

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd

**Fučíkovo spektrum Laplaceova  
operátoru s integrální okrajovou  
podmínkou a jeho parametrizace**

**Mgr. Martin Hamáček**

Rigorózní práce k získání akademického titulu doktor přírodních věd  
Studijní program: Matematika

**Plzeň 2020**



University of West Bohemia  
Faculty of Applied Sciences

# **Fučík spectrum of Laplace operator with integral boundary conditions**

**Mgr. Martin Hamáček**

Thesis for the award of the degree of Doctor of Natural Sciences (RNDr.)  
in the study program: Mathematics

**Pilsen 2020**



# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto rigorózní práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce navazuje na diplomovou práci [5, M. Hamáček].

V Plzni dne .....

Podpis .....



# Poděkování

Chtěl bych upřímně poděkovat paní doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za cenné rady a odborný dohled. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D. za velmi přínosné odborné konzultace.





# Abstrakt

Tato práce se zabývá úlohou na vlastní čísla a Fučikovým spektrem radiálně symetrického Laplaceova operátoru s nelokální (integrální) okrajovou podmínkou v obecné dimenzi  $n$ .

Nejdříve vyšetříme úlohu na vlastní čísla a odvodíme první větev Fučikova spektra. Hlavní částí této práce je však regulární parametrizace celého Fučikova spektra ve třetí dimenzi.

# Klíčová slova

radiální symetrie, nelokální okrajová podmínka, vlastní čísla, Fučikovo spektrum, regulární parametrizace

# Abstract

This thesis is devoted to studying of an eigenvalue problem of radially symmetric Laplace operator with a nonlocal (integral) boundary condition in general dimension  $n$ . In addition, we are interested in describing the so-called Fučík spectrum of the corresponding problem.

First, we deal with eigenvalue problem and an analytical description of the first branch of the Fučík spectrum. The main result of our thesis is parametric description of the Fučík spectrum in the third dimension.

# Keywords

radial symmetry, nonlocal boundary condition, eigenvalue problem, Fučík spectrum, regular parametrization



# Obsah

Prohlášení	v
Poděkování	vii
Abstrakt	ix
1 Úvod	1
2 Formulace úlohy	3
3 Úloha na vlastní čísla	5
3.1 Úloha na vlastní čísla . . . . .	5
4 Fučíkovo spektrum	11
5 Parametrizace Fučíkova spektra ve 3D	21
5.1 Formulace úlohy ve 3D . . . . .	22
5.2 Zavedení ekvivalentní úlohy . . . . .	23
5.3 Odvození explicitního tvaru . . . . .	24
5.4 Parametrizace . . . . .	30
5.5 Spojitost . . . . .	45
5.6 Hladkost . . . . .	47
5.7 Rovina $(\alpha, \beta)$ . . . . .	52
A Výpočty pomocných limit	55
B Pomocná lemmata	63
C Důkazy vybraných lemmat	69
Literatura	85



# Kapitola 1

## Úvod

Zkoumání Fučikova spektra začalo ve 20. století při vyšetřování řešitelnosti okrajových úloh se skákající nelinearitou (viz [4, S. Fučík] a [3, E. N. Dancer]). Od té doby vyšlo mnoho článků, ve kterých se studovalo Fučikovo spektrum jednotlivých okrajových úloh. V této práci budeme navazovat především na následující články: [2, M. Arias a J. Campos], který se zabývá Fučikovým spektrem radiálně symetrického Laplaceova operátoru s Dirichletovo okrajovou podmínkou a [8, N. Sergejeva], který se zabývá Fučikovým spektrem Laplaceova operátoru v jedné dimenzi s nelokální (integrální) okrajovou podmínkou. Dále tato práce navazuje na diplomovou práci [5, M. Hamáček], která je věnována spektrálním vlastnostem radiálně symetrického Laplaceova operátoru s nelokálními okrajovými podmínkami v obecné dimenzi  $n$ .

Článek [2, M. Arias a J. Campos] se zabývá následující úlohou

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) &= 0 & \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, u(1) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

přičemž je zde ukázáno, že Fučikovo spektrum této úlohy (v obecné dimenzi) lze zapsat jako sjednocení nekonečně mnoha monotónních analytických křivek. V první a třetí dimenzi je toto tvrzení triviální, jelikož zde lze najít analytický předpis příslušného Fučikova spektra.

My se budeme zabývat úlohou, kde nahradíme podmínku  $u(1) = 0$  integrální podmínkou. Budeme tedy zkoumat následující úlohu na vlastní čísla

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \lambda u(r) &= 0 & \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1}u(r)dr &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

a úlohou na Fučikovo spektrum

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) &= 0 & \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1}u(r)dr &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

V kapitole 3 odvodíme vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (1.2) pro obecnou dimenzi. V obecné dimenzi neznáme analytický předpis Fučíkova spektra úlohy (1.1), jelikož neumíme určit intervaly na kterých je funkce  $u$  kladná (záporná), a tedy v kapitole 4 odvodíme pouze předpis první větve Fučíkova spektra úlohy (1.3). Jelikož lze ve třetí dimenzi vyjádřit nulové body funkce  $u$ , v kapitole 5 odvodíme celé Fučíkovo spektrum úlohy (1.3) (ve třetí dimenzi). Dále nalezneme parametrický předpis tohoto spektra a ukážeme, že ho lze popsat souvislou regulární křivkou.

## Kapitola 2

# Formulace úlohy

V této práci se budeme zabývat úlohou na vlastní čísla ve tvaru

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= \lambda u && \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &\text{ je omezená funkce, } \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}.$$

Zápis  $\|\mathbf{x}\|$  značí klasickou euklidovskou normu vektoru  $\mathbf{x}$ . Budeme však pracovat pouze se speciálním případem úlohy, ve kterém budeme předpokládat radiálně symetrické řešení

$$u(\mathbf{x}) = u(\|\mathbf{x}\|).$$

Můžeme tedy přepsat úlohu (2.1) do tvaru

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) + \lambda u(r) &= 0 && \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) &= 0, \int_0^1 r^{n-1} u(r) dr &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde

$$r = \|\mathbf{x}\|.$$

Přičemž budeme hledat klasické řešení úlohy (2.2). Vyžadujeme tedy  $u \in C^2(0, 1)$ .

Dále se v této práci budeme zabývat Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) &= 0 && \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) &= 0, \int_0^1 r^{n-1} u(r) dr &= 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

kde

$$u^+(r) = \max\{u(r), 0\}, \quad u^-(r) = \max\{-u(r), 0\}.$$

Příčemž Fučíkovým spektrem úlohy (2.3) nazýváme následující množinu

$$\Sigma = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \text{úloha (2.3) s parametry } \alpha, \beta \text{ má netriviální klasické řešení} \right\}. \quad (2.4)$$

**Lemma 2.1.** *Pokud funkce  $u$  je řešením úlohy (2.3) s parametry  $(\alpha, \beta)$ , pak funkce  $-u$  je řešením úlohy (2.3) s parametry  $(\beta, \alpha)$ .*

*Důkaz.* Předpokládejme, že funkce  $u$  řeší úlohu (2.3) s parametry  $(\alpha, \beta)$ . Máme tedy

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+ - \beta u^- &= 0 & \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, \quad \int_0^1 r^{n-1}u(r)dr &= 0. \end{aligned}$$

Po vynásobení  $(-1)$  dostáváme

$$\begin{aligned} (-u(r))'' + \frac{n-1}{r}(-u(r))' + \beta(-u)^+ - \alpha(-u)^- &= 0 & \text{pro } r \in (0, 1), \\ -u'(0) = 0, \quad \int_0^1 r^{n-1}(-u(r))dr &= 0. \end{aligned}$$

A tedy vidíme, že  $-u$  řeší úlohu (2.3) s parametry  $(\beta, \alpha)$ . □

Odtud dostáváme následující větu.

**Věta 2.2.** *Dvojice  $(\alpha, \beta)$  leží ve Fučíkově spektru úlohy (2.3) právě tehdy, když  $(\beta, \alpha)$  leží ve Fučíkově spektru.*



## Kapitola 3

# Úloha na vlastní čísla

V této části najdeme vlastní čísla a funkce úlohy (2.2), přičemž budeme uvažovat obecnou dimenzi  $n$ .

### 3.1 Úloha na vlastní čísla

Řešme tedy úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned}u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \lambda u(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \\u'(0) &= 0, \quad \int_0^1 r^{n-1}u(r)dr = 0.\end{aligned}$$

Po přenásobení rovnice z této úlohy výrazem  $r^{n-1}$ , dostáváme úlohu v následujícím tvaru

$$\begin{aligned}(r^{n-1}u'(r))' + \lambda r^{n-1}u(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \\u'(0) &= 0, \quad \int_0^1 r^{n-1}u(r)dr = 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

**Věta 3.1.** *Úloha (3.1) má netriviální řešení pouze pro  $\lambda > 0$ .*

*Důkaz.* Předpokládejme  $\lambda \leq 0$ .

- (i) Pro  $u(0) = 0$  vyhovuje rovnici pouze triviální řešení. Plyne z věty o jednoznačnosti řešení (viz [9, str. 783]).
- (ii) Nyní předpokládejme  $u(0) > 0$ . Po přenásobení rovnice v úloze (3.1) funkcí  $u$  a integrací od 0 do  $r \in (0, 1)$  dostáváme

$$\int_0^r \left( (s^{n-1}u'(s))' + \lambda s^{n-1}u(s) \right) u(s)ds = 0.\tag{3.2}$$

Po integraci per partes a převedení integrálu na druhou stranu dostáváme

$$r^{n-1}u(r)u'(r) = \int_0^r s^{n-1} (u'(s))^2 ds + (-\lambda) \int_0^r s^{n-1} u^2(s) ds. \quad (3.3)$$

Jelikož funkce  $u$  nemůže být konstantní (konstantní nenulová funkce nesplňuje okrajovou podmínku), pravá strana rovnosti (3.3) musí být ostře kladná. A tedy v každém bodě intervalu  $(0, 1)$  platí  $u(r) \neq 0$ . Což je spor s nulovostí integrální podmínky v úloze (3.1).

(iii) Pro  $u(0) < 0$  je důkaz obdobný.

□

Budeme tedy v následujícím výkladu automaticky předpokládat  $\lambda > 0$ .

Nyní odvodíme obecné řešení diferenciální rovnice, se kterou budeme v následujícím textu často pracovat.

**Lemma 3.2.** *Obecným řešením diferenciální rovnice*

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) + u(r) = 0 \quad (3.4)$$

je funkce ve tvaru

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(r), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

*Důkaz.* Besselovy funkce  $J_m$  a  $Y_m$  jsou definovány jako obecné řešení diferenciální rovnice

$$r^2 v''(r) + r v'(r) + (r^2 - m^2) v(r) = 0. \quad (3.6)$$

Předpokládejme řešení (3.4) ve tvaru  $u(r) = r^{\frac{2-n}{2}} v(r)$ .

Dosazením  $u$  do (3.4) dostáváme

$$r^{\frac{2-n}{2}} v''(r) + r^{-\frac{n}{2}} v'(r) + r^{-\frac{2-n}{2}} \left( r^2 - \left( \frac{n-2}{2} \right)^2 \right) v(r) = 0. \quad (3.7)$$

A po vydělení výrazem  $r^{-\frac{2-n}{2}}$  máme

$$r^2 v''(r) + r v'(r) + \left( r^2 - \left( \frac{n-2}{2} \right)^2 \right) v(r) = 0. \quad (3.8)$$

Funkce  $v$  je tedy řešením (3.7) (s parametrem  $m = \frac{n-2}{2}$ ). Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} v(r) &= C_1 J_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2 Y_{\frac{n-2}{2}}(r), \\ u(r) &= C_1 r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(r). \end{aligned}$$

□

Obecné řešení diferenciální rovnice z (3.1) můžeme psát ve tvaru

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po zohlednění první okrajové podmínky dostáváme  $C_2 = 0$ . Máme tedy řešení ve tvaru

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r).$$

Nyní vyjádříme integrální okrajovou podmínku

$$0 = \int_0^1 C_1 r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r) dr = C_1 \left[ r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}r) \right]_0^1 = C_1 J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}).$$

Dostáváme tedy posloupnost

$$\sqrt{\lambda_k} = \mu_{\frac{n}{2}, k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

přičemž  $\mu_{\frac{n}{2}, k}$  odpovídá  $k$ -tému nulovému bodu funkce  $J_{\frac{n}{2}}$ .

Vlastní čísla úlohy (3.1) jsou dána předpisem  $\lambda_k = (\mu_{\frac{n}{2}, k})^2$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ .

Těmito vlastním číslům přísluší vlastní funkce  $u_k(r) = r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{\frac{n}{2}, k} r)$ , kde  $k \in \mathbb{N}$ .

Grafy několika prvních vlastních funkcí můžeme vidět na obr. 3.1, 3.2 a 3.3.

**Poznámka 3.3.** Uvedme nyní tvar vlastních funkcí pro  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . V lichých dimenzích lze vlastní funkce zapsat pomocí goniometrických funkcí.

(i) Pro  $n = 1$  máme vlastní funkce ve tvaru

$$u(r) = \cos(\sqrt{\lambda}r).$$

Pro vlastní čísla lze psát  $\lambda_k = \mu_{\frac{1}{2}, k}^2 = (k\pi)^2$ .

(ii) Pro  $n = 2$  máme vlastní funkce ve tvaru

$$u(r) = J_0(\sqrt{\lambda}r).$$

(iii) Pro  $n = 3$  máme vlastní funkce ve tvaru

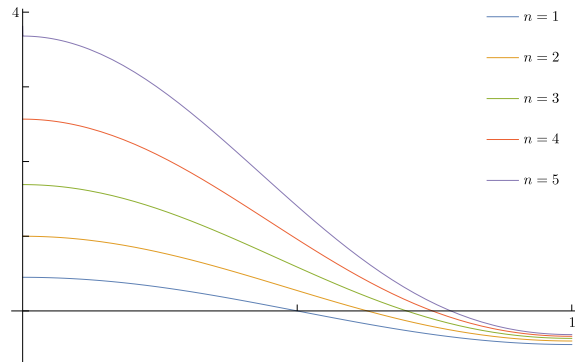
$$u(r) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}r)}{r}.$$

(iv) Pro  $n = 4$  máme vlastní funkce ve tvaru

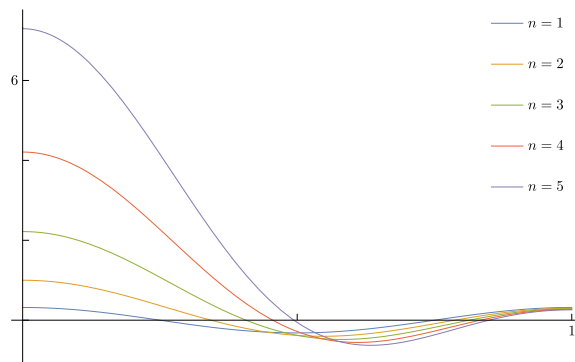
$$u(r) = \frac{J_1(\sqrt{\lambda}r)}{r}.$$

(v) Pro  $n = 5$  máme vlastní funkce ve tvaru

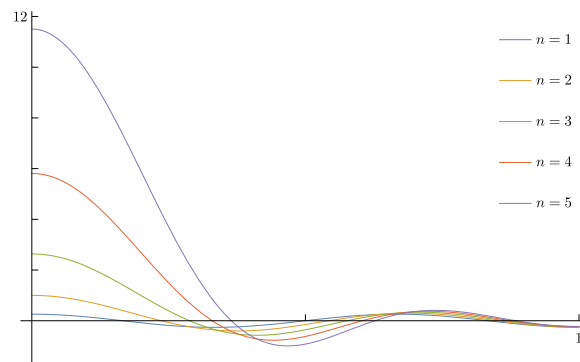
$$u(r) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}r) - r \cos(\sqrt{\lambda}r)}{r^3}.$$



Obrázek 3.1: První vlastní funkce úlohy (3.1) v první až páté dimenzi.



Obrázek 3.2: Druhá vlastní funkce úlohy (3.1) v první až páté dimenzi.



Obrázek 3.3: Třetí vlastní funkce úlohy (3.1) v první až páté dimenzi.

**Poznámka 3.4.** Pokud bychom pro úlohu (2.1) nepředpokládali radiálně symetrické řešení, dostaneme například v případě  $n = 2$  (při použití polárních souřadnic a přepisu  $x = r \cos(\varphi)$ ,  $y = r \sin(\varphi)$ ) úlohu ve tvaru

$$u_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r} u_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}(r, \varphi) + \lambda u(r, \varphi) = 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \varphi \in [0, 2\pi),$$

$$u \text{ je omezená funkce, } \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n-1} u(r, \varphi) \, d\varphi \, dr = 0. \quad (3.9)$$

Pokud budeme uvažovat řešení ve tvaru  $u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$ , dostaneme následující rovnici

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + \lambda = 0,$$

kterou lze zapsat jako soustavu dvou rovnic

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} + r^2 \lambda - C^2 = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + C^2 = 0, \quad (3.11)$$

kde  $C \in \mathbb{R}$ .

Jelikož vyžadujeme hladké řešení, musí pro  $\Phi$  platit  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ ,  $\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ , a tedy dostáváme z rovnosti (3.11) množinu přípustných hodnot  $C = n$ , kde  $n \in \mathbb{N}_0$ . Můžeme tedy (pro  $\lambda > 0$ ) psát  $R(r) = C_1 J_n(\sqrt{\lambda}r) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda}r)$ . A tedy funkce ve tvaru

$$u(r, \varphi) = (C_1 J_n(\sqrt{\lambda}r) + C_2 Y_n(\sqrt{\lambda}r))(a \cos(n\varphi) + b \sin(n\varphi)),$$

řeší diferenciální rovnici v (3.9).

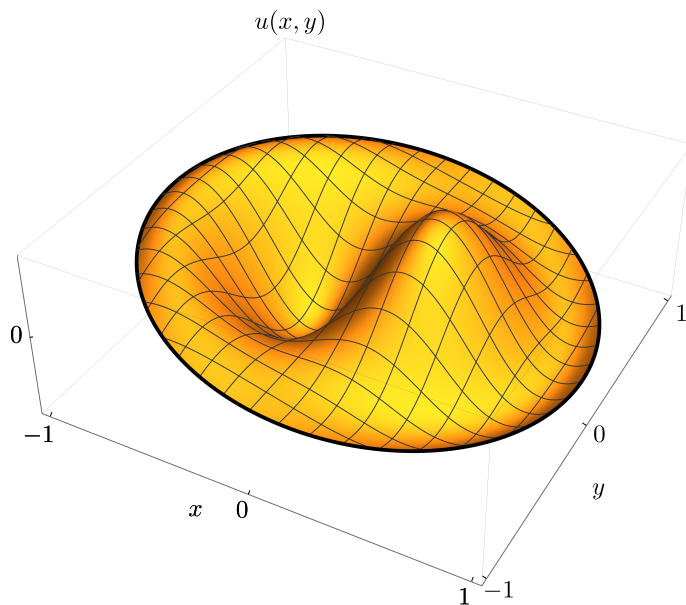
Pokud nyní zohledníme první okrajovou podmínku můžeme psát

$$u(r, \varphi) = C_3 J_n(\sqrt{\lambda}r) \cos(n\varphi - \varphi_0).$$

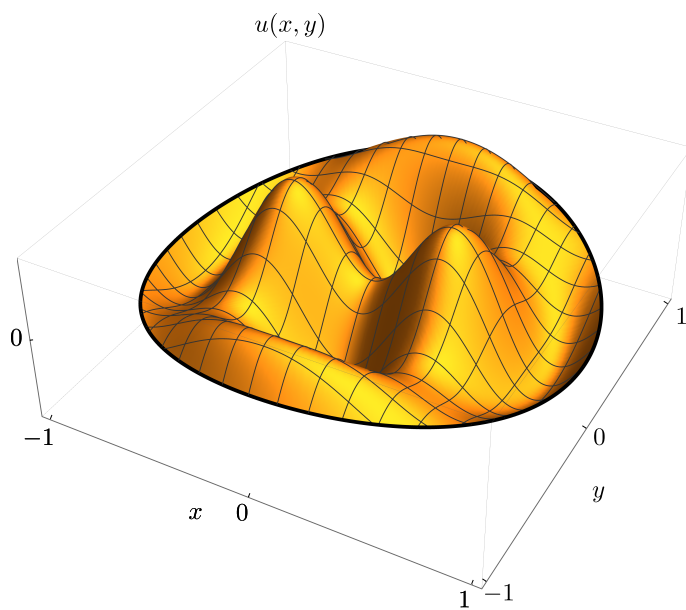
Pokud bychom chtěli zohlednit integrální okrajovou podmínku, zjistíme, že integrál úhlové části řešení je roven 0, a tedy výsledek integrálu nezávisí na volbě parametru  $\lambda$ . Dostáváme tedy, že pro obecný (radiálně nesymetrický) případ množina vlastních čísel odpovídá množině reálných čísel – spojitě množině (pro záporné  $\lambda$  je postup obdobný, avšak jako řešení diferenciální rovnice (3.10) dostáváme Besselovy funkce I a K).

Z tohoto důvodu se v této práci zabýváme pouze radiálně symetrickým řešením.

Grafy dvou vybraných řešení můžeme vidět na obr. 3.4 a 3.5.



Obrázek 3.4: Graf radiálně nesymetrického řešení s parametry  $n = 1$ ,  $\lambda = 6$ .



Obrázek 3.5: Graf radiálně nesymetrického řešení s parametry  $n = 2$ ,  $\lambda = 8$ .

# Kapitola 4

## Fučíkovo spektrum

Nyní se budeme zabývat Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned} (r^{n-1}u'(r))' + \alpha r^{n-1}u^+(r) - \beta r^{n-1}u^-(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^{n-1}u(r)dr &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jelikož pro funkci ve tvaru

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(r), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

neumíme (v obecném případě) vhodně vyjádřit nulové body, odvodíme v této části pouze první větev Fučíkova spektra.

Celé spektrum lze odvodit v první dimenzi (viz [5, M. Hamáček] kapitola 3) a ve třetí dimenzi (viz kapitola 5).

### Odvození první větve Fučíkova spektra

Nyní odvodíme první větev Fučíkova spektra v dimenzi  $n$ , přičemž odvození rozdělíme do několika kroků. V odvození budeme předpokládat  $u(0) > 0$  (pro  $u(0) < 0$  je odvození obdobné).

(I) Vyjádříme řešení nedourčené úlohy pro  $\alpha, \beta > 0$

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, u(0) > 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

(II) Odvodíme první větev Fučíkova spektra úlohy (4.1) pro  $\alpha, \beta > 0$ .

(III) Zohledníme případ  $\beta = 0$ .

(IV) Zohledníme případ  $\beta < 0$ .

Zavedme nyní značení, jež budeme v následujícím odvození používat:

- (i)  $u_0$  odpovídá první (kladné) části řešení (4.2),
- (ii)  $u_1$  odpovídá druhé (záporné) části řešení (4.2),
- (iii)  $r_0$  odpovídá prvnímu nulovému bodu řešení úlohy (4.2) na intervalu  $(0, +\infty)$ ,
- (iv)  $r_1$  odpovídá prvnímu nulovému bodu řešení úlohy (4.2) na intervalu  $(r_0, +\infty)$ ,
- (v) zavedme množinu

$$N_1^+ = \left\{ (\alpha, \beta) : \beta > 0, u \text{ je řešením úlohy (4.2) a má právě jeden nulový bod na } (0, 1) \right\},$$

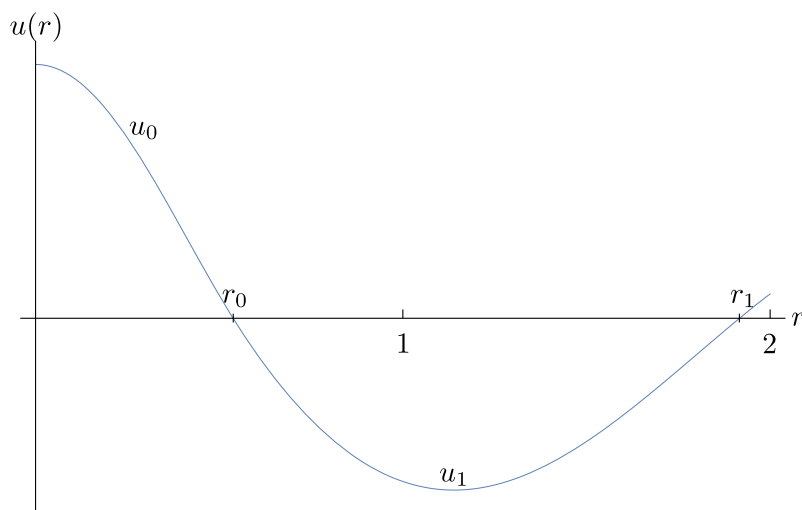
pro řešení  $u$  úlohy (4.2) s parametry  $(\alpha, \beta) \in N_1^+$  tedy platí  $r_0 < 1, r_1 \geq 1$ .

Příklad funkce z množiny  $N_1^+$  můžeme vidět na obr. 4.1.

- (vi) označme první Fučíkovu větev úlohy (4.1) zápisem

$$I_1^+ = \left\{ (\alpha, \beta) : u(0) > 0, u \text{ je řešením úlohy (4.1) a má na intervalu } (0, 1) \text{ právě 1 nulový bod.} \right\},$$

$$I_1^- = \left\{ (\alpha, \beta) : (\beta, \alpha) \in I_1^+ \right\}.$$



Obrázek 4.1: Příklad funkce z množiny  $N_1^+$ .

Přejdeme nyní k samotnému odvození. Nejprve ukážeme, že úloha (4.1) má netriviální řešení pouze pro  $\alpha > 0$ .



**Lemma 4.1.** *Úloha (4.1) má netriviální řešení pouze pro  $\alpha > 0$ .*

*Důkaz.* Stačí ukázat, že pro  $\alpha \leq 0$  nemá úloha (4.2) nulový bod. Důkaz je tedy obdobou důkazu věty 3.1.  $\square$

(I) Začneme tedy řešením úlohy (4.2) (pro  $\beta > 0$ ). Řešení této diferenciální rovnice vyjádříme zvlášť pro kladnou a zápornou část. A to tak, aby na sebe hladce navazovaly. Pro  $u_0$  a  $u_1$  můžeme psát

$$\begin{aligned} u_0(r) &= r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\alpha}r) && \text{pro } r \in (0, r_0), \\ u_1(r) &= C_1 r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r) && \text{pro } r \in (r_0, r_1), \end{aligned}$$

kde  $r_0 = \frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\sqrt{\alpha}}$ .

Jelikož vyžadujeme klasické řešení, musí v bodě napojení kladné a záporné části platit

$$u_0(r_0) = u_1(r_0), \quad u'_0(r_0) = u'_1(r_0). \quad (4.3)$$

**Poznámka 4.2.** Podmínka (4.3) je dostačující, jelikož po vyjádření  $u''$  z rovnice v (4.2) máme

$$-u''(r) = \frac{n-1}{r} u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r).$$

A tedy ze spojitosti funkcí  $u$  a  $u'$  dostáváme spojitost funkce  $u''$  (neboli  $u \in C^2([0, 1])$ ).

Spojitost splníme volbou  $C_1 = C Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r_0)$ ,  $C_2 = -C J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r_0)$ , kde  $C \in \mathbb{R}$ .

Můžeme tedy psát

$$u_1(r) = C \left( Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r_0) r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r_0) r^{\frac{2-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r) \right).$$

Vyjádříme nyní derivaci funkcí  $u_0$  a  $u_1$  v bodě  $r_0$  (použitím vztahů (B.2), (B.4) a (B.5))

$$\begin{aligned} u'_0(r_0) &= -r_0^{\frac{2-n}{2}} \sqrt{\alpha} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{\frac{n-2}{2},1}\right), \\ u'_1(r_0) &= -C \sqrt{\beta} r_0^{\frac{2-n}{2}} \frac{2}{\pi \sqrt{\beta} r_0}. \end{aligned}$$

Z podmínky na hladkost řešení plyne  $C = \frac{\pi}{2} \mu_{\frac{n-2}{2},1} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{\frac{n-2}{2},1}\right)$ . Dostáváme tedy předpis pro zápornou část funkce  $u$  ve tvaru

$$u_1(r) = \frac{\pi}{2} \mu_{\frac{n-2}{2},1} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{\frac{n-2}{2},1}\right) \left( Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r_0) r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r_0) r^{\frac{2-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r) \right),$$

kde  $r \in (r_0, r_1]$ .

Funkce  $u$  má tedy právě jeden nulový bod na intervalu  $(0, 1)$ , pokud platí  $u_1(r) < 0$  na intervalu  $(r_0, 1)$ .

Můžeme tedy psát

$$N_1^+ = \left\{ (\alpha, \beta) : Y_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{\frac{n-2}{2},1} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r) < J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{\frac{n-2}{2},1} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta}r), r \in \left(\frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\sqrt{\alpha}}, 1\right) \right\}.$$

(II) Vyjádřeme nyní pro jaké  $(\alpha, \beta) \in N_1^+$  platí  $\int_0^1 r^{n-1} u(r) dr = 0$ .

Jelikož předpokládáme  $(\alpha, \beta) \in N_1^+$ , můžeme psát

$$\int_0^1 r^{n-1} u(r) dr = \int_0^{r_0} r^{n-1} u_0(r) dr + \int_{r_0}^1 r^{n-1} u_1(r) dr.$$

Použitím vztahu (B.1) dostáváme

$$\int_0^{r_0} r^{n-1} u_0(r) dr = \left[ \frac{r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\alpha} r)}{\sqrt{\alpha}} \right]_0^{r_0} = \frac{r_0^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2}, 1})}{\sqrt{\alpha}}.$$

Použitím vztahu (B.1) a (B.3) dostáváme

$$\int_{r_0}^1 r^{n-1} u_1(r) dr = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}}{\sqrt{\beta}} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}) \left[ Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta} r) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) r^{\frac{n}{2}} Y_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta} r) \right]_{r_0}^1.$$

Po dosazení mezí a využití vztahu (B.5) máme

$$\int_{r_0}^1 r^{n-1} u_1(r) dr = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}}{\sqrt{\beta}} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}) \left( \left( Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) Y_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) \right) - \frac{2 r_0^{\frac{n}{2}}}{\pi \sqrt{\beta} r_0} \right).$$

Dostáváme tedy

$$\int_0^1 r^{n-1} u(r) dr = 0,$$

pokud

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{\pi}{2} \frac{r_0^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{\beta}} \left( \left( Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) Y_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) \right) \right) = 0.$$

Odtud máme

$$I_1^+ \supset \left\{ (\alpha, \beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{\pi}{2} \frac{r_0^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{\beta}} \left( \left( Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_0) Y_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) \right) \right) = 0, \right. \\ \left. (\alpha, \beta) \in N_1^+ \right\}.$$

(III) Uvažujme nyní  $\beta = 0$ . Kladná část je opět dána předpisem

$$u_0(r) = r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\alpha}r) \quad \text{pro } r \in (0, r_0].$$

Záporná část musí splňovat následující diferenciální rovnici

$$u_1''(r) + \frac{n-1}{r} u_1'(r) = 0,$$

jejímž obecným řešením je funkce  $u_1(r) = C_1 + C_2 f_n(r)$ , kde

$$f_n(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^{n-2}} & n \neq 2, \\ \ln(r) & n = 2. \end{cases}$$

Jelikož opět vyžadujeme klasické řešení (viz poznámka 4.2), musí platit

$$u_0(r_0) = u_1(r_0), \quad u_0'(r_0) = u_1'(r_0).$$

Spojitosť splníme přepsáním do tvaru

$$u_1(r) = C (f_n(r) - f_n(r_0)), \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Máme tedy  $u_1'(r) = C f_n'(r)$ , odtud dostáváme následující podmínku

$$C f_n'(r_0) = -r_0^{\frac{2-n}{2}} \sqrt{\alpha} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}).$$

A tedy můžeme psát  $u_1$  ve tvaru

$$u_1(r) = -\frac{r_0^{\frac{2-n}{2}}}{f_n'(r_0)} \sqrt{\alpha} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}) (f_n(r) - f_n(r_0)).$$

Nyní můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{n-1} u(r) dr &= \int_0^{r_0} r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\alpha}r) dr - \frac{r_0^{\frac{2-n}{2}}}{f_n'(r_0)} \sqrt{\alpha} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}) \int_{r_0}^1 (r^{n-1} f_n(r) - r^{n-1} f_n(r_0)) dr = \\ &= \frac{r_0^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1})}{\sqrt{\alpha}} - \frac{r_0^{\frac{2-n}{2}}}{f_n'(r_0)} \sqrt{\alpha} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}) \left( \int_{r_0}^1 r^{n-1} f_n(r) dr - \left( \frac{1}{n} - \frac{r_0^n}{n} \right) f_n(r_0) \right). \end{aligned}$$

Odtud máme

$$I_1^+ \supset \left\{ (\alpha, \beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{r_0^{1-n}}{f_n'(r_0)} \left( \int_{r_0}^1 r^{n-1} f_n(r) dr - (1 - r_0^n) \frac{f_n(r_0)}{n} \right) = 0, \quad \alpha > \mu_{\frac{n-2}{2},1}^2, \beta = 0 \right\}.$$

(IV) Nyní uvažujme  $\beta < 0$ . Kladná část je opět dána předpisem

$$u_0(r) = r^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\alpha}r) \quad \text{pro } r \in (0, r_0].$$

Záporná část musí splňovat následující diferenciální rovnici

$$u_1''(r) + \frac{n-1}{r}u_1'(r) + \beta u_1(r) = 0, \quad (4.4)$$

jejímž obecným řešením je funkce (viz lemma B.1)

$$u_1(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r), \quad (4.5)$$

kde I a K jsou modifikované Besselovy funkce. Jelikož opět vyžadujeme klasické řešení (viz poznámka 4.2), musí platit

$$u_0(r_0) = u_1(r_0), \quad u_0'(r_0) = u_1'(r_0).$$

Po zohlednění první podmínky dostáváme

$$u_1(r) = C r^{\frac{2-n}{2}} \left( K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r) - I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r) \right), \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Použitím vztahů (B.9), (B.11) a (B.12) dostáváme

$$u_1'(r_0) = C \sqrt{-\beta} r_0^{\frac{2-n}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{-\beta}r_0} \right) = C r_0^{-\frac{n}{2}}.$$

Můžeme tedy psát

$$u_1(r) = -\mu_{\frac{n-2}{2},1} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}) r^{\frac{2-n}{2}} \left( K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r) - I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r) \right).$$

Integrál z kladné části je stejný jako v předchozím případě. Nyní vyjádřeme integrál ze záporné části. Použitím vztahu (B.8) a (B.10) dostáváme

$$\begin{aligned} & - \int_{r_0}^1 \mu_{\frac{n-2}{2},1} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}) \left( K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) r^{\frac{n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r) - I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) r^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r) \right) dr = \\ & - \frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\sqrt{-\beta}} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}) \left[ K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) r^{\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}}(\sqrt{-\beta}r) + I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) r^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(\sqrt{-\beta}r) \right]_{r_0}^1. \end{aligned}$$

Po dosazení mezí a využití vztahu (B.12) máme

$$\begin{aligned} & \int_{r_0}^1 r^{n-1} u_1(r) dr = - \frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\sqrt{-\beta}} J_{\frac{n}{2}}(\mu_{\frac{n-2}{2},1}) \\ & \left( \left( K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) I_{\frac{n}{2}}(\sqrt{-\beta}) + I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta}r_0) K_{\frac{n}{2}}(\sqrt{-\beta}) \right) - r_0^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{-\beta}r_0} \right). \end{aligned}$$

Nyní můžeme vyjádřit integrál funkce  $u$  na intervalu  $(0, 1)$  ve tvaru

$$\int_0^1 r^{n-1} u(r) dr = \frac{r_0^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}} \left( \mu_{\frac{n-2}{2}, 1} \right)}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} J_{\frac{n}{2}} \left( \mu_{\frac{n-2}{2}, 1} \right) r_0^{\frac{n}{2}} - \frac{\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}}{\sqrt{-\beta}} J_{\frac{n}{2}} \left( \mu_{\frac{n-2}{2}, 1} \right) \left( \left( K_{\frac{n-2}{2}} \left( \sqrt{-\beta} r_0 \right) I_{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{-\beta} \right) + I_{\frac{n-2}{2}} \left( \sqrt{-\beta} r_0 \right) K_{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{-\beta} \right) \right) \right).$$

Dostáváme tedy

$$\int_0^1 r^{n-1} u(r) dr = 0,$$

pokud

$$\frac{\left( \frac{\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}}{\sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{n}{2}}}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \left( \frac{\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}}{\sqrt{\alpha}} \right)^{\frac{n}{2}} - \frac{\mu_{\frac{n-2}{2}, 1}}{\sqrt{\alpha} \sqrt{-\beta}} \left( K_{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}} \mu_{\frac{n-2}{2}, 1} \right) I_{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{-\beta} \right) + I_{\frac{n-2}{2}} \left( \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{\alpha}} \mu_{\frac{n-2}{2}, 1} \right) K_{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{-\beta} \right) \right) = 0.$$

A tedy dostáváme následující předpis části první věty

$$I_1^+ \supset \left\{ (\alpha, \beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{r_0^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{-\beta}} \left( K_{\frac{n-2}{2}} \left( \sqrt{-\beta} r_0 \right) I_{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{-\beta} \right) + I_{\frac{n-2}{2}} \left( \sqrt{-\beta} r_0 \right) K_{\frac{n}{2}} \left( \sqrt{-\beta} \right) \right) = 0, \right. \\ \left. \alpha > \mu_{\frac{n-2}{2}, 1}^2, \beta < 0 \right\}.$$

Tímto jsme odvodili následující větu.

**Věta 4.3.** První větev Fučíkova spektra úlohy (4.1) lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
I_1^+ = & \left\{ (\alpha, \beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{\pi}{2} \frac{r_{0,n}^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{\beta}} \left( Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_{0,n}) J_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) - J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r_{0,n}) Y_{\frac{n}{2}}(\sqrt{\beta}) \right) = 0, \right. \\
& \left. (\alpha, \beta) \in N_1^+ \right\} \cup \\
& \left\{ (\alpha, \beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{r_{0,n}^{1-n}}{f_n'(r_{0,n})} \left( \int_{r_0}^1 r^{n-1} f_n(r) dr - (1 - r_{0,n}^n) \frac{f_n(r_{0,n})}{n} \right) = 0, \quad \alpha > \mu_{\frac{n-2}{2},1}^2, \beta = 0 \right\} \cup \\
& \left\{ (\alpha, \beta) : \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{r_{0,n}^{\frac{2-n}{2}}}{\sqrt{-\beta}} \left( K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta} r_{0,n}) I_{\frac{n}{2}}(\sqrt{-\beta}) + I_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{-\beta} r_{0,n}) K_{\frac{n}{2}}(\sqrt{-\beta}) \right) = 0, \right. \\
& \left. \alpha > \mu_{\frac{n-2}{2},1}^2, \beta < 0 \right\},
\end{aligned}$$

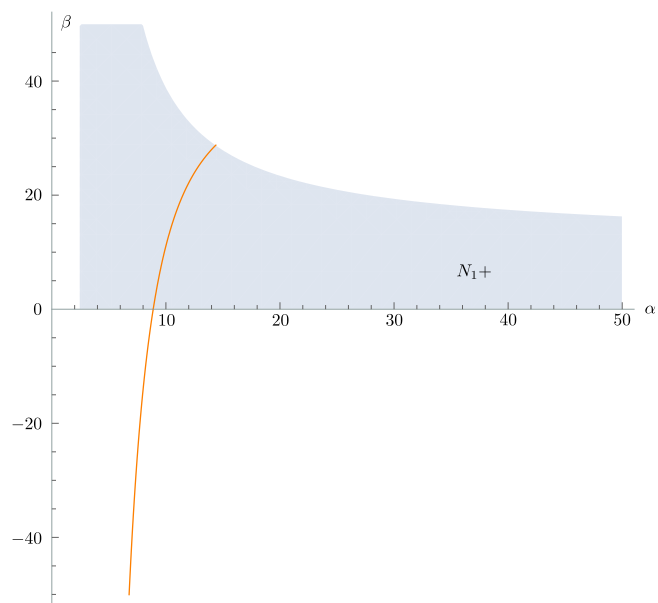
$$I_1^- = \left\{ (\alpha, \beta) : (\beta, \alpha) \in I_1^+ \right\},$$

kde

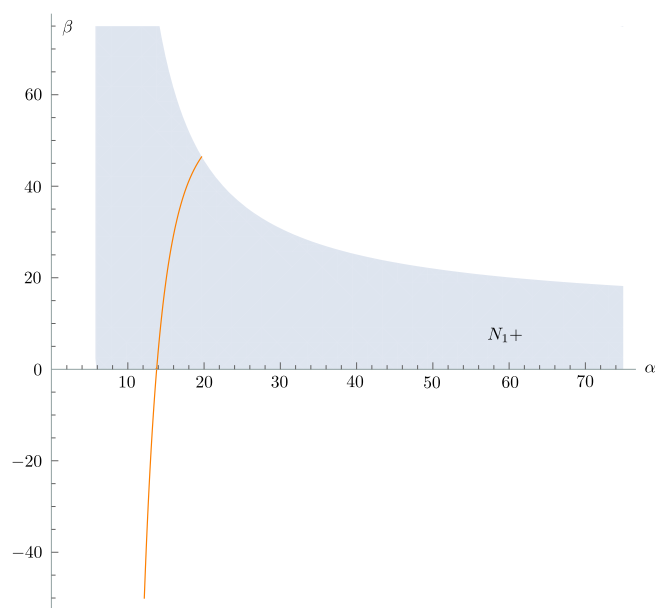
$$\begin{aligned}
r_{0,n} &= \frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\sqrt{\alpha}}, \\
f_n(r) &= \begin{cases} \frac{1}{r^{n-2}} & n \neq 2, \\ \ln(r) & n = 2, \end{cases} \\
N_1^+ &= \left\{ (\alpha, \beta) : Y_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{\frac{n-2}{2},1} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r) < J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{\frac{n-2}{2},1} \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\beta} r), r \in \left(\frac{\mu_{\frac{n-2}{2},1}}{\sqrt{\alpha}}, 1\right) \right\}.
\end{aligned}$$

**Poznámka 4.4.** Ilustraci první větve Fučíkova spektra v několika prvních dimenzích můžeme vidět na obr. 4.2–4.5.

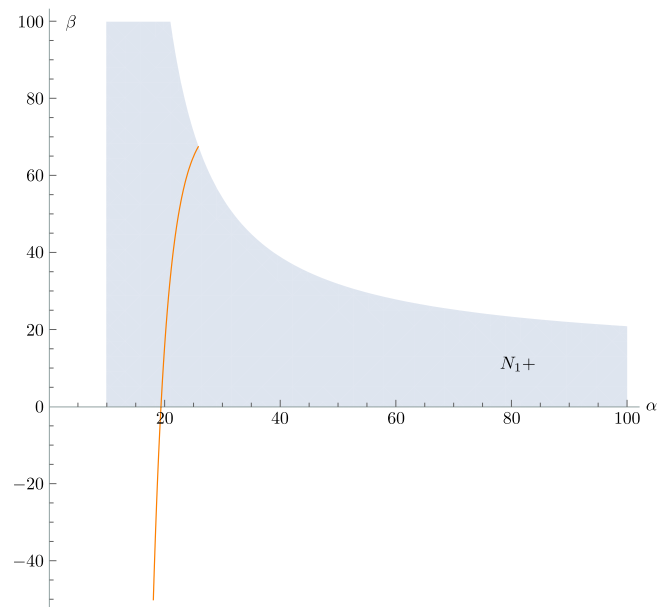
**Poznámka 4.5.** Ve speciálních případech lze odvodit celé Fučíkovo spektrum. V práci [5, M. Hamáček] je odvozeno celé Fučíkovo spektrum ve speciálním případě  $n = 1$ . Celé spektrum lze odvodit i v případě  $n = 3$ , tomuto případu je věnována kapitola 5.



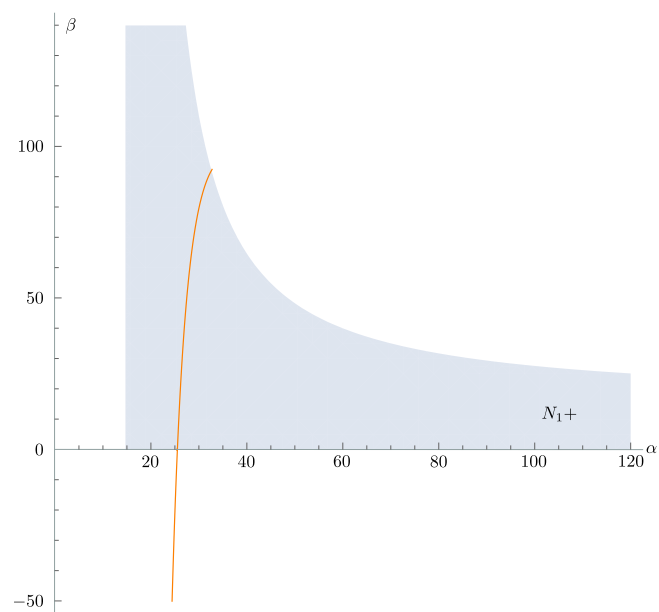
Obrázek 4.2: Ilustrace první větve Fučíkova spektra v první dimenzi .



Obrázek 4.3: Ilustrace první větve Fučíkova spektra v druhé dimenzi .



Obrázek 4.4: Ilustrace první větve Fučíkova spektra ve třetí dimenzi .



Obrázek 4.5: Ilustrace první větve Fučíkova spektra ve čtvrté dimenzi .



## Kapitola 5

# Parametrizace Fučíkova spektra ve 3D

V kapitole 4 jsme odvodili první větev Fučíkova spektra úlohy (1.3) v obecné dimenzi  $n$ . V této části se budeme věnovat speciálnímu případu  $n = 3$ , přičemž ukážeme, že v tomto případě je Fučíkovo spektrum úlohy (1.3) ekvivalentní s Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned}v''(r) + \alpha v^+(r) - \beta v^-(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \\v(0) &= 0, \int_0^1 v(r) dr - \int_0^1 \int_0^r v(s) ds dr = 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Tato kapitola tedy nepřímo navazuje na článek [6, J. Kadlec a P. Nečesal], který se zabývá Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned}u''(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, \pi), \\u(0) &= 0, \int_0^\pi u(r) dr = 0,\end{aligned}$$

a bakalářskou prací [10, P. Štumpfová], která se zabývá Fučíkovým spektrem úlohy

$$\begin{aligned}u''(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \\u(0) &= 0, \int_0^1 \int_0^r u(s) ds dr = 0.\end{aligned}$$

Hlavním výstupem této kapitoly je tedy převod úlohy (1.3) na úlohu (5.1) (ve smyslu úlohy na Fučíkovo spektrum) a nalezení explicitního předpisu příslušného Fučíkova spektra. Dále odvodíme parametrické vyjádření Fučíkova spektra a ukážeme jeho regularitu.

## 5.1 Formulace úlohy ve 3D

Úloha (1.3) přechází v případě  $n = 3$  do tvaru

$$\begin{aligned} u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) + \alpha u^+(r) - \beta u^-(r) &= 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1), \\ u'(0) = 0, \int_0^1 r^2 u(r) dr &= 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Označme Fučikovo spektrum této úlohy  $\Sigma$ . Budeme tedy hledat následující množinu

$$\Sigma = \{(\alpha, \beta) : \text{úloha (5.2) má netriviální řešení}\}.$$

Jelikož  $(\alpha, \beta) \in \Sigma \Leftrightarrow (\beta, \alpha) \in \Sigma$  (viz věta 2.2), budeme se nadále zabývat pouze následující množinou

$$\Sigma^+ = \{(\alpha, \beta) : u(0) > 0 \text{ a úloha (5.2) má netriviální řešení}\}. \tag{5.3}$$

## 5.2 Zavedení ekvivalentní úlohy

V této části ukážeme, že úloha na Fučíkovo spektrum

$$\begin{aligned} v''(r) + \alpha v^+(r) - \beta v^-(r) &= 0 & \text{pro } r \in (0, 1), \\ v(0) = 0, \int_0^1 r v(r) dr &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

je ekvivalentní s úlohou (5.2).

**Lemma 5.1.** *Úloha na Fučíkovo spektrum úlohy (5.4) je ekvivalentní s úlohou (5.2).*

*Důkaz.* Důkaz spočívá v použití substituce  $u(r) = \frac{v(r)}{r}$ .

Předpokládejme nejprve, že funkce  $u$  řeší úlohu (5.2). Použitím substituce přejde rovnice v úloze (5.2) do tvaru

$$\left(\frac{v(r)}{r}\right)'' + \frac{2}{r} \left(\frac{v(r)}{r}\right)' + \alpha \left(\frac{v(r)}{r}\right)^+ - \beta \left(\frac{v(r)}{r}\right)^- = 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1),$$

přičemž po zderivování a vynásobení rovnice proměnnou  $r$  dostáváme

$$v''(r) + \alpha v^+(r) - \beta v^-(r) = 0 \quad \text{pro } r \in (0, 1).$$

Dále ze spojitosti funkce  $u$  plyne následující převod okrajové podmínky

$$v(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} v(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r u(r) = 0.$$

Převod integrální podmínky je zřejmý.

Nyní předpokládejme, že funkce  $v$  řeší úlohu (5.4). Ze spojitosti a diferencovatelnosti funkcí  $u, v$  dostáváme následující převod okrajové podmínky

$$u'(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} u'(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{rv'(r) - v(r)}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{rv''(r)}{2r} = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0^+} \beta v^-(r) - \alpha v^+(r) = 0.$$

Převod diferenciální rovnice a integrální podmínky je obdobný jako v předchozí části. Tímto jsme ukázali ekvivalenci úloh (5.4) a (5.2).  $\square$

**Lemma 5.2.** *Pro množinu  $\Sigma^+$  platí*

$$\Sigma^+ = \{(\alpha, \beta) : v'(0) > 0 \text{ a úloha (5.4) má netriviální řešení}\}. \quad (5.5)$$

*Důkaz.* Důkaz plyne z lemmatu 5.1 a následující nerovnosti

$$v'(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} v'(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} u(r) + r u'(r) > 0.$$

$\square$

V následující části (pokud nebude řečeno jinak) budeme vlastnosti množin  $\Sigma$  a  $\Sigma^+$  vyšetřovat pomocí úlohy (5.4).

**Poznámka 5.3.** Integrální podmínku v úloze (5.4) lze pomocí integrace per partes (derivujeme  $r$  a integrujeme  $v$ ) přepsat do následujícího tvaru

$$\int_0^1 r v(r) dr = \int_0^1 v(r) dr - \int_0^1 \int_0^r v(s) ds dr.$$

### 5.3 Odvození explicitního tvaru

Nejdříve odvodíme nutnou podmínku pro parametr  $\alpha$  tak, aby  $(\alpha, \beta) \in \Sigma^+$ .

**Lemma 5.4.** *Pokud dvojice  $(\alpha, \beta) \in \Sigma^+$ , pak platí  $\alpha > \pi^2$ .*

*Důkaz.* Zřejmě platí  $\alpha > 0$  (viz lemma 4.1). Nyní ukážeme  $\alpha > \pi^2$ .

Pro  $\alpha > 0$  a  $v'(0) > 0$  dostáváme první (kladnou) část řešení rovnice v úloze (5.4) ve tvaru

$$v_0(r) = C \sin(\sqrt{\alpha} r), \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}^+,$$

a tedy aby měla funkce i zápornou část, musí platit  $\sqrt{\alpha} > \pi$ .

□

Pro zjednodušení zápisů v následující části zavedme nové proměnné  $a, b$  a  $\tilde{b}$  ve tvaru

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\alpha} && \text{pro } \alpha > 0, \\ b &= \sqrt{\beta} && \text{pro } \beta > 0, \\ \tilde{b} &= \sqrt{-\beta} && \text{pro } \beta \leq 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Abychom mohli popisovat Fučíkovo spektrum pomocí proměnných  $a, b, \tilde{b}$  (a ne jejich mocnin), zdefinujeme následující množiny

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : (a^2, b^2) \in \Sigma^+\}, \\ \mathcal{N} &= \{(a, \tilde{b}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+ : (a^2, -\tilde{b}^2) \in \Sigma^+\}. \end{aligned}$$

(Pokud najdeme předpis množin  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$ , můžeme snadno zrekonstruovat množinu  $\Sigma^+$ , jelikož platí  $\Sigma^+ = \{(a^2, b^2) : (a, b) \in \mathcal{M}, \} \cup \{(a^2, -\tilde{b}^2) : (a, \tilde{b}) \in \mathcal{N}, \}$ .)

Jelikož pro  $(\alpha, \beta) \in \Sigma^+$  platí  $\alpha > \pi^2$  (viz lemma (5.4)), budeme v následující části předpokládat  $a > \pi$ .

#### Předpis množiny $\mathcal{M}$

Nyní najdeme popis množiny  $\mathcal{M}$  v explicitním tvaru (budeme tedy uvažovat  $\alpha = a^2, \beta = b^2$ ). Hledáme tedy pro jaké dvojice  $(a, b)$  existuje netriviální řešení následující úlohy

$$\begin{aligned} v''(r) + a^2 v^+(r) - b^2 v^-(r) &= 0 && \text{pro } r \in (0, 1), \\ v(0) = 0, v'(0) > 0, \int_0^1 r v(r) dr &= 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Hlavní částí této podkapitoly je tedy důkaz následující věty.

**Věta 5.5.** Množinu  $\mathcal{M}$  lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{M} = \{(a, b) : \mathcal{G}(a, b) = 0, a > \pi, b > 0\},$$

kde

$$\mathcal{G}(a, b) = \begin{cases} \mathcal{G}_1(a, b) & \text{pro } s(a, b) \in [0, \frac{\pi}{a}), \\ \mathcal{G}_2(a, b) & \text{pro } s(a, b) \in [\frac{\pi}{a}, T), \end{cases}$$

přičemž platí

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(a, b) &= \frac{b}{a} (1 - s(a, b)) + \frac{b}{a} \left( \frac{\sin(a s(a, b))}{a} - \cos(a s(a, b)) \right) + (1 - s(a, b)) \left( \frac{b-a}{\pi} (1 - s(a, b)) - 1 \right), \\ \mathcal{G}_2(a, b) &= \frac{b}{a} \left( 2 - 2s(a, b) + \frac{\pi}{a} \right) + (1 - s(a, b)) \left( \frac{b-a}{\pi} (1 - s(a, b)) - 1 \right) - \\ &\quad - \frac{a}{b} \left( 1 + \frac{\pi}{a} - s(a, b) + \frac{\sin(b(s(a, b) - \frac{\pi}{a}))}{b} - \cos\left(b\left(s(a, b) - \frac{\pi}{a}\right)\right) \right), \\ s(a, b) &= 1 - \left\lfloor \frac{ab}{\pi(a+b)} \right\rfloor \frac{\pi(a+b)}{ab}. \end{aligned}$$

( $\lfloor x \rfloor$  značí dolní celou část čísla  $x$ .)

Před samotným důkazem věty 5.5 dokážeme několik pomocných lemmat. Nejdříve zavedeme (pomocnou) počáteční úlohu

$$\begin{aligned} v''(r) + a^2 v^+(r) - b^2 v^-(r) &= 0 & \text{pro } r \in (0, +\infty), \\ v(0) = 0, v'(0) &= ab. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Řešením počáteční úlohy (5.8) je periodická funkce s periodou  $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$  ve tvaru

$$v(r) = \begin{cases} b \sin(ar) & \text{pro } r \in \left[0, \frac{\pi}{a}\right), \\ -a \sin\left(b\left(r - \frac{\pi}{a}\right)\right) & \text{pro } r \in \left[\frac{\pi}{a}, T\right). \end{cases} \tag{5.9}$$

Dvojice  $(a, b)$  tedy leží v množině  $\mathcal{M}$  právě tehdy, když pro funkci  $v$  danou předpisem (5.9) platí

$$\int_0^1 r v(r) dr = 0.$$

Přejdeme tedy k zohlednění integrální podmínky. Jelikož je funkce  $v$  periodická, vyjádříme nejprve integrály přes jednotlivé (celé) periody této funkce. Zavedme tedy následující značení

$$I_n = \begin{cases} \int_{(n-1)T}^{nT} r v(r) dr & \text{pro } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro } n = 0. \end{cases}$$

Pro  $I_n$  tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} (r + (n-1)T) v(r) dr + \int_{\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}} (r + (n-1)T) v(r) dr = \\ &= b \int_0^{\frac{\pi}{a}} (r + (n-1)T) \sin(ar) dr - a \int_0^{\frac{\pi}{b}} \left( r + (n-1)T + \frac{\pi}{a} \right) \sin(br) dr = \\ &= 2\frac{b}{a}(n-1)T - 2\frac{a}{b} \left( (n-1)T + \frac{\pi}{a} \right) + \frac{\pi b}{a^2} - \frac{\pi a}{b^2} = 2(n-1)T \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) + \pi \left( \frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2} - \frac{2}{b} \right). \end{aligned}$$

Vyjádříme nyní integrál přes více period.

**Lemma 5.6.** *Pro integrál přes  $n \in \mathbb{N}_0$  period platí*

$$\int_0^{nT} r v(r) dr = nT \left( n \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) - 1 \right).$$

*Důkaz.* Pro  $n = 0$  je důkaz zřejmý. Předpokládejme tedy dále  $n \in \mathbb{N}$ , přičemž platí

$$\int_0^{nT} r v(r) dr = \sum_{i=0}^n I_i.$$

Jelikož platí  $I_{n+1} - I_n = 2T \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)$ , můžeme integrál vyjádřit pomocí vzorce pro součet aritmetické posloupnosti. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \int_0^{nT} r v(r) dr &= \frac{n}{2} \left( \pi \left( \frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2} - \frac{2}{b} \right) + 2(n-1)T \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) + \pi \left( \frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2} - \frac{2}{b} \right) \right) = \\ &= n \left( \pi \left( \frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2} + \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{2}{b} \right) + (n-1)T \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \right) = \\ &= n \left( \pi \left( \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) + (n-1)T \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) \right) = \\ &= nT \left( n \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

□

*Důkaz věty 5.5.* Nyní zbývá vyjádřit integrál funkce  $v$  (viz (5.9)) na intervalu  $(0, 1)$ . Jelikož již umíme vyjádřit integrál přes více period funkce  $v$ , budeme uvažovat integrál v následujícím tvaru

$$G = \int_0^1 r v(r) dr = \int_0^{nT} r v(r) dr + \int_{nT}^1 r v(r) dr.$$

Uvažujme nyní pevné  $a, b$  a  $n$ , pro které platí  $1 \in [nT, (n+1)T)$  ( $\int_0^{nT} r v(r) dr$  tedy zohledňuje integraci přes všechny celé periody funkce  $v$ ). Zdefinujme nyní  $s = 1 - nT$ .

Pro  $s \in [0, \frac{\pi}{a}]$  dostáváme  $G$  ve tvaru

$$\begin{aligned} G &= \int_0^{nT} r v(r) dr + b \int_0^s (r + nT) \sin(ar) dr = \\ &= \frac{b}{a} \left( \frac{\sin(as)}{a} - \cos(as) \right) + \frac{b}{a} nT + nT \left( n \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) - 1 \right) = \\ &= \frac{b}{a} (1-s) + \frac{b}{a} \left( \frac{\sin(as)}{a} - \cos(as) \right) + (1-s) \left( \frac{b-a}{\pi} (1-s) - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Pro  $s \in [\frac{\pi}{a}, T)$  dostáváme  $G$  ve tvaru

$$\begin{aligned} G &= \int_0^{nT} r v(r) dr + b \int_0^{\frac{\pi}{a}} (r + nT) \sin(ar) dr - a \int_0^{s-\frac{\pi}{a}} \left( r + nT + \frac{\pi}{a} \right) \sin(br) dr = \\ &= nT \left( n \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) - 1 \right) + \frac{b}{a} \left( 2nT + \frac{\pi}{a} \right) - \frac{a}{b} \left[ \frac{\sin(br)}{b} - \left( r + nT + \frac{\pi}{a} \right) \cos(br) \right]_0^{s-\frac{\pi}{a}} = \\ &= (1-s) \left( \frac{b-a}{\pi} (1-s) - 1 \right) + \frac{b}{a} \left( 2(1-s) + \frac{\pi}{a} \right) - \frac{a}{b} \left( \frac{\sin(b(s-\frac{\pi}{a}))}{b} - \cos(b(s-\frac{\pi}{a})) + 1 - s + \frac{\pi}{a} \right) = \\ &= \frac{b}{a} \left( 2 - 2s + \frac{\pi}{a} \right) - \frac{a}{b} \left( 1 + \frac{\pi}{a} - s + \frac{\sin(b(s-\frac{\pi}{a}))}{b} - \cos(b(s-\frac{\pi}{a})) \right) + (1-s) \left( \frac{b-a}{\pi} (1-s) - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Jelikož  $n$  odpovídá počtu celých period funkce  $v$ , můžeme psát  $n = \lfloor \frac{1}{T} \rfloor$ . Z rovnosti  $s = 1 - \lfloor \frac{1}{T} \rfloor T$ , kde  $T = \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b}$ , dostáváme předpis pro  $s$  ve tvaru  $s = 1 - \lfloor \frac{ab}{\pi(a+b)} \rfloor \frac{\pi(a+b)}{ab}$ .  $\square$

### Předpis množiny $\mathcal{N}$

Nyní najdeme popis množiny  $\mathcal{N}$  v explicitním tvaru (budeme tedy uvažovat  $\alpha = a^2, -\beta = \tilde{b}^2$ ). Hledáme tedy pro jaké dvojice  $(a, \tilde{b})$  existuje netriviální řešení následující úlohy

$$\begin{aligned} v''(r) + a^2 v^+(r) + \tilde{b}^2 v^-(r) &= 0 && \text{pro } r \in (0, 1), \\ v(0) &= 0, v'(0) > 0, && \int_0^1 r v(r) dr = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Hlavní částí této podkapitoly je tedy důkaz následující věty.

**Věta 5.7.** *Množinu  $\mathcal{N}$  lze zapsat ve tvaru*

$$\mathcal{N} = \left\{ (a, 0) : 2a^3 - 3\pi a^2 + \pi^3 - 6\pi = 0 \wedge a > \pi \right\} \cup \left\{ (a, \tilde{b}) : \frac{\pi \tilde{b}}{a^2} + \frac{a \sinh\left(\tilde{b} - \frac{\pi \tilde{b}}{a}\right) - a \tilde{b} \cosh\left(\tilde{b} - \frac{\pi \tilde{b}}{a}\right) + \pi \tilde{b}}{\tilde{b}^2} = 0 \wedge a > \pi \wedge \tilde{b} \geq 0 \right\}.$$

Zavedme podobně jako v případě  $\beta > 0$  pomocnou počáteční úlohu

$$\begin{aligned} v''(r) + a^2 v^+(r) + \tilde{b}^2 v^-(r) &= 0 && \text{pro } r \in (0, +\infty), \\ v(0) &= 0, v'(0) = a. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Uvažujme nejprve  $\tilde{b} = 0$ .

Řešení úlohy (5.13) lze zapsat ve tvaru

$$v(r) = \begin{cases} \sin(ar) & \text{pro } r \in (0, \frac{\pi}{a}], \\ -a(r - \frac{\pi}{a}) & \text{pro } r \in (\frac{\pi}{a}, +\infty). \end{cases}$$

**Lemma 5.8.** *V případě  $\tilde{b} = 0$  má úloha (5.12) netriviální řešení právě tehdy, když platí*

$$a > \pi \wedge 2a^3 - 3\pi a^2 + \pi^3 - 6\pi = 0. \quad (5.14)$$

*Důkaz.* Hledáme tedy, pro jaký parametr  $a$  platí  $\int_0^1 r v(r) dr = 0$ .

$$\int_0^1 r v(r) dr = \int_0^{\frac{\pi}{a}} r \sin(ar) dr - a \int_{\frac{\pi}{a}}^1 \left(r^2 - r \frac{\pi}{a}\right) dr = \frac{\pi}{a^2} - \frac{2a^3 - 3a^2\pi + \pi^3}{6a^2}.$$

Máme tedy

$$\int_0^1 r v(r) dr = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 3\pi a^2 + \pi^3 - 6\pi = 0.$$

□



Uvažujme nyní  $\tilde{b} > 0$ .  
Řešení úlohy (5.13) lze zapsat ve tvaru

$$v(r) = \begin{cases} \sin(ar) & \text{pro } r \in \left(0, \frac{\pi}{a}\right], \\ -\frac{a}{\tilde{b}} \sinh\left(\tilde{b}\left(r - \frac{\pi}{a}\right)\right) & \text{pro } r \in \left(\frac{\pi}{a}, +\infty\right). \end{cases}$$

**Lemma 5.9.** *V případě  $\tilde{b} > 0$  má úloha (5.12) netriviální řešení právě tehdy, když platí*

$$a > \pi \wedge \frac{\pi \tilde{b}}{a^2} + \frac{a \sinh\left(\tilde{b} - \frac{\pi \tilde{b}}{a}\right) - a \tilde{b} \cosh\left(\tilde{b} - \frac{\pi \tilde{b}}{a}\right) + \pi \tilde{b}}{\tilde{b}^2} = 0.$$

*Důkaz.* Hledáme tedy dvojici  $a, b$ , pro kterou platí  $\int_0^1 r v(r) dr = 0$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 r v(r) dr &= \int_0^{\frac{\pi}{a}} r \sin(ar) dr - \frac{a}{\tilde{b}} \int_{\frac{\pi}{a}}^1 r \sinh\left(b\left(r - \frac{\pi}{a}\right)\right) dr = \\ &= \frac{\pi}{a^2} - \frac{a}{\tilde{b}} \frac{a b \cosh\left(b - \frac{\pi b}{a}\right) - a \sinh\left(b - \frac{\pi b}{a}\right) - \pi b}{ab^2}. \end{aligned}$$

Máme tedy

$$\int_0^1 r v(r) dr = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi \tilde{b}}{a^2} + \frac{a \sinh\left(\tilde{b} - \frac{\pi \tilde{b}}{a}\right) - a \tilde{b} \cosh\left(\tilde{b} - \frac{\pi \tilde{b}}{a}\right) + \pi \tilde{b}}{\tilde{b}^2} = 0.$$

□

*Důkaz věty 5.7.* Důkaz přímo plyne z lemmat 5.8, 5.9.

□

## 5.4 Parametrizace

V této části nalezneme parametrické vyjádření výše odvozených explicitních předpisů množin  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$ .

Pro jednoduchost zápisu v dalších částech zavedme funkci třídy  $C^1([-1, 1])$  ve tvaru

$$\Psi(x) = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(x)\right). \quad (5.15)$$

### Parametrický popis množiny $\mathcal{M}$

Nyní ukážeme, že množinu  $\mathcal{M}$  lze parametrizovat pomocí posloupnosti křivek  $(\mathbf{k}_{1,n})_{n=1}^{\infty}$ ,  $(\mathbf{k}_{2,n})_{n=0}^{\infty}$ . Neboli  $(a, b)$  leží v množině  $\mathcal{M}$  právě tehdy, když  $(a, b)$  leží na některé z křivek  $\mathbf{k}_{1,n}$ ,  $\mathbf{k}_{2,n}$ . Graf s těmito křivkami můžeme vidět na obr. 5.1.

**Věta 5.10.** *Množinu  $\mathcal{M}$  lze parametrizovat pomocí posloupnosti křivek  $(\mathbf{k}_{1,n})_{n=1}^{\infty}$  a  $(\mathbf{k}_{2,n})_{n=0}^{\infty}$ . Přičemž platí  $\mathbf{k}_{1,n}(x) = (a_{1,n}(x), b_{1,n}(x))$  a  $\mathbf{k}_{2,n}(x) = (a_{2,n}(x), b_{2,n}(x))$ , kde pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  máme*

$$a_{1,n}(x) = 2\sqrt{-\frac{p_{1,n}(x)}{3}} \Psi\left(\frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}}\right) + \frac{3x + (2n-1)\pi}{3},$$

$$b_{1,n}(x) = \pi a_{1,n}(x) \frac{n}{a_{1,n}(x) - x - \pi n},$$

$$a_{2,n}(x) = \pi b_{2,n}(x) \frac{n+1}{b_{2,n}(x) - x - \pi n},$$

$$b_{2,n}(x) = 2\sqrt{-\frac{p_{2,n}(x)}{3}} \Psi\left(\frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}}\right) + \frac{3x + 2\pi n}{3},$$

pro  $n = 0$  a  $x \in (0, \pi]$  máme

$$a_{2,0}(x) = \pi + \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{1 - \cos(x)} \Psi\left(\frac{27(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(3 - 3 \cos(x))^{\frac{3}{2}}}\right)},$$

$$b_{2,0}(x) = x + \frac{2}{3}\pi \sqrt{3 - 3 \cos(x)} \Psi\left(\frac{27(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(3 - 3 \cos(x))^{\frac{3}{2}}}\right).$$

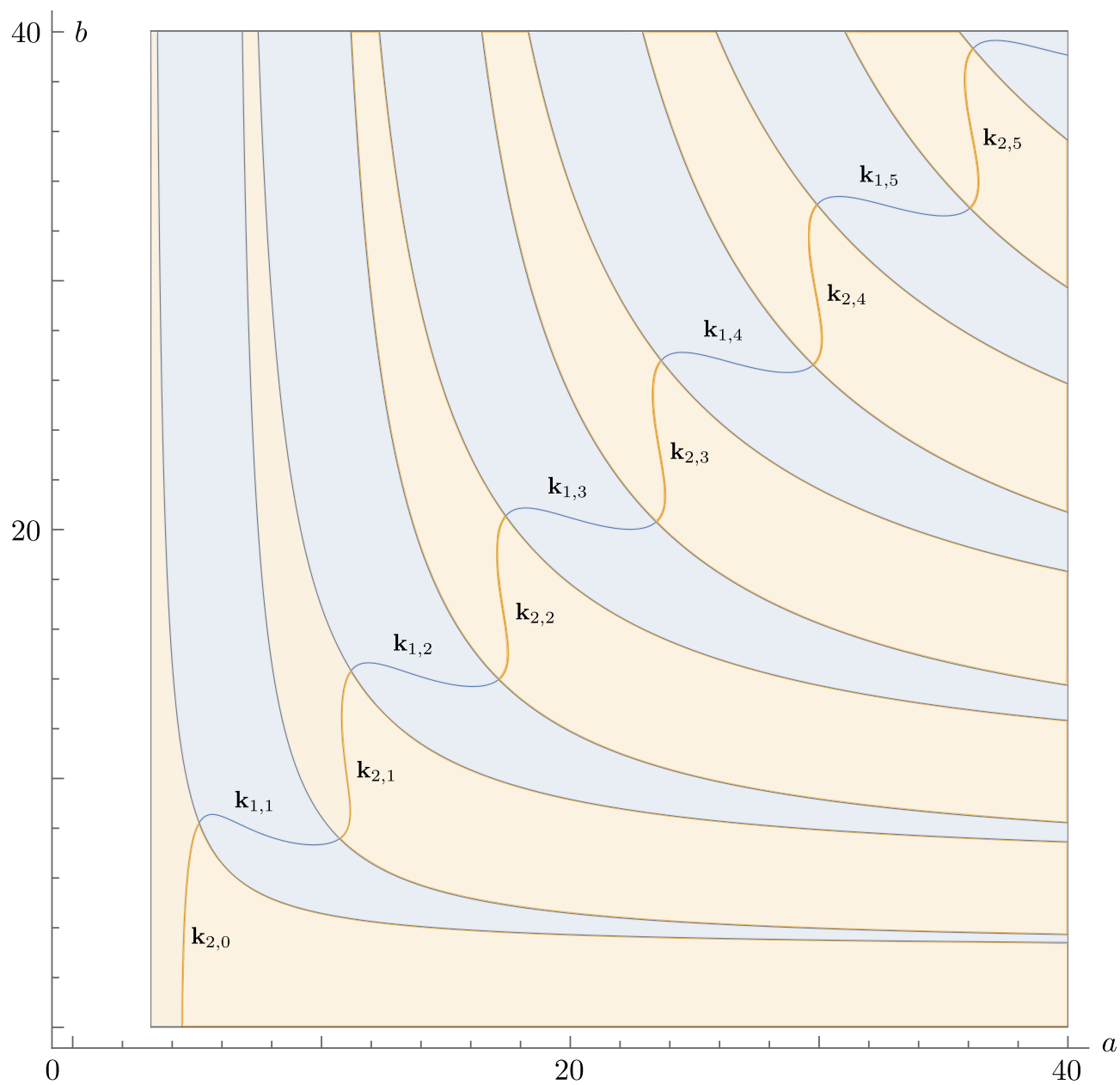
Přičemž máme

$$p_{1,n}(x) = -\frac{\pi^2}{3} (4n^2 + n(2 - 3 \cos(x)) + 1),$$

$$q_{1,n}(x) = -\frac{\pi^2}{27} (16\pi n^3 + n^2(12\pi - 18\pi \cos(x)) + n(27(\sin(x) - x \cos(x)) + 9\pi \cos(x) - 6\pi) - 2\pi),$$

$$p_{2,n}(x) = -\frac{\pi^2}{3} (4n^2 + 3n(2 - \cos(x)) + 3 - 3 \cos(x)),$$

$$q_{2,n}(x) = -\frac{\pi^2}{27} (16\pi n^3 + 18n^2(2\pi - \pi \cos(x)) + 9n(3(\sin(x) - x \cos(x)) + 2\pi(1 - \cos(x))) + 27(\sin(x) - x \cos(x))).$$

Obrázek 5.1: Ilustrace jednotlivých částí křivky, jež popisuje množinu  $\mathcal{M}$ .

Důkaz této věty rozdělíme do několika částí.

- (I) Odvození předpisu křivek  $\mathbf{k}_{1,n}(x) = (a_{1,n}(x), b_{1,n}(x))$ .
- (II) Důkaz pomocných lemmat použitých v části (I).
- (III) Odvození předpisu křivek  $\mathbf{k}_{2,n}(x) = (a_{2,n}(x), b_{2,n}(x))$ .
- (IV) Důkaz pomocných lemmat použitých v části (III).

Přejdeme tedy k samotnému odvození.

(I) Nyní odvodíme parametrický popis množiny, jež vyhovuje rovnici  $\mathcal{G}_1(a, b) = 0$  (pro  $s(a, b) \in [0, \frac{\pi}{a}]$ ). V předchozí části jsme uvažovali  $s(a, b) \in [0, \frac{\pi}{a})$ , jelikož je však funkce  $\mathcal{G}_1$  dobře definovaná a spojitá i na uzávěru tohoto intervalu, budeme dále uvažovat  $s(a, b) \in [0, \frac{\pi}{a}]$  (k tomuto rozšíření přecházíme, abychom v následujících částech nemuseli pracovat se složitými limitními zápisy).

Vyjdeme z rovnosti  $\mathcal{G}_1(a, b) = 0$  (viz věta 5.5)

$$\frac{b}{a}(1 - s(a, b)) + \frac{b}{a} \left( \frac{\sin(as(a, b))}{a} - \cos(as(a, b)) \right) + (1 - s(a, b)) \left( \frac{b-a}{\pi}(1 - s(a, b)) - 1 \right) = 0. \quad (5.16)$$

Uvažujme nyní dvojici  $a, b$ , která splňuje rovnost (5.16) a relaci  $s(a, b) \in [0, \frac{\pi}{a}]$ . A zavedme substituci  $x = as(a, b)$ , čímž dostáváme

$$\frac{b}{a} \frac{a-x}{a} + \frac{b}{a} \left( \frac{\sin(x)}{a} - \cos(x) \right) + \frac{a-x}{a} \left( \frac{b-a}{\pi} \frac{a-x}{a} - 1 \right) = 0 \quad \text{pro } x \in [0, \pi]. \quad (5.17)$$

Z rovnosti  $s(a, b) = 1 - n\pi \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  plyne ( $n$  odpovídá počtu celých period funkce  $v$ , platí tedy  $n = \lfloor \frac{1}{T} \rfloor = \lfloor \frac{ab}{\pi(a+b)} \rfloor$ )

$$b = \frac{a\pi n}{a - \pi n - x}. \quad (5.18)$$

Po dosazení (5.18) do (5.17) dostáváme

$$\frac{(a-x)(a-x+\pi)(a-2\pi n-x) + \pi^2 n(a \cos(x) - \sin(x))}{a\pi(\pi n + x - a)} = 0. \quad (5.19)$$

Nyní ukážeme, že jsou výrazy (5.18) a (5.19) dobře definovány, neboli platí  $a > \pi n + x$ .

Zřejmě platí

$$a - \pi n > a - \pi n - n\pi \frac{a}{b},$$

po jednoduché úpravě dostáváme

$$a - \pi n > a \left( 1 - \pi n \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) = as(a, b) = x.$$

Máme tedy

$$a > \pi n + x. \quad (5.20)$$

Můžeme tedy psát

$$a^3 + a^2(\pi - 2\pi n - 3x) + a(4\pi n x + \pi^2 n \cos(x) - 2\pi^2 n + 3x^2 - 2\pi x) - 2\pi n x^2 + 2\pi^2 n x - \pi^2 n \sin(x) - x^3 + \pi x^2 = 0,$$

ve které proměnnou  $x$  považujeme za parametr a řešíme ji vzhledem k proměnné  $a$ .

Pro zjednodušení zápisu uvažujme rovnici ve tvaru

$$a^3 + B_{1,n}(x)a^2 + C_{1,n}(x)a + D_{1,n}(x) = 0, \quad (5.21)$$

kde

$$\begin{aligned} B_{1,n}(x) &= \pi - 2\pi n - 3x, \\ C_{1,n}(x) &= 4\pi n x + \pi^2 n \cos(x) - 2\pi^2 n + 3x^2 - 2\pi x, \\ D_{1,n}(x) &= -2\pi n x^2 + 2\pi^2 n x - \pi^2 n \sin(x) - x^3 + \pi x^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pro eliminaci kvadratického členu, použijme substituci

$$a = t - \frac{B_{1,n}(x)}{3}. \quad (5.23)$$

Po dosazení máme

$$t^3 + p_{1,n}(x)t + q_{1,n}(x) = 0, \quad (5.24)$$

kde

$$\begin{aligned} p_{1,n}(x) &= C_{1,n}(x) - \frac{B_{1,n}^2(x)}{3}, \\ q_{1,n}(x) &= \frac{2}{27}B_{1,n}^3(x) - \frac{B_{1,n}(x)C_{1,n}(x)}{3} + D_{1,n}(x). \end{aligned}$$

Pro pevné  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  dostáváme kubickou rovnici v proměnné  $t$ , přičemž po jejím vyřešení (viz lemma B.5) a provedení zpětné substituce (5.23) dostáváme

$$a_k = 2\sqrt{-\frac{p_{1,n}(x)}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right) + \frac{3x + (2n-1)\pi}{3}, \text{ kde } k = 0, 1, 2.$$

Z nerovnosti

$$a > \pi n + x,$$

plyne

$$\cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right) > 0.$$

Jelikož platí  $\frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}} \in [0, 1]$  (bude ukázáno v lemmatu 5.12), dostáváme

$$\frac{1}{3} \arccos \left( \frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}} \right) \in \left[ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$$

Odtud plyne  $k = 0$ , čímž dostáváme parametrizaci jednotlivých větví Fučíkova spektra ve tvaru  $\mathbf{k}_{1,n}(x) = (a_{1,n}(x), b_{1,n}(x))$ , kde

$$\begin{aligned} a_{1,n}(x) &= 2\sqrt{-\frac{p_{1,n}(x)}{3}} \Psi \left( \frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}} \right) + \frac{3x+(2n-1)\pi}{3}, \\ b_{1,n}(x) &= \frac{a_{1,n}(x)\pi n}{a_{1,n}(x) - \pi n - x}, \end{aligned} \quad \text{kde } n \in \mathbb{N}, x \in [0, \pi].$$

(II) Nyní ukážeme, že při volbě koeficientů kubické rovnice ve tvaru (5.22) jsou všechny výše uvedené výrazy dobře definovány v prostoru reálných čísel. Je tedy třeba dokázat následující dvě lemmata.

**Lemma 5.11.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  platí  $p_{1,n}(x) < 0$ .*

*Důkaz.* Po rozepsání máme

$$p_{1,n}(x) = 2\pi x(2n-1) + \pi^2 n \cos(x) - 2\pi^2 n + 3x^2 - \frac{\pi^2(1-2n)^2 + 9x^2 - 6\pi x(1-2n)}{3}.$$

Což lze zjednodušit do tvaru

$$p_{1,n}(x) = \pi^2 n \cos(x) - 2\pi^2 n x - \frac{\pi^2(1+4n^2-4n)}{3} = -\frac{\pi^2}{3} (4n^2 + 2n + 1 - 3n \cos(x)) < 0.$$

□

**Lemma 5.12.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  platí  $\frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}} \in [0, 1)$ .*

*Důkaz.* Zavedme si nyní pomocnou funkci  $w_1(x) = \frac{3}{2} \frac{q_{1,n}(x)}{p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}}$ . Přičemž po rozepsání dostáváme

$$w_1(x) = \frac{16\pi n^3 - n^2(18\pi \cos(x) - 12\pi) - n(-27 \sin(x) + 27x \cos(x) - 9\pi \cos(x) + 6\pi) - 2\pi}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Chceme ukázat  $w_1(x) \in [0, 1)$  na intervalu  $[0, \pi]$  a pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$ . To plyne z následujících vlastností funkce  $w_1$ :

- (i)  $w_1(0) < 1$ ,  $w_1(\pi) < 1$ ,
- (ii)  $w_1'(0) = w_1'(\pi) = 0$ ,
- (iii) existuje právě jeden nulový bod  $x_0$  funkce  $w_1'$  na intervalu  $(0, \pi)$ ,
- (iv)  $w_1''(0) < 0$ ,  $w_1''(\pi) < 0$ ,
- (v)  $w_1(x) \geq 0$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

Z (ii), (iii) a (iv) dostáváme, že funkce  $w_1$  je klesající na intervalu  $(0, x_0)$  a rostoucí na intervalu  $(x_0, \pi)$ , a tedy z (i) dostáváme  $w_1(x) < 1$  na intervalu  $[0, \pi]$ . Z (v) zřejmě plyne  $w_1(x) \in [0, 1]$  na  $[0, \pi]$ .

Přejdeme nyní k samotnému odvození výše uvedených vlastností.

(i) Vyjádřeme tedy  $w_1(0)$  a  $w_1(\pi)$ , přičemž dostáváme

$$w_1(0) = \frac{16\pi n^3 - 6\pi n^2 + 3\pi n - 2\pi}{2\pi(4n^2 - n + 1)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{256n^6 - 192n^5 + 132n^4 - 100n^3 + 33n^2 - 12n + 4}{256n^6 - 192n^5 + 240n^4 - 100n^3 + 60n^2 - 12n + 4}} < 1$$

a

$$w_1(\pi) = \frac{16\pi n^3 + 30\pi n^2 + 12\pi n - 2\pi}{2\pi(4n^2 + 5n + 1)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{256n^6 + 960n^5 + 1284n^4 + 656n^3 + 24n^2 - 48n + 4}{256n^6 + 960n^5 + 1392n^4 + 980n^3 + 348n^2 + 60n + 4}} < 1.$$

(ii) Po zderivování  $w_1$  dostáváme

$$w_1'(x) = \frac{27n \sin(x)(2(n(4nx - 2\pi n + 2x + \pi) + x) - 9n \sin(x) + n(\pi(2n - 1) + 3x) \cos(x))}{4\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{5/2}}, \quad (5.25)$$

přičemž zřejmě platí  $w_1'(0) = w_1'(\pi) = 0$ .

(iii) Nyní ukážeme, že  $w_1'$  má pouze jeden nulový bod na intervalu  $(0, \pi)$ . Potřebujeme tedy ukázat, že rovnice

$$x(8n^2 + 3n \cos(x) + 4n + 2) - 4\pi n^2 - 9n \sin(x) + \pi(2n - 1)n \cos(x) + 2\pi n = 0 \quad (5.26)$$

má pouze jedno řešení na intervalu  $(0, \pi)$ .

To ukážeme pomocí Banachovy věty o kontrakci. Přepíšme (5.26) do tvaru  $x = f_1(x)$ , kde

$$f_1(x) = n \frac{9 \sin(x) + (\pi - 2\pi n) \cos(x) - 3x \cos(x) + 4\pi n - 2\pi}{8n^2 + 4n + 2}.$$

Potřebujeme tedy dokázat, že  $f_1$  je kontrakce a zobrazuje z uzavřeného intervalu do sebe.

Ukážeme tedy, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí

- (a)  $\forall x \in [0, \pi] : f_1(x) \in [0, \pi]$ ,
- (b)  $\exists q \in (0, 1) \forall x \in [0, \pi] : |f_1'(x)| \leq q$ .

Přejdeme nyní k samotnému odvození.

(a) Ukažme nejprve  $f_1(x) \geq 0$ .

Z (B.16) plyne

$$f_1(x) \geq n \frac{6 \sin(x) + 2(2\pi n - \pi) - (2\pi n - \pi) \cos(x)}{8n^2 + 4n + 2} \geq 0.$$

Nyní ukážeme  $f_1(x) \leq \pi$ .

$$f_1(x) \leq n \frac{9 + (\pi + 2\pi n) + 3\pi + 4\pi n - 2\pi}{8n^2 + 4n + 2} \leq \pi \frac{6n^2 + (2 + \frac{9}{\pi})n}{8n^2 + 4n + 2} \leq \pi.$$

(b) Pro  $f'_1$  platí

$$f'_1(x) = n \frac{6 \cos(x) + 3x \sin(x) + (2\pi n - \pi) \sin(x)}{8n^2 + 4n + 2}.$$

Nyní ukážeme  $|f'_1(x)| < 1$  pro  $x \in [0, \pi]$  a  $n \in \mathbb{N}$ .

**Poznámka 5.13.** Předpoklad  $|f'_1(x)| < 1$  je dostatečný, jelikož  $f'_1$  je spojitou funkcí na uzavřeném intervalu, a tedy dle Weierstrassovy věty o nabývání maxima (minima) existuje konstanta  $\rho < 1 : |f'_1(x)| \leq \rho$ .

Ukažme nejprve  $f'_1(x) > -1$ .

Zřejmě platí

$$f'_1(x) \geq n \frac{6 \cos(x)}{8n^2 + 4n + 2} \geq -3 \frac{n}{4n^2 + 2n + 1} > -1.$$

Nyní ukážeme  $f'_1(x) < 1$ .

Použitím nerovnosti (B.17) můžeme pro  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  psát

$$\begin{aligned} f'_1(x) &\leq n \frac{6 \cos(x) + (2\pi n + \frac{\pi}{2}) \sin(x)}{8n^2 + 4n + 2} \leq n \frac{\sqrt{36 + \pi^2 (2n + \frac{1}{2})^2} \sin(x - x_1)}{8n^2 + 4n + 2} \leq \\ &n \frac{\sqrt{36 + \pi^2 (2n + \frac{1}{2})^2}}{8n^2 + 4n + 2} \leq \frac{\sqrt{4\pi^2 n^4 + 2\pi^2 n^3 + \frac{\pi^2 n^2}{4} + 36n^2}}{\sqrt{64n^4 + 64n^3 + 48n^2 + 16n + 4}} \leq \frac{\sqrt{40n^4 + 20n^3 + 39n^2}}{\sqrt{64n^4 + 64n^3 + 48n^2 + 16n + 4}} < 1. \end{aligned}$$

Vyšetřeme nyní chování na intervalu  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Vyjádřeme nejprve

$$f''_1(x) = n \frac{((2n - 1)\pi + 3x) \cos(x) - 3 \sin(x)}{8n^2 + 4n + 2}.$$

Zřejmě platí  $f''_1(x) < 0$  na celém intervalu  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

Odtud dostáváme, že funkce  $f'_1$  je klesající na intervalu  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ , a tedy  $|f'_1(x)| < 1$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

Funkce  $f_1$  splňuje předpoklady Banachovy věty, a tedy existuje právě jedno řešení rovnice (5.26) na intervalu  $[0, \pi]$ .

(iv) Vyjádřeme nyní hodnoty funkce  $w''_1$  v bodech 0 a  $\pi$ . Zapišme funkci  $w'_1$  ve tvaru

$$w'_1(x) = \frac{\mu_1(x) \nu_1(x)}{\xi_1(x)},$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= 27n \sin(x), \\ \nu_1(x) &= 2(n(4nx - 2\pi n + 2x + \pi) + x) - 9n \sin(x) + n(\pi(2n - 1) + 3x) \cos(x), \\ \xi_1(x) &= 4\pi (4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{5/2}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy psát  $w''_1$  ve tvaru

$$w''_1(x) = \frac{\mu'_1(x) \nu_1(x)}{\xi_1(x)} + \frac{\mu_1(x) \nu'_1(x)}{\xi_1(x)} - \frac{\mu_1(x) \nu_1(x) \xi'_1(x)}{\xi_1^2(x)}.$$



Jelikož  $\mu_1(0) = \mu_1(\pi) = 0$  dostáváme

$$w_1''(0) = \frac{27n(2(n(-2\pi n + \pi)) + n(\pi(2n - 1)))}{4\pi(4n^2 - n + 1)^{5/2}} = \frac{27n(-2\pi n^2 + \pi n)}{4\pi(4n^2 - n + 1)^{5/2}} < 0,$$

$$\begin{aligned} w_1''(\pi) &= -\frac{27n(2(n(4n\pi - 2\pi n + 2\pi + \pi) + \pi) - n(\pi(2n - 1) + 3\pi))}{4\pi(4n^2 + 5n + 1)^{5/2}} = \\ &= -\frac{27n(4\pi n^2 + 6\pi n + 2\pi - n(2n\pi + 2\pi))}{4\pi(4n^2 + 5n + 1)^{5/2}} = -\frac{27n(n^2 + 2n + 1)}{2(4n^2 + 5n + 1)^{5/2}} < 0. \end{aligned}$$

(v) Nakonec ukážeme  $w_1(x) > 0$ .

Použitím (B.16) dostáváme

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{16\pi n^3 + n^2(12\pi - 18\pi \cos(x)) + n(27 \sin(x) - 27x \cos(x) + 9\pi \cos(x) - 6\pi) - 2\pi}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq \\ &= \frac{16\pi n^3 + n^2(12\pi - 18\pi \cos(x)) + n(9\pi \cos(x) - 6\pi) - 2\pi}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Na intervalu  $[0, \frac{\pi}{2}]$  můžeme psát

$$\begin{aligned} w_1(x) &\geq \frac{16\pi n^3 + n^2(12\pi - 18\pi \cos(x)) + n(9\pi \cos(x) - 6\pi) - 2\pi}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq \\ &= \frac{2\pi n^3 + n^2((12 + 6n)\pi - 18\pi \cos(x)) + n(6\pi n^2 - 6\pi) + (2\pi n^3 - 2\pi)}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq 0. \end{aligned}$$

Na intervalu  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  můžeme psát

$$\begin{aligned} w_1(x) &\geq \frac{16\pi n^3 + n^2(12\pi - 18\pi \cos(x)) + n(9\pi \cos(x) - 6\pi) - 2\pi}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq \\ &= \frac{16\pi n^3 + 12\pi n^2 + n(9\pi \cos(x) - 6\pi) - 2\pi}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq \\ &= \frac{\pi n^3 + 10\pi n^2 + n(15n^2\pi + 9\pi \cos(x) - 6\pi) + (2\pi n^2 - 2\pi)}{2\pi(4n^2 - 3n \cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq 0. \end{aligned}$$

□

(III) Nyní odvodíme parametrický popis množiny, jež vyhovuje rovnici  $\mathcal{G}_2(a, b) = 0$ . Podobně jako u předchozího odvození budeme dále uvažovat  $s(a, b) \in [\frac{\pi}{a}, T]$ .

Vyjděme z rovnosti  $\mathcal{G}_2(a, b) = 0$ .

Můžeme tedy (pro  $s(a, b) \in [\frac{\pi}{a}, T]$ ) psát

$$\begin{aligned} & \frac{b}{a} \left( 2 - 2s(a, b) + \frac{\pi}{a} \right) + (1 - s(a, b)) \left( \frac{b-a}{\pi} (1 - s(a, b)) - 1 \right) - \\ & \frac{a}{b} \left( 1 + \frac{\pi}{a} - s(a, b) + \frac{\sin \left( b \left( s(a, b) - \frac{\pi}{a} \right) \right)}{b} - \cos \left( b \left( s(a, b) - \frac{\pi}{a} \right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Uvažujme dvojici  $a, b$ , která splňuje rovnost (5.27) (a relaci  $s(a, b) \in [\frac{\pi}{a}, T]$ ).

Nyní použijeme substituci  $s(a, b) = \frac{x}{b} + \frac{\pi}{a}$ , čímž dostáváme

$$\frac{b}{a} \left( 2 - 2\frac{x}{b} - \frac{\pi}{a} \right) - \frac{a}{b} \left( 1 - \frac{x}{b} + \frac{\sin(x)}{b} - \cos(x) \right) + \left( 1 - \frac{x}{b} - \frac{\pi}{a} \right) \left( \frac{b-a}{\pi} \left( 1 - \frac{x}{b} - \frac{\pi}{a} \right) - 1 \right) = 0,$$

což lze zjednodušit do tvaru

$$\frac{(b-a)(b-x)(b-x+\pi) + \pi ab \cos(x) - \pi a \sin(x)}{\pi b^2} = 0 \quad \text{pro } x \in [0, \pi]. \quad (5.28)$$

Jelikož dále platí  $s(a, b) = 1 - n\pi \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$  (kde  $n = \left\lfloor \frac{ab}{\pi(a+b)} \right\rfloor$ ), dostáváme  $\frac{x}{b} + \frac{\pi}{a} = 1 - n\pi \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ , a tedy můžeme psát

$$a = \frac{b\pi(n+1)}{b - \pi n - x}. \quad (5.29)$$

Po dosazení (5.29) do (5.28) máme

$$\frac{(b-x)(b-x+\pi)(-b+2\pi n+x+\pi) - \pi^2 b(n+1) \cos(x) + \pi^2(n+1) \sin(x)}{\pi b(x+\pi n-b)} = 0. \quad (5.30)$$

Nyní ukážeme, že výrazy (5.29) a (5.29) jsou dobře definovány, neboli platí  $b > \pi n + x$ . Zřejmě platí

$$b - \pi n > b - \pi n - (n+1)\pi \frac{b}{a},$$

přičemž po jednoduché úpravě dostáváme

$$b - \pi n > b \left( 1 - \pi n \frac{1}{b} - (n+1)\pi \frac{1}{a} \right) = b \left( s(a, b) - \frac{\pi}{a} \right) = x. \quad (5.31)$$

A tedy můžeme rovnici (5.30) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} & b^3 + b^2(-2\pi n - 3x) + b(4\pi n x + \pi^2(n+1) \cos(x) + \pi^2(-2n-1) + 3x^2) + \\ & + (\pi - x)x(2\pi n + x + \pi) - \pi^2(n+1) \sin(x) = 0, \end{aligned}$$

ve které proměnnou  $x$  považujeme za parametr a řešíme ji vzhledem k proměnné  $b$ .

Použijme podobné úpravy jako v předchozím případě

$$\begin{aligned} B_{2,n}(x) &= -2\pi n - 3x, \\ C_{2,n}(x) &= 4\pi n x + \pi^2(n+1)\cos(x) - \pi^2(2n+1) + 3x^2, \\ D_{2,n}(x) &= (\pi-x)x(2\pi n+x+\pi) - \pi^2(n+1)\sin(x). \end{aligned}$$

Řešíme tedy opět rovnici ve tvaru  $b^3 + B_{2,n}(x)b^2 + C_{2,n}(x)b + D_{2,n}(x) = 0$ . Dále použijme substituci  $b = t - \frac{B_{2,n}(x)}{3}$ , přičemž po dosazení dostáváme  $t^3 + p_{2,n}(x)t + q_{2,n}(x) = 0$ , kde

$$\begin{aligned} p_{2,n}(x) &= C_{2,n}(x) - \frac{B_{2,n}(x)^2}{3}, \\ q_{2,n}(x) &= \frac{2}{27}B_{2,n}(x)^3 - \frac{B_{2,n}(x)C_{2,n}(x)}{3} + D_{2,n}(x). \end{aligned}$$

V případě  $n = 0$ ,  $x = 0$  dostáváme rovnici ve tvaru  $t^3 = 0$ . Jelikož však v této části předpokládáme  $b > 0$  budeme se v případě  $n = 0$  zabývat pouze případem  $x \in (0, \pi]$ .

Pro  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [0, \pi]$  či  $n = 0$ ,  $x \in (0, \pi]$  dostáváme řešení ve tvaru

$$b_k = 2\sqrt{-\frac{p_{2,n}(x)}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right) + \frac{3x+2\pi n}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Z nerovnosti (5.31) tedy dostáváme

$$\cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right) > 0.$$

Jelikož opět platí  $\frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}} \in [0, 1]$  (viz lemma 5.15 a (5.17)), dostáváme

$$\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}}\right) \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right].$$

Odtud plyne  $k = 0$ , čímž dostáváme parametrizaci jednotlivých větví Fučíkova spektra ve tvaru  $\mathbf{k}_{2,n}(x) = (a_{2,n}(x), b_{2,n}(x))$ . Přičemž pro  $n \in \mathbb{N}$  máme

$$\begin{aligned} a_{2,n}(x) &= \frac{b_{2,n}(x)\pi(n+1)}{b_{2,n}(x) - \pi n - x}, \\ b_{2,n}(x) &= 2\sqrt{-\frac{p_{2,n}(x)}{3}} \Psi\left(\frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}}\right) + \frac{3x+2\pi n}{3}, \end{aligned} \quad \text{kde } x \in [0, \pi].$$

A pro  $n = 0$  máme

$$\begin{aligned} a_{2,0}(x) &= \pi + \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{1-\cos(x)} \Psi\left(\frac{27(\sin(x)-x\cos(x))}{2\pi(3-3\cos(x))^{\frac{3}{2}}}\right)}, \\ b_{2,0}(x) &= x + \frac{2}{3}\pi\sqrt{3-3\cos(x)} \Psi\left(\frac{27(\sin(x)-x\cos(x))}{2\pi(3-3\cos(x))^{\frac{3}{2}}}\right), \end{aligned} \quad \text{kde } x \in (0, \pi].$$

(IV) Podobně jako v části (II) ukážeme, že všechny výše uvedené výrazy jsou dobře definovány v prostoru reálných čísel.

**Lemma 5.14.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  platí  $p_{2,n}(x) < 0$ .*

*Důkaz.* Po rozepsání máme

$$p_{2,n}(x) = 4\pi nx + \pi^2(n+1)\cos(x) - \pi^2(2n+1) + 3x^2 - \frac{4\pi^2 n^2 + 9x^2 + 12\pi nx}{3}.$$

Což lze upravit do tvaru

$$p_{2,n}(x) = -\frac{\pi^2}{3} (4n^2 + 6n + 3 - 3(n+1)\cos(x)) < 0.$$

□

**Lemma 5.15.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  platí  $\frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}} \in [0, 1]$ .*

*Důkaz.* Důkaz je obdobou důkazu u lemmatu 5.12, a tedy je proveden v příloze C. □

**Lemma 5.16.** *Pro  $x \in (0, \pi]$  platí  $p_{2,0}(x) < 0$ .*

*Důkaz.* Pro  $n = 0$  máme

$$p_{2,0}(x) = -\frac{\pi^2}{3} (3 - 3\cos(x)) < 0.$$

□

**Lemma 5.17.** *Pro  $x \in (0, \pi]$  platí*

$$\frac{3\sqrt{3}(\sin(x) - x\cos(x))}{2\pi(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}} \in [0, 1].$$

*Důkaz.* Označme

$$w_0(x) = \frac{3\sqrt{3}(\sin(x) - x\cos(x))}{2\pi(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Z (B.16) plyne  $w_0(x) > 0$  pro  $x \in (0, \pi]$ . Vyjádřeme nyní

$$w_0'(x) = \frac{3\sqrt{3}\sin(x)(2x + x\cos(x) - 3\sin(x))}{4\pi(1 - \cos(x))^{5/2}}.$$

Zadefinujme nyní  $z(x) = 2x + x\cos(x) - 3\sin(x)$ , přičemž pro vyšší derivace dostáváme

$$z'(x) = 2 - x\sin(x) - 2\cos(x),$$

$$z''(x) = \sin(x) - x\cos(x),$$

$$z'''(x) = x\sin(x).$$

Z lemmatu B.4 máme  $z(x) \geq 0$ , a tedy  $w_0$  je rostoucí funkcí na  $x \in (0, \pi]$ .

Dále z (A.2) dostáváme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} w_0(x) = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$ . Jelikož platí  $w_0(\pi) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{32}} < 1$  a  $w_0$  je monotónní, dostáváme pro  $x \in (0, \pi]$  následující omezení  $w_0(x) \in [0, 1]$ . □

Máme tedy kompletní parametrický popis množiny  $\mathcal{M}$  pomocí křivek  $\mathbf{k}_{1,n}$  a  $\mathbf{k}_{2,n}$ . Nyní ukážeme hladkost křivek  $\mathbf{k}_{1,n}$  a  $\mathbf{k}_{2,n}$ .

**Lemma 5.18.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  jsou křivky  $\mathbf{k}_{1,n}$  a  $\mathbf{k}_{2,n}$  hladké. Pro  $x \in (0, \pi]$  je křivka  $\mathbf{k}_{2,0}$  hladká.*

*Důkaz.* (i) Nejprve ukážeme hladkost křivky  $\mathbf{k}_{1,n}$  pro  $n \in \mathbb{N}$ .

Argumenty odmocnin ve funkci  $a_{1,n}$  jsou ostře kladné (viz lemma 5.11) a argument funkce  $\Psi$  je z intervalu  $[0, 1)$  (viz lemma 5.12). Odtud dostáváme, že funkce  $a_{1,n}$  vznikla složením hladkých funkcí (odmocnina a funkce  $\Psi$  je na výše zmíněných intervalech hladká), a tedy je hladká.

Jelikož je jmenovatel funkce  $b_{1,n}$  ostře kladný (viz (5.20)) a funkce  $a_{1,n}$  je hladká, dostáváme hladkost funkce  $b_{1,n}$ .

Odtud máme hladkost křivky  $\mathbf{k}_{1,n}$ .

(ii) Důkaz hladkosti křivky  $\mathbf{k}_{2,n}$  pro  $n \in \mathbb{N}$  je obdobou části (i), přičemž použijeme lemmata 5.14, 5.15 a nerovnost (5.31).

(iii) Důkaz hladkosti křivky  $\mathbf{k}_{2,0}$  je obdobou části (i), přičemž použijeme lemmata 5.16 a 5.17. □

## Parametrický popis množiny $\mathcal{N}$

Nyní odvodíme parametrický popis množiny  $\mathcal{N}$ . Nejprve zohledníme případ  $\tilde{b} = 0$ , který odpovídá případu  $\beta = 0$ . Poté přejdeme k odvození pro  $\tilde{b} > 0$ , což odpovídá případu  $\beta < 0$ .

Graf množiny  $\mathcal{N}$  můžeme vidět na obr. 5.2.

**Věta 5.19.** *V případě  $\tilde{b} = 0$  leží v  $\mathcal{N}$  právě jeden bod*

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_s &= (a_s, 0), & \text{přičemž} \\ a_s &= \pi + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)}. \end{aligned}$$

*Důkaz.* Zdefinujme funkci ve tvaru

$$f_s(a) = a^3 - \frac{3}{2}\pi a^2 + \frac{\pi^3}{2} - 3\pi,$$

přičemž bod  $(a_s, 0)$  patří do  $\mathcal{N}$  pokud  $f_s(a_s) = 0$  (viz vztah (5.14)).

Nejprve ukážeme, že existuje pouze jedno řešení rovnice  $f_s(a) = 0$ , kde  $a > \pi$ . Po zderivování  $f_s$  dostáváme

$$f'_s(a) = 3a^2 - 3\pi a = 3a(a - \pi).$$

Máme tedy dva nulové body funkce  $f'_s$  ve tvaru  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \pi$ .

Jelikož platí  $f_s(\pi) < 0$  a  $\lim_{a \rightarrow +\infty} f_s(a) = +\infty$ , dostáváme, že existuje právě jeden nulový bod funkce  $f_s$ , pro který platí  $a > \pi$ .

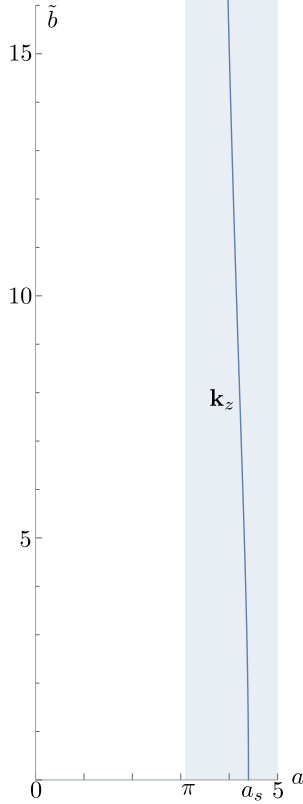
Nyní stačí ukázat  $f_s(a_s) = 0$ . Jelikož je vyjádření technicky náročné, je uvedeno v příloze C. □

**Věta 5.20.** V případě  $\tilde{b} > 0$  leží v množině  $\mathcal{N}$  právě jedna křivka  $\mathbf{k}_z(x) = (a_z(x), \tilde{b}_z(x))$ , kde

$$a_z(x) = \pi + \frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{\cosh(x)-1} \Psi\left(-\frac{3\sqrt{3}(\sinh(x)-x\cosh(x))}{2\pi(\cosh(x)-1)^{\frac{3}{2}}}\right)},$$

$$\tilde{b}_z(x) = x + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\cosh(x)-1} \Psi\left(-\frac{3\sqrt{3}(\sinh(x)-x\cosh(x))}{2\pi(\cosh(x)-1)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$x \in (0, +\infty)$ .



Obrázek 5.2: Ilustrace množiny  $\mathcal{N}$ .

*Důkaz.* Vyděme za vztahu (5.14) a zavedme substituci  $x = \tilde{b} - \frac{\pi\tilde{b}}{a}$  (odkud máme  $a = \frac{\tilde{b}\pi}{\tilde{b}-x}$ ), čímž dostáváme

$$\frac{(\tilde{b}-x)^2}{\pi\tilde{b}} + \frac{-\pi\tilde{b}^2 \cosh(x)}{\tilde{b}-x} + \frac{\pi\tilde{b} \sinh(x)}{\tilde{b}-x} + \pi\tilde{b} = 0, \quad \text{kde } \tilde{b} > x > 0.$$

Jelikož  $\tilde{b} \neq 0$  můžeme psát

$$\tilde{b}(\tilde{b}-x)^3 + -\pi^2\tilde{b}^2 \cosh(x) + \pi^2\tilde{b} \sinh(x) + \pi^2\tilde{b}(\tilde{b}-x) = 0,$$

přičemž po zjednodušení dostáváme rovnici ve tvaru

$$\tilde{b}^3 - 3x\tilde{b}^2 + (3x^2 - \pi^2 \cosh(x) + \pi^2)\tilde{b} + (\pi^2 \sinh(x) - x^3 - \pi^2 x) = 0,$$

ve které proměnnou  $x$  považujeme za parametr a řešíme ji vzhledem k proměnné  $b$ .

Použijme podobné úpravy jako v případě  $\beta > 0$ .

Řešíme tedy rovnici ve tvaru  $\tilde{b}^3 + B_z(x)\tilde{b}^2 + C_z(x)\tilde{b} + D_z(x) = 0$ , kde

$$\begin{aligned} B_z(x) &= -3x, \\ C_z(x) &= 3x^2 - \pi^2 \cosh(x) + \pi^2, \\ D_z(x) &= \pi^2 \sinh(x) - x^3 - \pi^2 x. \end{aligned}$$

Dále použijme substituci  $\tilde{b} = t - \frac{B_z(x)}{3}$ , přičemž po dosazení dostáváme  $t^3 + p_z(x)t + q_z(x) = 0$ , kde

$$\begin{aligned} p_z(x) &= C_z(x) - \frac{B_z^2(x)}{3}, \\ q_z(x) &= \frac{2}{27}B_z^3(x) - \frac{B_z(x)C_z(x)}{3} + D_z(x). \end{aligned}$$

Můžeme tedy psát řešení ve tvaru

$$\tilde{b}_k = 2\sqrt{-\frac{p_z(x)}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_z(x)}{p_z(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_z(x)}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right) + x, \quad \text{kde } k = 0, 1, 2,$$

přičemž  $\tilde{b}_k$  lze přepsat do tvaru

$$\tilde{b}_k = 2\sqrt{-\frac{p_z(x)}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_z(x)}{p_z(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_z(x)}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right) + \tilde{b}_k \left(1 - \frac{\pi}{a}\right), \quad \text{kde } k = 0, 1, 2.$$

Jelikož  $a > 0, \tilde{b} > 0$  musí platit

$$\cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_z(x)}{p_z(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_z(x)}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right) > 0.$$

Jelikož podobně jako v případě  $\beta > 0$  platí  $\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \frac{q_z(x)}{p_z(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_z(x)}}\right) \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ , dostáváme  $k = 0$ , a tedy máme parametrizaci křivky ve tvaru  $\mathbf{k}_z(x) = (a_z(x), \tilde{b}_z(x))$ , kde

$$\begin{aligned} a_z(x) &= \pi + \frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{\cosh(x)-1} \Psi\left(-\frac{3\sqrt{3}(\sinh(x)-x\cosh(x))}{2\pi(\cosh(x)-1)^{\frac{3}{2}}}\right)}, \\ \tilde{b}_z(x) &= x + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\cosh(x)-1} \Psi\left(-\frac{3\sqrt{3}(\sinh(x)-x\cosh(x))}{2\pi(\cosh(x)-1)^{\frac{3}{2}}}\right), \end{aligned} \quad x \in (0, +\infty).$$

□

Podobně jako v případě  $\beta > 0$  ukážeme, že všechny výše uvedené výrazy jsou dobře definovány v prostoru reálných čísel.

**Lemma 5.21.** *Platí  $p_z(x) < 0$ .*

*Důkaz.*

$$p_z(x) = -\pi^2(\cosh(x) - 1) < 0.$$

□

**Lemma 5.22.** *Platí  $\frac{3}{2} \frac{q_z(x)}{p_z(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_z(x)}} \in [0, 1]$ .*

*Důkaz.* Pro zjednodušení zápisu zdefinujme funkci

$$w_z(x) = \frac{3}{2} \frac{q_z(x)}{p_z(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_z(x)}} = \frac{3\sqrt{3}(x \cosh(x) - \sinh(x))}{2\pi(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Z (B.18) zřejmě plyne  $w_z(x) \geq 0$ . Dále ukážeme  $w_z(x) \leq 1$ . Jelikož je funkce  $w_z$  spojitá a platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{3}(x \cosh(x) - \sinh(x))}{2\pi(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}$$

viz (A.2), existuje  $x_0 > 0$ , pro které platí  $w_z(x) < 1$  na intervalu  $(0, x_0)$ .

Nyní ukážeme, že funkce  $w_z$  je (na intervalu  $(0, +\infty)$ ) klesající. Vyjádřeme nejprve

$$w'_z(x) = -\frac{3\sqrt{3} \sinh(x)(x(\cosh(x) + 2) - 3 \sinh(x))}{4\pi(\cosh(x) - 1)^{5/2}}.$$

Zbývá tedy dokázat

$$z(x) = x(\cosh(x) + 2) - 3 \sinh(x) \geq 0.$$

Abychom ukázali tuto nerovnost, vyjádříme vyšší derivace funkce  $z$

$$z(x) = x(\cosh(x) + 2) - 3 \sinh(x),$$

$$z'(x) = x \sinh(x) - 2 \cosh(x) + 2,$$

$$z''(x) = x \cosh(x) - \sinh(x),$$

$$z'''(x) = x \sinh(x).$$

Máme tedy  $z(0) = z'(0) = z''(0) = z'''(0)$  a  $z'''(x) > 0$  na  $(0, +\infty]$ . Z lemmatu B.4 tedy plyne  $z(x) \geq 0$ , přičemž odtud dále dostáváme  $w_z(x) \in [0, 1]$ .

□

**Lemma 5.23.** *Pro  $x \in (0, +\infty)$  je křivka  $\mathbf{k}_z$  hladká.*

*Důkaz.* Argumenty odmocnin ve funkcích  $a_z$  a  $\tilde{b}_z$  jsou ostře kladné (viz lemma 5.21) a argument funkce  $\Psi$  je z intervalu  $[0, 1]$  (viz lemma 5.22). Dostáváme tedy (podobně jako v důkazu lemmatu 5.18), že funkce  $a_z$  a  $\tilde{b}_z$  vznikly složením hladkých funkcí, a tedy jsou hladké.

Odtud máme hladkost křivky  $\mathbf{k}_z$ .

□



## 5.5 Spojitost

V předchozí podkapitole jsme odvodili parametrický popis množin  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$ .

V této části ukážeme, že jednotlivé množiny  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  lze popsat pomocí spojitě křivky.

Dále ukážeme důležitou rovnost  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{k}_{2,0}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{k}_z(x)$ .

### Spojitosť množiny $\mathcal{M}$

Nejprve ukážeme, že křivky  $\mathbf{k}_{1,n}$  a  $\mathbf{k}_{2,n}$  na sebe spojitě navazují. Potřebujeme tedy ukázat, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\begin{aligned} a_{1,n}(\pi) &= a_{2,n}(0), \quad a_{2,n-1}(\pi) = a_{1,n}(0), \\ b_{1,n}(\pi) &= b_{2,n}(0), \quad b_{2,n-1}(\pi) = b_{1,n}(0). \end{aligned}$$

**Lemma 5.24.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  dostáváme*

$$\begin{aligned} a_{1,n}(0) &= \frac{\pi}{2} \left( 2n - 1 + \sqrt{4n^2 + 1} \right), \\ a_{1,n}(\pi) &= \pi \left( n + 1 + \sqrt{n(n+1)} \right), \\ b_{2,n}(0) &= \pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right), \\ b_{2,n}(\pi) &= \frac{\pi}{2} \left( 2n + 3 + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

*Důkaz.* Důkaz je velmi technický, a tedy je uveden v příloze C. □

**Lemma 5.25.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  dostáváme*

$$\begin{aligned} b_{1,n}(0) &= \frac{\pi}{2} \left( 2n + 1 + \sqrt{4n^2 + 1} \right), \\ b_{1,n}(\pi) &= \pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right), \\ a_{2,n}(0) &= \pi \left( n + 1 + \sqrt{n(n+1)} \right), \\ a_{2,n}(\pi) &= \frac{1}{2} \pi \left( 2n + 1 + \sqrt{4n^2 + 8n + 5} \right). \end{aligned}$$

*Důkaz.* Jednoduchým dosazením dostáváme

$$b_{1,n}(0) = \frac{a_{1,n}(0)\pi n}{a_{1,n}(0) - \pi n} = \frac{\frac{1}{2}\pi(2n-1+\sqrt{4n^2+1})\pi n}{\frac{1}{2}\pi(2n-1+\sqrt{4n^2+1}) - \pi n} = \frac{\pi}{2} \left( 2n + 1 + \sqrt{4n^2 + 1} \right),$$

$$b_{1,n}(\pi) = \frac{a_{1,n}(\pi)\pi n}{a_{1,n}(\pi) - \pi n - \pi} = \frac{\pi^2 n \left( n + \sqrt{n(n+1)} + 1 \right)}{-\pi n + \pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} + 1 \right) - \pi} = \pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right),$$

$$a_{2,n}(0) = \frac{b_{2,n}(0)\pi(n+1)}{b_{2,n}(0) - \pi n} = \frac{\pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right) \pi(n+1)}{\pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right) - \pi n} = \pi \left( n + 1 + \sqrt{n(n+1)} \right),$$

$$a_{2,n}(\pi) = \frac{b_{2,n}(\pi)\pi(n+1)}{b_{2,n}(\pi) - \pi n - \pi} = \frac{\frac{\pi}{2} \left( 2n + 3 + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} \right) \pi(n+1)}{\frac{\pi}{2} \left( 2n + 3 + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} \right) - \pi n - \pi} = \frac{1}{2} \pi \left( 2n + \sqrt{4n(n+2) + 5} + 1 \right).$$

□

**Lemma 5.26.** *Pro  $n = 0$  dostáváme*

$$\begin{aligned} a_{2,0}(\pi) &= \frac{\pi}{2} (\sqrt{5} + 1), \\ b_{2,0}(\pi) &= \frac{\pi}{2} (\sqrt{5} + 3). \end{aligned}$$

*Důkaz.* Důkaz je uveden v příloze C. □

Máme tedy pro  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{2,n-1}(\pi) &= \mathbf{k}_{1,n}(0), \\ \mathbf{k}_{1,n}(\pi) &= \mathbf{k}_{2,n}(0). \end{aligned}$$

Tímto jsme odvodili následující větu.

**Věta 5.27.** *Množinu  $\mathcal{M}$  lze popsat pomocí spojitě křivky.*

### Spojitost množiny $\mathcal{N}$

V předchozím jsme ukázali, že v případě  $\beta = 0$  leží ve spektru pouze jeden bod ve tvaru

$$\mathbf{k}_s = (a_s, 0) = \left( \pi + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)}, 0 \right).$$

Nyní ukážeme  $\mathbf{k}_z(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \mathbf{k}_s$ .

Pomocí (A.1) a (A.2) spočtěme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a_z(x) = \pi + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)} = a_s.$$

Dále platí

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{b}_z(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2\pi \sqrt{\cosh(x) - 1} \Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)}{\sqrt{3}} \right) = 0,$$

a tedy  $\mathbf{k}_z(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \mathbf{k}_s$ .

Tímto jsme odvodili následující větu

**Věta 5.28.** *Množinu  $\mathcal{N}$  lze popsat pomocí spojitě křivky.*

## 5.6 Hladkost

V této části ukážeme, že směr tečného vektoru jednotlivých větví  $\mathcal{M}$  je v bodech napojení stejný. Dále provedeme reparametrizaci tak, aby byla i velikost tečných vektorů stejná.

Dále vyjádříme limity  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{k}'_{2,0}(x)$  a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathbf{k}'_z(x)$ .

### Regularita parametrizace množiny $\mathcal{M}$

Nyní vyjádříme derivace křivek  $\mathbf{k}_{1,n}$  a  $\mathbf{k}_{2,n}$  v bodech 0 a  $\pi$ .

**Poznámka 5.29.** Jelikož jsou tyto křivky definovány na intervalu  $[0, \pi]$ , budeme v krajních bodech automaticky uvažovat jednostranné derivace. (Zápisem  $\mathbf{k}'_{1,n}(0)$  je tedy myšlena derivace zprava a zápisem  $\mathbf{k}'_{1,n}(\pi)$  je myšlena derivace zleva.)

**Lemma 5.30.** Pro  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\begin{aligned}\mathbf{k}'_{2,n-1}(\pi) &= \left( \frac{2n}{1 + \sqrt{4n^2 + 1}}, 1 \right), \\ \mathbf{k}'_{1,n}(0) &= \left( 1, \frac{1 + \sqrt{4n^2 + 1}}{2n} \right), \\ \mathbf{k}'_{1,n}(\pi) &= \left( 1, \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right), \\ \mathbf{k}'_{2,n}(0) &= \left( \sqrt{\frac{n+1}{n}}, 1 \right).\end{aligned}$$

*Důkaz.* Důkaz je technický a proto je proveden v příloze C □

Směr tečných vektorů je v bodech napojení stejný, ale potřebujeme změnit velikost normy vektoru  $\mathbf{k}'_{2,n}$ . Provedme nyní pro  $n \in \mathbb{N}$  reparametrizaci

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_{1,n}(x) &= \mathbf{k}_{1,n}(x), \\ \mathbf{l}_{2,n}(x) &= \mathbf{k}_{2,n}(\varphi_n(x)),\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\varphi_n(0) &= 0, \varphi_n(\pi) = \pi, \\ \varphi'_n(0) &= \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \varphi'_n(\pi) = \frac{1 + \sqrt{4(n+1)^2 + 1}}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

$\varphi_n(x)$  budeme hledat ve tvaru

$$\varphi_n(x) = m_1 x^3 + m_2 x^2 + m_3 x + m_4.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= m_4, \\ \pi &= m_1\pi^3 + m_2\pi^2 + m_3\pi + m_4, \\ \sqrt{\frac{n}{n+1}} &= m_3, \\ \frac{1 + \sqrt{4(n+1)^2 + 1}}{2(n+1)} &= 3m_1\pi^2 + 2m_2\pi + m_3. \end{aligned}$$

Po jejichž vyřešení máme

$$\varphi_n(x) = \frac{\frac{\sqrt{4(n+1)^2+1+1}}{2(n+1)} + \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} - 2}{\pi^2} x^3 - \frac{\frac{\sqrt{4(n+1)^2+1+1}}{2(n+1)} + \frac{2}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} - 3}{\pi} x^2 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} x.$$

Pomocí pravidel pro derivování složené funkce lze snadno ukázat, že pro křivky  $\mathbf{l}_{1,n}$ ,  $\mathbf{l}_{2,n}$  platí

$$\mathbf{l}'_{1,n}(\pi) = \mathbf{l}'_{2,n}(0), \quad \mathbf{l}'_{2,n}(0) = \mathbf{l}'_{1,n+1}(0).$$

Nyní najdeme funkci  $\varphi_0$  tak, aby pro

$$\mathbf{l}_{2,0}(x) = \mathbf{k}_{2,0}(\varphi_0(x))$$

platilo  $\mathbf{l}'_{2,0}(\pi) = \mathbf{l}'_{1,1}(0)$ . Hledáme tedy funkci s následujícími vlastnostmi

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) &= 0, \quad \varphi_0(\pi) = \pi, \\ \varphi'_0(0) &= 1, \quad \varphi'_0(\pi) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

$\varphi_0$  budeme (podobně jako  $\varphi_n$ ) hledat ve tvaru

$$\varphi_0(x) = n_1x^3 + n_2x^2 + n_3x + n_4,$$

přičemž po zohlednění podmínek dostáváme

$$\varphi_0(x) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\pi^2}x^3 - \frac{\sqrt{5}-1}{2\pi}x^2 + x.$$

Můžeme tedy zadefinovat hladkou křivku

$$\mathbf{l}^c(x) = (l_1^c(x), l_2^c(x)) = \begin{cases} \mathbf{l}_{2,n}(x - 2n\pi), & x \in (2n\pi, (2n+1)\pi], \\ \mathbf{l}_{1,n+1}(x - (2n+1)\pi), & x \in ((2n+1)\pi, 2(n+1)\pi], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.32)$$

Nyní ukážeme, že křivka  $\mathbf{l}^c$  je regulární. Je tedy třeba dokázat regularitu jednotlivých křivek  $\mathbf{k}_{1,n}$ ,  $\mathbf{k}_{2,n}$  a ostrou monotonii funkcí  $\varphi_n$ .

**Lemma 5.31.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in [0, \pi]$  platí  $\|\mathbf{k}'_{1,n}(x)\| \neq 0$  a  $\|\mathbf{k}'_{2,n}(x)\| \neq 0$ . Pro  $x \in (0, \pi]$  platí  $\|\mathbf{k}'_{2,0}(x)\| \neq 0$ .*

*Důkaz.* Nejprve ukážeme  $\|\mathbf{k}'_{1,n}(x)\| \neq 0$ .

Pokud  $a'_{1,n}(x) \neq 0$ , pak zřejmě platí  $\|\mathbf{k}'_{1,n}(x)\| \neq 0$ .

Předpokládejme tedy  $a'_{1,n}(x) = 0$ , pro  $b'_{1,n}$  dostáváme

$$b'_{1,n}(x) = \pi n \frac{a_{1,n}(x) - \pi n a'_{1,n}(x) - x a'_{1,n}(x)}{(a_{1,n}(x) - \pi n - x)^2} = \pi n \frac{a_{1,n}(x)}{(a_{1,n}(x) - \pi n - x)^2}.$$

Jelikož platí  $a_{1,n}(x) > 0$ , dostáváme  $b'_{1,n}(x) \neq 0$ , a tedy musí platit  $\|\mathbf{k}'_{1,n}(x)\| \neq 0$ .

Důkaz pro  $\|\mathbf{k}'_{2,n}(x)\| \neq 0$  a  $\|\mathbf{k}'_{2,0}(x)\| \neq 0$  je obdobný. □

**Lemma 5.32.** *Pro  $n \in \mathbb{N}_0$  a  $x \in [0, \pi]$  platí  $\varphi'_n(x) > 0$ .*

*Důkaz.* Rozdělme důkaz na dvě části.

(i) Nejprve zohledníme případ  $n \geq 1$ .

Funkce  $\varphi_n$  je kubickou funkcí, přičemž pro koeficient u kubického členu platí

$$\frac{\frac{\sqrt{4(n+1)^2+1}+1}{2(n+1)} + \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} - 2}{\pi^2} < 0,$$

(viz lemma B.6). Platí tedy, že kubická funkce  $\varphi_n$  je rostoucí na souvislém intervalu. A tedy z  $\varphi'_n(0) > 0, \varphi'_n(\pi) > 0$  dostáváme  $\varphi'_n(x) > 0$  na  $x \in [0, \pi]$ .

(ii) Nyní zohledníme  $n = 0$ . Vyjádřeme

$$\varphi'_0(x) = \frac{3}{2\pi^2} (\sqrt{5} - 1) x^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{\pi} x + 1.$$

Řešme nyní kvadratickou rovnici ve tvaru  $\varphi'_0(x) = 0$ , přičemž dostáváme diskriminant ve tvaru

$$D = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\pi}\right)^2 - \frac{6}{\pi^2} (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{\pi^2} (6 - 2\sqrt{5}) - \frac{1}{\pi^2} (6\sqrt{5} - 6) = \frac{1}{\pi^2} (12 - 8\sqrt{5}) < 0.$$

Jelikož funkce  $\varphi'_0$  nemá žádný nulový bod a koeficient u kvadratického členu je kladný, dostáváme

$$\varphi'_0(x) > 0 \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

□

**Věta 5.33.** *Množinu  $\mathcal{M}$  lze popsat pomocí regulární křivky  $\mathbf{l}^c$ .*

*Důkaz.* Plyne přímo z lemmat 5.31 a 5.32. □

**Vyjádření tečných vektorů pro  $x \rightarrow 0$** **Lemma 5.34.** *Pro komponenty křivky  $k_{2,0}$  platí*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a_{2,0}(x) = \pi + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)}, \quad (5.33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b_{2,0}(x) = 0, \quad (5.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a'_{2,0}(x) = 0, \quad (5.35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} b'_{2,0}(x) = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right). \quad (5.36)$$

*Důkaz.* Zapišme funkci  $a_{2,0}$  ve tvaru

$$a_{2,0}(x) = \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\mu_a(x)}{\nu_a(x) \xi_a(x)}, \quad (5.37)$$

$$(5.38)$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_a(x) &= x, \\ \nu_a(x) &= \sqrt{1 - \cos(x)}, \\ \xi_a(x) &= \Psi(\eta_a(x)), \\ \eta_a(x) &= \frac{27(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(3 - 3 \cos(x))^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Limity (5.33) a (5.34) plynou z limit (A.5) a (A.6).

Přejdeme nyní k výpočtu limity (5.35). Vyjádřeme nejdříve tvar funkce  $a'_{2,0}$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} a'_{2,0}(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\mu'_a(x) \nu_a(x) \xi_a(x)}{(\nu_a(x) \xi_a(x))^2} - \frac{\mu_a(x) \nu'_a(x) \xi_a(x)}{(\nu_a(x) \xi_a(x))^2} - \frac{\mu_a(x) \nu_a(x) \xi'_a(x)}{(\nu_a(x) \xi_a(x))^2} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sqrt{1 - \cos(x)} - \frac{x \sin(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}}}{(1 - \cos(x)) \Psi(\eta_a(x))} - \frac{x}{\sqrt{1 - \cos(x)}} \frac{\frac{d\Psi}{d\eta_a}(\eta_a(x)) \eta'_a(x)}{\Psi^2(\eta_a(x))} \right). \end{aligned}$$

Nyní z (A.5), (A.6), (A.7) a (A.14) dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a'_{2,0}(x) = 0.$$

Limitu (5.36) vyjádřeme pomocí vztahů (A.6), (A.7), (A.9)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} b'_{2,0}(x) &= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{1 - \cos(x)} \Psi(\eta_a(x)) \right)' = \\ &= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \left( \sqrt{1 - \cos(x)} \right)' \Psi(\eta_a(x)) + \sqrt{1 - \cos(x)} \frac{d\Psi}{d\eta_a}(\eta_a(x)) \eta'_a(x) \right) = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right). \end{aligned}$$

□

**Lemma 5.35.** *Pro funkce  $a'_z$  a  $b'_z$  platí*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a'_z(x) = 0, \quad (5.39)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{b}'_z(x) = 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \Psi \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right). \quad (5.40)$$

*Důkaz.* Důkaz je podobný jako důkaz lemmatu 5.34 (vychází ze vztahů (A.1), (A.2), (A.3), (A.12) a (A.16)).

□

**Lemma 5.36.** *Pro  $x \in (0, +\infty)$  platí  $\|\mathbf{k}'_z(x)\| \neq 0$ .*

*Důkaz.* Pokud  $\tilde{b}'_z(x) \neq 0$ , pak zřejmě platí  $\|\mathbf{k}'_z(x)\| \neq 0$ . Předpokládejme tedy  $\tilde{b}'_z(x) = 0$ , pro  $a'_z$  dostáváme

$$a'_z(x) = \pi \frac{\tilde{b}_z(x) - x \tilde{b}'_z(x)}{(\tilde{b}_z(x) - x)^2} = \pi \frac{\tilde{b}_z(x)}{(\tilde{b}_z(x) - x)^2}.$$

Jelikož platí  $\tilde{b}_z(x) > 0$ , dostáváme  $a'_z(x) \neq 0$ , a tedy musí platit  $\|\mathbf{k}'_z(x)\| \neq 0$ .

□

**Věta 5.37.** *Množinu  $\mathcal{N}$  lze popsat pomocí regulární křivky  $\mathbf{l}^z$ , kde*

$$\mathbf{l}^z(x) = (l_1^z(x), l_2^z(x)) = \begin{cases} \mathbf{k}_z(-x), & \text{pro } x > 0, \\ (a_s, 0), & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

*Důkaz.* Plyne přímo z lemmatu 5.36 a vyjádření jednostranných limit (5.39) a (5.40).

□

## 5.7 Rovina $(\alpha, \beta)$

V předchozí části jsme dokázali, že množinu  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{N}$  lze popsat pomocí regulární křivky. V této části ukážeme, že množinu  $\Sigma^+$  lze také popsat pomocí regulární křivky, a tedy celé Fučíkovo spektrum úlohy (5.2) (množinu  $\Sigma$ ) lze popsat pomocí dvou regulárních křivek. Graf množin  $\Sigma^+$  a  $\Sigma^-$  můžeme vidět na obr. 5.3.

Jelikož platí (5.6) můžeme popsat množinu  $\Sigma^+$  pomocí následující křivky

$$\gamma(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x)) = \begin{cases} \left( (l_1^c(x))^2, (l_2^c(x))^2 \right), & x > 0, \\ \left( (l_1^z(x))^2, -(l_2^z(x))^2 \right), & x \leq 0. \end{cases}$$

$l^c$  a  $l^z$  jsou hladké křivky, a tedy i  $\gamma$  hladkou křivkou pro  $x \neq 0$ . Navíc pro  $x \neq 0$  platí

$$\begin{aligned} l_1^c(x) \neq 0, l_2^c(x) \neq 0, l_1^z(x) \neq 0, l_2^z(x) \neq 0, \\ \|(l^c(x))'\| \neq 0, \|(l^z(x))'\| \neq 0, \end{aligned}$$

odtud dostáváme pro  $x \neq 0$ :  $\|\gamma'(x)\| \neq 0$ .

Vyšetřeme nyní chování na okolí bodu  $x = 0$ . Spočtěme derivaci pro  $x = 0$  pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \gamma_1'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(l_1^c(x))^2 - (a_s)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 l_1^c(x) (l_1^c(x))' = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 a_{2,0}(x) a_{2,0}'(x) = 0. \end{aligned}$$

Stejným postupem dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \gamma_2'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} \gamma_1'(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} \gamma_2'(x) = 0.$$

Křivka  $\gamma$  je tedy hladká, není však regulární, jelikož

$$\|\gamma'(0)\| = 0.$$

Musíme tedy provést reparametrizaci tak, aby byl předpis křivky regulární i v bodě  $x = 0$ .

**Věta 5.38.** *Fučíkovo spektrum  $\Sigma^+$  lze popsat pomocí regulární křivky  $\gamma^r(x)$  ve tvaru*

$$\gamma^r(x) = (\gamma_1^r(x), \gamma_2^r(x)) = \gamma(\varphi_r(x)),$$

kde  $\varphi_r(x) = \text{sign}(x)\sqrt{|x|}$ .

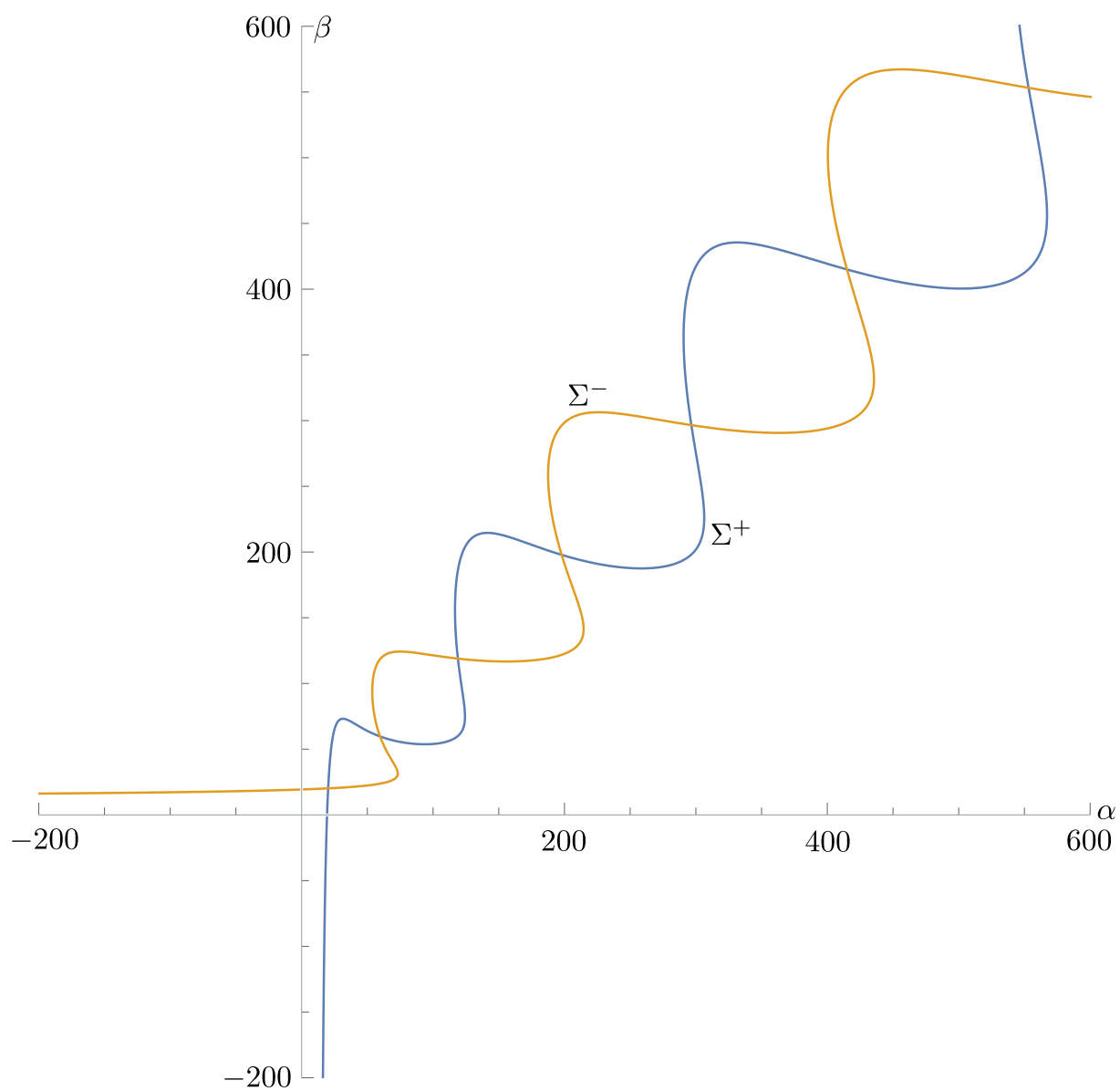
*Důkaz.* Pro  $x \neq 0$  plyne z regularity křivky  $\gamma$  a nenulovosti funkce  $\varphi_r'$ .

Platnost pro  $x = 0$  plyne z následujících vlastností  $\gamma^r$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_1^r(x))' &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_1^r(x))' \neq 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_2^r(x))' &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_2^r(x))' \neq 0. \end{aligned}$$

Samotné odvození těchto limit je velmi dlouhé a technické, a tedy je provedeno v příloze C. □



Obrázek 5.3: Ilustrace množiny  $\Sigma$ .



# Příloha A

## Výpočty pomocných limit

V této části odvodíme několik technicky náročných limit, jež se používají v hlavní části práce.

**Lemma A.1.** *Platí*

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{\cosh(x) - 1}} = \sqrt{2}, \quad (\text{A.1})$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3\sqrt{3}(x \cosh(x) - \sinh(x))}{2\pi(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}, \quad (\text{A.2})$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{3\sqrt{3}(x \cosh(x) - \sinh(x))}{2\pi(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}}} \right)' = 0, \quad (\text{A.3})$$

(iv)

$$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sinh(x)(2x + x \cosh(x) - 3 \sinh(x))}{(\cosh(x) - 1)^3} = -\frac{\sqrt{3}}{20\pi}, \quad (\text{A.4})$$

(v)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos(x)}} = \sqrt{2}, \quad (\text{A.5})$$

(vi)

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3\sqrt{3}(x \cos(x) - \sin(x))}{2\pi(\cos(x) - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}, \quad (\text{A.6})$$

(vii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{3\sqrt{3}(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}} \right)' = 0, \quad (\text{A.7})$$

(viii)

$$\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) (2x + x \cos(x) - 3 \sin(x))}{(1 - \cos(x))^3} = \frac{\sqrt{3}}{20\pi}, \quad (\text{A.8})$$

(ix)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{1 - \cos(x)} \right)' = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (\text{A.9})$$

(x)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \frac{3\sqrt{3}(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}} \right)' = 0, \quad (\text{A.10})$$

(xi)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \sqrt{1 - \cos(x)} \right)' = 0, \quad (\text{A.11})$$

(xii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cosh(x) - 1} - \frac{x \sinh(x)}{2\sqrt{\cosh(x) - 1}}}{\cosh(x) - 1} = 0, \quad (\text{A.12})$$

(xiii)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cosh(x) - 1} - \frac{x \sinh(x)}{2\sqrt{\cosh(x) - 1}}}{x(\cosh(x) - 1)} = -\frac{\sqrt{2}}{12}, \quad (\text{A.13})$$

(xiv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)} - \frac{x \sin(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}}}{1 - \cos(x)} = 0, \quad (\text{A.14})$$

(xv)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)} - \frac{x \sin(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}}}{x(1 - \cos(x))} = \frac{\sqrt{2}}{12}, \quad (\text{A.15})$$

(xvi)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{\cosh(x) - 1} \right)' = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{A.16})$$

*Důkaz.* (i) Z rovnosti  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  plyne  $\sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$ . Použijme nyní L'Hospitalovo pravidlo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{\cosh(x) - 1}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cosh(x) - 1}}{\sinh(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\cosh(x) - 1}{\cosh^2(x) - 1}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\cosh(x) + 1}} = \sqrt{2}.$$

(ii) Dokážeme pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{3}(x \cosh(x) - \sinh(x))}{2\pi(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}}} = \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \sqrt{\frac{(x \cosh(x) - \sinh(x))^2}{(\cosh(x) - 1)^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x \cosh(x) - \sinh(x))^2}{(\cosh(x) - 1)^3}} = \\ & \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x \cosh(x) - \sinh(x))x}{3(\cosh(x) - 1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cosh(x) - \sinh(x) + x^2 \sinh(x)}{2 \sinh(x)(\cosh(x) - 1)}} = \\ & \frac{3}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\cosh(x) - 1} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\sinh(x)(\cosh(x) - 1)}} = \\ & \frac{3}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sinh(x)} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sinh(x)}{\cosh^2(x) - \cosh(x) + \sinh^2(x)}} = \\ & \frac{3}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\cosh(x)} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sinh(x)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\cosh^2(x) - \cosh(x)}{\sinh^2(x)} + 1}} = \\ & \frac{3}{2\pi} \sqrt{2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cosh(x)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\cosh(x)}{\cosh(x)+1} + 1}} = \frac{3}{2\pi} \sqrt{2 + \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}. \end{aligned}$$

(iii) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{3\sqrt{3}(x \cosh(x) - \sinh(x))}{2\pi(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}}} \right)' = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sinh(x)(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x \cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(x) - 1)^{\frac{1}{2}} \sinh(x)}{(\cosh(x) - 1)^3} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)(3 \sinh(x) - x \cosh(x) - 2x)}{(\cosh(x) - 1)^{\frac{5}{2}}} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) \left(3 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} + O(x^9)\right) - \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^7}{6!} + O(x^9)\right) - 2x}{2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right)^{\frac{5}{2}}} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) \left(-\frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{1260} + O(x^9)\right)}{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right)^{\frac{5}{2}}} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^6 \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + O(x^6)\right) \left(-\frac{1}{60} - \frac{x^2}{1260} + O(x^4)\right)}{x^5 \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} + O(x^6)\right)^{\frac{5}{2}}} = 0.
\end{aligned}$$

(iv) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu jako v předchozím

$$\begin{aligned}
& \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)(3 \sinh(x) - x \cosh(x) - 2x)}{(\cosh(x) - 1)^3} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) \left(3 \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} + O(x^9)\right) - \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} + \frac{x^7}{6!} + O(x^9)\right) - 2x}{2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right)^3} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)\right) \left(-\frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{1260} + O(x^9)\right)}{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right)^3} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^6 \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + O(x^6)\right) \left(-\frac{1}{60} - \frac{x^2}{1260} + O(x^4)\right)}{x^6 \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} + O(x^6)\right)^3} = \\
& \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \left(-\frac{8}{60}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{20\pi}.
\end{aligned}$$

(v) Dokážeme pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos(x)}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sin(x)} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 - \cos^2(x)}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{1 + \cos(x)}} = \sqrt{2}.$$

(vi) Dokážeme pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{3}(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}} &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin(x) - x \cos(x))^2}{(1 - \cos(x))^3}} = \frac{3}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin(x) - x \cos(x))x}{(1 - \cos(x))^2}} = \\
&= \frac{3}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x \cos(x) + x^2 \sin(x)}{(1 - \cos(x)) \sin(x)}} = \frac{3}{2\pi} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1 - \cos(x)} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{(1 - \cos(x)) \sin(x)}} = \\
&= \frac{3}{2\pi} \sqrt{2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(x)}{\sin^2(x) + \cos(x) - \cos^2(x)}} = \frac{3}{2\pi} \sqrt{2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{\cos(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}}} = \\
&= \frac{3}{2\pi} \sqrt{2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)}}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}.
\end{aligned}$$

(vii) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{3\sqrt{3}(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}} \right)' = \\
&\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin(x)(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(\sin(x) - x \cos(x))(1 - \cos(x))^{\frac{1}{2}} \sin(x)}{(1 - \cos(x))^3} = \\
&\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)(2x + x \cos(x) - 3 \sin(x))}{(1 - \cos(x))^{\frac{5}{2}}} = \\
&\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - O(x^7)\right) \left(2x + \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{6!} + O(x^9)\right) - 3 \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + O(x^9)\right)}{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - O(x^8)\right)^{\frac{5}{2}}} = \\
&\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - O(x^7)\right) \left(\frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{1260} + O(x^9)\right)}{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - O(x^8)\right)^{\frac{5}{2}}} = \\
&\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^6 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - O(x^6)\right) \left(\frac{1}{60} - \frac{x^2}{1260} + O(x^4)\right)}{x^5 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} - O(x^6)\right)^{\frac{5}{2}}} = 0.
\end{aligned}$$

(viii) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu

$$\begin{aligned}
&\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)(2x + x \cos(x) - 3 \sin(x))}{(1 - \cos(x))^3} = \\
&\frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^6 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - O(x^6)\right) \left(\frac{1}{60} - \frac{x^2}{1260} + O(x^4)\right)}{x^6 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} - O(x^6)\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \frac{8}{60} = \frac{\sqrt{3}}{20\pi}.
\end{aligned}$$

(ix) Dokážeme pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{1 - \cos(x)} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos^2(x)}{1 - \cos(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \sqrt{1 + \cos(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(x) Dokážeme pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pi} \left( \frac{3\sqrt{3}(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}} \right)' = \\ & \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin(x)(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(\sin(x) - x \cos(x))(1 - \cos(x))^{\frac{1}{2}} \sin(x)}{(1 - \cos(x))^3} = \\ & \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x) (2x + x \cos(x) - 3 \sin(x))}{(1 - \cos(x))^{\frac{5}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

(xi) Po zderivování dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \sqrt{1 - \cos(x)} \right)' = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}} = 0.$$

(xii) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cosh(x) - 1} - \frac{x \sinh(x)}{2\sqrt{\cosh(x) - 1}}}{\cosh(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cosh(x) - 1) - x \sinh(x)}{2(\cosh(x) - 1)^{\frac{3}{2}}} = \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right) - \left(x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + O(x^8)\right)}{2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{180} + O(x^8)}{2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + O(x^8)\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4\left(-\frac{1}{12} - \frac{x^2}{180} + O(x^4)\right)}{2x^3\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} + O(x^6)\right)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

(xiii) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu (podobně jako v předchozím případě)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cosh(x) - 1} - \frac{x \sinh(x)}{2\sqrt{\cosh(x) - 1}}}{x(\cosh(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4\left(-\frac{1}{12} - \frac{x^2}{180} + O(x^4)\right)}{2x^4\left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} + O(x^6)\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

(xiv) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)} - \frac{x \sin(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}}}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos(x)) - x \sin(x)}{2(1 - \cos(x))^{\frac{3}{2}}} = \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - O(x^8)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} - O(x^8)\right)}{2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - O(x^8)\right)^{\frac{3}{2}}} = \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{180} + O(x^8)}{2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - O(x^8)\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4\left(\frac{1}{12} - \frac{x^2}{180} + O(x^4)\right)}{2x^3\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} - O(x^6)\right)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned}$$



(xv) Dokážeme pomocí rozvinutí do Taylorova polynomu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x)} - \frac{x \sin(x)}{2\sqrt{1 - \cos(x)}}}{x(1 - \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left( \frac{1}{12} - \frac{x^2}{180} + O(x^4) \right)}{2x^4 \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^4}{720} - O(x^6) \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

(xvi) Po zderivování dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{\cosh(x) - 1} \right)' = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(x)}{\sqrt{\cosh(x) - 1}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\cosh^2(x) - 1}{\cosh(x) - 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□



## Příloha B

# Pomocná lemmata

Nyní uvedme několik vlastností Besselových funkcí, které budeme potřebovat (zdroj [7, Kapitola 10] a [1, Kapitola 9]).

Pro Besselovy funkce platí:

- (i) pro  $m \geq 0$  je  $J_m$  omezenou funkcí a  $Y_m$  je neomezená na okolí nuly,
- (ii) funkce  $J_m$  je na intervalu  $(0, +\infty)$  analytickou funkcí,
- (iii) funkce  $J_m$  i  $Y_m$  mají spočetně mnoho nulových bodů na  $[0, +\infty)$ , přičemž všechny nulové body jsou jednoduché,
- (iv)  $k$ -tý nulový bod funkce  $J_m$  označíme  $\mu_{m,k}$ ,
- (v)

$$(r^m J_m(r))' = r^m J_{m-1}(r), \quad (\text{B.1})$$

(vi)

$$(r^{-m} J_m(r))' = -(r^{-m} J_{m+1}(r)), \quad (\text{B.2})$$

(vii)

$$(r^m Y_m(r))' = r^m Y_{m-1}(r), \quad (\text{B.3})$$

(viii)

$$(r^{-m} Y_m(r))' = -(r^{-m} Y_{m+1}(r)), \quad (\text{B.4})$$

(ix)

$$J_{m+1}(r) Y_m(r) - J_m(r) Y_{m+1}(r) = \frac{2}{\pi r}, \quad (\text{B.5})$$

(x)

$$J_{m-1}(r) + J_{m+1}(r) = \frac{2m}{r} J_m(r), \quad (\text{B.6})$$

(xi)

$$J_{m-1}(r) - J_{m+1}(r) = 2J'_m(r), \quad (\text{B.7})$$

(xii) Funkce  $I_m$  je v nule konečná a pro  $r > 0$  je rostoucí funkcí.(xiii) Funkce  $K_m$  je neomezená v 0. Pro  $r > 0$  je klesající funkcí a platí  $K_m(r) \rightarrow 0$  pro  $r \rightarrow +\infty$ .

(xiv)

$$(r^m I_m(r))' = r^m I_{m-1}(r), \quad (\text{B.8})$$

(xv)

$$(r^{-m} I_m(r))' = r^{-m} I_{m+1}(r), \quad (\text{B.9})$$

(xvi)

$$(r^m K_m(r))' = -r^m K_{m-1}(r), \quad (\text{B.10})$$

(xvii)

$$(r^{-m} K_m(r))' = -r^{-m} K_{m+1}(r), \quad (\text{B.11})$$

(xviii)

$$I_{m+1}(r) K_m(r) + I_m(r) K_{m+1}(r) = \frac{1}{r}. \quad (\text{B.12})$$

**Lemma B.1.** *Obecným řešením diferenciální rovnice*

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) - u(r) = 0 \quad (\text{B.13})$$

*je funkce ve tvaru*

$$u(r) = C_1 r^{\frac{2-n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(r) + C_2 r^{\frac{2-n}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(r), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.14})$$

*Důkaz.* Modifikované Besselovy funkce  $I_m$  a  $K_m$  jsou definovány jako obecné řešení diferenciální rovnice

$$r^2 v''(r) + r v'(r) - (r^2 + m^2) v(r) = 0. \quad (\text{B.15})$$

Zbytek důkazu je obdobou důkazu věty 3.2. □

**Lemma B.2.** (i) Pro  $x \in [0, \pi]$  platí

$$\sin(x) \geq x \cos(x). \quad (\text{B.16})$$

(ii) Pro libovolné  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}$  platí

$$a \sin(x) + b \cos(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (\text{B.17})$$

(iii) Pro  $x \geq 0$  platí

$$x \cosh(x) \geq \sinh(x). \quad (\text{B.18})$$

*Důkaz.* (i) Plyne z nerovnosti

$$\tan(x) \geq x. \quad (\text{B.19})$$

Tato nerovnost zřejmě platí, jelikož pro  $x = 0$  platí  $x = \tan(x)$  a

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \geq 1. \quad (\text{B.20})$$

(ii) Použijeme přepis pomocí skalárního součinu a Cauchyovy – Schwarzovy nerovnosti

$$a \sin(x) + b \cos(x) = (a, b) (\sin(x), \cos(x)) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{\sin^2(x) + \cos^2(x)}.$$

(iii) Plyne z nerovnosti

$$x \geq \tanh(x). \quad (\text{B.21})$$

Tato nerovnost zřejmě platí, jelikož pro  $x = 0$  platí  $x = \tanh(x)$  a

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} \leq 1. \quad (\text{B.22})$$

□

**Lemma B.3.** Pro  $x \in [-1, 1]$  platí

$$3 \arccos(x) = \arccos(4x^3 - 3x). \quad (\text{B.23})$$

*Důkaz.* Z rovnosti  $(\cos(t) + i \sin(t))^3 = \cos(3t) + i \sin(3t)$  dostáváme

$$\cos^3(t) + 3i \cos^2(t) \sin(t) - 3 \cos(t) \sin^2(t) - i \sin^3(t) = \cos(3t) + i \sin(3t).$$

Pro reálnou část tedy platí

$$\begin{aligned} 4 \cos^3(t) - 3 \cos(t) &= \cos(3t), \\ 3t &= \arccos(4 \cos^3(t) - 3 \cos(t)). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Použijme nyní substituci  $t = \arccos(x)$ , čímž dostáváme

$$3 \arccos(x) = \arccos(4x^3 - 3x).$$

□

**Lemma B.4.** Předpokládejme  $f(a) \geq 0, f'(a) \geq 0 \dots f^{(n-1)}(a) \geq 0$ .

Pokud  $f^{(n)}(x) \geq 0$  na  $M$ , pak  $f(x) \geq 0$  na  $M$ , kde  $M$  je množina ve tvaru  $M = [a, b]$  nebo  $M = [a, c)$ , přičemž  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $c \in \mathbb{R}^*$ .

*Důkaz.* Jelikož platí  $f^{(n)}(x) \geq 0$ , dostáváme  $f^{(n-1)}$  je rostoucí na  $M$ , a tedy z předpokladu  $f^{(n-1)}(a) \geq 0$  dostáváme  $f^{(n-1)}(x) \geq 0$  na  $M$ .

Stejným postupem dostáváme  $f^{(n-1)}(x) \geq 0, \dots, f'(x) \geq 0, f(x) \geq 0$  na  $M$ .  $\square$

**Lemma B.5.** Kořeny kubické rovnice

$$z^3 + pz + q = 0, \quad \text{kde } p \neq 0, \quad (\text{B.25})$$

lze vyjádřit v následujícím tvaru

$$z_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right), \quad \text{kde } k = 0, 1, 2.$$

*Důkaz.* Důkaz tohoto lemmatu vychází z následující identity

$$\forall z \in \mathbb{C} : 4 \cos^3(z) - 3 \cos(z) - \cos(3z) = 0. \quad (\text{B.26})$$

Pokusíme se tedy upravit rovnici (B.25) do tvaru (B.26). Nejprve použijeme substituci ve tvaru

$$z = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\varphi),$$

kde  $\varphi \in \mathbb{C}$  (tato substituce je korektní, jelikož předpokládáme  $p \neq 0$  a funkce  $\cos$  je v komplexní rovině celou funkcí). Dostáváme tedy rovnici ve tvaru

$$-8\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos^3(\varphi) + 2p\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\varphi) + q = 0. \quad (\text{B.27})$$

Po vynásobení rovnosti (B.27) výrazem  $-\frac{3}{2}\frac{1}{p}\sqrt{-\frac{3}{p}}$  dostáváme

$$4 \cos^3(\varphi) - 3 \cos(\varphi) - \frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}} = 0. \quad (\text{B.28})$$

A tedy z rovnosti (B.26) dostáváme

$$\cos(3\varphi) = \frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}},$$

odkud máme

$$3\varphi = \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right) + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dostáváme tedy

$$z_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{-\frac{3}{p}}\right) + \frac{2}{3}k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jelikož funkce  $\cos$  je  $2\pi$  periodická, má význam uvažovat pouze  $k = 0, 1, 2$ . □

**Lemma B.6.** *Pro  $n \in \mathbb{N}$  platí*

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} + \frac{1 + \sqrt{4(n+1)^2 + 1}}{2(n+1)} < 2. \quad (\text{B.29})$$

*Důkaz.* (B.29) je ekvivalentní s následující podmínkou

$$a_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}} + \frac{1 + \sqrt{4n^2 + 1}}{2n} < 2, \quad n \geq 2.$$

Přepíšme  $a_n$  pomocí skalárního součinu a provedme odhad shora pomocí Cauchyovy – Schwarzovy nerovnosti

$$\begin{aligned} a_n &= \left( \sqrt{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{2n}, \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n} \right) \cdot (1, 1) \leq \sqrt{\left( \sqrt{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{2n} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{4n^2 + 1}}{2n} \right)^2} \sqrt{2} = \\ & \qquad \qquad \qquad \sqrt{2} \sqrt{2 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} \left( 1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)}. \end{aligned}$$

Nyní stačí ukázat

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{n} \left( 1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right) < 0. \quad (\text{B.30})$$

Vyděme z

$$0 < 1.$$

Použitím ekvivalentních úprav dostáváme

$$\begin{aligned} 4n^2 - 4n &< 4n^2 - 4n + 1, \\ \frac{n-1}{n} &< 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}, \\ \sqrt{\frac{n-1}{n}} &< 1 - \frac{1}{2n}, \\ \frac{1}{2n} &< 1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Odtud plyne platnost (B.30), a tedy i platnost (B.29). □





# Příloha C

## Důkazy vybraných lemmat

### Důkaz lemmatu 5.15

Zavedme funkci  $w_2(x) = \frac{3}{2} \frac{q_{2,n}(x)}{p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}}$ . Po rozepsání dostáváme

$$w_2(x) = \frac{16\pi n^3 + n^2(36\pi - 18\pi \cos(x)) + n(27 \sin(x) - 27x \cos(x) - 18\pi \cos(x) + 18\pi) + 27(\sin(x) - x \cos(x))}{2\pi (4n^2 - 3(n+1) \cos(x) + 6n + 3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Chceme ukázat  $w_2(x) \in [0, 1]$  na intervalu  $[0, \pi]$ . To plyne z následujících vlastností funkce  $w_2$ :

- (I)  $w_2(0) < 1$ ,  $w_2(\pi) < 1$ ,
- (II)  $w_2'(0) = w_2'(\pi) = 0$ ,
- (III) existuje právě jeden nulový bod  $x_0$  funkce  $w_2'$  na intervalu  $(0, \pi)$ ,
- (IV)  $w_2''(0) < 0$ ,  $w_2''(\pi) < 0$ ,
- (V)  $w_2(x) \geq 0$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

Z (II), (III) a (IV) dostáváme, že funkce  $w_2$  je klesající na intervalu  $(0, x_0)$  a rostoucí na intervalu  $(x_0, \pi)$ , a tedy z (I) dostáváme  $w_2(x) < 1$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

Přejdeme nyní k samotnému odvození výše uvedených vlastností.

- (I) Vyjádřeme tedy  $w_2(0)$  a  $w_2(\pi)$ , přičemž dostáváme

$$w_2(0) = \frac{8n^3 + 9n^2}{(4n^2 + 3n)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8n^3 + 9n^2}{\sqrt{(8n^3 + 9n^2)^2 + 27(n^4 + n^3)}} < 1,$$

a

$$w_2(\pi) = \frac{16n^3 + 54n^2 + 63n + 27}{2(4n^2 + 9n + 6)^{\frac{3}{2}}} = \frac{16n^3 + 54n^2 + 63n + 27}{\sqrt{(16n^3 + 54n^2 + 63n + 27)^2 + 108n^4 + 432n^3 + 675n^2 + 486n + 135}} < 1.$$

(II) Po zderivování  $w_2$  dostáváme

$$w_2'(x) = \frac{27(n+1)\sin(x)(-2n(-4nx+2\pi n-6x+\pi) - 9(n+1)\sin(x) + (n+1)(2\pi n+3x)\cos(x) + 6x)}{4\pi(4n^2 - 3(n+1)\cos(x) + 6n+3)^{5/2}},$$

přičemž zřejmě platí  $w_2'(0) = w_2'(\pi) = 0$ .

(III) Nyní ukážeme, že  $w_2'$  má pouze jeden nul bod na intervalu  $(0, \pi)$ . Potřebujeme tedy ukázat, že rovnice

$$x(8n^2 + 3(n+1)\cos(x) + 12n+6) - 9(n+1)\sin(x) + 2\pi n(n+1)\cos(x) - 2\pi n(2n+1) = 0 \quad (\text{C.1})$$

má pouze jedno řešení na intervalu  $(0, \pi)$ . To ukážeme pomocí kontrakce. Přepíšme (C.1) do tvaru  $x = f_2(x)$ , kde

$$f_2(x) = \frac{2\pi n(2n+1) + 9(n+1)\sin(x) - 3(n+1)x\cos(x) - 2\pi n(n+1)\cos(x)}{8n^2 + 12n+6}.$$

Nyní ukážeme

- (a)  $f_2 : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ ,
- (b)  $|f_2'(x)| < 1$ , pro  $x \in [0, \pi]$ .

Přejdeme nyní k samotnému odvození

- (a) Ukažme nejprve  $f_2(x) \geq 0$ .

Z (B.16) plyne

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{2\pi n(2n+1) + 9(n+1)\sin(x) - 3(n+1)x\cos(x) - 2\pi n(n+1)\cos(x)}{8n^2 + 12n+6} \geq \\ &\quad \frac{2\pi n(2n+1) + 9(n+1)\sin(x) - 3(n+1)\sin(x) - 2\pi n(n+1)\cos(x)}{8n^2 + 12n+6} \geq \\ &\quad \frac{2\pi n(2n+1) - 2\pi n(n+1)}{8n^2 + 12n+6} \geq 0. \end{aligned}$$

Nyní ukážeme  $f_2(x) \leq \pi$ . Jelikož  $x \in [0, \pi]$ , platí

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{2\pi n(2n+1) + 9(n+1)\sin(x) - 3(n+1)x\cos(x) - 2\pi n(n+1)\cos(x)}{8n^2 + 12n+6} \leq \\ &\frac{2\pi n(2n+1) + 9(n+1) + 3\pi(n+1) + 2n\pi(n+1)}{8n^2 + 12n+6} \leq \pi \frac{6n^2 + (7 + \frac{9}{\pi})n + (3 + \frac{9}{\pi})}{8n^2 + 12n+6} \leq \pi. \end{aligned}$$

- (b) Platí

$$f_2'(x) = (n+1) \frac{3x\sin(x) + 2\pi n\sin(x) + 6\cos(x)}{8n^2 + 12n+6}$$

Ukažme nejprve  $f_2'(x) > -1$ .

Zřejmě platí

$$f'_2(x) \geq (n+1) \frac{6 \cos(x)}{8n^2 + 12n + 6} \geq -6 \frac{(n+1)}{8n^2 + 12n + 6} > -1.$$

Nyní ukážeme  $f'_2(x) < 1$ .

Na intervalu  $[0, \frac{\pi}{2}]$  zřejmě platí

$$\begin{aligned} f'_2(x) &\leq (n+1) \frac{\pi \left(\frac{3}{2} + 2n\right) \sin(x) + 6 \cos(x)}{8n^2 + 12n + 6} = (n+1) \frac{\sqrt{\pi^2 \left(\frac{3}{2} + 2n\right)^2 + 36} \sin(x - x_0)}{8n^2 + 12n + 6} \\ &\leq (n+1) \frac{\sqrt{\pi^2 \left(\frac{3}{2} + 2n\right)^2 + 36}}{8n^2 + 12n + 6} \leq \frac{\sqrt{4\pi^2 n^4 + 14\pi^2 n^3 + \left(36 + \frac{73\pi^2}{4}\right) n^2 + \left(72 + \frac{21\pi^2}{2}\right) n + \frac{9\pi^2}{4} + 36}}{\sqrt{64n^4 + 192n^3 + 240n^2 + 144n + 36}} \\ &\leq \frac{\sqrt{40n^4 + 139n^3 + 217n^2 + 176n + 59}}{\sqrt{64n^4 + 192n^3 + 240n^2 + 144n + 36}} = \frac{\sqrt{40n^4 + 139n^3 + 217n^2 + 176n + 59}}{\sqrt{40n^4 + 165n^3 + 240n^2 + (144n + 24n^4 + 8n^3) + (36 + 19n^3)}} < 1. \end{aligned}$$

Vyšetřeme nyní chování na intervalu  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Vyjádřeme nejprve

$$f''_2(x) = \frac{n+1}{8n^2 + 12n + 6} ((2\pi n + 3x) \cos(x) - 3 \sin(x)).$$

Zřejmě platí  $f''_2(x) < 0$  na celém intervalu  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

Dostáváme tedy, že funkce  $f'_2$  je klesající na intervalu  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ , a tedy  $|f'_2(x)| < 1$  na intervalu  $[0, \pi]$ .

(IV) Vyjádřeme nyní hodnoty funkce  $w'_2$  v bodech 0 a  $\pi$ . Zapišme funkci  $w'_2$  ve tvaru

$$w'_2(x) = \frac{\mu_2(x) \nu_2(x)}{\xi_2(x)},$$

kde

$$\begin{aligned} \mu_2(x) &= 27(n+1) \sin(x), \\ \nu_2(x) &= -2n(-4nx + 2\pi n - 6x + \pi) - 9(n+1) \sin(x) + (n+1)(2\pi n + 3x) \cos(x) + 6x, \\ \xi_2(x) &= 4\pi (4n^2 - 3(n+1) \cos(x) + 6n + 3)^{5/2}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy psát  $w''_2$  ve tvaru

$$w''_2(x) = \frac{\mu'_2(x) \nu_2(x)}{\xi_2(x)} + \frac{\mu_2(x) \nu'_2(x)}{\xi_2(x)} - \frac{\mu_2(x) \nu_2(x) \xi'_2(x)}{\xi_2^2(x)}.$$

Jelikož  $\mu_2(0) = \mu_2(\pi) = 0$  dostáváme

$$w''_2(0) = \frac{27(n+1) (-2n(2\pi n + \pi) + (n+1)(2\pi n))}{4\pi (4n^2 + 3n)^{5/2}} = -n^2 \frac{27(n+1)}{2(4n^2 + 3n)^{5/2}} < 0,$$

$$\begin{aligned} w''_2(\pi) &= -\frac{27(n+1) (-2n(-2\pi n - 5\pi) - (n+1)(2\pi n + 3\pi) + 6\pi)}{4\pi (4n^2 + 9n + 6)^{5/2}} = \\ &= -\frac{27(n+1) (4\pi n^2 + 10\pi n - 2\pi n^2 - 5\pi n - 3\pi + 6\pi)}{4\pi (4n^2 + 9n + 6)^{5/2}} = -\frac{27(n+1) (2n^2 + 5n + 3)}{4(4n^2 + 9n + 6)^{5/2}} < 0. \end{aligned}$$

(V) Nakonec ukážeme  $w_2 > 0$ , přičemž z (B.16) plyne

$$\begin{aligned}
 w_2(x) &= \\
 \frac{16\pi n^3 + n^2(36\pi - 18\pi \cos(x)) + n(27 \sin(x) - 27x \cos(x) - 18\pi \cos(x) + 18\pi) + 27 \sin(x) - 27x \cos(x)}{2\pi (4n^2 - 3(n+1) \cos(x) + 6n + 3)^{\frac{3}{2}}} &\geq \\
 \frac{16\pi n^3 + 18\pi n^2}{2\pi (4n^2 - 3(n+1) \cos(x) + 6n + 3)^{\frac{3}{2}}} &\geq 0.
 \end{aligned}$$

## Důkaz věty 5.19

V této části chceme ukázat  $f_s(a_s) = 0$ .

Po dosazení dostáváme

$$f_s(a_s) = \pi^3 + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\pi^2 \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)} + \frac{9}{2}\pi \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)} - \frac{3}{2}\pi \left( \pi^2 + 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)} + \frac{3}{2} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)} \right) + \frac{\pi^3}{2} - 3\pi.$$

Což lze zjednodušit do tvaru

$$f_s(a_s) = \frac{9}{4}\pi \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)} - 3\pi.$$

Po přenásobení a použití (B.24) dostáváme

$$\begin{aligned} \cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) f_s(a_s) &= \frac{9}{4}\pi \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\pi \cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) = \\ &= \frac{9}{4}\pi \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) + 3\frac{\sqrt{6}}{4} - 3\pi \left( \frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) - \frac{3\pi}{4}\cos\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Jelikož  $\cos^3\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) \neq 0$ , platí  $f_s(a_s) = 0$ .

## Důkaz lemmatu 5.24

V této části chceme ukázat

- (i)  $a_{1,n}(0) = \frac{\pi}{2} (2n - 1 + \sqrt{4n^2 + 1})$ ,
- (ii)  $a_{1,n}(\pi) = \pi (n + 1 + \sqrt{n(n+1)})$ ,
- (iii)  $b_{2,n}(0) = \pi (n + \sqrt{n(n+1)})$ ,
- (iv)  $b_{2,n}(\pi) = \frac{\pi}{2} (2n + 3 + \sqrt{(2n+2)^2 + 1})$ .

Pro lepší přehlednost odvození připomeňme tvar funkcí  $a_{1,n}$  a  $b_{2,n}$

$$a_{1,n}(x) = 2\sqrt{-\frac{p_{1,n}(x)}{3}} \Psi \left( \frac{3 q_{1,n}(x)}{2 p_{1,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{1,n}(x)}} \right) + \frac{3x + (2n-1)\pi}{3},$$

$$b_{2,n}(x) = 2\sqrt{-\frac{p_{2,n}(x)}{3}} \Psi \left( \frac{3 q_{2,n}(x)}{2 p_{2,n}(x)} \sqrt{-\frac{3}{p_{2,n}(x)}} \right) + \frac{3x + 2\pi n}{3},$$

$$p_{1,n}(x) = -\frac{\pi^2}{3} (4n^2 + n(2 - 3\cos(x)) + 1),$$

$$q_{1,n}(x) = -\frac{\pi^2}{27} (16\pi n^3 + n^2(12\pi - 18\pi\cos(x)) + n(27(\sin(x) - x\cos(x)) + 9\pi\cos(x) - 6\pi) - 2\pi),$$

$$p_{2,n}(x) = -\frac{\pi^2}{3} (4n^2 + 3n(2 - \cos(x)) + 3 - 3\cos(x)),$$

$$q_{2,n}(x) = -\frac{\pi^2}{27} (16\pi n^3 + 18n^2(2\pi - \pi\cos(x)) + 9n(3(\sin(x) - x\cos(x)) + 2\pi(1 - \cos(x))) + 27(\sin(x) - x\cos(x))).$$

Přejdeme nyní k samotnému odvození.

(i) Pod dosazení  $x = 0$  do  $a_{1,n}$  dostáváme

$$a_{1,n}(0) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{4n^2 - n + 1} \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{16\pi n^3 - 6\pi n^2 + 3\pi n - 2\pi}{2\pi(4n^2 - n + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) + \frac{(2n-1)\pi}{3}. \quad (\text{C.2})$$

Zdefinujme  $a_0$  ve tvaru  $a_0 = \frac{1}{2}\pi (2n - 1 + \sqrt{4n^2 + 1})$ . Pomocí lemmatu B.3 lze odvodit následující rovnost

$$\begin{aligned} 3 \arccos \left( \frac{3a_0 - 2n\pi + \pi}{2\pi\sqrt{4n^2 - n + 1}} \right) &= 3 \arccos \left( \frac{3\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1}{4\sqrt{4n^2 - n + 1}} \right) = \\ \arccos \left( \frac{(3\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1)^3}{16(4n^2 - n + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(3\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1)}{4\sqrt{4n^2 - n + 1}} \right) &= \\ \arccos \left( \frac{16n^3 - 6n^2 + 3n - 2}{2(4n^2 - n + 1)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned}$$

Dosazením do (C.2) dostáváme

$$a_{1,n}(0) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{4n^2 - n + 1} \frac{3\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1}{4\sqrt{4n^2 - n + 1}} + \frac{(2n - 1)\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \left( 2n - 1 + \sqrt{4n^2 + 1} \right).$$

(ii) Odvození je podobné jako v případě (i). Zdefinujeme  $a_1$  ve tvaru  $a_1 = \pi \left( n + 1 + \sqrt{n(n+1)} \right)$  a provedme následující úpravy

$$\begin{aligned} 3 \arccos \left( \frac{3a_1 - 2\pi n - 2\pi}{2\pi\sqrt{4n^2 + 5n + 1}} \right) &= 3 \arccos \left( \frac{n + 1 + 3\sqrt{n(n+1)}}{2\sqrt{4n^2 + 5n + 1}} \right) = \\ \arccos \left( \frac{(3\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1)^3}{16(4n^2 - n + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(3\sqrt{4n^2 + 1} + 2n - 1)}{4\sqrt{4n^2 - n + 1}} \right) &= \\ \arccos \left( \frac{8n^2 + 7n - 1}{(4n + 1)\sqrt{4n^2 + 5n + 1}} \right). \end{aligned}$$

A tedy můžeme psát

$$a_{1,n}(\pi) = \frac{2\pi}{3} \sqrt{4n^2 + 5n + 1} \frac{n + 1 + 3\sqrt{n(n+1)}}{2\sqrt{4n^2 + 5n + 1}} + \frac{2n + 2}{3} \pi = \pi \left( n + 1 + \sqrt{n(n+1)} \right).$$

(iii) Odvození je podobné jako v případě (i). Zdefinujeme  $b_0$  ve tvaru  $b_0 = \pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right)$  a provedme následující úpravy

$$\begin{aligned} 3 \arccos \left( \frac{3b_0 - 2\pi n}{2\pi\sqrt{4n^2 + 3n}} \right) &= 3 \arccos \left( \frac{3\pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right) - 2\pi n}{2\pi\sqrt{4n^2 + 3n}} \right) = \\ \arccos \left( \frac{\left( 3\pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right) - 2\pi n \right)^3}{2\pi^3 (4n^2 + 3n)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \left( 3\pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right) - 2\pi n \right)}{2\pi\sqrt{4n^2 + 3n}} \right) &= \\ \arccos \left( \frac{n^2(8n + 9)}{(n(4n + 3))^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned}$$

A tedy můžeme psát

$$b_{2,n}(0) = \frac{2}{3} \pi \sqrt{4n^2 + 3n} \frac{3\pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right) - 2\pi n}{2\pi\sqrt{4n^2 + 3n}} + \frac{2}{3} \pi n = \pi \left( n + \sqrt{n(n+1)} \right).$$

(iv) Odvození je podobné jako v případě (i). Zdefinujeme  $b_1$  ve tvaru  $b_1 = \frac{\pi}{2} \left( 2n + 3 + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} \right)$  a provedme následující úpravy

$$\begin{aligned}
& 3 \arccos \left( \frac{3b_1 - 2\pi n - 3\pi}{2\pi\sqrt{4n^2 + 9n + 6}} \right) = 3 \arccos \left( \frac{\frac{3}{2} \left( 2n + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} + 3 \right) - (2n+3)}{2\sqrt{4n^2 + 9n + 6}} \right) = \\
& \arccos \left( \frac{\left( \frac{3}{2} \left( 2n + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} + 3 \right) - (2n+3) \right)^3}{2^3 (4n^2 + 9n + 6)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3 \left( \frac{3}{2} \left( 2n + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} + 3 \right) - (2n+3) \right)}{2\sqrt{4n^2 + 9n + 6}} \right) = \\
& \arccos \left( \frac{16n^3 + 54n^2 + 63n + 27}{2(4n^2 + 9n + 6)^{\frac{3}{2}}} \right).
\end{aligned}$$

A tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}
b_{2,n}(\pi) = \frac{\pi}{3} 2\sqrt{4n^2 + 9n + 6} \frac{\frac{3}{2} \left( 2n + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} + 3 \right) - (2n+3)}{2\sqrt{4n^2 + 9n + 6}} + \frac{2n+3}{3} \pi = \\
\frac{\pi}{2} \left( 2n + 3 + \sqrt{(2n+2)^2 + 1} \right).
\end{aligned}$$



## Důkaz lemmatu 5.26

V této části chceme ukázat

$$(i) \ a_{2,0}(\pi) = \frac{\pi}{2} (\sqrt{5} + 1),$$

$$(ii) \ b_{2,0}(\pi) = \frac{\pi}{2} (\sqrt{5} + 3).$$

Vyjádřeme nejprve

$$\mathbf{k}_{2,0}(x) = \begin{cases} a_{2,0}(x) = \pi + \frac{\sqrt{3}x}{2\sqrt{1-\cos(x)} \Psi\left(\frac{27(\sin(x)-x \cos(x))}{2\pi(3-3\cos(x))^{\frac{3}{2}}}\right)}, \\ b_{2,0}(x) = x + \frac{2}{3}\pi\sqrt{3-3\cos(x)} \Psi\left(\frac{27(\sin(x)-x \cos(x))}{2\pi(3-3\cos(x))^{\frac{3}{2}}}\right), \end{cases} \quad \text{kde } x \in (0, \pi].$$

Přejdeme nyní k samotnému odvození

(i) Pro  $a_{2,0}(\pi)$  můžeme psát

$$a_{2,0}(\pi) = \pi + \frac{\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2} \Psi\left(\frac{27\pi}{2\pi 6^{\frac{3}{2}}}\right)} = \pi + \frac{\sqrt{3}\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)\right)}.$$

Z lemmatu B.3 plyne

$$\arccos\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right) = 3 \arccos\left(\frac{1}{8}(\sqrt{6} + \sqrt{30})\right). \quad (C.3)$$

A tedy můžeme psát

$$a_{2,0}(\pi) = \pi + \frac{\sqrt{3}8\pi}{2\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{30})} = \frac{\pi}{2} (2 + \sqrt{5} - 1) = \frac{\pi}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

(ii) Nyní odvodíme  $b_{2,0}(\pi)$ , pomocí vztahu (C.3)

$$b_{2,0}(\pi) = \pi + \frac{2}{3}\pi\sqrt{6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)\right) = \pi + \pi\sqrt{6} \frac{1}{12} (\sqrt{6} + \sqrt{30}) = \frac{\pi}{2} (\sqrt{5} + 3).$$

### Důkaz lemmatu 5.30

V této části chceme ukázat, že v případě  $n = 0$  máme

$$a'_{2,0}(\pi) = \frac{2}{\sqrt{5} + 1}, \quad b'_{2,0}(\pi) = 1,$$

a pro  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$\begin{aligned} a'_{1,n}(0) &= 1, & b'_{1,n}(0) &= \frac{1 + \sqrt{4n^2 + 1}}{2n}, \\ a'_{1,n}(\pi) &= 1, & b'_{1,n}(\pi) &= \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\ a'_{2,n}(0) &= \sqrt{\frac{n+1}{n}}, & b'_{2,n}(0) &= 1, \\ a'_{2,n}(\pi) &= \frac{2(n+1)}{\sqrt{4n(n+2) + 5} + 1}, & b'_{2,n}(\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Pro přehlednost uvedme tvar funkcí, se kterými bude v této části pracovat

$$a_{1,n}(x) = 2\sqrt{-\frac{p_{1,n}(x)}{3}} \Psi(w_{1,n}(x)) + \frac{3x + (2n-1)\pi}{3},$$

$$b_{1,n}(x) = \pi a_{1,n}(x) \frac{n}{a_{1,n}(x) - x - \pi n},$$

$$a_{2,n}(x) = \pi b_{2,n}(x) \frac{n+1}{b_{2,n}(x) - x - \pi n},$$

$$b_{2,n}(x) = 2\sqrt{-\frac{p_{2,n}(x)}{3}} \Psi(w_{2,n}(x)) + \frac{3x + 2\pi n}{3},$$

$$a_{2,0}(x) = \frac{\pi b_{2,0}(x)}{b_{2,0}(x) - x},$$

$$b_{2,0}(x) = x + \frac{2}{3}\pi\sqrt{3 - 3\cos(x)} \Psi\left(\frac{27(\sin(x) - x\cos(x))}{2\pi(3 - 3\cos(x))^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$p_{1,n}(x) = -\frac{\pi^2}{3}(4n^2 + n(2 - 3\cos(x)) + 1),$$

$$w_{1,n}(x) = \frac{16\pi n^3 - n^2(18\pi\cos(x) - 12\pi) - n(-27\sin(x) + 27x\cos(x) - 9\pi\cos(x) + 6\pi) - 2\pi}{2\pi(4n^2 - 3n\cos(x) + 2n + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$p_{2,n}(x) = -\frac{\pi^2}{3}(4n^2 + 3n(2 - \cos(x)) + 3 - 3\cos(x)),$$

$$w_{2,n}(x) = \frac{16\pi n^3 + n^2(36\pi - 18\pi\cos(x)) + n(27\sin(x) - 27x\cos(x) - 18\pi\cos(x) + 18\pi) + 27\sin(x) - 27x\cos(x)}{2\pi(4n^2 - 3(n+1)\cos(x) + 6n + 3)^{\frac{3}{2}}}.$$

Odvození rozdělíme do několika částí.

(i) Nejprve ukážeme

$$\begin{aligned} a'_{1,n}(0) &= a'_{1,n}(\pi) = 1, \\ b'_{2,n}(0) &= b'_{2,n}(\pi) = 1, \\ b'_{2,0}(\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Jelikož platí

$$\begin{aligned} p'_{1,n}(0) &= p'_{1,n}(\pi) = 0, \\ w'_1(0) &= w'_1(\pi) = 0, \end{aligned}$$

dostáváme z pravidel pro derivování složené funkce

$$\left( 2\sqrt{\frac{p_{1,n}(x)}{3}} \Psi(w_{1,n}(x)) \right)' \Big|_{x=0} = 0.$$

A tedy platí  $a'_{1,n}(0) = a'_{1,n}(\pi) = 1$ .

Důkaz pro  $b'_{1,n}(0) = b'_{1,n}(\pi) = 1$  a  $b'_{2,0}(\pi) = 1$  je obdobný.

(ii) Ve speciálním případě  $n = 0$  platí

$$a'_{2,0}(x) = \pi \frac{b'_{2,0}(x)(b_{2,n}(x) - x) - b_{2,0}(x)(b'_{2,0}(x) - 1)}{(b_{2,0}(x) - x)^2} = \pi \frac{b_{2,0}(x) - xb'_{2,0}(x)}{(b_{2,0}(x) - x)^2}$$

Pro  $n \in \mathbb{N}$  můžeme psát

$$\begin{aligned} b'_{1,n}(x) &= \pi n \frac{a'_{1,n}(x)(a_{1,n}(x) - \pi n - x) - a_{1,n}(x)(a'_{1,n}(x) - 1)}{(a_{1,n}(x) - \pi n - x)^2} = \pi n \frac{a_{1,n}(x) - \pi n a'_{1,n}(x) - x a'_{1,n}(x)}{(a_{1,n}(x) - \pi n - x)^2} \\ a'_{2,n}(x) &= \pi(n+1) \frac{b'_{2,n}(x)(b_{2,n}(x) - \pi n - x) - b_{2,n}(x)(b'_{2,n}(x) - 1)}{(b_{2,n}(x) - \pi n - x)^2} = \\ &= \pi(n+1) \frac{b_{2,n}(x) - \pi n b'_{2,n}(x) - x b'_{2,n}(x)}{(b_{2,n}(x) - \pi n - x)^2}. \end{aligned}$$

(iii) Nyní můžeme vyjádřit derivace v krajních bodech.

Pro  $n = 0$  máme

$$a'_{2,0}(\pi) = \pi \frac{b_{2,0}(\pi) - \pi}{(b_{2,0}(\pi) - \pi)^2} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}(\sqrt{5} + 3) - \pi} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1},$$

a pro  $n \in \mathbb{N}$  dostáváme

$$\begin{aligned}
 b'_{1,n}(0) &= \frac{\pi n}{a_{1,n}(0) - \pi n} = \frac{\pi n}{\frac{1}{2}\pi(2n-1 + \sqrt{4n^2+1}) - \pi n} = \frac{1 + \sqrt{4n^2+1}}{2n}, \\
 b'_{1,n}(\pi) &= \frac{\pi n}{a_{1,n}(\pi) - \pi(n+1)} = \frac{\pi n}{\pi(n+1 + \sqrt{n(n+1)}) - \pi(n+1)} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \\
 a'_{2,n}(0) &= \frac{\pi(n+1)}{b_{2,n}(0) - \pi n} = \frac{\pi(n+1)}{\pi(n + \sqrt{n(n+1)}) - \pi n} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \\
 a'_{2,n}(\pi) &= \frac{\pi(n+1)}{b_{2,n}(\pi) - \pi(n+1)} = \frac{\pi(n+1)}{\frac{\pi}{2}(2n+3 + \sqrt{(2n+2)^2+1}) - \pi(n+1)} = \frac{2(n+1)}{\sqrt{4n(n+2)+5+1}}.
 \end{aligned}$$

## Důkaz věty 5.38

V této části ukážeme

(i)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_1^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_1^r(x))' \neq 0,$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_2^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_2^r(x))' \neq 0.$$

Přejdeme nyní k samotnému odvození.

(i) Spočtáme nejprve

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_1^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(l_1^c(\sqrt{x}))^2 - (l_1^s)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a_{2,0}(\sqrt{x}) c_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

kde  $c_1(x) = a'_{2,0}(x)$ .

Použitím (A.8) a (A.15) dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_1^r(x))' &= \lim_{x \rightarrow 0^+} a_{2,0}(\sqrt{x}) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \\ a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 - \cos(\sqrt{x})} - \frac{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{1 - \cos(\sqrt{x})}}}{\sqrt{x} (1 - \cos(\sqrt{x})) \Psi(\eta_a(\sqrt{x}))} - \frac{\frac{d\Psi}{d\eta_a}(\eta_a(\sqrt{x})) \frac{d\eta_a}{dx}(\sqrt{x})}{\sqrt{1 - \cos(\sqrt{x})} \Psi^2(\eta_a(\sqrt{x}))} \right) &= \\ a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\Psi'(\frac{\sqrt{6}}{\pi})}{\Psi^2(\frac{\sqrt{6}}{\pi})} \frac{3\sqrt{3} \sin(\sqrt{x}) (2\sqrt{x} + \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) - 3 \sin(\sqrt{x}))}{4\pi (1 - \cos(\sqrt{x}))^{\frac{5}{2}}} \right) &= \\ a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\Psi'(\frac{\sqrt{6}}{\pi})}{\Psi^2(\frac{\sqrt{6}}{\pi})} \frac{3\sqrt{3} \sin(\sqrt{x}) (2\sqrt{x} + \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) - 3 \sin(\sqrt{x}))}{8\pi (1 - \cos(\sqrt{x}))^3} \right) &= \\ a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \frac{\Psi'(\frac{\sqrt{6}}{\pi})}{\Psi^2(\frac{\sqrt{6}}{\pi})} \right). \end{aligned}$$

Pro limitu zleva můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_1^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(l_1^z(-\sqrt{-x}))^2 - (l_1^s)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(a_z(\sqrt{-x}))^2 - (l_1^s)^2}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a_z(\sqrt{-x}) c_2(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}},$$

kde  $c_2(x) = a'_z(x)$ .

Použitím (A.13) dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_1^r(x))' &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} a_z(\sqrt{x}) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \\
&= -a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\cosh(x) - 1} - \frac{x \sinh(x)}{2\sqrt{\cosh(x) - 1}}}{x (\cosh(x) - 1) \Psi(\eta_z(x))} - \frac{\frac{d\Psi}{d\eta_z}(\eta_z(\sqrt{x})) \frac{d\eta_z}{dx}(\sqrt{x})}{\sqrt{\cosh(x) - 1} \Psi^2(\eta_z(x))} \right) = \\
&= -a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\Psi' \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)}{\Psi^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)} \frac{3\sqrt{3} \sinh(\sqrt{x})(2\sqrt{x} + \sqrt{x} \cosh(\sqrt{x}) - 3 \sinh(\sqrt{x}))}{4\pi (\cosh(\sqrt{x}) - 1)^{\frac{5}{2}}} \right) = \\
&= -a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\Psi' \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)}{\Psi^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)} \frac{3\sqrt{3} \sinh(\sqrt{x})(2\sqrt{x} + \sqrt{x} \cosh(\sqrt{x}) - 3 \sinh(\sqrt{x}))}{8\pi (\cosh(\sqrt{x}) - 1)^3} \right) = \\
&= -a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \frac{\Psi' \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)}{\Psi^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)} \right) = a_s \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \frac{\Psi' \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)}{\Psi^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)} \right).
\end{aligned}$$

Jelikož přibližně platí

$$\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \frac{\Psi' \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)}{\Psi^2 \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right)} \approx 0.114397,$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_1^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_1^r(x))' \neq 0.$$

(ii) Spočtíme nyní

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_2^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(l_2^c(\sqrt{x}))^2 - (l_2^s)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b_{2,0}(\sqrt{x}) c_3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

kde

$$c_3(x) = b'_{2,0}(x).$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_2^r(x))' &= \lim_{x \rightarrow 0^+} c_3(\sqrt{x}) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b_{2,0}}{\sqrt{x}} = \\
&= \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \Psi \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right) \right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \pi \frac{\sqrt{1 - \cos(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} \Psi \left( \frac{27(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x} \cos(\sqrt{x}))}{2\pi(3 - 3 \cos(\sqrt{x}))^{\frac{3}{2}}} \right) \right) = \\
&= \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \Psi \left( \frac{\sqrt{6}}{\pi} \right) \right)^2.
\end{aligned}$$

Pro limitu zleva můžeme psát

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_2^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(l_2^z(-\sqrt{-x}))^2 - (l_2^s)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(\tilde{b}_z(\sqrt{-x}))^2 - (l_2^s)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{b}_z(\sqrt{-x}) c_4(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}},$$

kde  $c_4(x) = \tilde{b}'_z(x)$ .

Máme tedy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_2^r(x))' &= \lim_{x \rightarrow 0^+} c_4(\sqrt{x}) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{b}_z(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\cosh(\sqrt{x}) - 1}}{\sqrt{x}} \Psi\left(\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{x} \cosh(\sqrt{x}) - \sinh(\sqrt{x}))}{2\pi(\cosh(\sqrt{x}) - 1)^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \Psi\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Jelikož je  $\Psi$  pozitivně definitní funkcí dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\gamma_2^r(x))' = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\gamma_2^r(x))' \neq 0.$$





# Literatura

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.
- [2] ARIAS, M., AND CAMPOS, J. Radial Fučík spectrum of the Laplace operator. *J. Math. Anal. Appl.* 190, 3 (1995), 654–666.
- [3] DANCER, E. N. Boundary-value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations. *Bull. Austral. Math. Soc.* 15, 3 (1976), 321–328.
- [4] FUČÍK, S. Boundary value problems with jumping nonlinearities. *Časopis Pěst. Mat.* 101, 1 (1976), 69–87.
- [5] HAMÁČEK, M. Spektrální vlastnosti laplaceova operátoru s nelokálními okrajovými podmínkami. Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2017.
- [6] KADLEC, J., AND NEČESAL, P. The Fučík spectrum as two regular curves. In *Nonlinear analysis and boundary value problems*, vol. 292 of *Springer Proc. Math. Stat.* Springer, Cham, 2019, pp. 177–198.
- [7] OLVER, F. W. J., LOZIER, D. W., BOISVERT, R. F., AND CLARK, C. W., Eds. *NIST handbook of mathematical functions*. U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, DC; Cambridge University Press, Cambridge, 2010. With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).
- [8] SERGEJEVA, N. On the unusual Fučík spectrum. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, Dynamical systems and differential equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl. (2007), 920–926.
- [9] TENENBAUM, M., AND POLLARD, H., Eds. *Ordinary differential equations; an elementary textbook for students of mathematics, engineering, and the sciences*. Dover Publications; Revised ed. edition, 1985.
- [10] ŠTUMPFOVÁ, P. Fučíkovo spektrum pro úlohy s nelokálními okrajovými podmínkami. Bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2019.

