezi jednotlivými rychlostmi se na 1 sekundu zastavilo. Válcí bylo při tomto měření nastaveno maximální zrychlení $0,2 \text{ m/s}^2$, což pro daný rozsah rychlostí zajistilo dosažení požadované rychlosti ve velice krátkém časovém úseku (od 25 do 150 ms). Tento typ testů byl stanoven za účelem získání statického a dynamického koeficientu tření μ_s a μ_d . Poté, co těleso urazilo dráhu 30 cm, bylo válcem zataženo zpět a pohyb se opakoval. V jednom měření se zopakoval pohyb třikrát a celkově trval jeden test necelé dvě minuty. Průběh posuvu při jednom měření tohoto experimentu je zobrazen na obr. 57. Každé měření bylo provedeno třikrát pro každou z dvanácti variant kombinací materiálů (viz obr. 52) a dvě další se změnou hmotnosti tělesa pomocí závaží (viz obr. 55). Celkově byl tedy tento test proveden čtyřicetdvakrát.

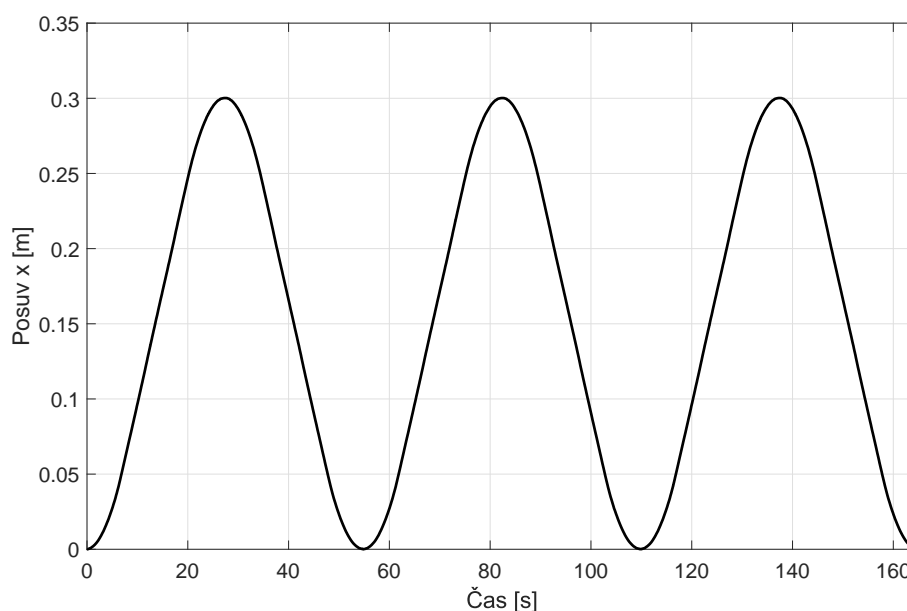


Obr. 57: Průběh posuvu tělesa při experimentálním měření č. 1

Jako druhý test byl nadefinován periodický pohyb s kinematickým buzením o maximální rychlosti 15 mm/s. Tato hodnota rychlosti byla zvolena, protože z testovaných rychlostí vykazovala nejnižší rozptyl v naměřených hodnotách síly. Válcí bylo pro tento test nastaveno minimální možné zrychlení $0,002 \text{ m/s}^2$, aby bylo dosaženo pozvolnějšího přechodu mezi rychlostmi. Díky tomu je možné ze změřených hodnot průběhu síly na čase získat kromě statického a dynamického koeficientu tření μ_s a μ_d také exponenciální konstantu přechodu c či data fitovat na další modely s více parametry. Průběh posuvu při jednom měření druhého experimentu je zobrazen na obr. 58, opět se jednalo o tři periody pohybu. Celkový čas jednoho testu byl necelé tři minuty. Každé měření bylo provedeno třikrát pro

každou z dvanácti variant kombinací materiálů (viz obr. 52) a dvě další se změnou hmotnosti tělesa pomocí závaží (viz obr. 55). Celkově byl i druhý test proveden čtyřicetdvakrát.

Pro sběr veškerých dat během měření (čas, síla, poloha) byl použit program catman Data Acquisition Software. Po každém provedeném měření bylo těleso vráceno do výchozí polohy. Vždy bylo překontrolováno dostatečné utažení šroubů, které sloužily k uchycení budicího zařízení k tělesu (viz obr. 53c). Před začátkem každého měření bylo zajištěno, aby siloměr měřil hodnotu co možná nejbližší k nule pomocí jemného pozicování tělesa (drobné poklepávání na těleso v potřebném směru).



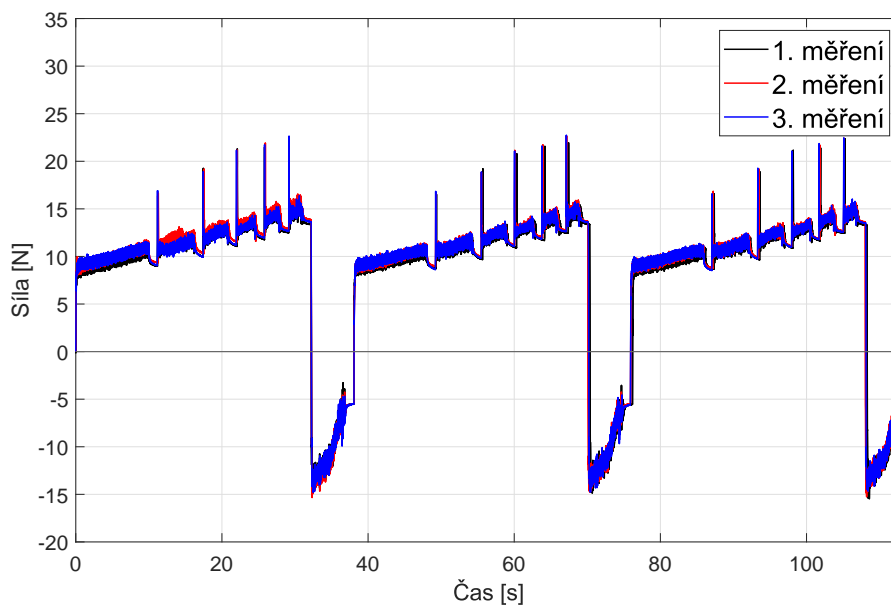
Obr. 58: Průběh posuvu tělesa při experimentálním měření č. 2

6.2 Výsledky experimentálního měření

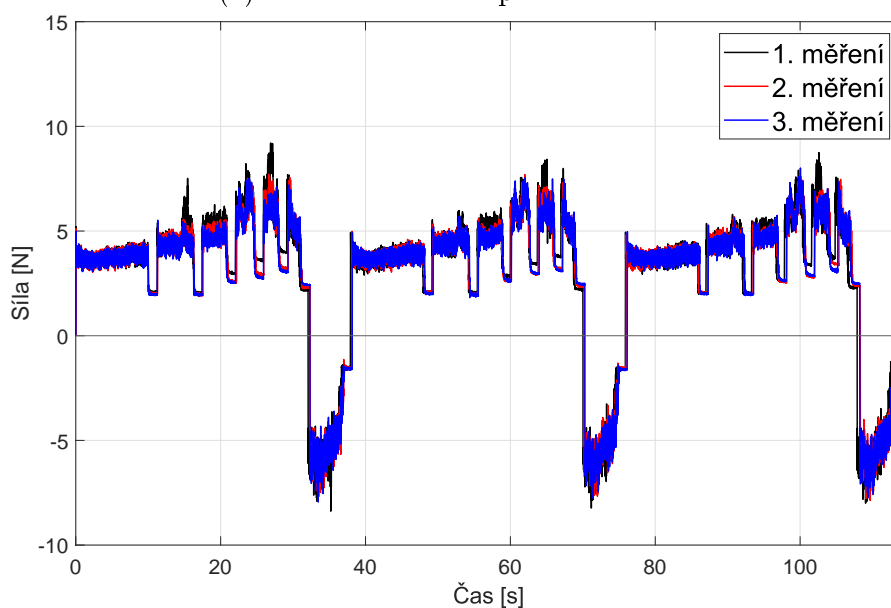
Obě experimentální měření popsaná v oddíle 6.1 byla pro každou z dvanácti kombinací materiálu provedena třikrát za kontrolovaných podmínek. Výsledkem měření jsou data průběhu síly na čase za předepsaného posuvu, který je zobrazen pro první test na obr. 57 a pro druhý test na obr. 58. V rámci zpracování dat i během měření bylo vyhodnocováno, zda si výsledky ze tří opakování měření daného testu odpovídají. V případě, že došlo k výrazné odchylce některé měřené varianty (např. vlivem znečištění povrchu), bylo měření opakováno.

Na obr. 59a a 59b je ukázka výsledných dat měření prvního testu pro kombinaci materiálů kůže na látce a POM-C na hliníku. Výsledky se pro jednotlivé kombinace materiálů liší nejen ve velikosti působící síly, ale i v průběhu, což ukazuje komplikovanost jevu tření. V průběhu síly jsou patrné výkyvy během roztlačování tělesa. Ty odpovídají statické třecí síle, která musí být překonána pro uvedení tělesa do pohybu. Následný průběh síly při konstantní rychlosti odpovídá dynamické třecí síle. U varianty kůže na látce jsou vrcholy

statické třecí síly výraznější než u hladší kombinace povrchu POM-C na hliníku.



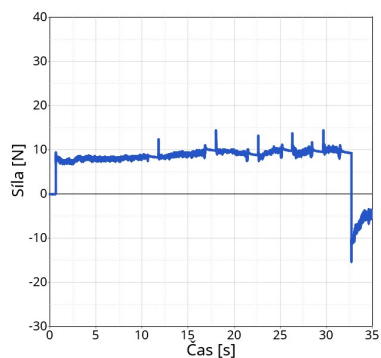
(a) Těleso v koženém potahu na látce



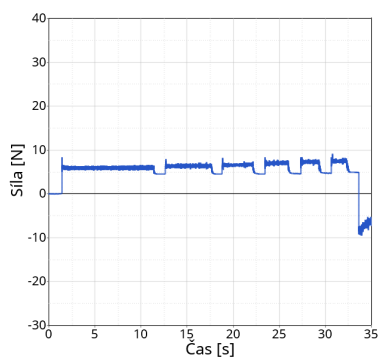
(b) Těleso z materiálu POM-C na hliníku

Obr. 59: Příklady průběhu působící síly budicího zařízení při experimentálním testu č. 1, uvedené výsledky jsou pro tři měření tří period pohybu

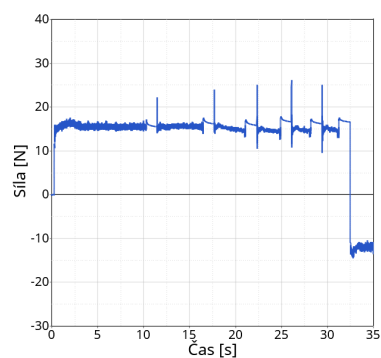
Na obr. 60 je přehled průběhu působící síly během jedné periody experimentu č. 1 pro všech dvanáct kombinací materiálů. Stejně materiály tělesa jsou umístěny ve sloupcích nad sebou a stejné materiály podložky jsou v řádku vedle sebe.



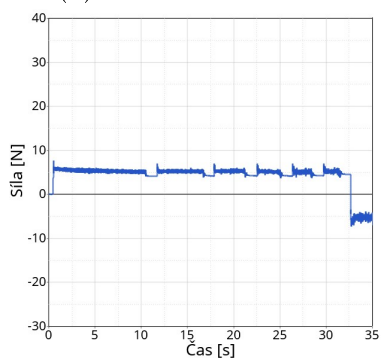
(a) POM-C na POM-C



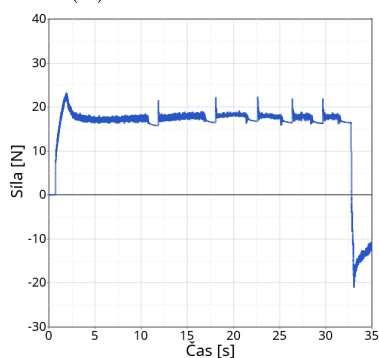
(b) Látka na POM-C



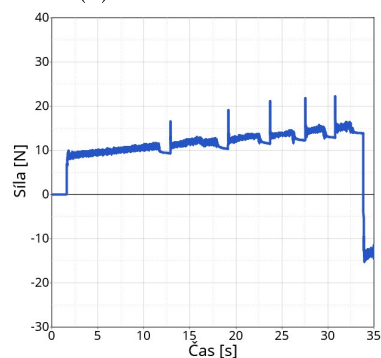
(c) Kůže na POM-C



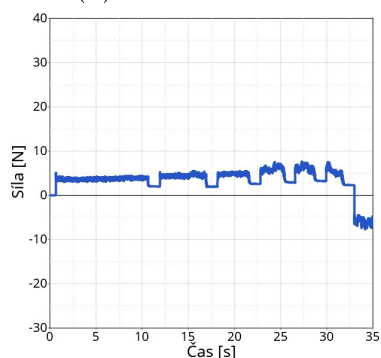
(d) POM-C na látce



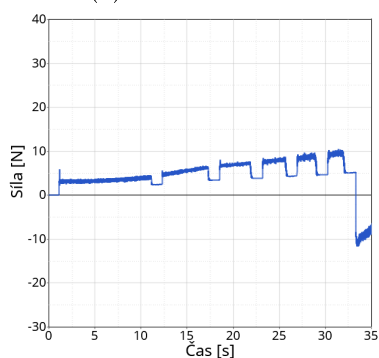
(e) Látka na látce



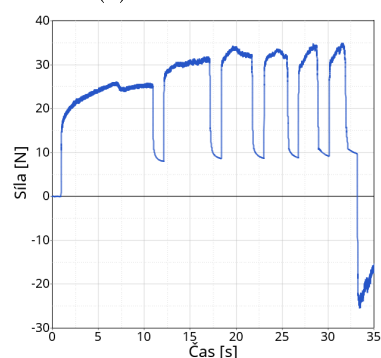
(f) Kůže na látce



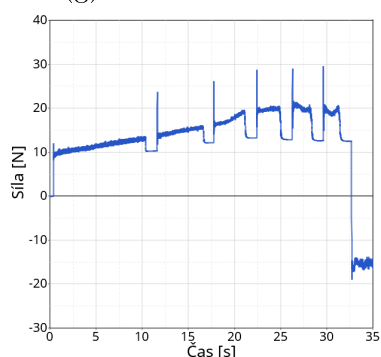
(g) POM-C na hliníku



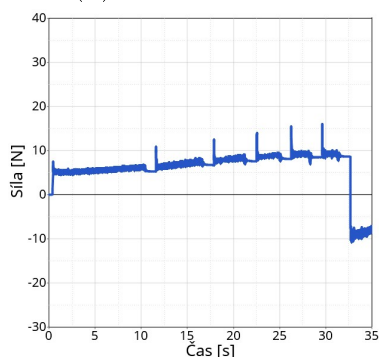
(h) Látka na hliníku



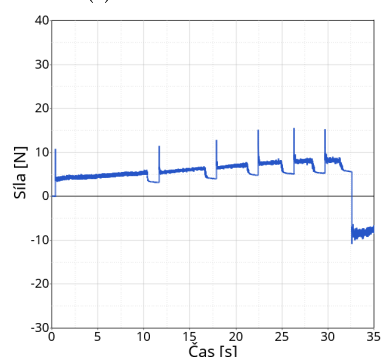
(i) Kůže na hliníku



(j) POM-C na kůži



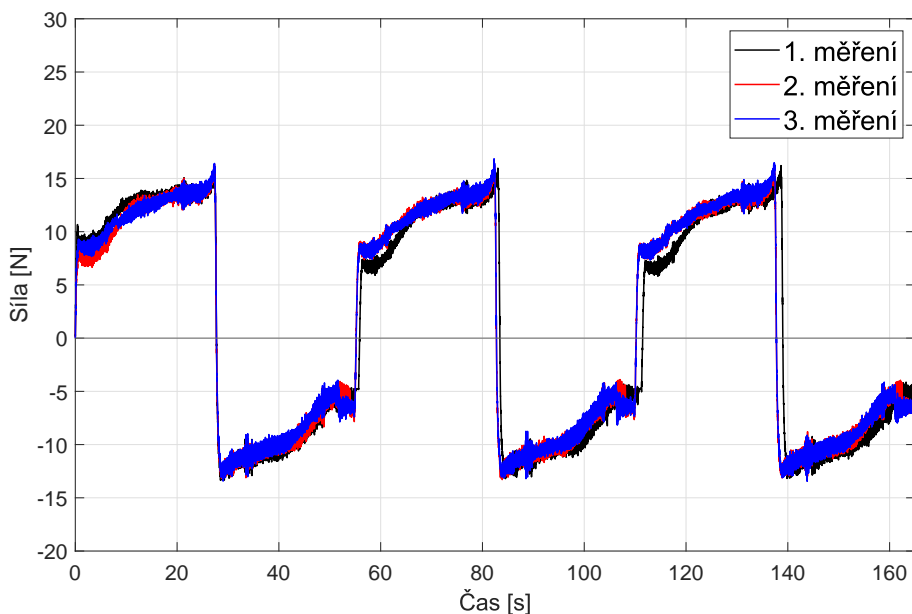
(k) Látka na kůži



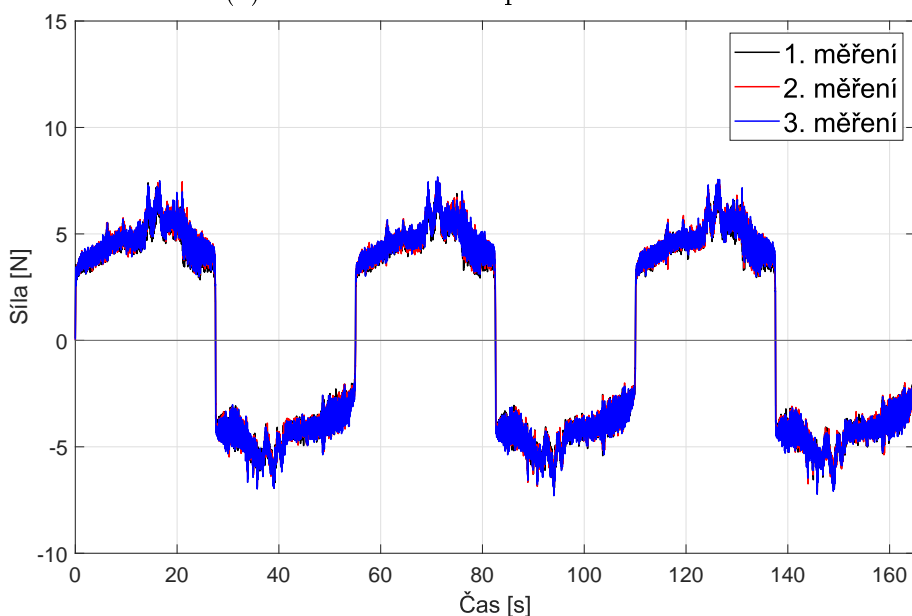
(l) Kůže na kůži

Obr. 60: Přehled průběhu síly během jedné periody experimentu č. 1

Na obr. 61a a 61b je ukázka výsledných dat měření druhého testu pro kombinaci materiálů kůže na látce a POM-C na hliníku. Výsledky se pro jednotlivé kombinace materiálů opět liší nejen ve velikosti působící síly, ale i v průběhu, kdy např. při pohybu kůže po látce je dosaženo maximální síly těsně před změnou směru pohybu tělesa (změna znaménka působící síly na záporné), oproti tomu u měření POM-C na hliníku v polovičním čase.



(a) Těleso v koženém potahu na látce



(b) Těleso z materiálu POM-C na hliníku

Obr. 61: Příklad průběhu působící síly budícího zařízení při experimentálním testu č. 2, uvedené výsledky jsou pro tři měření tří period pohybu

6.3 Určení parametrů tření z experimentálních dat

Na základě dat získaných z experimentálního měření popsaného v podkapitole 6.1, jejichž příklady jsou uvedeny v podkapitole 6.2, byly určeny koeficienty tření. V případě experimentálního měření č. 1 byly výsledné hodnoty stanoveny odečtením z grafu průběhu síly na čase (viz obr. 59b a 59a). Statická třecí síla F_s byla stanovena jako průměrná hodnota všech lokálních extrémů, které se v grafu objevily při roztlačování tělesa (viz poznámky u křivek v grafu na obr. 62). Hodnota statického koeficientu tření μ_s byla pak stanovena podělením F_s tíhovou silou tělesa

$$\mu_s = \frac{F_s}{F_n} = \frac{F_s}{m \cdot g}. \quad (91)$$

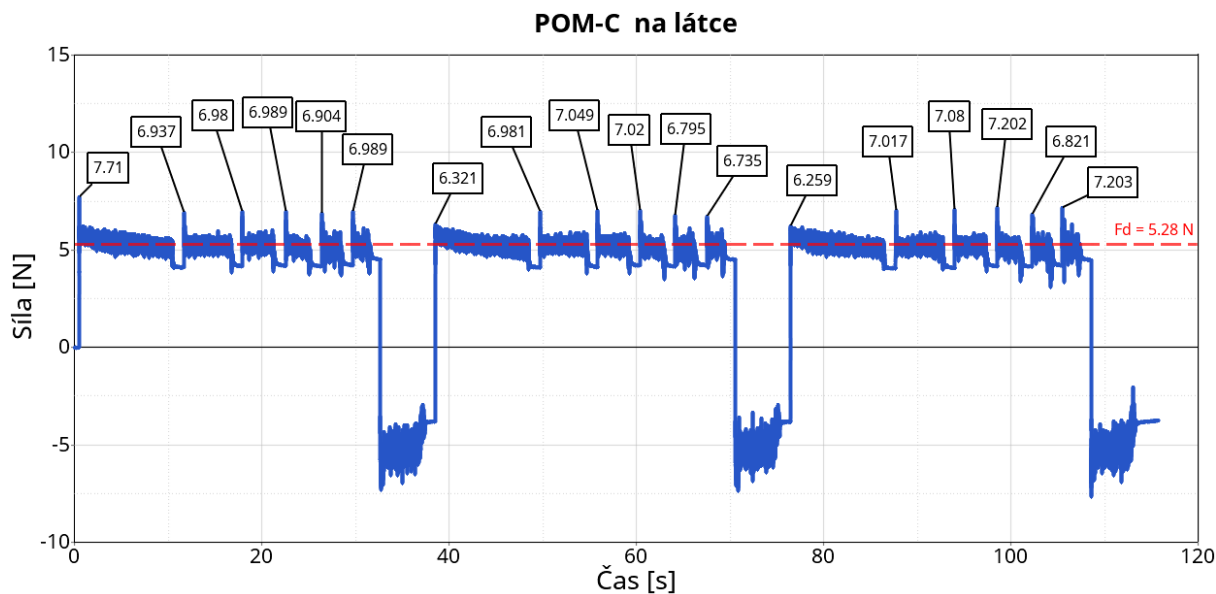
Dynamický koeficient tření μ_d byl stanoven z dynamické třecí síly F_d jako

$$\mu_d = \frac{F_d}{F_n} = \frac{F_d}{m \cdot g}. \quad (92)$$

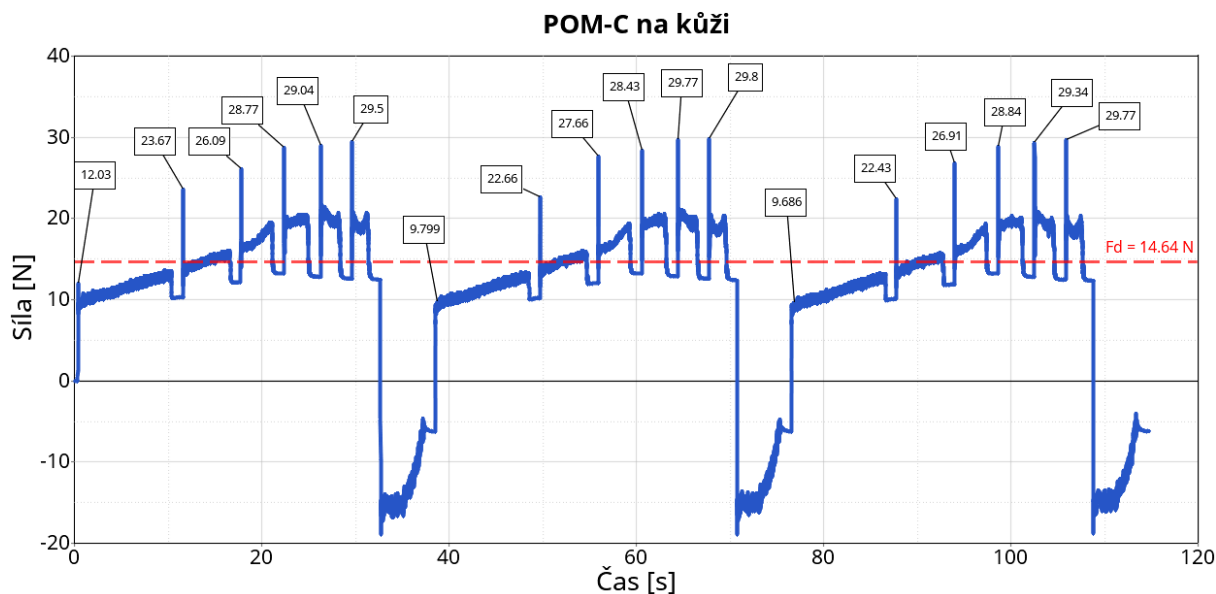
Velikost F_d byla získána jako průměrná hodnota z působící síly mimo roztlačování tělesa a části měření s nulovou rychlostí, tedy v případě konstantní rychlosti (nulového zrychlení tělesa). Hmotnosti všech variant těles jsou uvedeny v tabulce 2. Za gravitační konstantu g bylo dosazeno $9,81 \text{ m/s}^2$.

Na obr. 62 je zobrazen příklad vyhodnocení dvou variant měření. Statická i dynamická třecí síla vychází v případě pohybu POM-C po kůži vyšší než po látce. Je patrné, že průběh síly na čase se pro stejné těleso (v uvedeném příkladu POM-C) značně liší v závislosti na materiálu podložky nejen ve velikosti síly, ale i v jejím průběhu. V případě pohybu materiálu POM-C po látce (viz obr. 62a) je pro měřený rozsah rychlostí konstantní dynamická třecí síla (při konstantní rychlosti). Pro popis třecí síly by tedy byl dostačující Coulombův model. Oproti tomu při pohybu POM-C po kůži (viz obr. 62b) roste hodnota dynamické třecí síly s rostoucí velikostí rychlosti. Pro zahrnutí tohoto chování do simulace by tedy bylo potřeba použít složitější model tření.

Dalším rozdílem je, že během pohybu POM-C po látce se hodnota dynamického koeficientu tření $\mu_d = 0,17$ liší od statického $\mu_s = 0,22$ pouze o malou hodnotu. V případě pohybu POM-C po kůži je rozdíl mezi koeficienty výrazně vyšší: $\mu_s = 0,80$, $\mu_d = 0,47$. Získané koeficienty tření pro všechny kombinace materiálů jsou uvedeny v tabulce 3 a 4.



(a) Vyhodnocení statické a dynamické třecí síly při pohybu tělesa materiálu POM-C po látce



(b) Vyhodnocení statické a dynamické třecí síly při pohybu tělesa materiálu POM-C po kůži

Obr. 62: Příklady vyhodnocení experimentu č. 1

materiál povrchu tělesa	materiál povrchu podložky	μ_s	μ_d
POM-C	POM-C	0,40	0,27
POM-C	hliník	0,19	0,15
POM-C	látka	0,22	0,17
POM-C	kůže	0,80	0,47
látka	POM-C	0,26	0,21
látka	hliník	0,22	0,17
látka	látka	0,55	0,41
látka	kůže	0,40	0,22
kůže	POM-C	0,77	0,48
kůže	hliník	0,91	0,90
kůže	látka	0,58	0,37
kůže	kůže	0,40	0,18

Tab. 3: Koeficienty tření těles různých kombinací materiálu určené z experimentálních dat

V tabulce 3 jsou výsledné koeficienty tření pro dvanáct kombinací materiálů tělesa a podložky. Nejnížší hodnoty koeficientů tření vyšly při pohybu materiálu POM-C po hliníku: $\mu_s = 0,19$, $\mu_d = 0,15$. Nejvyšší hodnoty naopak dosáhla třecí síla v případě pohybu kůže po hliníku: $\mu_s = 0,91$, $\mu_d = 0,90$. V tomto případě vyšla také hodnota statické a třecí síly téměř stejná.

Vzhledem k tomu, že byl v měřených variantách použit stejný materiál pro pohybující se těleso i podložku, je možné porovnat výsledné koeficienty tření při kontaktu stejných dvojic materiálů POM-C s látkou, POM-C s kůží a látka s kůží. V kombinaci materiálů POM-C a látka vyšly koeficienty tření $\mu_s = 0,22$, $\mu_d = 0,17$ a s tělesem POM-C a $\mu_s = 0,26$, $\mu_d = 0,21$ s tělesem potaženým látkou. Hodnoty koeficientů si tedy odpovídají dobře. Na obrázcích 60b a 60d je vidět, že i průběhy sil během měření jsou velmi podobné. V obou případech je při všech konstantních rychlostech velikost působící síly také konstantní.

Při kombinaci materiálů POM-C a kůže vyšly koeficienty tření: $\mu_s = 0,80$, $\mu_d = 0,47$ s tělesem POM-C a $\mu_s = 0,77$, $\mu_d = 0,48$ s tělesem potaženým kůží. Hodnoty koeficientů si tedy odpovídají velmi přesně. Na obrázcích 60c a 60j je ale vidět, že průběh sil během měření je rozdílný. V případě pohybu kůže po POM-C je při konstantní rychlosti velikost síly také konstantní, zatímco při pohybu POM-C po kůži je síla větší při vyšší rychlosti a roste i během pohybu s konstantní rychlostí.

V případě kombinace materiálů látka a kůže vyšly koeficienty tření $\mu_s = 0,40$, $\mu_d = 0,22$ pro pohyb látky po kůži a $\mu_s = 0,58$, $\mu_d = 0,37$ pro pohyb kůže po látce. Zde je již rozdíl mezi výsledky poměrně značný. Hodnota koeficientů tření při pohybu látky po kůži je ale velmi blízká výsledným koeficientům při pohybu kůže po látce s tělesem se závažím o hmotnosti 5 kg, kde jsou výsledky $\mu_s = 0,40$, $\mu_d = 0,25$, viz tabulka 4. Na obrázcích 60f a 60k je vidět, že síly během měření s materiály látka a kůže dosahují různé velikosti, ale mají podobnou tendenci v průběhu. U obou kombinací materiálů je patrný nárůst působící

síly pro vyšší rychlosti i během pohybu s konstantní rychlostí.

V tabulce 4 jsou porovnány výsledky ze třech různých měření síly při pohybu tělesa potaženého kůží po látkové podložce. Výsledné koeficienty tření v případě tělesa bez závaží a se závažím o hmotnosti 2 kg vyšly s dobrou shodou. V případě se závažím vyšly oba koeficienty o něco nižší. U varianty s těžším závažím o hmotnosti 5 kg vyšly při srovnání tří variant v tabulce 4 koeficienty tření nejnižší. Pro tuto kombinaci materiálů se tedy ukázala tendence nižšího koeficientu tření při vyšší tíhové síle.

hmotnost závaží [kg]	celková hmotnost tělesa se závažím [kg]	μ_s	μ_d
–	3,270	0,58	0,37
1,970	5,340	0,51	0,33
5,045	8,410	0,40	0,25

Tab. 4: Koeficienty tření látky s kůží určené z experimentálních dat pohybu tělesa v koženém potahu po látce při různých zatíženích

7 Závěr

Tato diplomová práce se zabývala modelováním suchého tření v numerických výpočtech se zaměřením na rychlé děje, především pak simulace nárazu v rámci vývoje nových automobilových sedaček. Toto téma bylo zpracováno jak teoreticky, tak i prakticky implementováním simulace tření v programu Matlab a LS-Dyna. Podařilo se modelovat vybrané děje srovnatelným způsobem pomocí obou těchto programů. V rámci práce bylo také navrženo, realizováno a vyhodnoceno experimentální měření za účelem stanovení koeficientů tření ve vybraných modelech. Ze získaných dat měření dvanácti kombinací materiálů byly úspěšně získány koeficienty tření. V následující části textu je zpracováno podrobnější shrnutí jednotlivých částí práce a jsou uvedeny stěžejní závěry. Na základě uvedeného přehledu lze konstatovat, že cíle vytyčené v úvodu práce byly splněny.

Shrnutí teoretické části práce

Nejprve byla provedena studie modelů tření používaných v dynamice poddajných těles. V kapitole 2 byly představeny jako první statické modely tření, které vycházejí z Coulombova modelu se statickým a dynamickým koeficientem tření μ_s a μ_d . Další popsané modely jsou Bensonův model tření, který již zahrnuje Stribeckův efekt pomocí exponenciální konstanty přechodu c . Dále byly uvedeny Hladký Coulombův model, Model založený na rychlosti a Karnoppův model. Druhou skupinou popsaných modelů byly dynamické modely tření, které na rozdíl od statických pracují s vnitřní stavovou proměnnou. Mezi dynamické modely patří modely Dahlův, LuGre, Elasticko plastický, Stick-slip a Gonthierův. V kapitole následoval přehled experimentálních měření, které slouží k získání potřebných parametrů, které se v modelech vyskytují. Popsané experimentální testy byly Rabinowiczův test, test se třemi stupni volnosti, předkluzná testovací soustava, buzený duálně tlumený oscilátor a experimentální soustava s piezoelektrickým pohonem. Jako další byly uvedeny příklady testů z automobilového prostředí. Jednalo se o testy, jejichž účelem bylo stanovit dynamické a statické koeficienty tření mezi různými materiály potahů sedačky a oděvů figuríny.

V kapitole 3 byl představen komerční multifunkční softwarový program LS-Dyna. Popsána byla historie jeho vývoje s ohledem na modelování tření, jeho výpočetní princip, volba časového kroku, explicitní a implicitní metoda časové integrace. Dále bylo vysvětleno definování kontaktu v modelu a tři algoritmy, které slouží k výpočtu kontaktní tuhosti. V dalších oddílech bylo uvedeno, jakým způsobem je do simulací implementováno tlumení a tření. Součástí popisu programu byl i přehled typů výpočtů z oblasti vývoje nových autosedaček a diskuze o citlivosti numerických simulací.

Výsledky simulací v programu Matlab

V programu Matlab byl implementován vybraný statický i dynamický model tření, přičemž výsledky byly uvedeny v kapitole 4. U statického modelu se jednalo o Coulombův model se Stribeckovým efektem a u dynamického o LuGre model. Tyto modely byly apli-

kovány na úlohy dobržďování tělesa s počáteční rychlostí $v_0 = 1$ m/s. Na obr. 11-13 byl ukázán vliv parametrů μ_d , μ_s a c u statického modelu. Ukázalo se, že všechny tři parametry mají na průběh polohy tělesa v závislosti na čase významný vliv. Pro Coulombův model se Stribeckovým efektem byl také připraven model kinematického buzení tělesa přes pružný člen. Na obr. 22 a 23 byl ukázán vliv parametrů pružného členu (tuhost k a tlumení b). Větší vliv na průběh polohy tělesa vykazoval parametr tuhosti k . V závěru kapitoly bylo porovnáno sedm řešičů z rodiny funkcí ODE, které jsou v Matlabu dostupné. Ukázalo se, že řešit modelované úlohy v rozumném čase lze s využitím řešičů ODE23, ODE45 a ODE113.

Výsledky simulací v programu LS-Dyna

V kapitole 5 byla popsána příprava, výpočet a vyhodnocení modelu v LS-Dyna. Kompletní přehled všech 63 výpočtů je uveden v tabulce v příloze A. Simulované úlohy byly dobržďování tělesa s počáteční rychlostí $v_0 = 1$ m/s a roztlačování tělesa lineárně rostoucí silou. Parametry modelu byly voleny stejně jako v případě simulací v Matlabu pro možnost porovnání výsledků. Pro správné fungování tření v modelu bylo důležité zahrnout gravitaci, aby se v modelu projevila tíhová síla. Během výpočtu se objevil problém s nežádoucím natáčením tělesa, které bylo vyřešeno přidáním okrajových podmínek omezující posuv do stran. Další řešený problém bylo nežádoucí překlápění tělesa. Toto bylo odstraněno pomocí úpravy sítě modelu zaoblením ostrých hran kontaktu mezi tělesy a v případě roztlačování působící silou změnou působíště síly.

Dále byly provedeny další varianty výpočtu s tělesem tvaru kvádr místo krychle. Ukázalo se, že rozdíl v posuvu při stejné počáteční rychlosti u obou těles je minimální, což odpovídá reálnému chování. U tělesa tvaru kvádru byl vyšetřen vliv zaoblení hrany. U kvádru s ostrou hranou sice nedocházelo k nežádoucímu překlápění jako v případě krychle, ale zaoblení hrany mělo podstatný vliv na uraženou vzdálenost. Pro úlohu dobržďování tělesa byl vyšetřen i vliv velikosti konečných prvků. Při zmenšení cílové velikosti elementu z 5 mm na 2 mm měl model při stejných parametrech problém se stabilitou a výpočet opakovaně skončil předčasně s chybovou hláškou. Pro zvýšení stability bylo nutné přidat viskózní koeficient tlumení VDC a také škálovat kontaktní tuhost pomocí parametrů SFS a SFM. S touto úpravou již výpočet proběhl v pořádku. Dále byl porovnán vliv použitého kontaktního parametru, který se pro řešenou úlohu projevil jen minimálně.

Porovnání výsledků simulací v programech Matlab a LS-Dyna

Na obr. 42 jsou porovnány výsledky modelů dobržďování tělesa modelovaných v Matlabu i v programu LS-Dyna. Podařilo se dosáhnout velmi dobré shody mezi výstupy obou programů. Dynamický LuGre model připravovaný v Matlabu měl lepší shodu než Coulombův model díky vyššímu množství parametrů, které se dají upravovat. Tomuto výsledku odpovídá i popsáný algoritmus tření v LS-Dyna, který obsahuje mimo Coulombova tření se Stribeckovým efektem i vztah s vnitřní stavovou proměnnou a tuhostí rozhraní, podobně jako v případě dynamického Dahlova modelu, ze kterého je LuGre odvozen. Na obr. 48 jsou porovnány výsledky průběhu posuvu na čase při roztlačování tělesa lineárně rostoucí silou

$F = 18 \cdot t$ modelovaných v Matlabu i v programu LS-Dyna. Opět bylo úspěšně dosaženo velmi dobré shody pro statický i dynamický model. Výsledkům z programu LS-Dyna opět lépe odpovídaly výsledky získané v Matlabu s dynamickým LuGre modelem.

Výpočty v programu Matlab trvají ve srovnání s LS-Dyna kratší dobu. Je tedy možné rychleji porovnávat vliv vybraných parametrů, který je z výsledků jasně patrný. Další výhodou je, že vzhledem k jednoduchosti modelu není výpočet zatížen numerickou nestabilitou (předčasným končením s chybovou hláškou). Při práci s větším a složitějším modelem již není možné zapracovat do simulace všechny aspekty chování jednotlivých komponentů a interakcí mezi nimi manuálně. Je tedy potřeba využít komerční software. Rozsáhlý výpočetní program typu LS-Dyna přináší možnost vytvořit komplexní model, který počítá s celou řadou parametrů. Další výhodou výpočtů provedených v programu LS-Dyna je, že výsledky obsahují nejen graf s průběhy polohy a rychlosti na čase, ale i vizualizaci pohybu tělesa a další veličiny (napětí, deformace, vnitřní energie...), které pomáhají s analýzou simulací. Program Matlab je tedy vhodný použít při vyšetřování konkrétního jevu nebo parametru. Při práci na rozsáhlých modelech s velkým množstvím komponentů, materiálů a kontaktů je praktičtější provádět výpočty v programu LS-Dyna.

Experimentální měření a jeho výsledky

V kapitole 6 je popsáno experimentální měření, které se podařilo navrhnout, připravit a zrealizovat ve spolupráci s oddělením Testing společnosti Lear Corporation Czech Republic, s. r. o. V této kapitole je podrobně popsána celá experimentální soustava, která se skládala z tělesa, podložky, siloměru a budicího zařízení. Součástí testu bylo také měření průběhu posuvu pomocí snímače polohy. Zkoumány byly kombinace materiálů polyoximetylen (POM-C), kůže a látka na tělese a POM-C, hliník, kůže a látka na podložce. Celkem bylo testování provedeno na dvanácti různých kombinacích materiálů. Navrženy a provedeny byly dva různé typy testů. Při prvním testu se těleso pohybovalo po částech konstantní rychlostí. Vyšetřována byla síla při roztlačování tělesa (statická třecí síla) a síla pro udržení konstantní rychlosti tělesa (dynamická třecí síla). Při druhém testu se těleso nepohybovalo pouze s konstantní rychlostí, ale konalo kmitavý pohyb s průběhem rychlosti střídavě od 0 mm/s do 15 mm/s. Druhý test se zaměřoval i na získání exponenciální konstanty přechodu c či dalších parametrů modelu zohledňující změnu třecí síly v závislosti na změně rychlosti. Získaná data obsahují průběh působící síly na čase při předepsaném kinematickém buzení pro celkem 84 provedených měření.

Z naměřených dat prvního experimentu byly získány koeficienty tření pro Coulombův model, které jsou uvedeny v tabulce 3. Statický koeficient tření byl stanoven z průměrné velikosti síly, která byla potřeba pro roztlačení tělesa. Dynamický koeficient tření byl vypočítán z průměrné hodnoty síly, která působila při konstantní rychlosti tělesa. Ukázalo se, že pro některé kombinace materiálů (POM-C na POM-C, látka na POM-C, kůže na POM-C, POM-C na látce, látka na látce, POM-C na hliníku, viz obr. 60) je působící síla při konstantní rychlosti konstantní a tedy Coulombův model dostatečně věrně popisuje reálné chování systému. Pro ostatní kombinace materiálů je patrný nárůst působící síly při vyšší rychlosti tělesa, což ukazuje, že věrné popsání reálného chování vyžaduje složitější

model. Hodnoty statického koeficientu tření vyšly v rozsahu od 0,19 do 0,91 a hodnoty dynamického koeficientu od 0,15 do 0,9. Nejnížší hodnotu koeficientů tření měla kombinace materiálů POM-C na hliníku. Nejvyšší hodnotu pak kůže na hliníku. Bylo provedeno porovnání výsledných koeficientů tření stejných dvojic materiálů při výměně materiálu na tělese a podložce. Pro materiály POM-C a látka si odpovídaly jak hodnoty koeficientů tak i průběhy sil během měření. Pro materiál POM-C a látka si odpovídaly koeficienty tření velmi dobře, ale průběh síly byl rozdílný. V případě kombinace kůže a látky vyšel velký rozdíl v naměřených koeficientech při stejné váze tělesa. Hodnoty si ale odpovídaly velmi přesně při porovnání výsledků pohybu tělesa potaženého látkou po kůži a tělesa se závažím 5 kg potaženém kůží po látce. V případě tření mezi kůží a látkou byla měřena, vyhodnocena a porovnána varianta tělesa se závažími 2 a 5 kg. Ukázalo se, že pro vyšší hmotnost, a tedy tíhovou sílu, jsou koeficienty tření μ_s a μ_d nižší.

Data získaná během experimentálních testů poskytují příležitost pro další zkoumání jevu tření a podrobnější identifikaci parametrů. Navržená experimentální procedura umožňuje v budoucnu získat parametry tření pro nové kombinace materiálů.

8 Seznam použité literatury

- [1] López, I., Busturia, J. and Nijmeijer, H., Energy dissipation of a friction damper, (2004) *Journal of Sound and Vibration*, 278
- [2] Zheng, X., Zhang, R., Wang, Q., Comparison and analysis of two Coulomb friction models on the dynamic behavior of slider-crank mechanism with a revolute clearance joint, (2018), *Applied Mathematics and Mechanics*, 39
- [3] Benson, D. J., Hallquist, J. O., A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures, (1990) *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 78
- [4] Pennestrì, E., Rossi, V., Salvini, P. and Valentin, P. P., Review and comparison of dry friction force models, (2015) *Nonlinear Dynamics*, 83
- [5] Kikuuwe, R., Takesue, N., Sano, A., Mochiyama, H., Fujimoto, H., Fixed-step friction simulation: from classical coulomb model to modern continuous models, (2005) *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 1
- [6] Wang, D., Rui, Y., Simulation of the stick-slip friction between steering shafts using ADAMS, (2000), *International ADAMS User Conference*
- [7] Karnopp, D., Computer simulation of stick slip friction in mechanical dynamic systems, (1985), *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 107
- [8] Marques, F., Flores, P., Pimenta Claro, J. C. and Lankarani, H. M., A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems, (2016) *Nonlinear Dynamics*, 86
- [9] Dahl, P. R., Solid friction damping of mechanical vibrations, (1976), *AIAA Journal*, 14
- [10] Åström, K. J., Canudas De Wit, C., Revisiting the LuGre Model stick-slip motion and rate dependence, (2008), *IEEE Control Systems*, 28
- [11] Dupont, P., Street, C., Hayward, V., Armstrong, B., Single state elasto-plastic models for friction compensation, (1999), *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47
- [12] Cha, H. Y., Choi, J., Ryu, H. S., Choi, J. H., Stick-slip algorithm in tangential contact force model for multi-body system dynamics, (2011), *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25
- [13] Gonthier, Y., McPhee, J., Lange, C., Piedbœuf, J. C., A regularized contact model with asymmetric damping and dwell-time dependent friction, (2004), *Multibody System Dynamics*, 11

- [14] Rabinowicz, E., Stick and slip, (1956), Scientific American, 194
- [15] Liu, L., Wu, Z., A new identification method of the Stribeck friction model based on limit cycles (2014), Journal of Mechanical Engineering Science, 228
- [16] Liang, J. and Feeny B. F., Identifying Coulomb and Viscous Friction in Forced Dual-Damped-Oscillaters, (2004), Journal of Vibration and Acoustics, 126
- [17] Liu, Y. F., Li, J., Zhang, Z. M., et. al., Experimental comparison of five friction models of the same test-bed of the micro stick-slip motion system, (2015), Mechanical Sciences, 6
- [18] Yoon, S. and Delevoeye, A., A Study on the Coefficient of Dynamic Friction between Dummy and Seat by Test Method, (2016), International Research Council on Biomechanics of Injury
- [19] Cummings, J., Osterholt G., Calhoun, D. et. al., Occupant Friction Coefficient on Various Combinations of Seat and Clothing, (2009), SAE Technical Papers
- [20] Mangold, O., Prohl, R. et. al., Reduction of Numerical Sensitivities in Crash Simulations on HPC Computers, (2013), High Performance Computing in Science and Engineering
- [21] Hiermaier, S. J., Continuum Mechanics, Discretization and Experimental Characterization, (1990), Springer
- [22] Uniform provisions concerning the approval of vehicles with regard to safety-belt anchorages, ISOFIX anchorages systems and ISOFIX top tether anchorages, 2012 [online]. United Nations Economic Commission for Europe, [cit. 17.5.2020]. Dostupné z: <https://www.unece.org/fileadmin/DAM/trans/main/wp29/wp29regs/R014r5e.pdf>
- [23] Uniform provisions concerning the approval of vehicles with regard to the seats, their anchorages and any head restraints, 2014 [online]. United Nations Economic Commission for Europe, [cit. 17.5.2020]. Dostupné z: <https://www.unece.org/fileadmin/DAM/trans/main/wp29/wp29regs/2015/R017r5e.pdf>
- [24] Federal Motor Vehicle Safety Standards, 2014 [online]. The Association for the Work Truck Industry, [cit. 17.5.2020]. Dostupné z: http://www.ntea.com/NTEA/NTEA/Membery_benefits/Technical_resources/FMVSSguide/FederalMotorVehicleSafetyStandardsFMVSSGuide.aspx
- [25] Australian Design Rule 34/02 – Child Restraint Anchorages and Child Restraint Anchor Fittings, 2012 [online]. Federal Register of Legislation, [cit. 17.5.2020]. Dostupné z: <https://www.legislation.gov.au/Details/F2017C00986>
- [26] Mei, L., Thole, C. A., Clustering Algorithm for Parallel Car-Crash Simulation Analysis (2005), Modelling, Simulation and Optimization of Complex Processes

- [27] Hallquist, J. O., A Procedure for the Solution of Finite Deformation Contact-Impact Problems by the Finite Element Method, (1976) University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCRL-52066
- [28] Hallquist, J. O., DYNA3D User's Manual (Nonlinear Dynamic Analysis of Solids in Three Dimensions), (1986) University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Rept. UCID-19156
- [29] LS-DYNA Theory Manual, 2015 [online]. Liwermore Software Technology Corporation, [cit. 7.11.2019]. Dostupné z: <https://www.dynamore.se/en/resources/manuals/lsdyna-manuals/>
- [30] LS-DYNA Keyword User's Manual Volume I, 2018 [online]. Liwermore Software Technology Corporation, [cit. 19.4.2019]. Dostupné z: <https://www.dynasupport.com/manuals>
- [31] Shampine, L. F., Reichelt, M. W., The MATLAB ODE Suite. (1997) SIAM Journal on Scientific Computing, 18
- [32] Zang, M., Gao, W., Lei, Z., A contact algorithm for 3D discrete and finite element contact problems based on penalty function method, (2011), Computational Mechanics, 48
- [33] Koubek, R., Dedicova, K., Friction of wood on steel, Master's Thesis in Structural Engineering, (2014), Linnaeus University, Faculty of Technology
- [34] Slavík, J., Stejskal, V., Zeman V., Základy dynamiky strojů, (1997), Vydavatelství ČVUT

A Přehled provedených výpočtů v programu LS-Dyna

V této příloze je uvedený přehled všech provedených simulací v programu LS-Dyna. Jedná se o simulace pohybu tělesa na desce, které je roztláčované působící silou nebo zpomaluje vlivem třecí síly z počáteční rychlosti. Postup přípravy modelu a výsledky jsou uvedeny v kapitole 5 Simulace v LS-Dyna. Všechny výpočty byly prováděny ve verzi programu LS-Dyna 7.1.2 na 16 centrálních procesorových jednotek (CPU). Délka simulace byla nastavena u prvního výpočtu na 5 ms, pro 2.–11. na 2500 nebo 3500 ms a od 12. výpočtu dále na 500 ms. Čas výpočtu je odvislý od délky simulace a počtu elementů v modelu (jemnost sítě). Pro uvedené simulace se řádově pohyboval od 10 minut do 1,5 hodiny.

Tabulka obsahuje v prvním sloupci tzv. **ID modelu** každého výpočtu. První část ID je pořadové číslo výpočtu a druhé číslo označuje simulaci, ze které se při přípravě modelu vycházelo. V druhém sloupci **zatěžování** je uvedeno, jaké byly ve výpočtu definovány počáteční nebo okrajové podmínky, tedy jaká byla velikost počáteční rychlosti nebo působící síly. Ve třetím sloupci **úpravy** je popsáno, jaké byly na modelu provedeny změny oproti předchozí variantě (druhé číslo v run ID). Ve sloupci **výsledek** je zaznamenáno výsledné chování modelu. V posledním sloupci **závěr** jsou shrnuty poznatky pro další variantu výpočtu.

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
01_00	$v_0 = 10 \text{ m/s}$	deska, těleso	rovnoměrný pohyb	zvětšit rozměry modelu, prodloužit čas
02_01	$v_0 = 10 \text{ m/s}$	delší výpočetní čas	těleso sjede z podložky, brzdí moc pomalu	tření nefunguje
03_02	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	snížení počáteční rychlosti v_0	těleso sjede z podložky, brzdí moc pomalu	tření nefunguje
04_03	$v_0 = 0,1 \text{ m/s}$	snížení počáteční rychlosti v_0	těleso brzdí moc pomalu	přidání gravitace
05_04	$F = 5 \text{ N}$	přidání souboru se zátěžnou křivkou, působí na set 9 uzlů	kostka se překlápí a odkutálí se z podložky	
06_04	$F = 4 \text{ N}$	přidání gravitace *LOAD_BODY_Z	kostka se překlápí a odkutálí z podložky	
07_04	$v_0 = 0,1 \text{ m/s}$	přidání gravitace *LOAD_BODY_Z	po 1000 ms kostka stoupá	gravitace po celou dobu simulace

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
08_07	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	čas trvání gravitace vyšší než délka simulace	tření funguje, kostka zatačí, viz obr. 30	přidat okrajové podmínky na kostce, viz obr. 28
09_05	$F = 5 \text{ N}$	síla působí na všechny uzly na zadní straně kostky	chybová hláška: negativní objem	moc velká působící síla
10_05	$F = 5 \text{ N}$	síla působí na řadu uzlů na zadní straně kostky	kostka se kutálí, vystřelí nahoru	
11_05	$F = 5 \text{ N}$	změna třecích koeficientů	kostka se kutálí, vystřelí nahoru	síla v zátěžné křivce se musí dělit počtem uzlů
12_05	$F = 5 \text{ N}$	síla v zátěžné křivce podělené počtem uzlů v setu (9)	kostka se nepohybuje	
13_12	$F(t) = 0,02 \cdot t$ [ms] N	lineárně rostoucí síla	kostka se rozjíždí pro $t = 300 \text{ ms}$, tj. $F = 5,4 \text{ N}$	vykreslovat výsledky z nekomprimovaných dat
14_08	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	úprava orientace modelu v prostoru, natočení do směru x	tření funguje, kostka zatačí, viz obr. 30	přidat okrajové podmínky na kostce, viz obr. 28
15_15	$F(t) = 0,02 \cdot t$ [ms] N	úprava orientace modelu v prostoru, natočení do směru x	kostka se rozjíždí pro $t = 290 \text{ ms}$, tj. $F = 5,2 \text{ N}$	
16_12	$F = 5,5 \text{ N}$	vyšší konstantní síla	mikro pohyb na místě	vyšší působící síla
17_14	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	omezení posuvu kostky ve směru osy y a z	zpomalení kostky až po 150 ms konst. rychlosti	zkusit nastavit těleso jako tuhé, zaoblit rohy

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
18_15	$F(t) = 5 + 0,05 \cdot t$ [ms] N	pomalejší náběh lineárně rostoucí síly	kostka se rozjíždí pro $t = 350$ ms, tj. $F = 6,3$ N	
19_16	$F = 6$ N	vyšší konstantní síla	mikro pohyb na místě	
20_17	$v_0 = 1$ m/s	tuhé těleso: *MAT_RIGID	konst. rychlost kostky 25 ms, prudké zastavení pro $t = 40$ ms	posuv omezit jen ve směru y , ne z , nefunguje pak gravitace
21_17	$v_0 = 1$ m/s	okrajová podmínka pro posuv ve směru y	zpomalování, v $t = 50$ ms překlápění, viz obr. 32	zaoblit hranu krychle (zvednutí přední řady uzlů)
22_15	$F(t) = 0,018 \cdot t$ [ms] N	lineárně rostoucí síla	rozjždění kostky pro $t = 290$ ms, tj. $F = 5,2$ N, škobrtnutí v $t = 390$ ms o 1,7 mm, viz obr. 43, 44	set s uzly volit níže
23_22	$F = 6$ N	úprava orientace modelu, natočení do směru x	problém: nedojde k roztlačení kostky, mikro pohyb na místě	„usazování“ vlivem gravitace trvá 20 ms
24_21	$v_0 = 1$ m/s	zaoblení hrany krychle, viz obr. 33	správné chování, viz obr. 34	úprava hrany krychle pomůže ke správnému výsledku
25_22	$F = 0$ N $t \in \langle 0, 200 \rangle$ ms, $F =$ $0,054 \cdot t - 10,8$ N $t \in \langle 200, 300 \rangle$ ms, $F = 0,018 \cdot t$ N $t \in \langle 300, 500 \rangle$ ms	set s uzly pro působení síly níže, viz obr. 29	správné chování, rozjždění kostky pro $t = 300$ ms, tj. $F = 5,4$ N	změna setu pro působení síly pomůže
26_22	$F(t) = 0,018 \cdot t$ [ms] N	zaoblení hrany krychle, viz obr. 33	roztlačení kostky, škobrtnutí, oscilace rychlosti, viz obr. 45	zaoblení hrany krychle nepomůže

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
27_25	$F = 0 \text{ N}$	chování modelu bez zatěžování	mikro pohyb na místě	„usazování“ vlivem gravitace trvá 20 ms, zkusit náběh síly
28_26	$F = 0 \text{ N}$ $t \in \langle 0, 200 \rangle \text{ ms}$, $F = 0,054 \cdot t - 10,8 \text{ N}$ $t \in \langle 200, 300 \rangle \text{ ms}$, $F = 0,018 \cdot t \text{ N}$ $t \in \langle 300, 500 \rangle \text{ ms}$	lineární náběh síly až po prodlevě	oproti předchozí variantě zhoršení: vyšší výkyv v z	náběh síly výsledek nevylepšil
29_23	$F = 6 \text{ N}$	set s uzly níže, viz obr. 29	problém: nedojde k roztlačení kostky	působení budicí síly níže nepomůže
30_23	$F = 0 \text{ N}$ $t \in \langle 0, 50 \rangle \text{ ms}$, $F = 6 \text{ N}$ $t \in \langle 50, 500 \rangle \text{ ms}$	konst. budicí síla až po prodlevě	problém: nedojde k roztlačení kostky	prodleva v působící síle nepomůže
31_26	$F = 6 \text{ N}$	zaoblení hrany krychle, viz obr. 33	problém: nedojde k roztlačení kostky	zaoblení hrany nepomůže
32_25	$F = 0,6 \cdot t \text{ [ms] N}$ $t \in \langle 0, 10 \rangle \text{ ms}$, $F = 6 \text{ N}$ $t \in \langle 10, 500 \rangle \text{ ms}$	lineární náběh síly prvních 10 ms	problém: nedojde k roztlačení kostky	lineární náběh na konst. sílu nepomůže
33_25	$F = 0 \text{ N}$ $t \in \langle 0, 50 \rangle \text{ ms}$, $F = 0,6 \cdot t - 30 \text{ N}$ $t \in \langle 50, 60 \rangle \text{ ms}$, $F = 6 \text{ N}$ $t \in \langle 60, 500 \rangle \text{ ms}$	prodleva + lineární náběh na konst. sílu	problém: nedojde k roztlačení kostky	prodleva + lineární náběh na konst. sílu nepomůže
34_28	$F = 0 \text{ N}$ $t \in \langle 0, 50 \rangle \text{ ms}$, $F = 0,12 \cdot t - 6 \text{ N}$ $t \in \langle 50, 100 \rangle \text{ ms}$, $F = 6 \text{ N}$ $t \in \langle 100, 500 \rangle \text{ ms}$	prodleva + pomalejší lineární náběh na konst. sílu	problém: nedojde k roztlačení kostky	prodleva + pomalejší lineární náběh na konst. sílu nepomůže

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
35_27	$F = 0 \text{ N}$	chování modelu bez zatěžování, bez omezení ve směru y	ustalování polohy x, y, z , viz obr. 31	„usazování“ vlivem gravitace trvá 20 ms
36_29	$F = 6 \text{ N}$	zvednutí tělesa o 1 mm nad desku	během dopadu posuv na x , po dopadu již ne	síla působí, ale po dopadu kostku neroztlačí
37_24	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	menší elementy: 2 mm	chyba po 75 ms: negativní objem, deformace desky, viz obr. 37	nutná úprava kontaktu
38_37	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	menší deska, zvednutí tělesa 0,1 mm nad desku	chyba po 400 ms: negativní objem	zvednutí tělesa prodloužilo čas do chyby, ale ne dostatečně
39_38	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	výpis energií (soubor <i>binout</i>)	chyba po 330 ms: negativní objem, viz obr. 38, 39	
40_31	$F = 6 \text{ N}$	zaoblení všech spodních hran kostky	kostka se rozjíždí v 100 ms, deformuje se, pohyb ve směru z	zaoblení všech hran nepomůže
41_40	$F = 6 \text{ N}$	zaoblení všech spodních hran + zvednutí tělesa o 0,1 mm	posuv po x pouze během dopadu	zaoblení všech hran + zvednutí kostky nepomůže
42_41	$F = 9 \text{ N}$	zvětšení konst. působící síly na 9 N	posuv po x pouze během dopadu	ani větší konst. síla kostku neroztlačí
43_39	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	parametr v kontaktu IGNORE nastaven na 1 (ignorování počátečních penetrací)	chyba po 190 ms, oscilace rychlosti $\pm 10 \text{ m/s}$ a posuvu v z až 1,4 mm	změna parametru IGNORE nepomůže

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
44_39	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	škálovací faktory SFS, SFM = 2 (místo 1)	chyba po 365 ms, oscilace rychlosti, posuvu v z až 2,5 mm	prodloužení výpočtu, ale ne dostatečně, problém s oscilacemi
45_39	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	změna kontaktního algoritmu: SOFT = 1 (viz oddíl 3.2.1)	chyba po 190 ms, oscilace rychlosti, posuvu v z až 1,6 mm	změna kontaktního algoritmu nepomůže
46_39	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	koeficient viskózního tlumení VDC = 20 (místo 0)	výpočet skončí bez chyby, oscilace rychlosti, posuvu v z až 0,8 mm	parametr VDC pomůže snížit oscilace
47_45	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	SOFT = 1, VDC = 20	chyba po 170 ms, oscilace rychlosti, posuvu v z až 5 mm	parametr VDC s jiným kontaktním algoritmem nezafungoval
48_46	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	parametry kontaktu: VDC = 30, SFS, SFM = 2	výpočet bez chybové hlášky, oscilace rychlosti nižší, viz obr. 40	dobré nastavení parametrů kontaktu
49_45	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	úprava parametrů v kontaktu SOFT = 1	chyba po 365 ms, oscilace rychlosti, posuvu v z až 2,5 mm	úprava kontaktu SOFT = 1 nepomůže
50_48	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	VDC = 30, zvýšení škálovacích faktorů: SFS, SFM = 3	výpočet bez chybové hlášky, oscilace rychlosti a posuvu v z se nezlepší	není lepší než předchozí varianta
51_50	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	zvýšení koef. viskózního tlumení VDC = 50, SFS, SFM = 3	výpočet bez chybové hlášky, oscilace rychlosti a posuvu v z se nezlepší	není lepší než předchozí varianta

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
52_39	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	SOFT = 2	chyba po 120 ms, rychlost na konci prudce stoupne, oscilace v z	změna kontaktního algoritmu nezlepší výsledek
53_52	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	SOFT = 2, VDC = 20	chyba po 165 ms, rychlost na konci prudce klesá, oscilace v z	úprava nastavení kontaktu nefunguje
54_53	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	SOFT = 2, VDC = 30, SFS, SFM = 2	výpočet bez chybové hlášky, oscilace rychlosti nižší	dobré výsledky, ale delší dráha než se SOFT = 0, horší shoda s Matlabem
55_54	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	úprava parametrů v SOFT = 2	výpočet bez chybové hlášky, vyšší oscilace rychlosti a výkyv na z	není lepší než varianta 54
56_25	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	delší čas výpočtu (700 ms) pro porovnání výsledků s Matlabem	pohyb začne v 300 ms, krychle urazí 26 cm	viz porovnání s Matlabem
57_48	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	SOFT = 2	stejný posuv, vyšší oscilace rychlosti, viz obr. 41	vhodnější SOFT = 0
101_24	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	změna tělesa z kvádrů na krychli: 100x50x50 mm	zpomalování kvádrů do 240 ms, urazí 11,2 cm	chování v pořádku
102_101	$v_0 = 1 \text{ m/s}$	zaoblení hrany kvádrů, viz obr. 33	zpomalování kvádrů do 240 ms, urazí 12,5 cm viz obr. 35	zaoblení vliv na dráhu, viz obr. 36, lepší shoda s Matlabem
103_102	$F = 0,036 \cdot t \text{ N}$	roztlačování kvádrů lineárně rostoucí silou	nedojde k roztlačení tělesa	působení silou až po prodlevě

model ID	zatěžování	úpravy	výsledek	závěr
104_103	$F = 0 \text{ N}$ $t \in \langle 0, 200 \rangle \text{ ms},$ $F =$ $0,108 \cdot t - 21,6 \text{ N}$ $t \in \langle 200, 300 \rangle \text{ ms},$ $F = 0,036 \cdot t \text{ N}$ $t \in \langle 300, 400 \rangle$ $F =$ $0,01656 \cdot t - 648 \text{ N}$	roztláčování rostoucí budící silou s větší směrnici růstu velikosti síly po 400 ms	roztláčení v čase 300 ms, po 400 ms příliš prudký pohyb	po 300 ms lineární růst síly
105_104	$F = 0 \text{ N}$ $t \in \langle 0, 200 \rangle \text{ ms},$ $F =$ $0,108 \cdot t - 21,6 \text{ N}$ $t \in \langle 200, 300 \rangle \text{ ms},$ $F = 0,036 \cdot t \text{ N}$ $t \in \langle 300, 500 \rangle$	průběh působící síly jako pro 25_22, ale 2x vyšší (2x větší hmotnost tělesa)	kvádr urazí 3,5 cm, větší oscilace rychlosti než krychle, viz obr. 47	prodloužit čas simulace pro porovnání výsledků s Matlabem
106_103	$F = 0 \text{ N}$ $t \in \langle 0, 200 \rangle \text{ ms},$ $F =$ $0,108 \cdot t - 21,6 \text{ N}$ $t \in \langle 200, 300 \rangle \text{ ms},$ $F = 0,036 \cdot t \text{ N}$ $t \in \langle 300, 500 \rangle$	delší čas výpočtu (700 ms) pro porovnání výsledků s Matlabem	pohyb začne v čase 300 ms, kvádr urazí 26 cm	viz porovnání s Matlabem