Tři starobabylónské matematické tabulky

prof. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.
Ústav aplikované matematiky, Fakulta dopravní,
České vysoké učení technické v Praze
✉ becvamar@fd.cvut.cz

Orientalia Antiqua Nova XXI
ISBN 978-80-261-1039-2
Západočeská univerzita v Plzni, 2021
https://doi.org/10.24132/ZCU.2021.10392-15-36

Abstract

The article analyzes three famous mathematical tablets from the Yale Babylonian Collection (YBC 7290, YBC 7289, and YBC 7302) that come from the Old Babylonian period (i.e. from some time between 1800 and 1600 BC). They show an interesting approach of ancient Babylonian mathematicians, scribes, or students to elementary planar geometric shapes (trapezoid, square, and circle). They describe the Old Babylonian calculations of areas, the approximation to the square root of 2 as well as the knowledge of the Pythagorean Theorem and the approximation to the value for π.

Tabulky s geometrickou tematikou

Ze starobabylónského období (tj. 19. až 17. století před naším letopočtem) se nám dochovalo množství tabulek s geometrickou tematikou. Obsahují úlohy, které vycházely zejména z praktických potřeb. Nejvíce podnětů dávalo *zemědělství* (vyměřování polí a stanovení množství osiva), *stavitelství* (výpočty objemů zdiva a výkopů, objemů sýpek, výšky staveb, sklonů náspů), *obchod* (prodej pozemků), *válečnictví* (budování náspů a hradeb, odhad výšky obranných zdí) a *běžný život* (rozdělování dědictví a placení daní). Podařilo se však objevit i tabulky, na nichž byly tzv. umělé úlohy, které byly využívány pro výuku písařů a sloužily k rozvoji jejich matematického myšlení – bylo třeba vypočítat údaje, které se v praxi daly snadno změřit, nebo byly úmyslně zadány nevhodné jednotky nebo vstupní číselné údaje, které komplikovaly výpočty. V „praktických" úlohách byly číselné hodnoty většinou zadávány tak, aby výpočty „dobře vycházely", tj. aby se počtář netrápil komplikovanými aritmetickými operacemi a převodem jednotek.

Na starobabylónských tabulkách se můžeme běžně setkat s výpočtem obsahů elementárních rovinných útvarů (čtverec, obdélník, trojúhelník, lichoběžník, čtyřúhelník, pravidelný pěti-, šesti- a sedmiúhelník, kruh) a s výpočtem objemů více či méně elementárních těles (krychle, kvádr, hranol, klín, komolý klín, nepravidelný klín, válec, jehlan, komolý jehlan, kužel a komolý kužel). Jednalo se o útvary, s nimiž se písař či počtář setkával nebo mohl setkávat v každodenním životě.

V následujícím textu se budeme věnovat třem zajímavým matematickým tabulkám ze starobabylónského období, které neobsahují žádná slova. Jsou to úlohy z kategorie „*dívej se, přemýšlej, uvidíš*" neboli úlohy, v nichž je *matematika položena před oči bez zbytečného psaní a vysvětlování.*[1]

[1] O matematice ve starověké Mezopotámii viz Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, Bruins a Rutten 1961 a Neugebauer a Sachs 1945.

Lichoběžník

Oblíbeným útvarem starobabylónských matematiků byl lichoběžník. Svědčí o tom velké množství dochovaných tabulek. Nejčastěji se na nich vyskytuje *rovnoramenný lichoběžník*, který mohl představovat řez zikkuratem nebo výkopem závlahového kanálu vertikální rovinou. Někdy se objevuje *pravoúhlý lichoběžník*, který mohl reprezentovat řez opěrnou zdí nebo valem.

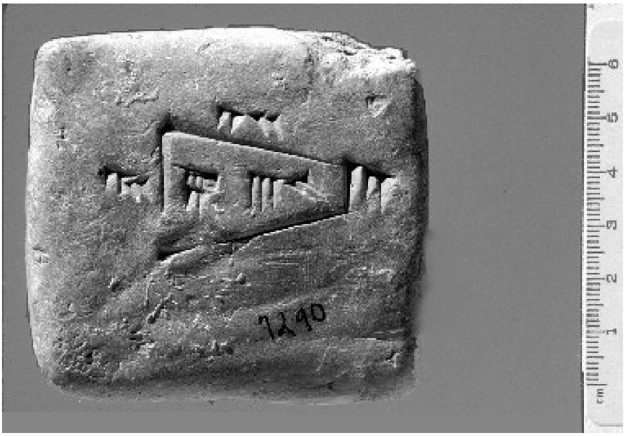
Na tabulkách se většinou vyskytuje obrázek, který znázorňuje jeden z výše uvedených typů lichoběžníku, jindy se pouze hovoří o řezu zeminou či zdí nebo se neobratně popisuje pole lichoběžníkového tvaru. Chybí jasná terminologie, není jasné, zda je v úlohách zadána velikost ramene nebo výšky. Dochovaly se tabulky s jednoduchými úlohami, v nichž se počítá obsah lichoběžníku, ale i s obtížnějšími úlohami, kdy je třeba lichoběžník rozdělit na několik částí s předem danými vlastnostmi nebo předem daných tvarů. K řešení takových úloh je někdy nutná znalost podobnosti trojúhelníků, Pythagorovy věty, řešení kvadratických rovnic apod.

Zajímavou tabulkou je tabulka **YBC 7290** z období 1800 až 1600 před naším letopočtem, která byla objevena koncem 19. století. Od roku 1909 je součástí celosvětově proslavené *Yale Babylonian Collection Yale University New Haven*.[2] Ve dvacátých letech 20. století ji prostudoval historik matematiky

[2] *Yale Babylonian Collection* obsahuje téměř 45 000 klínopisných tabulek, je nezávislou částí Yale University Library, která se nachází v areálu Yale University v New Haven, Connecticut, USA. Sbírka byla založena roku 1909 díky velkolepému daru Johna Pierponta Morgana (1837–1913), předního amerického finančníka, sběratele a filantropa. Dnes je největší světovou sbírkou starověkých klínopisných textů, je centrem výzkumů pro asyriologii a související obory. Více viz https://en.wikipedia.org/wiki/Yale_Babylonian_Collection [20. 5. 2021].

Otto Eduard Neugebauer[3] a své výsledky publikoval ve čtyřicátých letech.[4]

Jedná se o čtvercovou tabulku popsanou jen z jedné strany, jejíž hrany měří asi 6 cm. Je na ní znázorněn rovnoramenný lichoběžník, uvedena dvě čísla u jeho základen, jedno u jeho ramene a jedno uvnitř. Žádný text na tabulce není. Viz přiložený obrázek.[5]

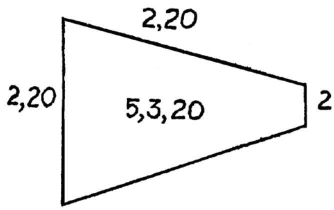


[3] Otto Eduard Neugebauer (1899–1990) byl rakousko-americký matematik a historik vědy, který se proslavil jednak prací pro matematickou komunitu (budování matematického centra v Göttingenu, vedení referativních časopisů) a jednak díky studiím a monografiím z historie vědy, zejména starověké astronomie a matematiky. Byl předním specialistou na studium starobabylónských tabulek. O jeho životě a díle viz např. Veselý 2020.

[4] Zásluhu na první interpretaci této tabulky měli Otto Eduard Neugebauer a Abraham J. Sachs. Abraham J. Sachs (1914–1983) byl americký asyriolog a historik matematiky, který získal vzdělání na Johns Hopkins University. Věnoval se studiu astronomických a matematických klínopisných textů. Prostudoval klínopisné tabulky uložené v USA a Velké Británii. O jeho životě a výsledcích viz např. Toomer 1984.

[5] Obrázek je převzat z Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 321, je také volně dostupný na řadě webových stránek.

Překreslíme-li obrázek a přepíšeme-li čísla zapsaná klínopisem pomocí našich cifer, ale zachováme-li starobabylónskou šedesátkovou soustavu, obdržíme následující obrázek.[6]



Přepis čísel nečiní žádný problém, neboť zápis na tabulce je nepoškozený a velmi dobře čitelný. U základen lichoběžníku jsou uvedeny hodnoty (2, 20) a (2), u ramene (2, 20), uvnitř (5, 3, 20). O něco složitější je interpretace řádů čísel, neboť starobabylónští počtáři sice užívali poziční zápis čísel v šedesátkové soustavě, ale neužívali nulu. Měli speciální znak pro jednotku a speciální znak pro desítku, podle potřeby je aditivně spojovali, například číslo 37 se zapsalo pomocí tří znaků pro desítku a sedmi znaků pro jednotku. Pokud v zápisu byly více než tři stejné znaky, umísťovaly se nad sebe, tj. devítka byla zapsána ve třech řádcích, každý obsahoval tři znaky pro jednotku.

Výše uvedený zápis (2) může znamenat (2), (2, 0), (2, 0, 0), (0; 2), (0; 0, 2) atd. Hodnotu čísla musíme tedy určit podle kontextu nebo vlastního výpočtu. Zdůrazněme, že řády v naší moderní notaci oddělujeme čárkou, celou část čísla od „desetinné“ středníkem, tedy zápis (2) značí v desítkové soustavě 2, zápis (2, 0) je $2 \times 60 + 0 = 120$, zápis (2, 0, 0) udává $2 \times 3600 + 0 \times 60 + 0 = 7200$, zápis (0; 2) znamená $^{2}/_{60}$ a zápis (0; 0, 2) představuje $^{2}/_{3600}$.

[6] Obrázek je převzat z Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 321, je též volně dostupný na řadě webových stránek.

Nevíme, zda starobabylónským písařům a počtářům vnímání řádů činilo nějaký větší problém. Je pravděpodobné, že pro začátečníky to mohlo být dosti obtížné, zkušený počtář však správný řád vyrozuměl z kontextu úlohy a prováděných operací. Nemáme dochovanou tabulku, kde by byla chyba způsobená špatným pochopením řádů.

Ze starobabylónských geometrických tabulek víme, že uvnitř útvaru byl obvykle zapisován jeho obsah nebo hodnota související s obsahem (množství osiva, velikost daní apod.). Pokud se zamyslíme nad čísly uvedenými na tabulce **YBC 7290**, zjistíme, že počtář k hodnotě obsahu lichoběžníku dospěl tak, jako by užil vzorec

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2) \cdot r,$$

kde $z_1 = (2, 20) = 2 \times 60 + 20 = 140$ („levá“ základna), $z_2 = (2, 0) = 2 \times 60 = 120$ („pravá“ základna, zde je nutno správně pochopit řád), $r = (2, 20) = 2 \times 60 + 20 = 140$ (rameno). Při této interpretaci uvedených hodnot dostaneme po dosazení do vzorce

$$S = \tfrac{1}{2}\,(140 + 120) \cdot 140 = 18\,200 = 5 \cdot 3600 + 3 \cdot 60 + 20 = (5, 3, 20),$$

což je přesně hodnota uvedená na tabulce.

My však víme, že při výpočtu obsahu lichoběžníku musíme pečlivě rozlišovat rameno a výšku. Výše uvedený starobabylónský postup proto nevede ke správnému výsledku. Náš výpočet se opírá o správný vzorec

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2) \cdot v,$$

kde z_1 a z_2 jsou základny lichoběžníku a v je výška lichoběžníku. Tu můžeme vypočítat s využitím *Pythagorovy věty*, která byla známa již ve starobabylónském období, byť na žádné tabulce není doložena ani její slovní formulace, ani její matematický důkaz. Délka výšky v se vypočte následovně (r je rameno)

$$v = \sqrt{[r^2 - (½ \cdot (z_1 - z_2))^2]} = \sqrt{(140^2 - 10^2)} = \sqrt{19500} \approx 139{,}64.$$

Obsah lichoběžníku tedy bude

$$S = ½ \cdot (140 + 120) \cdot \sqrt{19500} \approx 18\,153{,}51.$$

Porovnáme-li starobabylónskou hodnotu 18 200 a naši hodnotu 18 153,51, vidíme, že se příliš neliší. Na této tabulce (na jiných je tomu podobně)[7] máme „dlouhý a štíhlý" lichoběžník, tj. lichoběžník, jehož výška se od ramene moc neliší. Starobabylónský počtář se při výpočtu obsahu lichoběžníku dopustil chyby 0,26 %. Dnes je těžké rozhodnout, zda si nepřesnost výpočtu uvědomoval, nebo zda nebyla na tabulce vlastně zadána výška a výpočet byl tudíž správný.

Vzhledem ke své velikosti a tvaru (vešla se pohodlně do dlaně), velikosti písma (klínopisné znaky jsou poměrně velké ve srovnání se zápisy na běžných tabulkách) a jednoduchosti obsahu mohla být tabulka **YBC 7290** názornou výukovou pomůckou, která budoucí písaře a počtáře seznamovala s výpočtem obsahu lichoběžníku. Mohla být též školním, cvičným dílem začínajícího písaře – studenta. Její přesnou roli dnes již nelze určit.[8]

---

[7] Viz např. starobabylónská tabulka YBC 11126, na níž je lichoběžník se základnami z_1 = (45) a z_2 = (22, 30), ramenem r = (3) a obsahem S = (1, 41, 15). Přitom délku (45) je nutno chápat jako (45, 0).

[8] O tabulce YBC 7290 viz Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 321–322 a Neugebauer a Sachs 1945, 44.

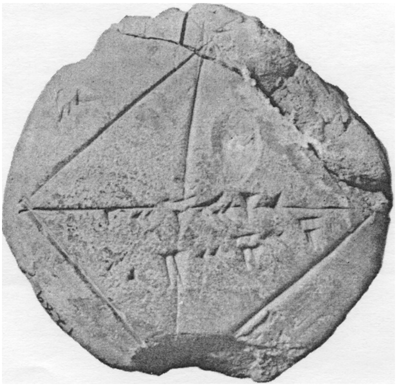
Čtverec

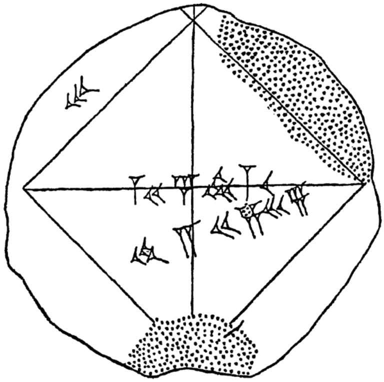
Na dochovaných starobabylónských tabulkách se často pracuje se čtvercovým polem. Z hlediska geometrie se tedy objevuje čtverec, tj. elementární rovinný útvar ohraničený čtveřicí úseček, které jsou stejně dlouhé a po dvou navzájem kolmé. K jeho zadání stačí jediný údaj (délka strany, resp. délka úhlopříčky, resp. délka obvodu, resp. obsah plochy).

Na dochovaných klínopisných tabulkách jsou počítány obsahy nebo obvody čtverce nebo délka jeho úhlopříčky. Tyto úlohy patří mezi zcela elementární, jedinou jejich komplikací mohou být převody jednotek nebo násobení víceciferných čísel. Triviálními příklady jsou i takové, kdy je k řešení nutná znalost *Pythagorovy věty* (např. výpočet délky úhlopříčky). Tabulek tohoto typu se dochovalo větší množství.

Kromě výše uvedených tabulek máme tabulky, na nichž se řeší obtížnější úlohy. Patří mezi ně například dělení čtvercového pole na útvary předem daných vlastností nebo tvarů.

Mezi zajímavé tabulky patří tabulka **YBC 7289**, která pochází z období 1800 až 1600 před naším letopočtem. Byla objevena koncem 19. století, od roku 1909 je součástí *Yale Babylonian Collection Yale University New Haven*. Ve dvacátých letech 20. století ji prostudoval Otto Eduard Neugebauer, výsledky publikoval ve čtyřicátých letech. Jedná se o nevelkou, nepatrně poškozenou kruhovou tabulku, která je popsána jen z jedné strany, její průměr je asi 7 centimetrů. Je na ní nakreslen čtverec a obě jeho úhlopříčky. U „levé horní“ strany čtverce je uvedeno číslo (30), vidíme tři klínové znaky pro desítku. Přes úhlopříčku je zapsáno číslo (1, 24, 51, 10), vidíme jeden znak pro jednotku, dále dva znaky pro desítku a čtyři znaky pro jednotku, pět znaků pro desítku a jeden znak pro jednotku a nakonec jeden znak pro desítku. Pod úhlopříčkou je napsáno číslo (42, 25, 35), vidíme čtyři znaky pro desítku a dva znaky pro jednotku, dva znaky pro desítku a pět znaků pro jednotku a nakonec tři znaky pro desítku a pět znaků pro jednotku. Zápis čísla 25 je poškozen (viz zápis jednotek). Na levém obrázku vidíme fotografii tabulky, na pravém je tabulka pro lepší názornost překreslena.[9]

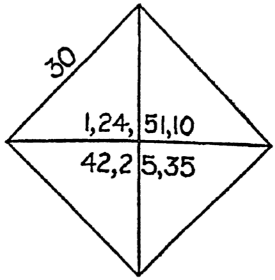




Výklad smyslu zapsaných čísel je následující. První číslo (30) je snadné vysvětlit, neboť je to délka strany čtverce. U zbývajících dvou čísel musíme pečlivě uvážit řády. Číslo na úhlopříčce je nutno číst jako (1; 24, 51, 10) neboli $1 + {}^{24}/_{60} + {}^{51}/_{3600} + {}^{10}/_{216000} = {}^{305470}/_{216000} \approx 1{,}414212963\ldots$, tj. jedná se o přibližnou hodnotu $\sqrt{2}$. Druhé číslo je nutno číst jako (42; 25, 35) neboli $42 + {}^{25}/_{60} + {}^{35}/_{3600}$, tj. $30 \times (1; 24, 51, 10)$, což je délka úhlopříčky čtverce se stranou 30. Viz následující obrázek.[10]

[9] Obrázky jsou převzaty z Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 232, 329 a Neugebauer a Sachs 1945, 42, jsou též volně dostupné na řadě webových stránek.

[10] Obrázek je převzat z Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 329.



Je zřejmé, že tabulka dokládá znalost *Pythagorovy věty* asi 1200 let před řeckou matematikou, neboť označíme-li délku strany čtverce *a* a délku úhlopříčky čtverce *u*, pak platí

$a^2 + a^2 = u^2$, tj. $u = \sqrt{2} \cdot a$.

Všimněme si starobabylónské hodnoty √2. Viděli jsme, že číslo (1; 24, 51, 10) je přibližně rovno 1,41212 963. Pokud vypočteme s použitím obyčejné kalkulačky hodnotu čísla √2, dostaneme přibližnou hodnotu 1,414213562. Přesnost starobabylónského hodnoty je úžasná, výše uvedená čísla se shodují na pět desetinných míst. Jako mohlo být takové přesnosti dosaženo? Jaký se za ní skrývá výpočet?

Rekonstrukce starobabylónského postupu vychází z hodnot uvedených na dochovaných tabulkách druhých odmocnin přirozených čísel nebo z údajů použitých na tabulkách obsahujících výpočty délek úhlopříček čtverců a obdélníků. Stručný výpočet je naznačen na tabulce BM 96957 + VAT 6598.[11]

[11] Část tabulky je uložena v *British Museum, Department of Western Asiatic Antiquities* (Londýn), část ve *Vorderasiatische Abteilung, Tontafeln, Staatliche Museen* (Berlín). Analýza tabulky je provedena např. v článku Fowler a Robson 1998, 371–373. V článku jsou diskutovány i jiné způsoby výpočtu druhé odmocniny ze dvou, které ukazují, jak bylo možno elegantně obejít hledání reciproké hodnoty.

Prvním krokem algoritmu byla tzv. hrubá aproximace, kterou lze popsat takto: hledejme $\sqrt{A}$, kde A je přirozené číslo, jehož odmocninu chceme vypočítat. Vyjádříme A ve tvaru $a^2 + b$, kde a je přirozené číslo takové, že $a^2 < A$ a $(a + 1)^2 > A$, přirozené číslo b je pro velká A menší než a^2. Máme tedy

$$\sqrt{A} = \sqrt{(a^2 + b)}$$

a nyní využijeme metodu doplnění na úplný čtverec, tj. zvětšíme výraz pod odmocninou tak, abychom mohli bez problémů odmocnit. Tedy

$$\sqrt{(a^2 + b)} \approx \sqrt{(a^2 + b + \boldsymbol{b^2/4a^2})} = a + b/2a = \tfrac{1}{2} \cdot (2a + b/a) = \tfrac{1}{2} \cdot (a + a + b/a) = \tfrac{1}{2} \cdot [a + (a^2+b)/a] = \tfrac{1}{2} \cdot (a + A/a).$$

Takto získaná hodnota odmocniny je větší než skutečná hodnota odmocniny, neboť jsme přidali $b^2/4a^2$. Výše uvedená metoda „hrubé aproximace“ poskytuje vyhovující výsledky při odmocňování velkých přirozených čísel, neboť v těchto případech je $b^2/4a^2$ poměrně malé. Metoda však není postačující pro výpočet odmocnin malých přirozených čísel, což je právě náš případ.

Tohoto problému si starobabylónští počtáři museli být dobře vědomi. Z dochovaných matematických tabulek víme, že se s hrubým odhadem nespokojili. Nejprve našli hrubou aproximaci, pak užili metody „průměru“.

Vezmeme-li $a_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (a + A/a)$ jako první hrubý odhad, potom druhým odhadem bude

$$a_2 = \tfrac{1}{2} \cdot (A/a_1 + a_1).$$

Tento vzorec je založen na následujícím výpočtu. Druhý odhad a_2 předpokládáme ve tvaru

$a_2 = a_1 - x$

a hledáme přirozené číslo x (tj. opravu hrubého odhadu a_1, který je větší než požadovaná hodnota $\sqrt{A}$). Pro číslo x musí platit

$(a_1 - x)^2 \approx a_1^2 - 2a_1x = A.$

Z výše uvedené rovnice snadno vyjádříme x

$x = (a_1^2 - A)/2a_1$

a tudíž pro a_2 vyplývá, že

$a_2 = a_1 - x = a_1 - (a_1^2 - A)/2a_1 = \frac{1}{2} \cdot (A/a_1 + a_1).$

Počtář, který hledal druhou odmocninu čísla 2 podle výše uvedeného postupu, vypočítal nejprve hrubý odhad

$\sqrt{2} = \sqrt{(1 + 1)} \approx 1 + {}^{1}/_{2} = {}^{3}/_{2}.$

V šedesátinném zápisu obdržel výsledek (1; 30). Dobře věděl, že výsledek je nepřesný. Proto přistoupil k nalezení druhého odhadu. Vyšel od hodnoty a_1 = (1; 30), po jejím umocnění získal $(1; 30)^2$ = (2; 15) > (2), čímž jen ověřil, že se jedná o hrubou aproximaci. Tento výpočet provedl pomocí tabulek pro násobení, tj.

$(1 + {}^{30}/_{60}) \times (1 + {}^{30}/_{60}) = 1 + {}^{30}/_{60} + {}^{30}/_{60} + {}^{900}/_{3600} = 2 + {}^{15}/_{60}.$

S využitím tabulek reciprokých hodnot[12] nebo triviálního postupu pro nalezení reciproké hodnoty našel $1/a_1$, a pak vypočetl dvojnásobek nalezené hodnoty, neboť $A = 2$, tj. stanovil $2/a_1$.

[12] O tabulkách reciprokých hodnot viz Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 225–229.

Tedy

$^{1}/_{(1;\,30)} = {^{1}/_{1,5}} = {^{2}/_{3}} = {^{40}/_{60}} = (0;\,40)$

a odtud pak

$2 \times (0;\,40) = 2 \times {^{40}/_{60}} = {^{80}/_{60}} = {^{60}/_{60}} + {^{20}/_{60}} = (1;\,20).$

Nyní mohl pro kontrolu s využitím tabulek pro násobení vypočítat druhou mocninu obdrženého čísla (1; 20) a musel dostat číslo menší než 2. Tedy

$(1;\,20)^2 = (1 + {^{20}/_{60}}) \times (1 + {^{20}/^{60}}) = 1 + {^{20}/_{60}} + {^{20}/_{60}} + {^{400}/_{3600}} = 1 + {^{40}/_{60}} +$
$+ {^{6}/_{60}} + {^{40}/_{3600}} = (1;\,46,\,40) < 2$

Pak vzal průměr hodnot a_1 a $^{2}/a_1$ a získal lepší odhad hodnoty druhé odmocniny ze dvou, než poskytl hrubý odhad, neboť

$a_2 = ½ \cdot (a_1 + {^{2}/a_1}) = (1;\,25) \approx 1{,}4166.$

Jak však vidíme, výše získaná hodnota ještě neodpovídá hodnotě uvedené na tabulce YBC 7289. Shoduje se s naší aproximací odmocniny ze dvou jen na dvě desetinná místa. Starobabylónskou hodnotu (1; 25) můžeme nalézt na některých tabulkách z druhého tisíciletí před naším letopočtem; pro technické účely totiž plně postačovala.

Pokud chceme dosáhnout hodnoty uvedené na tabulce YBC 7289, bude nutné použít metodu průměru ještě jednou, a to pro startovní hodnotu $a_2 = (1;\,25) = {^{85}/_{60}}$. Tento postup se zdá naprosto logický, srozumitelný a snadný.

Pokud však výpočet skutečně zkusíme s využitím jen klasických starobabylónských postupů a pomůcek, zjistíme, že je to početně obtížný úkol. Na tabulce reciprokých hodnot přirozených čísel totiž nebyla a nemohla být uvedena reciproká hodnota k číslu (1; 25), protože toto číslo není v šedesátkové soustavě číslem regulárním a tudíž k němu neexistuje přesná reciproká hodnota. Problém je v tom, že čitatel zlomku $^{85}/_{60}$ nemá tvar $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, kde p, q, r jsou celá nezáporná čísla, neboť 85 = 17 · 5. Číslo 85 tudíž není regulárním číslem a neexistuje k němu proto reciproká hodnota.

Počtář mohl použít obtížný postup pro přibližný výpočet reciproké hodnoty, potřebovalo by to několik výpočetních kroků. Pravděpodobně by se touto zdlouhavou a náročnou cestou nevydal.

Mohl by též hledat reciprokou hodnotu k nejbližšímu vhodnému regulárnímu číslu, tj. k číslu (1; 21) = $^{81}/_{60}$. Tento postup by však nevedl k výraznému zlepšení odhadu druhé odmocniny ze dvou, neboť získaná hodnota by činila (1; 24, 56, 40) ≈ 1,4157. Shodovala by se s naší aproximací jen na dvě desetinná čísla a byla by jen o málo přesnější než druhá aproximace získaná metodou průměru. Proto by bylo lepší vzít jako nejbližší vhodné regulární číslo „tříciferné“ číslo (1; 25, 20), tj. $^{5120}/_{3600}$. Jeho aplikace při použití metody průměru by dala aproximaci druhé odmocniny ze dvou ve tvaru (1; 24, 51, 15) ≈ 1,414236, jejíž přesnost je však jen na čtyři desetinná místa. Pak by počtář mohl přejít k hledání nejbližšího vhodného regulárního čísla, které by bylo již číslem „čtyřciferným“. Tato cesta by byla sice náročná, ale nebyla by nemožná, neboť máme dochovanou tabulku AO 6456 s řadou reciprokých čísel z intervalu (1, 0, 0, 0, 0) až (3, 0, 0, 0, 0, 0).[13]

[13] O tabulce AO 6456 viz Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 228–229. Kromě základní tabulky reciprokých čísel menších než 82 existovaly i reciproké tabulky pro čísla druhého řádu, tj. čísla větší než 60, ale menší než 3600. Dochovalo se nám i několik zlomků neúplných tabulek reciprokých čísel třetího řádu.

Počtář mohl také použít tabulku přibližných reciprokých hodnot s aproximací reciproké hodnoty čísla 17. I takové tabulky se nám ze starobabylónského období dochovaly. Pak již stačilo vzít dvanáctinásobek reciproké hodnoty čísla 17, neboť $^{60}/_{85} = {}^{12}/_{17} = 12 \cdot {}^{1}/_{17}$.

Počtář by tak snadno získal přibližnou reciprokou hodnotu čísla (1; 25), tj. našel by na tabulce číslo (0; 42, 21, 10, 35). Vypočítal by jeho dvojnásobek, sečetl jej s číslem (1; 25) a ze součtu vypočítal polovinu. Po jistém úsilí by obdržel číslo (1; 24, 51, 10) neboli 1,414212 963... To je přesně číslo, které je na tabulce YBC 7289 napsáno na diagonále čtverce. Toto je patrně cesta, kterou se starobabylónský počtář vydal.

Další pěkný postup výpočtu druhé odmocniny ze dvou nabízí Bečvář 2012, 118–119. Je založen na postupném hledání jednotlivých šedesátinných míst a je velmi efektivní. Vychází z dolního hrubého odhadu a = (1; 20), který postupně upřesňuje, tj. zvětšuje. Většina teorií vychází z horního odhadu a = (1; 30), který postupně upřesňuje, tj. zmenšuje. Podstata výpočtu je stejná. Není možno stanovit, z jakého hrubého odhadu starobabylónští počtáři vycházeli, neboť se nám nedochovala žádná tabulka, na níž by se pracovalo pouze s hrubým odhadem. Jako pravděpodobnější se však jeví využití horního hrubého odhadu, neboť máme doloženo užití prvního odhadu ve tvaru (1; 25), nikoli ve tvaru (1; 24).

Bečvář využívá rovnice $(a + x)^2 = 2$. Zanedbáním x^2 vypočte x a získá první odhad a_1 = (1; 24). V dalším kroku využije rovnici $(a_1 + x)^2 = 2$, zanedbáním x^2 a zaokrouhlením výsledku (aby obešel dělení číslem 7) vypočte a_2 = (1; 24, 51). V závěrečném kroku využije rovnici $(a_2 + x)^2 = 2$, zanedbáním x^2 a zaokrouhlením výsledku (aby obešel komplikované dělení číslem 5091) vypočte a_3 = (1; 24, 51, 10). Tato jednoduchá metoda by umožnila výpočet druhé odmocniny ze dvou s libovolnou přesností, pokud by měl počtář dostatečnou trpělivost a dostatek času. Vystačil by totiž jen s násobením, sčítáním a odčítáním, správným odhadem velikosti výsledku a zaokrouhlováním. Je otázkou, do jaké míry tato metoda odpovídá myšlení starobabylónských počtářů.

Je nutno zdůraznit, že počtář v každém jednotlivém příkladu nejspíše odmocninu ze dvou nepočítal, ale využil standardizovanou tabulku odmocnin malých přirozených čísel nebo tabulku „technických koeficientů“, kterých se nám dochovalo několik, podobně jako tabulek pro násobení a tabulek reciprokých hodnot. Nevíme však, jak byly hodnoty „technických koeficientů“ stanoveny. Je pravděpodobné, že to bylo cestou postupného odhadu s využitím zaokrouhlování.

Poznamenejme, že máme dochovány starobabylónské tabulky, na nichž se pracuje s výše uvedenou vysokou přesností odhadu odmocnin malých přirozených čísel, ale také tabulky, kde se pracuje jen s první (obvykle snadno dostupnou) aproximací. Nemáme však dochované tabulky, kde by se pracovalo jen s hrubým odhadem.

Podle velikosti a tvaru tabulky, velikosti a formy zápisu a jednoduchosti obsahu se usuzuje, že tabulka **YBC 7289** byla názornou výukovou pomůckou a seznamovala adepty písařského umění se vztahem délek strany a úhlopříčky čtverce. Mohla však být i cvičnou prací písaře – studenta. Její přesnou funkci dnes již nelze určit.[14]

[14] O tabulce YBC 7289 viz Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 230–232, 328–329 a Neugebauer a Sachs 1945, 42–43.

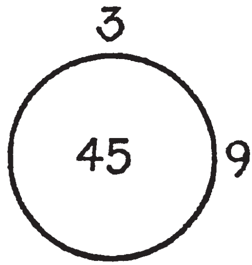
Kruh

Poslední útvar, na který se podíváme, bude kruh, tj. jednoduchý křivočarý útvar, který je zadán jediným údajem (poloměr, resp. průměr, resp. obvod, resp. obsah). Na starobabylónských tabulkách se dochovaly úlohy, v nichž se počítá obsah kruhu nebo objem válcové sýpky či objem věže nebo valu tvaru komolého kužele. Poznamenejme, že starobabylónští počtáři si byli dobře vědomi vztahu mezi obvodem a obsahem kruhu. Počítali však nejčastěji s velmi malou přesností, jejich odhad našeho čísla π byl značně nepřesný.

Zajímavá je z tohoto hlediska tabulka **YBC 7302**, která byla objevena ve druhé polovině třicátých let 20. století v lokalitě Susa (bývalé hlavní město Elamské říše, dnes Shush v Íránu). Tabulka dnes patří do *Yale Babylonian Collection Yale University New Haven*. V padesátých letech 20. století ji prozkoumal, interpretoval a své výsledky publikoval Evert Marie Bruins.[15] Jedná se o kruhovou tabulku, která je popsána pouze z jedné strany, její průměr je asi 8 centimetrů. Je na ní náčrt kružnice, nad ní je číslo (3), uvnitř číslo (45) a vpravo od ní číslo (9). Na tabulce není žádný text.[16]

[15] Evert Marie Bruins (1909–1990) byl holandský aplikovaný matematik, experimentální fyzik a historik matematiky a fyziky. V padesátých letech 20. století dlouhodobě působil na univerzitě v Bagdádu, kde budoval matematický ústav a intenzívně se zajímal o matematické klínopisné texty. V roce 1969 se stal profesorem historie matematiky na univerzitě v Amsterdamu. Zabýval se egyptskou, mezopotamskou a řeckou matematikou. O jeho životě a díle viz např. Knobloch a Hogendijk 1992.

[16] Obrázky jsou převzaty z Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 325, jsou volně dostupné na řadě webových stránek.



Pravděpodobná interpretace jednotlivých čísel je tato: číslo (3) je obvod kruhu, číslo uvnitř je obsah, je však nutno jej chápat jako (0; 45), číslo (9) je druhá mocnina obvodu kruhu a je to číslo pomocné.

Jak dnes postupujeme při výpočtu obsahu kruhu o poloměru r? Pro výpočet obsahu S kruhu, resp. jeho obvodu o užíváme vzorce

$S = \pi \cdot r^2$ a $o = 2\,\pi \cdot r$.

Ze znalosti obvodu o můžeme vypočítat poloměr r, tj. $r = {}^{o}/_{2\pi}$, dosadíme-li za r do vzorce pro výpočet obsahu S kruhu, získáme vzorec

$S = {}^{1}/_{4\pi} \cdot o^2$.

Je-li obvod 3, je druhá mocnina obvodu 9, tudíž obsah S kruhu je

$S = {}^{9}/_{4\pi} \approx 0{,}7162$.

Podíváme-li se znovu na tabulku YBC 7302, vidíme jinou hodnotu obsahu kruhu, a to (0; 45), neboli 0,75. Jak k této hodnotě starobabylónský počtář dospěl? Jaký algoritmus k výpočtu obsahu kruhu používal?

„Standardizovaný“ postup výpočtu obsahu S kruhu ze znalosti délky jeho obvodu o lze v naší matematické symbolice zapsat vzorcem

$$S = {}^{1}/_{12} \cdot o^2 = {}^{5}/_{60} \cdot o^2.$$

Další dochované tabulky tuto interpretaci potvrzují. Ve starobabylónském zápisu by vzorec (kdyby nějaký zapisovali) vypadal takto:

$$S = 5 \cdot o^2.$$

Lze jej snadno vyjádřit těmito slovy: vynásob druhou mocninu obvodu kruhu pěti (tj. pěti šedesátinami). Zdůrazněme, že v exaktní podobě by vzorec zněl

$$S = (0; 5) \cdot o^2,$$

víme však, že se nula na počátku čísla nezapisovala, tj. počtář musel řád čísel pochopit z kontextu.

Na uvedené tabulce YBC 7302 je tedy obsah S stanoven takto: $S = 9 \times (0; 5) = (0; 45) = 0{,}75$. Chyba starobabylónského výpočtu obsahu kruhu je skoro 5 %, což je nezvykle vysoká hodnota. Vysvětlení chyby je však jednoduché – starobabylónští počtáři a písaři obyčejně pracovali s hodnotou $\pi = 3$, což pro praktické účely (výpočet objemu sýpky, odhad objemu zdiva) plně postačovalo.[17]

[17] Obdobný příklad je uveden na starobabylónské tabulce YBC 11120, kde je zakreslen kruh s obvodem (1; 30) a obsahem (0; 11, 15).

Máme však i tabulku ze starobabylónského období, která byla objevena roku 1936 v lokalitě Susa, na níž je použita aproximace $\pi = 3\,{}^{1}/_{8} = 3{,}125$, která je přesnější.[18] Nedosahuje však takové přesnosti odhadu konstanty π, jakou měli počtáři ve starém Řecku.

Poznamenejme, že obvod kružnice byl ve starobabylónských matematických textech patrně počítán pomocí algoritmu, který lze v naší matematické symbolice vyjádřit vzorcem

$o = \pi \cdot d$,

kde d je průměr kružnice a π bylo v naprosté většině případů rovno 3. Bez zajímavosti není, že kruh byl obvykle zadáván délkou svého obvodu, z něhož se v případě potřeby počítal průměr nebo poloměr.

Tabulka **YBC 7302** vzhledem ke své velikosti a tvaru, velikosti a formě zápisu a jednoduchosti obsahu byla nejspíše výukovou pomůckou a seznamovala budoucí uchazeče o písařské povolání se vztahem obvodu a obsahu kruhu. Vzhledem k úrovni provedení však mohla být i cvičnou prací písaře – studenta. Její přesnou roli již dnes není možno stanovit.[19]

---

[18] Více viz Bruins a Rutten 1961.

[19] O tabulce YBC 7302 viz Bečvář, Bečvářová a Vymazalová 2003, 325–326 a Bruins a Rutten 1961.

Literatura

Bečvář, Jindřich. 2012. „Výpočty odmocnin ve starověku.“ In *Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla*, vyd. Zdeněk Halas, 111–123. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 54. Praha: Matfyzpress.

Bečvář, Jindřich, Martina Bečvářová a Hana Vymazalová. 2003. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*. Edice Dějiny matematiky, svazek č. 23. Praha: Prometheus.

Bruins, Evert Marie a Marguerite Rutten. 1961. *Textes mathématiques de Suse*. Mémoires de la mission archéologique en Iran, svazek č. 34. Paris: Librairie Orientaliste Paul Geuthner.

Fowler, David a Eleonor Robson. 1998. „Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics YBC 7289 in Context.“ *Historia Mathematica* 25: 366–378.

Knobloch, Eberhard a Jan Pieter Hogendijk. 1992. „Evert Marie Bruins (1909–1990).” *Archives international d'histoire des sciences* 42: 317–319.

Neugebauer, Otto a Abraham J. Sachs. 1945. *Mathematical Cuneiform Texts*. American Oriental Series, svazek č. 29. New Haven (Connecticut): American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research (reprint: Wiesbaden: Harrassowitz, 1986).

Toomer, Gerold James. 1984. „Obituary for A.J. Sachs (1914–1983).“ *Journal for the History of Astronomy* 15: 146–149.

Veselý, Jiří. 2020. „Otto Eduard Neugebauer (1899–1990).“ *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 65: 19–35.