

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MATEMATIKY

Diplomová práce

Kvalitativní analýza nelineárních rovnic typu
reakce-difuze

Plzeň, 2018

Bc. Martin KAISLER

cistylist

listzadani1

listzadani2

listzadani3

listzadani4

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně, výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 17. května 2018

.....

Martin KAISLER

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval mému školiteli, doc. Ing. Petru GIRGOVI, Ph.D., za zajímavý návrh tématu a jeho ochotný přístup. Poděkování patří také mému nejbližšímu okolí za podporu.

Abstrakt

Předkládaná práce je zaměřena na kvalitativní analýzu řešení systému semilineárních parabolických rovnic typu

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \lambda f_1(u_2) & \text{v } \Omega_T, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = \lambda f_2(u_1) & \text{v } \Omega_T, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u_1(x, 0) = u_1^0 & \text{v } \Omega, \\ u_2(x, 0) = u_2^0 & \text{v } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

kde $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$ a Ω je omezená oblast v prostoru \mathbb{R}^n s dostatečně hladkou hranicí, f_1 , f_2 jsou superlineární reakční členy, λ je reálný parametr a u_1^0, u_2^0 jsou počáteční podmínky. Hlavním cílem práce je studovat lokální řešitelnost uvedené úlohy, zejména s ohledem na tzv. výbuch řešení v konečném čase. K tomuto účelu využíváme metodu horních a dolních řešení. Hlavní přínos práce je uveden v Kapitole 4, kde je odvozena postačující podmínka, při které studovaný jev nastane.

Klíčová slova: semilineární difuzní rovnice, výbuch v konečném čase, samovznícení, dolní řešení, horní řešení

Abstract

The thesis is devoted to the qualitative analysis of a semilinear system of heat equations

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \lambda f_1(u_2) & \text{v } \Omega_T, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = \lambda f_2(u_1) & \text{v } \Omega_T, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u_1(x, 0) = u_1^0 & \text{v } \Omega, \\ u_2(x, 0) = u_2^0 & \text{v } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

where $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$ and Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^n with sufficiently smooth boundary, f_1 , f_2 are super-linear reaction terms, λ is real parameter and u_1^0, u_2^0 are initial conditions. Mainly, we study the local solvability in classical sense of given problem, especially the so-called blow-up in finite time. The theory of lower and upper solutions is used for this purpose. The main contribution to the topic is included in Chapter 4, where a sufficient condition for such type of behaviour is derived.

Keywords: semilinear heat equation, finite time blow-up, self-ignition, lower solution, upper solution

1	Úvod	9
2	Teoretické poznatky	11
2.1	Prostory funkcí	11
2.2	Zhlazování lokálně integrovatelných funkcí	14
2.3	Eliptické PDR	15
2.4	Parabolické PDR	17
3	Skalární úloha	19
3.1	Výbuch řešení v konečném čase	19
3.2	Stacionární úloha	21
3.3	Metoda horních a dolních řešení	24
3.3.1	Diskuze o jednoznačnosti	25
3.3.2	Konstrukce dolního řešení	26
3.3.3	Konstrukce horního řešení	28
4	Systém dvou rovnic	31
4.1	Stacionární úloha	31
4.2	Metoda horních a dolních řešení	34
4.2.1	Globální omezená řešení	38
4.2.2	Výbuch řešení v konečném čase	38
A	Ilustrační příklad – Kaplanova metoda	47
B	Ilustrační příklad – skladovací prostor	51

Značení množin

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}	množina reálných čísel
\mathbb{R}^n	n -dimenzionální prostor reálných čísel
\mathbb{R}_+^n	množina $x \in \mathbb{R}^n$ takových, že $x_n > 0$
Ω	otevřená omezená oblast prostoru \mathbb{R}^n
$\partial\Omega$	hranice oblasti Ω
$\bar{\Omega}$	uzávěr oblasti Ω
Ω_T	časoprostorový válec $\Omega \times (0, T)$
$\partial\Omega_T$	hranice časoprostorového válce $\partial\Omega \times (0, T)$
$\partial_p\Omega_T$	parabolická hranice časoprostorového válce $\{\partial\Omega \times (0, T)\} \cup \{\Omega \times \{0\}\}$
$B(x_0, R)$	koule se středem v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a poloměrem $R > 0$
$\ x\ $	norma vektoru $x \in \mathbb{R}^n$
$\text{dist}(x, \partial\Omega)$	vzdálenost bodu x od hranice $\partial\Omega$ ve smyslu normy $\ \cdot\ $

Značení prostorů funkcí

$C(\Omega)$	prostor spojitých funkcí na Ω
$C(\bar{\Omega})$	prostor spojitých funkcí na $\bar{\Omega}$
$C_0(\Omega)$	prostor spojitých funkcí s kompaktním nosičem na Ω
$C^k(\Omega)$	prostor spojitě diferencovatelných funkcí na Ω až do řádu k ; $k \in \mathbb{N}$
$C^k(\bar{\Omega})$	prostor spojitě diferencovatelných funkcí na $\bar{\Omega}$ až do řádu k ; $k \in \mathbb{N}$
$C_0^\infty(\Omega)$	prostor nekonečně-krát diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem na Ω
$C^\gamma(\bar{\Omega})$	prostor γ -hölderovsky spojitých funkcí na $\bar{\Omega}$; $\gamma \in (0, 1]$
$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$	prostor diferencovatelných funkcí na $\bar{\Omega}$ s γ -hölderovsky spojitou derivací až do řádu k ; $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1]$
$L^p(\Omega)$	prostor Lebesgueovsky integrovatelných funkcí s p -tou mocninou; $p \in [1, +\infty)$
$L^\infty(\Omega)$	prostor podstatně omezených funkcí
$W^{k,p}(\Omega)$	prostor Lebesgueovsky integrovatelných funkcí s p -tou mocninou takových, že slabé derivace až do řádu k jsou Lebesgueovsky integrovatelné s p -tou mocninou; $p \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$
$X \hookrightarrow Y$	spojité vnoření prostoru X do prostoru Y

Další značení

λ_1	první vlastní číslo Laplaceova operátoru na Ω s Dirichletovou okrajovou podmínkou
$\varphi_1(x)$	první vlastní funkce Laplaceova operátoru na Ω s Dirichletovou okrajovou podmínkou
\mathbf{n}	normálový vektor k hranici oblasti Ω

Značení kinetických a fyzikálních parametrů uhlí

(pouze pro Předmluvu a Přílohu B)

ρ	hustota
c	měrná tepelná kapacita
k	tepelná vodivost
C	koncentrace reaktantu
Q_0	reakční teplo
A	pre-exponenciální faktor
R	molární plynová konstanta

Počátečně okrajové úlohy typu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda f(u) & \text{v } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{na } \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

představují zjednodušené modely mnoha reálných problémů, které zahrnují reakci a difuzi. Zde f je kladná spojitá funkce reálné proměnné a λ je reálný parametr.

Úloha (3) nachází četné aplikace v tzv. *matematické teorii spalování*. Tato teorie studuje exotermické reakce, při nichž dochází k uvolňování (zpravidla velkého) množství tepla důsledkem reakce mezi palivem a kyslíkem. V případě organických materiálů probíhají tyto oxidační reakce i při nízkých teplotách, ovšem v nízké intenzitě (viz [15], [41], [5], [18]). Tím dochází k produkci tepla a k ohřevu materiálu. Nárůst teploty pak urychluje reakce, jež vedou k dalšímu zvýšení teploty. Tím vzniká tzv. *pozitivní zpětná vazba* (viz obr. 2). Na vzrůst teploty má mimo jiné vliv poměr objemu a povrchu oblasti, kterou vyplňuje organický materiál. Teplo se totiž tvoří uvnitř oblasti, kterou materiál vyplňuje, zatímco je odváděno z povrchu. Pokud jeho odvádění do okolí neprobíhá dostatečně rychle, je překročena zápalná teplota a dochází k samovznícení organického materiálu. Těmito úlohami se zabývá tzv. *teorie samovznícení*.

Z hlediska praktických úloh je obrovským problémem požární bezpečnost, zejména při těžbě, skladování a případném převozu uhlí námořními loděmi. Známe mnoho situací, které tento fakt potvrzují. Uveďme například explozi v čínském dole Benxiu (viz [10]), která byla způsobena vznícením uhelného prachu a směsi s vysokým obsahem metanu se vzduchem. Zmíněná exploze je dodnes považována za jednu z největších katastrof v důlním průmyslu. Ve státě Colorado bylo zjištěno (viz [35]), že došlo k požáru uhelného dolu v důsledku změn v hladině podzemních vod. Vlhkost uhlí totiž při nízkých teplotách zvyšuje jeho reaktivitu, čímž dochází k nezanedbatelnému nárůstu teploty materiálu. Při větších koncentracích vody dochází k znehodnocení uhlí. Velkým problémem je tedy také hašení a samovznícení je nutné zabránit. Další problémy mohou nastat při převozu uhlí loděmi. Je zřejmé, že přepravci jsou nuceni řešit nejrůznější optimalizační úlohy. V dnešní době je objem uhlí v nákladovém prostoru rozdělen různými přepážkami tak, aby se zmenšil podíl objemu vůči povrchu. To vše je nutné samozřejmě provádět tak, aby náklady vynaložené na přepravu byly co možná nejnižší.

Bohužel, problematika samovznícení se netýká jen uhlí a směsí v chemických reaktorech. Je znám případ [28] z roku 2003, kdy v japonské prefektuře Kanagawa došlo k požáru v nákupním centru. Při tomto incidentu bylo zraněno několik lidí. Následné vyšetřování ukázalo, že příčinou tohoto požáru bylo samovznícení organického odpadu z kuchyně. Tato teorie je tedy s ohledem na praktické aplikace velmi důležitá.

Je známo, že termodynamickou teplotu Θ v místě x a čase t v materiálu, který vyplňuje oblast Ω , je možné modelovat pomocí difuzní rovnice

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} - k \Delta \Theta = Q & \text{v } \Omega_T, \\ \Theta = \Theta_a & \text{na } \partial \Omega_T, \\ \Theta(x, 0) = \Theta_0(x) & \text{na } \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

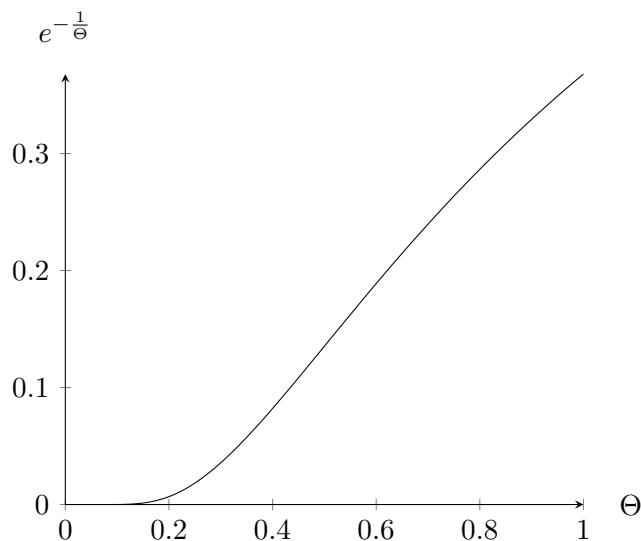
kde $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, ρ je hustota, c měrná tepelná kapacita, k tepelná vodivost a Q zdrojový člen. Okrajová podmínka Θ_a reprezentuje teplotu okolí a počáteční podmínka Θ_0 odpovídá počáteční teplotě materiálu. Člen Q reprezentuje množství tepla, které se vyprodukuje za jednotku času v jednotce objemu. Bude mít tedy tvar

$$Q = C Q_0 K, \quad (5)$$

kde C je koncentrace reaktantu (uvažujeme konstantní), člen Q_0 je nezáporné reakční teplo a K je rychlost reakce. Z chemie je znám tzv. *Arrheniův zákon*, který stanovuje, že $K = K(\Theta)$ a platí

$$K(\Theta) = A e^{-\frac{E}{R\Theta}}, \quad (6)$$

kde A je pre-exponenciální faktor, E je aktivační energie, R je molární plynová konstanta a teplota Θ je měřená v Kelvinech.

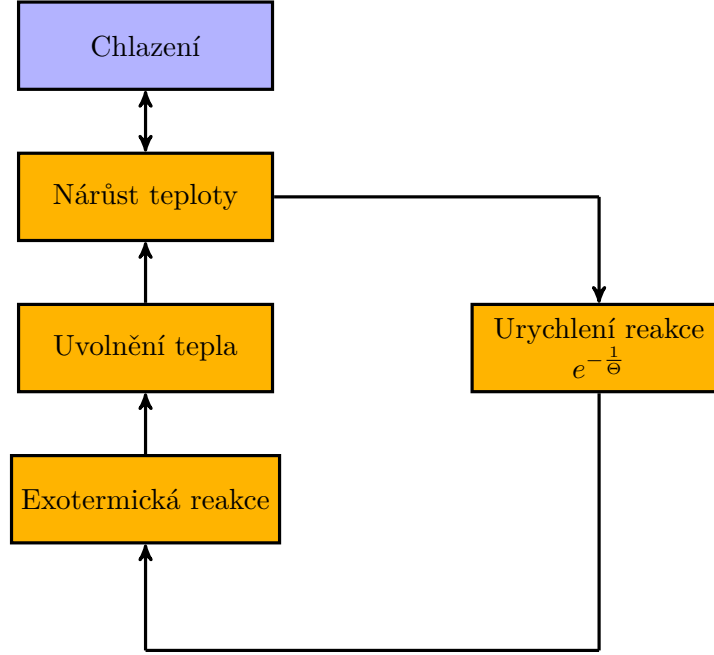


Obrázek 1: Arrheniův zákon

Celkově tedy dostaneme

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} - k \Delta \Theta = C Q_0 A e^{-\frac{E}{R\Theta}} & \text{v } \Omega_T, \\ \Theta = \Theta_a & \text{na } \partial \Omega_T, \\ \Theta(x, 0) = \Theta_0(x) & \text{na } \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

Pokud označíme charakteristickou délku d a zavedeme nové proměnné



Obrázek 2: Diagram pozitivní zpětné vazby.

$$\xi = \frac{x}{d}, \quad (8)$$

$$\tau = \frac{kt}{d^2 \rho c}, \quad (9)$$

dostaneme po dosazení (a zpětném přeznačení ξ na x a τ na t)

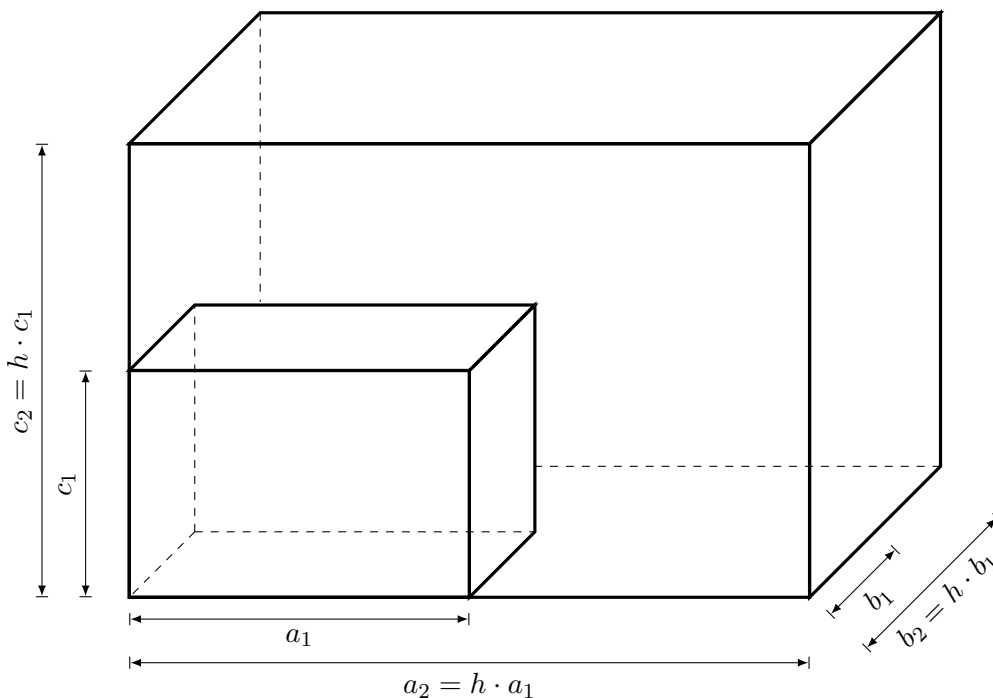
$$\begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \Delta \Theta = \frac{d^2}{k} C Q_0 A e^{-\frac{E}{R\Theta}} & \text{v } \Omega_T, \\ \Theta = \Theta_a & \text{na } \partial \Omega_T, \\ \Theta(x, 0) = \Theta_0(x) & \text{na } \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Uvažujme pro ilustraci například nákladový prostor ve zmíněných námořních lodích, které slouží pro přepravu uhlí. Tento prostor lze modelovat ve tvaru kvádrů, viz obrázek 3. Charakteristickou délku d oblasti Ω je možno zvolit různými způsoby, jednou z možností je například volba $d = h$.

Matematická teorie spalování byla studována již od dvacátých let minulého století. První modely byly vyvinuty a studovány nositelem Nobelovy ceny za chemii N. N. SEMJONOVEM [34], který se zabýval zejména teorií dokonale míchaných reaktorů. Vzhledem k dokonalému míchání je teplota směsi v reaktoru homogenní v prostoru a jedinou možností, jak může dojít k samovznícení je to, že objem směsi překročí nějakou kritickou hodnotu. S ohledem na (3) dostaneme rovnici dokonale míchaného reaktoru ve tvaru obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = \lambda f(\Theta), & t > 0, \\ \Theta(0) = b \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

S myšlenkou studovat problém samovznícení v případě, kdy ochlazování materiálu je způsobeno pouze tzv. *molekulárním vedením tepla* v nehybném prostředí



Obrázek 3: Geometrická podobnost nákladových prostorů s koeficientem podobnosti $h = 2$.

podle Fourierova zákona, přišel poprvé D. A. FRANK-KAMENĚCKIJ [15] ve 30. letech minulého století. Tím významně zobecnil teorii vybudovanou jeho školitelem N. N. SEMJONOVEM. Vzhledem k tomu, že k významnému rozvoji funkcionální analýzy došlo až později, byly k jejímu studiu používány zejména metody matematické analýzy. Z tohoto důvodu bylo nutné uvažovat mnohá zjednodušení, např. speciální geometrii oblasti – nekonečný polopás, koule, válec apod. Na těchto oblastech bylo možné využít různých symetrií, v důsledku čehož se původní parciální diferenciální rovnice redukovala na rovnici obyčejnou, což bylo výhodné zejména pro studium příslušné stacionární úlohy.

Další možností, jak usnadnit řešení zmíněné úlohy, bylo zjednodušení pravé strany, protože práce s funkcí typu $\exp(-1/\Theta)$ je z analytického hlediska poněkud těžkopádná. Uvažujme nejprve substituci $u = \Theta - \Theta_a$, kterou převedeme úlohu (10) do tvaru

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \frac{d^2}{k} C Q_0 A e^{-\frac{E}{R(u+\Theta_a)}} & \text{v } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{na } \Omega. \end{cases} \quad (12)$$

FRANK-KAMENĚCKIJ ([15],[18]) následně navrhl následující aproximaci. Z Taylorova rozvoje na okolí počáteční teploty u_0 dostaneme

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{E}{R(u+\Theta_a)}\right) &\approx \exp\left(-\frac{E}{R(u_0+\Theta_a)} + \frac{E}{R(u_0+\Theta_a)^2}(u-u_0)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{E}{R\Theta_0}\right) \exp\left(-\frac{Eu_0}{R\Theta_0^2}\right) \exp\left(\frac{Eu}{R\Theta_0^2}\right). \end{aligned}$$

Po dosazení do (12) budeme řešit úlohu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda e^{ru} & \text{v } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{na } \Omega, \end{cases} \quad (13)$$

kde

$$\lambda = \frac{d^2}{k} C Q_0 A \exp\left(-\frac{E}{R\Theta_0}\right) \exp\left(-\frac{Eu_0}{R\Theta_0^2}\right), \quad (14)$$

$$r = \frac{E}{R(\Theta_0)^2}. \quad (15)$$

Právě odvozený vztah dobře aproximuje původní Arrheniův zákon pro hodnoty $u \ll E/(2R) - \Theta_a$; jde o inflexní bod funkce $s \mapsto \exp(-E/(R(s + \Theta_a)))$. Pro mnoho problémů v teorii spalování je ovšem hodnota konstanty E/R řádově $10^3 - 10^4$ K. Je tedy zřejmé, že k případnému vznícení dojde při mnohem nižších teplotách, proto není nutné nepřesnost aproximace pro $u \geq E/(2R) - \Theta_a$ zohledňovat. Také to je jeden z důvodů, proč se s touto aproximací pracuje i v dnešní době.

V současnosti nenachází modely typu (3) uplatnění pouze v matematické teorii spalování. Odkážme například na problematiku mikrovlnného ohřevu dle [20], kde se objevují i obecnější nelinearity, než je exponenciální funkce. I v případě mikrovlnného ohřevu se setkáváme s pozitivní zpětnou vazbou, neboť čím vyšší je teplota ohřívaného materiálu, tím více tepelné energie dokáže materiál absorbovat. Vznikají pak přehřátá místa (angl. hot spots), kde dochází k poškození materiálu. Z těchto důvodů je vhodné a nutné se modely (3) zabývat co nejobecněji a nejpodrobněji.

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \lambda f_1(u_2) & \text{v } \Omega_T, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = \lambda f_2(u_1) & \text{v } \Omega_T, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u_1(x, 0) = u_1^0 & \text{v } \Omega, \\ u_2(x, 0) = u_2^0 & \text{v } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

kde $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}^2$, $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast, pro $T > 0$ značíme $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$, $\partial\Omega_T := \partial\Omega \times (0, T)$, x je prostorová souřadnice, t je časová souřadnice, $\frac{\partial}{\partial t}$ je parciální derivace podle proměnné t , Δ je prostorový Laplaceův operátor $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jsou zdrojové členy a $u_1^0, u_2^0 \geq 0$ jsou počáteční podmínky. Parabolickou hranici časoprostorového válce Ω_T budeme značit $\partial_p\Omega_T$ a definovat $\partial_p\Omega_T := \{\partial\Omega \times (0, T)\} \cup \{\Omega \times \{0\}\}$. Z matematického hlediska je fenomén samovznícení chápán jako tzv. *výbuch řešení v konečném čase*. Tento pojem bude precizně uveden v Definicí 3.1.

Celá práce je tedy motivována jednak reálnými aplikacemi, ale také článkem [9], ve kterém je studována existence stacionárních řešení systému (1.1). Autoři v tomto článku ukazují, že pro některé hodnoty λ neexistují žádná stacionární řešení, což s ohledem na parabolickou úlohu (1.1) okamžitě přináší mnohé otázky ohledně existence globálního omezeného řešení.

Nyní shrneme obsah celého textu. V následující kapitole uvedeme základní informace ohledně funkčních prostorů, teorie zhlazování funkcí a lineárních eliptických a parabolických parciálních diferenciálních rovnic. Většina těchto výsledků je všeobecně známá, zařazujeme je však proto, že jsou důležité k pochopení dalších částí práce a nebylo by bez nich možné pokračovat.

Ve třetí kapitole shrneme známé výsledky z teorie semilineárních parabolických a eliptických rovnic. Budeme se věnovat skalární úloze a za určitých předpokladů na nelineární pravou stranu ukážeme, jak kvalitativní chování těchto úloh souvisí s příslušnými stacionárními úlohami. K tomuto účelu nám poslouží

zejména tzv. *metoda horních a dolních řešení*, ale také koncept *velmi slabého řešení*. Vše bude pečlivě definováno v této kapitole.

Čtvrtá kapitola bude věnována aplikování vybudované teorie na systém (1.1). Zde navážeme na existenční výsledky pro eliptické úlohy z [9] a ukážeme, že pro určité hodnoty λ , za dalších předpokladů na funkce f_1, f_2 , vybuchují řešení (1.1) v konečném čase. Zároveň najdeme horní a dolní odhady času výbuchu.

Příloha A bude věnována ilustračnímu příkladu, na kterém budeme demonstrovat vyloženou problematiku. Uvedeme zde jednak analytickou metodu, která je použitelná pro určitou třídu nelinearit, ale také některé numerické ilustrace.

V příloze B pak využijeme kinetické parametry uhlí k výpočtu kritického objemu (ve smyslu, který bude specifikován dále) skladovacího prostoru.

2.1 Prostory funkcí

V této sekci připomeneme některé prostory funkcí a jejich základní vlastnosti. Čerpat budeme zejména z [19], [39].

Definice 2.1 ([11], Definition 3.2.22, str. 136)

Nechť Ω je otevřená množina v \mathbb{R}^n . Řekneme, že funkce $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje *Carathéodoryho podmínku*, pokud

1. $\forall y \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto f(x, y)$ Lebesgueovsky měřitelná na Ω
2. pro skoro všechna $x \in \Omega$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ spojitá na \mathbb{R}

Koncept tzv. kvazimonotonie je důležitý zejména při práci se systémy parabolických rovnic. Ukazuje se totiž, že některé teoretické výsledky nelze bez tohoto předpokladu pro systémy rovnic zobecnit i přes to, že pro skalární úlohy platné jsou.

Definice 2.2 ([5], Definition 4.1, str. 90)

Řekneme, že funkce $f(s) = (f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s))$, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ je kvazimonotónně neklesající, pokud f_i je neklesající v s_j , pro $i \neq j$. Podobně definujeme také kvazimonotónně nerostoucí (klesající, rostoucí) funkce.

Označme tzv. *multiindex* $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ a jeho délku $|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$.

Dále pro u definované na Ω označme

$$\begin{aligned} D^\alpha u &:= \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \\ D_t u &:= \frac{\partial u}{\partial t}, \\ D_t^\alpha u &:= D^\alpha (D_t u) = D_t (D^\alpha u). \end{aligned}$$

Pro $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ definujme tzv. *nosič* funkce u jako

$$\text{supp } u(x) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}. \quad (2.1)$$

Pro $k \in \mathbb{N}_0$ značíme $C^k(\overline{\Omega})$ ($C^k(\Omega)$) prostor spojitě diferencovatelných funkcí u až do řádu k na $\overline{\Omega}$ (Ω). Normu na prvním jmenovaném prostoru budeme značit

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u| \quad (2.2)$$

a vzhledem k této normě jde o Banachův prostor. Dále $C_0^k(\Omega)$ značí prostor spojitě diferencovatelných funkcí až do řádu k na Ω , které mají kompaktní nosič v Ω . Prostor $C_0^\infty(\Omega)$ definujeme jako průnik těchto prostorů, tj. $C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_k C_0^k(\Omega)$.

V případě $k = 0$ budeme vždy horní index vynechávat. Také prostor funkcí $C^\infty(\Omega)$ ($C^\infty(\overline{\Omega})$), které mají derivace všech řádů v Ω ($\overline{\Omega}$) definujeme jako průnik $C^k(\Omega)$ ($C^k(\overline{\Omega})$) přes všechna přípustná k .

Řekneme, že funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je γ -hölderovsky spojitá ($\gamma \in (0, 1]$), pokud existuje konstanta c tak, že

$$|u(x) - u(y)| \leq c \|x - y\|^\gamma \quad \text{pro všechna } x, y \in \Omega.$$

Výraz $\|\cdot\|$ značí klasickou normu v prostoru \mathbb{R}^n . Poznamenejme, že pokud $\gamma = 1$, pak jde o Lipschitzovsky spojitě funkce.

Označme tzv. *seminormu*

$$[u]_\gamma := \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\gamma} \quad (2.3)$$

a prostor $C^\gamma(\overline{\Omega}) := \{u : [u]_\gamma < +\infty\}$. Norma na tomto prostoru je potom dána jako

$$|u|_\gamma := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_\gamma.$$

Nyní můžeme definovat prostor diferencovatelných funkcí až do řádu k , které jsou γ -hölderovsky spojitě v $\overline{\Omega}$. Značíme $C^{k, \gamma}(\overline{\Omega})$. Zavedeme-li normu vztahem

$$\|u\|_{C^{k, \gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha(u(x) - u(y))|}{\|x - y\|^\gamma}, \quad (2.4)$$

jedná se opět o Banachovy prostory pro každé k .

Při práci s klasickými řešeními parabolických rovnic jsou důležité tzv. *parabolické Hölderovy prostory*. Pro body $P(x, t), Q(y, s) \in \Omega_T$ definujeme funkci $d : \Omega_T \times \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem

$$d(P, Q) = \sqrt{\|x - y\|^2 + |t - s|}.$$

Funkci d se v některé literatuře říká parabolická vzdálenost. Pro $u : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ označíme

$$[u]_{\gamma, \gamma/2} = \sup_{\substack{P, Q \in \Omega_T \\ P \neq Q}} \frac{|u(P) - u(Q)|}{d^\gamma(P, Q)}, \quad (2.5)$$

což je seminorma. $C^{\gamma, \gamma/2}(\overline{\Omega}_T)$ bude označovat prostor všech funkcí u , pro která je seminorma $[u]_{\gamma, \gamma/2}$ konečná. Normu na tomto prostoru lze zavést vztahem

$$|u|_{\gamma, \gamma/2} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{\gamma, \gamma/2}. \quad (2.6)$$

Opět pro $k \in \mathbb{N}_0$ označme

$$C^{2k+\gamma, k+\gamma/2}(\bar{\Omega}_T) := \{u : D^n D_t^r u \in C^{\gamma, \gamma/2}(\bar{\Omega}_T), \forall n, r : |n| + 2r \leq 2k\},$$

seminormy

$$[u]_{2k+\gamma, k+\gamma/2} := \sum_{|n|+r=2k} [D^n D_t^r u]_{\gamma, \gamma/2},$$

$$[u]_{2k, k} := \sum_{|n|+r=2k} [D^n D_t^r u]_0$$

a normy

$$|u|_{2k+\gamma, k+\gamma/2} := \sum_{|n|+r \leq 2k} |D^n D_t^r u|_{\gamma, \gamma/2},$$

$$|u|_{2k, k/2} := \sum_{|n|+r \leq 2k} |D^n D_t^r u|_0.$$

I tyto prostory jsou Banachovy vzhledem k takto definovaným normám.

Pro další účely je také nutné definovat oblasti třídy $C^{k, \nu}$. Bez dostatečné regularity oblasti totiž není možné některá tvrzení odvodit.

Definice 2.3 ([19], str. 94)

Řekneme, že omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (včetně její hranice $\partial\Omega$) je třídy $C^{k, \nu}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\nu \in [0, 1]$, pokud v každém bodě $x_0 \in \partial\Omega$ existuje koule $B(x_0, R)$, $R > 0$ a bijektivní zobrazení $\psi : B \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ takové, že

1. $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^n$,
2. $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$,
3. $\psi \in C^{k, \nu}(B)$, $\psi_{-1} \in C^{k, \nu}(D)$

Při řešení okrajových úloh je mnohdy třeba pracovat i s jinými typy řešení. Proto je třeba definovat Lebesgueovy a Sobolevovy prostory.

Definice 2.4 ([11], str. 33)

Definujme množinu funkcí integrovatelných s p -tou ($p \in [1, \infty)$) mocninou

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ je měřitelná a } \int_{\Omega} |u|^p dx < +\infty\}. \quad (2.7)$$

Pokud $p = \infty$, pak $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ značí množinu podstatně omezených funkcí na Ω , tedy omezených až na množinu nulové míry.

Problém předchozí definice je, že nedokážeme rozlišovat funkce, které se liší pouze na množině nulové míry. Označme

$$N(\Omega) := \{u : u = 0 \text{ skoro všude v } \Omega\}.$$

Definice 2.5 ([11], str. 33)

Pro $p \in [1, \infty]$ definujeme Lebesgueův prostor $L^p(\Omega)$ jako faktor prostor

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)|_N.$$

Pokud zavedeme normy na prostorech $L^p(\Omega)$ jako

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_p &= \left(\int_{\Omega} |\cdot|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} && \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \|\cdot\|_{\infty} &= \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |\cdot| && \text{pro } p = \infty,\end{aligned}$$

kde $\operatorname{ess\,sup} u := \inf\{C \geq 0 : \mu(\{x : |u(x)| > C\}) = 0\}$ je tzv. *podstatné supremum*, pak $L^p(\Omega)$ jsou Banachovy prostory. Klasická derivace může být v některých případech přehnaně silný požadavek, dále proto zavádíme tzv. *slabou derivaci*.

Poznámka 2.6

Funkcí $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ je v další definici myšlena taková funkce u , která je integrovatelná na každé kompaktní podmnožině $K \subset \Omega$.

Definice 2.7 ([11], str. 38)

Slabou α -derivací funkce $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ nazveme funkci $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, pokud platí

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega). \quad (2.8)$$

Nyní, když máme k dispozici slabé derivace, můžeme definovat Sobolevovy prostory $W^{k,p}(\Omega)$ jako

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha} u \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}$$

Standardní normou v Sobolevových prostorech je

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_p \quad (2.9)$$

a vzhledem k úplnosti $L^p(\Omega)$ jsou také Sobolevovy prostory úplné.

Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ definujeme jako zúplnění prostoru $C_0^k(\Omega)$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Dále uvedeme potřebnou větu o spojitém vnoření.

Věta 2.8 ([1], Theorem 4.12, str. 85)

Nechť Ω je třídy $C^{0,1}$ (tj. Ω má Lipschitzovsky spojitou hranici). Pro $k, m \in \mathbb{N}$ takové, že $mp > n > (m-1)p$ platí následující spojitě vnoření:

$$W^{k+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) \quad \text{pro } 0 < \gamma < m - \frac{n}{p}.$$

2.2 Zhlazování lokálně integrovatelných funkcí

Tuto sekci zařazujeme z toho důvodu, že dále budeme aproximovat jistou funkci pomocí funkcí hladkých. Následující teorie bude sloužit k tomuto účelu. Výsledky zde obsažené jsme převzali z [13].

Pro otevřenou množinu $\Omega \in \mathbb{R}^n$ třídy $C^{2,\nu}$ a $\epsilon > 0$ označme

$$\Omega_{\epsilon} := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

Definujme funkci $\phi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ vztahem

$$\phi(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{pro } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{pro } \|x\| \geq 1, \end{cases} \quad (2.10)$$

kde $C > 0$ je zvolena tak, aby $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, dx = 1$. Pro každé ϵ položíme

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \quad (2.11)$$

Potom $\phi_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon \, dx = 1$ a $\text{supp } \phi_\epsilon \subset B(0, \epsilon)$.

Nyní pro $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ položíme

$$f_\epsilon(x) := (\phi_\epsilon * f)(x), \quad (2.12)$$

kde

$$(\phi_\epsilon * f)(x) = \int_{\Omega} \phi_\epsilon(x-y)f(y) \, dy = \int_{B(0,\epsilon)} \phi_\epsilon(y)f(x-y) \, dy \quad \text{pro } x \in \Omega_\epsilon.$$

Věta 2.9 ([13], Theorem 6, str. 630)

Nechť f_ϵ, f jsou jako v předchozím. Potom platí

1. $f_\epsilon(x) \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.
2. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = f(x)$ skoro všude v Ω .
3. Pokud $f \in C(\Omega)$, pak $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = f(x)$ a limita je stejnoměrná na kompaktních podmnožinách Ω .
4. Pokud $p \in [1, \infty)$ a $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, potom $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = f(x)$ v $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

2.3 Eliptické PDR

V této sekci uvedeme důležité definice a tvrzení potřebné pro práci s eliptickou úlohou

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & \text{v } \Omega, \\ u = g(x) & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

Definice 2.10

Klasickým řešením úlohy (2.13) nazveme funkci $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, která splňuje formulaci (2.13) bodově v Ω s ohledem na okrajové podmínky.

Vzhledem k tomu, že (2.13) nemusí mít obecně jednoznačné řešení, je vhodné alespoň odlišit ty, které pro nás budou mít další význam.

Definice 2.11

Minimálním řešením úlohy (2.13) nazveme takové řešení $w(x)$, pro které platí $w(x) \leq u(x)$, kde $u(x)$ jsou libovolná další řešení úlohy (2.13).

Důležitou vlastností, kterou budeme dále využívat, je tzv. slabý princip maxima.

Věta 2.12

 ([13], Theorem 2, str. 329)

Nechť $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C(\Omega)$ a $-\Delta u \geq 0$. Potom $\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^+$.

Nyní budeme věnovat pozornost lineární teorii. Důležitá bude zejména existence a jednoznačnost řešení.

Věta 2.13 ([19], Theorem 6.14, str. 107)

Nechť $f(x, u) \equiv f(x) \in C^\gamma(\bar{\Omega})$, Ω je oblast třídy $C^{2,\nu}$ a $g(x) \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$. Potom úloha (2.13) má jednoznačné řešení $u(x) \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$.

Ukazuje se, že mnohé principy, které jsou známé pro lineární eliptické rovnice, lze využít i pro úlohy nelineární. Jde zejména o tzv. *Schauderovu teorii*.

Věta 2.14 ([19], Theorem 6.6, str. 98)

Nechť $f(x, u) \equiv f(x) \in C^\gamma(\bar{\Omega})$, Ω je oblast třídy $C^{2,\nu}$ a $g(x) \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$. Pokud $u(x) \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ je řešení úlohy (2.13), potom

$$|u|_{2,\gamma} \leq C(|u|_{C(\bar{\Omega})} + |g|_{2,\gamma} + |f|_\gamma). \quad (2.14)$$

Poznámka 2.15

Nerovnost (2.14) se nazývá *globální apriorní Schauderův odhad*. Uvedená věta platí i pro obecnější typy úloh, tzv. *kvazilineární úlohy* (viz [19]). Jako speciální důsledek dostaneme platnost této věty pro operátor $Lu := -\Delta u - cu$, $c > 0$. Tento výsledek využijeme dále.

Velmi důležitá jsou taktéž tzv. *velmi slabá řešení* eliptických úloh. Z jejich existence lze totiž získat mnoho informací o chování řešení úloh parabolických.

Definice 2.16 ([7], Definition 1, str. 73)

Nechť $f(x, u) \equiv f(u)$. Velmi slabým řešením úlohy (2.13) budeme nazývat funkci $u \in L^1(\Omega)$ takovou, že $f(u)\text{dist}(x, \partial\Omega) \in L^1(\Omega)$ a platí

$$-\int_{\Omega} u\Delta\psi \, dx = \int_{\Omega} f(u)\psi \, dx, \quad \forall \psi \in C_0^2(\Omega). \quad (2.15)$$

Poznámka 2.17

Integrál $\int_{\Omega} f(u)\psi \, dx$ má smysl, neboť $|\psi(x)| \leq C\text{dist}(x, \partial\Omega)$, $x \in \Omega$, $C > 0$.

Velmi slabé řešení může být v jistých případech zbytečně omezující. Z toho důvodu dále zavádíme také tzv. *silná řešení*.

Definice 2.18 ([19], str. 219)

Silným řešením úlohy (2.13) nazveme funkci $u(x) \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ pro vhodné $p \in [1, +\infty]$, která splňuje formulaci (2.13) skoro všude v Ω .

Nyní budou následovat známé Greenovy identity, zobecněné pro prvky Sobolevových prostorů, které budeme využívat v některých důkazových technikách.

Věta 2.19 ([32], Theorem 1.31, str. 21)

Nechť Ω je třídy $C^{0,1}$. Pro $v \in W^{1,p}(\Omega)$ a $z \in W^{1,q}(\Omega)$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, platí

$$\int_{\Omega} (v\nabla \cdot z + z \cdot \nabla v) \, dx = \int_{\partial\Omega} v(z \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (2.16)$$

Zvolíme-li v předchozí identitě $z = \nabla u$, dostaneme po dosazení

$$\int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS. \quad (2.17)$$

Pokud nyní provedeme záměnu u a v v tomto vztahu a obě identity od sebe odečteme, dostaneme druhou Greenovu identitu

$$\int_{\Omega} u\Delta v - v\Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \, dS \quad (2.18)$$

která je platná pro $u, v \in W^{2,2}(\Omega)$.

2.4 Parabolické PDR

Tato sekce bude věnována rovnicím parabolickým. Většina tvrzení z předchozí sekce má přímou analogii i v případě úlohy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, u) & \text{v } \Omega_T, \\ u = g(x) & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u(x, 0) = h(x) & \text{v } \Omega. \end{cases} \quad (2.19)$$

V celé práci se omezíme pouze na klasická řešení, proto je nutné je přesně definovat.

Definice 2.20

Klasickým řešením úlohy (2.19) nazveme funkci $u(x, t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$, která splňuje formulaci (2.19) bodově s ohledem na počáteční a okrajové podmínky.

Nemusí být vždy zajištěno, že klasické řešení existuje až do nekonečného času. Pokud to ale platí, je vhodné taková řešení nějakým způsobem odlišit.

Definice 2.21

Globálním řešením $u(x, t)$ úlohy (2.19) nazveme takové klasické řešení, které existuje pro všechna $t \in [0, +\infty)$.

Nyní uvádíme opět užitečnou analogii slabého principu maxima.

Věta 2.22 ([13], Theorem 9, str. 369)

Nechť $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ a nechť v Ω_T platí

$$u_t - \Delta u \geq 0.$$

Potom

$$\inf_{\overline{\Omega}_T} u \geq - \sup_{\partial_p \Omega_T} u^-.$$

Schauderova teorie je platná také pro parabolické úlohy a i v tomto případě její výsledky dále aplikujeme na nelineární úlohy. Bez tzv. *podmínky kompatibility* však tyto výsledky není možné využívat.

Definice 2.23

Řekneme, že funkce $g, h \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ splňují podmínku kompatibility (jsou kompatibilní), pokud

$$h(x) = g(x) \quad \text{pro } x \in \partial\Omega. \quad (2.20)$$

Nyní již můžeme uvést avizovanou Schauderovu teorii.

Věta 2.24 ([39], Theorem 7.2.24, str. 231)

Nechť Ω je třídy $C^{2,\nu}$, $f(x, u) \equiv f(x) \in C^\gamma(\overline{\Omega})$, $g(x), h(x) \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ a nechť funkce g, h splňují podmínku kompatibility. Potom existuje jednoznačné řešení úlohy (2.19) takové, že $u(x) \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\overline{\Omega}_T)$. Navíc existuje $C > 0$ tak, že platí

$$|u|_{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}} \leq C(|u|_{C(\overline{\Omega})} + |f|_\gamma + |g|_{2,\gamma} + |h|_{2,\gamma}). \quad (2.21)$$

Techniky, které využíváme v dalších sekcích jsou založeny na tzv. metodě dolních a horních řešení.

Definice 2.25 ([5], Definition 3.1, str. 48)

Řekneme, že funkce $\underline{u} = \underline{u}(x, t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ je dolním řešením úlohy (2.19) v Ω_T , pokud

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} - \Delta \underline{u} \leq f(x, \underline{u}) & \text{v } \Omega_T, \\ \underline{u} \leq g(x) & \text{na } \partial\Omega_T, \\ \underline{u}(x, 0) \leq h(x) & \text{v } \Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

Obdobně řekneme, že funkce $\bar{u} = \bar{u}(x, t) \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ je horním řešením úlohy (2.19) v Ω_T , pokud

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta \bar{u} \geq f(x, \bar{u}) & \text{v } \Omega_T, \\ \bar{u} \geq g(x) & \text{na } \partial\Omega_T, \\ \bar{u}(x, 0) \geq h(x) & \text{v } \Omega. \end{cases} \quad (2.23)$$

V případě, že jsou nerovnosti ostré mluvíme o striktním dolním nebo striktním horním řešení.

Poznámka 2.26

Obdobným způsobem definujeme dolní, striktní dolní, horní a striktní horní řešení také pro eliptické úlohy typu (2.13).

Za určitých předpokladů je řešení úlohy (2.19) monotónní v čase.

Věta 2.27 ([5], Theorem 3.3, str. 49)

Pokud $-\Delta h \leq f(x, h)$, tj. počáteční podmínka je dolní řešení, pak $u(x, t)$ je neklesající funkcí v proměnné t pro každé pevné x .

Na závěr uvedeme srovnávací princip pro obyčejné diferenciální rovnice, který bude potřebný pro ilustrační příklad v příloze A.

Věta 2.28 ([37], Theorem 1.3, str. 27)

Nechť $f(s)$ je lokálně Lipschitzovsky spojitá ve své proměnné a nechť $x(t), y(t)$ jsou diferencovatelné funkce takové, že

$$x(t_0) \leq y(t_0) \text{ a } x'(t) - f(x(t)) \leq y'(t) - f(y(t)), \quad t \in [t_0, T].$$

Potom $x(t) \leq y(t)$ pro všechna $t \in [t_0, T]$.

3.1 Výbuch řešení v konečném čase

Nejprve se budeme zabývat skalární úlohou

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda f(u) & \text{v } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{v } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

kterou získáme z (1.1), když zvolíme $f \equiv f_1 \equiv f_2$. V celé této kapitole budeme předpokládat, že $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ je

1. neklesající,
2. hladká,
3. konvexní,

a že hranice oblasti Ω je třídy $C^{2,\nu}$, $\nu \in [0, 1]$. Poslední předpoklad je nezbytný k využívání Schauderovy teorie, což se ukáže výhodné dále. Veškerá pozorování provedeme nejprve pro tuto úlohu, následně je zobecníme i pro systém dvou rovnic typu (1.1). Vždy budeme pracovat pouze s kladnými řešeními příslušných nelineárních úloh. Tento požadavek a platnost principu maxima ve Větě 2.22 (str. 17) pak implikuje, že pouze $\lambda > 0$ jsou přípustné hodnoty.

Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici

$$\begin{cases} u'(t) = \lambda f(u(t)), & t > 0, \\ u(0) = b \geq 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

na které budeme demonstrovat některé vlastnosti. Z nezápornosti funkce f plyne pro všechna $t \geq 0$ nerovnost $u'(t) > 0$. Existence a jednoznačnost (lokálního) řešení plyne ze standardní teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Toto řešení je tedy rostoucí ve své proměnné a mohou nastat pouze dvě možnosti - buď je řešení $u(t)$ definované globálně a $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty$, anebo je řešení pouze lokální,

tj. existuje čas T_0 takový, že $\lim_{t \rightarrow T_0^-} u(t) = +\infty$. Z tohoto pozorování plyne, že charakter řešení přímo závisí na nelinearitě f . Obdobné chování se dá očekávat i v případě úlohy (3.1), ačkoliv uvidíme, že se objevují některé další vlastnosti, vznikající z toho důvodu, že řešení je navíc ovlivněné okrajovou podmínkou, difuzním členem a dimenzí prostoru. Tyto vlastnosti samozřejmě v teorii obyčejných diferenciálních rovnic nejsou možné.

Definice 3.1 ([38], str. 247)

Nechť $u(x, t)$ je nezáporné klasické řešení úlohy (3.1). Pokud

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} \left(\sup_{x \in \Omega} u(x, t) \right) = +\infty, \quad (3.3)$$

pak řekneme, že $u(x, t)$ vybuchuje v konečném čase $T_0 < +\infty$.

Pokud výbuch řešení v konečném čase nastane, je také vhodné rozlišit, v jakém prostorovém bodě k tomu došlo.

Definice 3.2 ([38], str. 247)

Nechť $u(x, t)$ je nezáporné klasické řešení úlohy (3.1), které vybuchuje v konečném čase T_0 . Pokud existují posloupnosti $x_n \subset \Omega$, $t_n \subset (0, T_0)$ takové, že

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n &= x_0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n &= T_0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u(x_n, t_n) &= +\infty, \end{aligned}$$

pak řekneme, že x_0 je bodem výbuchu řešení $u(x, t)$ v konečném čase.

Obecně je extrémně obtížné určit, zda jde pouze o jeden bod nebo zda jich je více. Přesná lokalizace těchto bodů je známá pouze pro oblasti s jednoduchou geometrií. Pokud $\Omega = B(0, R)$, $R > 0$ a počáteční podmínka u_0 je radiálně symetrická, bylo ukázáno (při některých dalších předpokladech na chování funkce f), že tímto bodem x_0 je pouze střed uvažované koule [29]. Ukazuje se také, že mezi všemi oblastmi je to právě koule, pro kterou je čas výbuchu řešení nejmenší [4]. Vysvětlením je to, že řešení vybuchuje ve středu koule, ale tento střed je příliš vzdálen (ve smyslu funkce $\text{dist}(x, \partial\Omega)$) od její hranice, kde dochází ke chlazení.

Vraťme se ještě ke zmíněné obyčejné diferenciální rovnici. Pokud zapíšeme (3.2) v separovaném tvaru, dostaneme po integraci pravé strany

$$\int_b^{u(t)} \frac{1}{f(s)} ds = \lambda t. \quad (3.4)$$

Pro výbuch řešení (3.2) v konečném čase je tedy nutnou a postačující podmínkou konečnost levé strany (3.4), neboť pravá strana je pro konečné t vždy omezená. Tuto nutnou podmínku zmínil poprvé Osgood v roce 1898 ve svém článku [30].

Bohužel, pokud uvažujeme i vliv difuze, nemusí podobná podmínka k výbuchu řešení v konečném čase stačit. Pro lepší představu odkážme na jednoduchý příklad do přílohy A. Z tohoto příkladu je zřejmé, že otázka, zda řešení rovnice (3.1) vybuchuje v konečném čase, závisí na několika dalších faktorech - jednak na nelineární pravé straně, ale zároveň také na velikosti oblasti Ω , která je v jistém smyslu reprezentována prvním vlastním číslem Laplaceova operátoru v Ω a také

na počáteční podmínce. Pro některé úlohy (respektive hodnoty parametru λ) bude také nutné zohlednit dimenzi prostoru.

Metoda, kterou jsme na tomto příkladu ukázali, byla poprvé použita v [22] a poskytuje postačující podmínku pro výbuch řešení v konečném čase. Bohužel, jak je patrné, je možno ji používat jen pro konvexní pravé strany. Pro obecnější funkce je nutné hledat jiné postačující podmínky.

Obdoba nutné podmínky, kterou jsme ukázali v případě úlohy (3.2) ale platí vždy i pro parciální diferenciální rovnice typu (3.1).

Věta 3.3 ([5], Theorem 3.8, str. 54)

Pokud jednoznačné řešení $u(x, t)$ úlohy (3.1) vybuchuje v konečném čase, pak

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds < +\infty, \quad \text{pro } b \geq 0. \quad (3.5)$$

DŮKAZ. Pro spor předpokládejme $\int_b^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds = +\infty$. Označme \bar{u} řešení úlohy $\bar{u}'(t) = \lambda f(\bar{u})$ s počáteční podmínkou b . Potom $u(x, t) \leq \bar{u}(t)$, tj. \bar{u} je horní řešení. Vzhledem k předpokladu ale $\bar{u}(t)$ (a tedy také $u(x, t)$) existuje pro všechna $t \geq 0$, což je spor. \square

S ohledem na zmiňovanou fyzikální interpretaci budeme vždy pracovat s tzv. *superlineárními nelinearitami*, tj. těmi, které splňují předpoklad

$$(P1) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f(s)}{s} = +\infty.$$

Bohužel se ukazuje, že existují funkce, které jsou superlineární a integrál (3.5) konečný není. Pro názornost lze uvažovat funkci $s \mapsto s \ln s$. Pak zřejmě

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s \ln s}{s} = +\infty,$$

zároveň ale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{s \ln s} ds = +\infty.$$

Superlinearita f tedy nestačí ke konečnosti (3.5) a tuto abstraktní podmínku musíme vždy při konkrétní aplikaci ověřit. Při práci s parabolickými úlohami budeme vždy požadovat, aby superlineární nelinearita splňovala i nutnou podmínku (3.5).

3.2 Stacionární úloha

Studium parabolických úloh úzce souvisí s příslušnou stacionární úlohou

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(u) & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

Úlohami (3.6) a jejich vazbou na (3.1) se zabývalo velké množství autorů. Další informace a výsledky je možno nalézt například v [7], [24] a [23].

V [7] je studováno velmi slabé řešení úlohy (3.6) a jeho souvislost s výbuchem řešení (3.1) v konečném čase.

Věta 3.4 ([7], Theorem 1, str. 74)

Nechť f je superlineární a nechť existuje globální klasické řešení nestacionární úlohy (3.1) s počáteční podmínkou $u_0 \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$. Pak existuje velmi slabé řešení stacionární úlohy (3.6).

Předchozí Věta poskytuje důležitý důsledek – pokud platí nutná podmínka (3.5) a pokud neexistuje velmi slabé řešení stacionární úlohy (3.6), pak řešení (3.1) vybuchuje pro (v jistém smyslu) dostatečně velkou kladnou počáteční podmínku v konečném čase. Bez nutné podmínky (3.5) lze získat následující výsledek.

Věta 3.5 ([7], Theorem 2, str. 74)

Pokud má úloha (3.6) kladné minimální velmi slabé řešení w , pak pro každou počáteční podmínku $u_0 \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$, $0 \leq u_0 \leq w$, má (3.1) globální řešení.

Dále lze ukázat [7], že existuje hodnota λ^* taková, že:

- Pro každou hodnotu $\lambda \in (0, \lambda^*)$ existuje kladné minimální klasické řešení (viz Definice 2.11, str. 15) $u(\lambda)$ rovnice (3.6).
- Zobrazení $\lambda \rightarrow u(\lambda)$ je neklesající.
- Pro $\lambda > \lambda^*$ neexistuje klasické řešení (3.6).
- Pokud $\lambda = \lambda^*$ a platí (P1), pak existuje velmi slabé řešení u^* a zároveň $u^* = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda^*} u(\lambda)$.

Poznámka 3.6

Existenci hodnoty λ^* lze ukázat při slabších předpokladech na funkci f . Konkrétně stačí, když f je γ -hölдеровsky spojitá (viz [5], Theorem 2.7, str. 19). Je však zřejmé, že další uvedené výsledky platit nemusí.

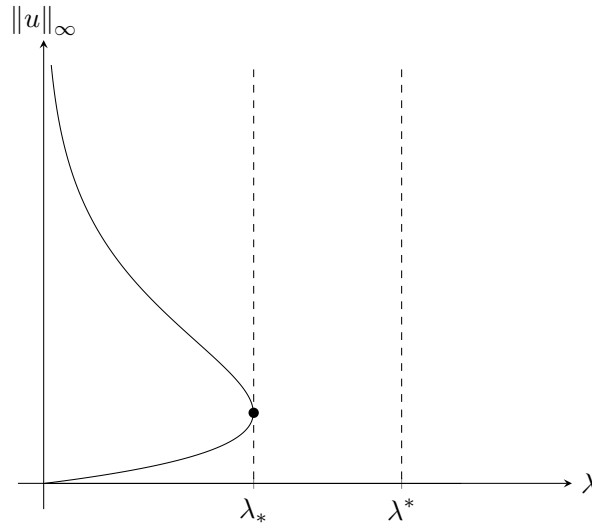
Řešení u^* , které přísluší hodnotě λ^* , je tzv. *extremální řešení* a blíže se jimi zabýval např. BREZIS a VÁZQUEZ v [6]. Ukazuje se, že v tomto případě řešitelnost úlohy (3.6) v klasickém smyslu závisí nejen na pravé straně f a tvaru oblasti Ω , ale zejména také na dimenzi prostoru n .

Poznámka 3.7

Je důležité si uvědomit, že z předchozích bodů plyne, že musí existovat hodnota λ_* taková, že studovaná úloha má klasické řešení pro všechna $\lambda \in (0, \lambda_*]$. V některých případech je skutečně $\lambda_* = \lambda^*$, ale tato rovnost neplatí zdaleka vždy, viz Příklad 3.2.1 níže.

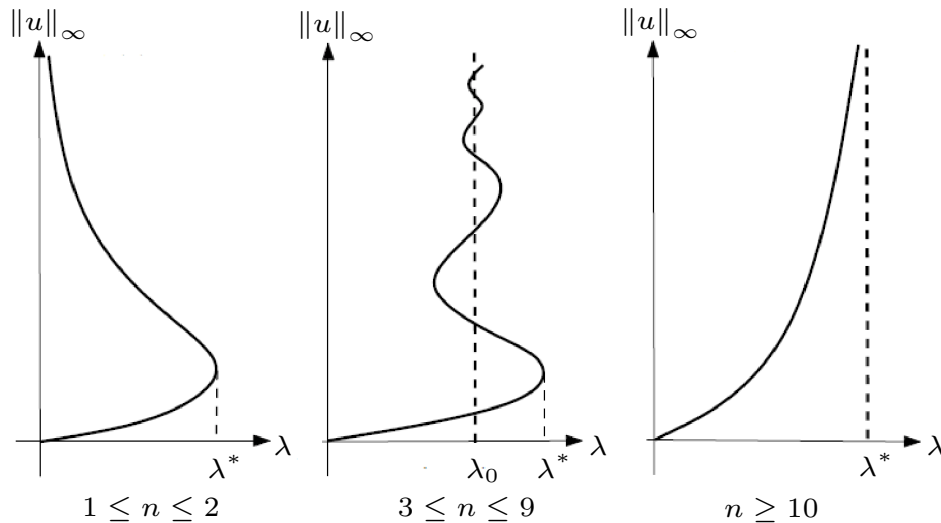
Příklad 3.2.1. Uvažujme tzv. *Gelfandovu úlohu*, tj. (3.6) s konkrétní pravou stranou $f(u) = \exp(u)$ na $\Omega = B(0, 1)$. Řešitelnost této úlohy je dnes již poměrně dobře známá a výsledky jsou následující (pro více informací např. [31] nebo [12]).

- Pro každé $n \geq 1$ existuje hodnota λ^* taková, že Gelfandova úloha má alespoň jedno kladné klasické řešení pro každé $\lambda < \lambda^*$ a žádné řešení pro $\lambda > \lambda^*$. Tento výsledek je v souladu s poznámkami pod Větou 3.5.
- Pro $n \in \{1, 2\}$ jsou tato řešení omezená v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$.
- Pro $n \geq 3$ se objevuje tzv. *singulární řešení* ve tvaru $S(x) = -2 \ln |x|$, které přísluší hodnotě $\lambda_0 := 2(n - 2)$ (viz bifurkační diagram níže).



Obrázek 3.1: Jeden z možných bifurkačních diagramů pro případ, kdy $\lambda_* \neq \lambda^*$.

- Extremální řešení je pro $n \leq 9$ klasické, viz [27].
- V případě $n \geq 10$ byl ukázán následující zajímavý výsledek. Jednak platí $\lambda_0 = \lambda^* = 2(n - 2)$ a zároveň $S(x) = u^*(x)$, tj. $u^*(x)$ nyní není klasické řešení, viz [21]. Protože ale funkce $s \mapsto \exp(s)$ splňuje (P1), jde o velmi slabé řešení. To je navíc minimální.



Obrázek 3.2: Bifurkační diagram Gelfandovy úlohy (převzato z [12], upraveno).

Dle Věty 3.5 (klasické řešení je zároveň velmi slabé) existuje pro $\lambda \in (0, \lambda^*)$ globální řešení parabolické Gelfandovy úlohy pro každou počáteční podmínku, pro kterou $u_0 \leq w$, kde w je minimální řešení stacionární Gelfandovy úlohy.

Je zajímavé, že pro některé počáteční podmínky

$$u_0 \geq w, \quad u_0 \neq w \tag{3.7}$$

již podobný výsledek neplatí. Autoři článku [31] se zabývali studiem chování parabolické Gelfandovy úlohy pro počáteční podmínky, které byly jistou perturbací

singulárního řešení S . Konkrétně uvažují, že $n \geq 10$ a $u_0 \geq S, u_0 \neq S$. Tato volba vede k zajímavému výsledku – řešení je identicky nekonečné pro libovolné $t > 0$. Z toho plyne, že neexistuje dokonce ani lokální slabé řešení (viz [31] pro definici slabého řešení parabolické úlohy). Tento stav je označován jako tzv. *okamžitý výbuch řešení*.

V souladu s předchozím se ihned nabízí otázka, jak je to s omezeností řešení parabolické úlohy (3.1) pro $\lambda > \lambda^*$, čemuž se budeme věnovat dále.

3.3 Metoda horních a dolních řešení

V této sekci uvedeme dva stěžejní výsledky, které budeme dále využívat. Kromě již zmíněných předpokladů necht' f navíc splňuje

$$(P2) \quad \exists a, b > 0 \forall s \in \mathbb{R} : f(s) > as + b.$$

Důležitost předpokladu (P2) se ukazuje v tom, že umožňuje přesně lokalizovat číslo $\lambda^* := \lambda_1/a$. Jde o obecnější skutečnost, která platí i pro systém dvou rovnic, tudíž důkaz uvedeme až v poslední kapitole, kde se systémům věnujeme podrobněji.

Věta 3.8 ([5], Theorem 3.1, str. 48)

Nechť existují horní a dolní řešení úlohy (3.1) taková, že $\underline{u}(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$ v $\bar{\Omega}_T$. Potom úloha (3.1) má klasické řešení $u(x, t)$ a platí

$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ v } \bar{\Omega}_T. \quad (3.8)$$

Důkaz spočívá v sestrojení vhodného iteračního procesu. Pak je nutné ukázat, že nalezené iterace konvergují k řešení úlohy (3.1). Tento důkaz uvedeme v další sekci, protože je možné snadné zobecnění - jak pro systémy více rovnic, tak také pro obecnější pravé strany.

Poznámka 3.9

Předpoklad bodové nerovnosti mezi dolním a horním řešením v předchozí větě není možné vynechat. AMANN [3] uvedl v roce 1976 následující protipříklad pro eliptickou úlohu.

Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_k u + \varphi_k(x) & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.9)$$

kde λ_k značí k -té vlastní číslo příslušné vlastní funkci $\varphi_k(x)$.

Předpokládejme, že existuje klasické řešení u úlohy (3.9) a vynásobme tuto formulaci funkcí $\varphi_k(x)$. Provedeme-li integraci přes oblast Ω , dostaneme

$$\int_{\Omega} (-\Delta u \varphi_k - \lambda_k u \varphi_k) dx = \int_{\Omega} \varphi_k^2 dx > 0.$$

Levou stranu lze dále upravit s využitím Greenovy identity

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -(\Delta u \varphi_k + \lambda_k u \varphi_k) dx &= \int_{\Omega} (u \Delta \varphi_k - \Delta u \varphi_k) dx = \\ \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} - \varphi_k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS &= 0, \end{aligned}$$

vzhledem k tomu, že jak u , tak φ_k jsou na $\partial\Omega$ nulové. Poslední rovnost tedy dává spor a není možné, aby řešení existovalo. Na druhou stranu je ale možné najít $K > 0$ tak, že $\underline{u}(x) = K\varphi_1(x)$ a $\bar{u}(x) = -K\varphi_1(x)$ jsou dolní a horní řešení.

Důležitost předchozí existenční věty spočívá v tom, že nám poskytuje návod, jak ukázat, že řešení $u(x, t)$ úlohy (3.1) vybuchuje v konečném čase. Pokud nalezneme dolní a horní řešení taková, že $\underline{u} \leq \bar{u}$, která vybuchují v konečných časech \underline{T} , \bar{T} , potom nerovnost (3.8) implikuje, že také u vybuchuje v konečném čase T_0 . Navíc platí $\bar{T} \leq T_0 \leq \underline{T}$.

3.3.1 Diskuze o jednoznačnosti

Jednoznačnost řešení parabolických parciálních diferenciálních rovnic je i v dnešní době stále studovanou oblastí. Studium této vlastnosti se zabývalo mnoho autorů, např. FUJITA, WATANABE [17] nebo FRIEDMAN [16]. Pro názornost uvažujme parabolickou úlohu s Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u) & \text{v } \Omega_T, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u(x, 0) = 0 & \text{v } \Omega, \end{cases} \quad (3.10)$$

kde zvolíme speciálně $f(u) = u^{\frac{1}{2}}$. S ohledem na Neumannovu okrajovou podmínku je možné hledat řešení úlohy (3.10) jakožto řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u^{\frac{1}{2}}, & t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Je zřejmé, že obě úlohy řeší jednak $u(t) \equiv 0$, ale také funkce $u(t) = t^2/4$.

V tomto případě je nejednoznačnost klasického řešení způsobena tzv. nekonečnou intenzitou zdroje v počátku. Z teorie počátečních úloh pro obyčejné diferenciální rovnice je známo, že k zajištění jednoznačnosti řešení stačí, aby f byla Lipschitzovsky spojitá. Problém nelinearity, která vystupuje ve zmíněné rovnici je to, že na libovolném intervalu, který obsahuje počátek, tato funkce lipschitzovskost ztrácí. Na druhou stranu lze snadno nahlédnout (separací proměnných a substitucí $u = z^3$), že počáteční úloha

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 1 + u^{\frac{2}{3}}, & t > 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

jednoznačně řešitelná je, ačkoliv funkce $s \mapsto 1 + s^{\frac{2}{3}}$ opět není Lipschitzovsky spojitá v okolí bodu nula. Z toho plyne, že lipschitzovskost pravé strany není podmínkou nutnou. Kromě lipschitzovskosti byly odvozeny i jiné podmínky, které jsou více či méně omezující. Tyto výsledky shrnuje např. [2].

FRIEDMAN [16] se ve svém článku zabýval studiem podmínek pro zajištění jednoznačnosti řešení parabolických úloh. Uvedl zde, že pokud f je nerostoucí funkcí, stačí to k tomu, aby řešení bylo jednoznačné. V našem případě je ale zcela nevhodné pracovat s nerostoucími nelinearitami. Je tedy nutné hledat jiné podmínky, které jednoznačnost řešení zajistí. Inspiraci je možné hledat v teorii obyčejných

diferenciálních rovnic. Ukazuje se, že i v případě parciálních diferenciálních rovnic platí obdobné výsledky.

Budeme tedy požadovat, aby nelineární funkce f splňovala jednostrannou Lipschitzovu podmínku, tj. aby existovala konstanta $L > 0$ tak, že

$$f(s_1) - f(s_2) \leq L(s_1 - s_2) \quad \text{pro } s_1 \geq s_2. \quad (3.13)$$

Tato podmínka je slabší než klasická lipschitzovskost, ale stačí k tomu, aby řešení námi studovaných úloh bylo jednoznačné.

3.3.2 Konstrukce dolního řešení

Ke konstrukci dolního řešení úlohy (3.1) využijeme myšlenku, která byla uvedena v [26].

Definujme funkci $\underline{u}(x, t) = z(v(x, t))$ tak, že platí

$$\begin{cases} z_v = f(z), \\ z(0) = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Poznamenejme, že jde o korektní definici dolního řešení, neboť existence a jednoznačnost lokálního klasického řešení plyne ze standardní teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

Dále přímo z definice funkce \underline{u} plyne

$$\begin{aligned} \underline{u}_t &= z_v v_t = f(z) v_t, \\ \Delta \underline{u} &= \nabla \cdot \nabla \underline{u} = \nabla(z_v \nabla v) = \nabla(f(z) \nabla v) \\ &= f'(z) \nabla z \nabla v + f(z) \Delta v = f'(z) f(z) |\nabla v|^2 + f(z) \Delta v, \end{aligned}$$

a tedy

$$\underline{u}_t - \Delta \underline{u} = f(z)(v_t - \Delta v) - f'(z) f(z) |\nabla v|^2. \quad (3.15)$$

Z nezápornosti výrazu $f'(z) f(z) |\nabla v|^2$ plyne, že nyní stačí vhodně zvolit funkci v a \underline{u} bude dolní řešení. Tento speciální tvar dolního řešení má mnoho výhod, zejména pak to, že umožňuje definovat postačující podmínku pro výbuch řešení úlohy (3.1) v konečném čase.

Věta 3.10 ([26], Theorem 1, str. 138)

Nechť $T^ > 0$ a necht' existuje $v(x, t)$ takové, že $\underline{u}(x, t) = z(v(x, t))$ je dolní řešení (3.1). Pokud platí nutná podmínka (3.5) a*

$$\sup_{x \in \Omega} v(x, T^*) - I \geq 0, \quad (3.16)$$

kde

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds, \quad (3.17)$$

potom \underline{u} vybuchuje v konečném čase $\underline{T} \leq T^$.*

DŮKAZ. Přímo z definice funkce z plyne

$$\sup_{x \in \Omega} v(x, t) = \sup_{x \in \Omega} \int_0^z \frac{1}{f(s)} ds = \sup_{x \in \Omega} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds - \int_z^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds \right).$$

Protože $\sup_{x \in \Omega} \left(- \int_z^{+\infty} \frac{1}{f(s)} ds \right) < 0$ pro $t < \underline{T}$, dolní řešení vybuchuje v konečném čase $\underline{T} \leq T^*$ při platnosti předpokladu (3.16) z dokazované věty. \square

V následujícím Lemmatu zodpovíme otázku, jak je možné volit funkci $v(x, t)$.

Lemma 3.11

Nechť $k \geq 0$, $\lambda \geq \lambda^*(1+k) =: \lambda^k$ a $v(x, t)$ je řešením úlohy

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = \lambda^*(1+k)\varphi_1(x), & \text{v } \Omega_T \\ v = 0, & \text{na } \partial\Omega_T \\ v(x, 0) = 0 & \text{na } \Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

Pokud $aI < 1+k$, potom \underline{u} vybuchuje v konečném čase

$$\underline{T} \leq -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{aI}{1+k} \right). \quad (3.19)$$

DŮKAZ. Nejprve ověříme, že skutečně jde o dolní řešení. Vyjdeme z (3.15), kam dosadíme vyjádření (3.18). Zvolíme-li $\varphi_1(x)$ tak, že $\sup_{x \in \Omega} \varphi_1(x) = 1$ a použijeme-li předpoklad $\lambda \geq \lambda^k$, potom dostaneme

$$\underline{u}_t - \Delta \underline{u} = \lambda^*(1+k)\varphi_1(x)f(z) - f'(z)f(z)|\nabla v|^2 \leq \lambda f(z) = \lambda f(\underline{u}), \quad (3.20)$$

kde jsme, vzhledem k vlastnostem f , využili nezápornosti členu $f'(z)f(z)|\nabla v|^2$. Okrajová podmínka na $\partial\Omega$ je splněna triviálně, neboť $v = 0$ na $\partial\Omega$. Taktéž požadovaná nerovnost v počáteční podmínce je splněna, protože

$$\underline{u}(x, 0) = z(v(x, 0)) = z(0) = 0 \leq u_0.$$

Jde tedy skutečně o dolní řešení. Nyní ověříme postačující podmínku ve Větě 3.10. Vzhledem ke speciálnímu tvaru pravé strany lze řešení v hledat v separovaném tvaru $v(x, t) = \varphi_1(x)q(t)$, kde q je vhodná funkce. Dosazením do (3.18) tuto funkci snadno dopočítáme a dostaneme

$$v(x, t) = \frac{1+k}{a} \varphi_1(x) \left(1 - e^{-\lambda_1 t} \right). \quad (3.21)$$

Nyní stačí ukázat existenci $T^* > 0$ tak, že

$$\sup_{x \in \Omega} v(x, T^*) - I \geq 0, \quad (3.22)$$

což je ekvivalentní tomu, že

$$\frac{1+k}{a} \left(1 - e^{-\lambda_1 T^*} \right) - I \geq 0, \quad (3.23)$$

z čehož dostaneme

$$T^* \geq -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{aI}{1+k} \right), \quad (3.24)$$

právě tehdy, když $aI < 1+k$, jak plyne z definičního oboru funkce $s \mapsto \ln s$. Navíc dostáváme horní odhad času výbuchu

$$\underline{T} \leq -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{aI}{1+k} \right). \quad (3.25)$$

□

Z předchozího Lemmatu vyplývá několik skutečností. Pokud nelinearita f roste do nekonečna dostatečně rychle (tj. $aI < 1$), pak pro každé $\lambda \geq \lambda^*$ dochází k výbuchu dolního řešení v konečném čase $\underline{T} \leq -\ln(1-aI)/\lambda_1$.

Naopak, pokud je tento růst pomalejší (tj. $k > 0$), potom existuje hodnota $\lambda^k > \lambda^*$ taková, že dolní řešení \underline{u} vybuchuje v konečném čase pro všechna $\lambda \geq \lambda^k$. Je zřejmé, že čím větší bude k , tím větší bude také λ^k .

3.3.3 Konstrukce horního řešení

Z Amannova protipříkladu v předchozí sekci plyne, že při konstrukci horního řešení je nutné postupovat obezřetně. Bohužel, obecně by mohlo být velice složité dokázat, že pro danou dvojici funkcí \underline{u}, \bar{u} skutečně platí požadovaná nerovnost. Z tohoto důvodu je velice užitečný následující srovnávací princip.

Věta 3.12 ([5], Theorem 4.1, str. 88)

Nechť $\underline{u}, \bar{u} \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ jsou takové, že

$$\begin{aligned} \underline{u}_t - \Delta \underline{u} - \lambda f(\underline{u}) &< \bar{u}_t - \Delta \bar{u} - \lambda f(\bar{u}) && \text{v } \Omega_T, \\ \underline{u} &< \bar{u} && \text{na } \partial_p \Omega_T. \end{aligned}$$

Potom

$$\underline{u} < \bar{u} \quad \text{v } \bar{\Omega}_T. \quad (3.26)$$

DŮKAZ. Označme $d(x, t) = \bar{u}(x, t) - \underline{u}(x, t)$ a předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Pak musí existovat $t_1 > 0$ takové, že $d(x_1, t_1) = 0$ pro nějaké $x_1 \in \Omega$. Navíc $d(x, t) > 0$ pro $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, t_1)$ a $d_t(x_1, t_1) \leq 0$. Funkce $d(x, t)$ nabývá svého minima v $x = x_1$, tj. $\Delta d(x_1, t_1) \geq 0$. Nicméně ale platí

$$d_t(x_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}(x_1, t) - \underline{u}(x_1, t)) > \Delta \bar{u} - \Delta \underline{u} - \lambda f(\bar{u}) + \lambda f(\underline{u}) \geq 0, \quad (3.27)$$

což je spor a tedy musí být $\underline{u}(x, t) < \bar{u}(x, t)$ v $\bar{\Omega}_T$. \square

Nyní zbývá ukázat, že existuje horní řešení, které také vybuchuje v konečném čase.

Zvolíme $\bar{u}(x, t) = \theta(t)$, kde θ je řešením úlohy

$$\begin{cases} \theta'(t) = \lambda f(\theta(t)) + \epsilon, & t > 0, \\ \theta(0) = \epsilon, \end{cases} \quad (3.28)$$

pro $\epsilon > \max_{x \in \Omega} u_0(x)$.

Věta 3.13

Funkce $\bar{u}(x, t) = \theta(t)$ definovaná úlohou (3.28) je striktní horní řešení úlohy (3.1).

DŮKAZ. Korektnost definice plyne opět jako v případě dolního řešení ze standardní teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Přímým osazením do (3.1) dostaneme

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta \bar{u} = \lambda f(\theta(t)) + \epsilon > \lambda f(\theta(t)) = \lambda f(\bar{u}) & \text{v } \Omega_T, \\ \bar{u}(x, 0) = \theta(0) = \epsilon > \max_{x \in \Omega} u_0(x) \geq u_0(x) & \text{v } \Omega, \end{cases} \quad (3.29)$$

tj. \bar{u} je striktní horní řešení. \square

Lemma 3.14

Pro dolní řešení \underline{u} a striktní horní řešení \bar{u} definované vztahy (3.14), resp. (3.28) platí $\underline{u} < \bar{u}$ v $\bar{\Omega}_T$.

DŮKAZ. Protože platí

$$\begin{aligned} \underline{u}_t - \Delta \underline{u} - \lambda f(\underline{u}) &\leq 0 < \bar{u}_t - \Delta \bar{u} - \lambda f(\bar{u}) && \text{v } \Omega_T, \\ \underline{u} = 0 < \epsilon = \bar{u} &&& \text{na } \partial_p \Omega_T \end{aligned}$$

a \underline{u}, \bar{u} mají požadovanou hladkost, lze použít Větu 3.12 a dostaneme dokazované Lemma. \square

Nyní uvedeme tvrzení, kterým shrneme výsledky uvedené v této sekci.

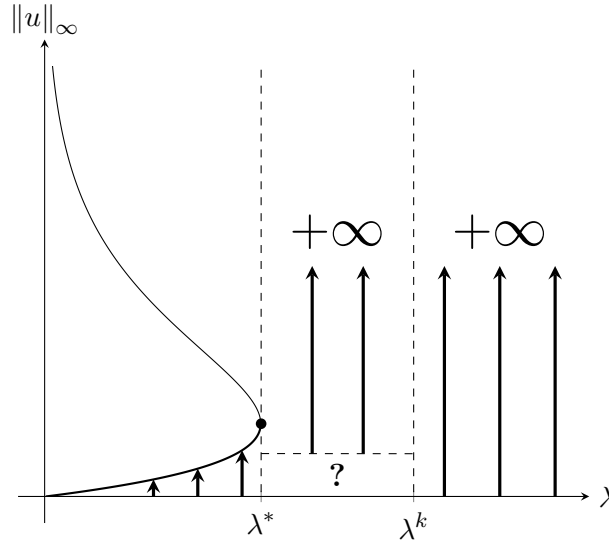
Věta 3.15

Nechť f je neklesající hladká funkce, která splňuje nutnou podmínku (3.5) a předpoklady (P1) a (P2). Zvolme nejmenší $k \geq 0$ takové, že $aI < 1 + k$, kde I je definováno v (3.17). Potom pro $\lambda \geq \lambda^k$ vybuchuje jednoznačné řešení $u(x, t)$ úlohy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda f(u) & \text{v } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{na } \partial \Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{v } \Omega \end{cases}$$

v konečném čase T_0 . Pro čas výbuchu navíc platí odhad

$$\bar{T} = \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\lambda f(s) + \epsilon} ds \leq T_0 \leq -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{aI}{1+k} \right) = \underline{T}. \quad (3.30)$$



Obrázek 3.3: Oblasti globálních a neomezených řešení. V regionu označeném otazníkem není garantováno, že pro malé hodnoty $\|u\|_{\infty}$ nedojde k výbuchu řešení v konečném čase.

Poznámka 3.16

Ilustrační obrázek platí v případech, kdy Ω je konvexní oblast a $f(s) = 1 + s^q$, kde $1 < q < \sigma = \frac{n+2}{n-2}$ pro $n \geq 3$ díky apriorním odhadům z článku [14]. Dále také v případě, kdy Ω je kruh v \mathbb{R}^2 a $f(s) = \exp(s)$, [21].

Pokud $\lambda \leq \lambda^*$ a počáteční podmínka $u_0 \leq w$, kde w je minimální řešení stacionární úlohy, pak řešení $u(x, t)$ bude omezené, globální a navíc

$$u(x, t) \nearrow w(x) \text{ pro } t \rightarrow +\infty \text{ stejnoměrně v } \Omega.$$

Dále pokud $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^k)$, potom řešení vybuchuje v konečném čase pro dostatečně velkou počáteční podmínku u_0 ve smyslu normy $\|\cdot\|_\infty$, ale na druhou stranu, pro malé počáteční podmínky není výbuch řešení v konečném čase garantován. Pro $\lambda \geq \lambda^k$ vybuchuje řešení u v konečném čase pro každou $u_0 \geq 0$.

Systém dvou rovnic

V této kapitole uvedeme hlavní výsledky celé práce. Motivováni článkem [9], budeme studovat kvalitativní vlastnosti řešení systému

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \lambda f_1(u_2) & \text{v } \Omega_T, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = \lambda f_2(u_1) & \text{v } \Omega_T, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u_1(x, 0) = u_1^0(x) \geq 0 & \text{v } \Omega, \\ u_2(x, 0) = u_2^0(x) \geq 0 & \text{v } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Vždy budeme předpokládat, že oblast Ω je třídy $C^{2,\nu}$, $\nu \in [0, 1]$. I zde se budeme zabývat výhradně klasickými řešeními studované úlohy, proto je nutné zahrnout také požadavek $u_1^0, u_2^0 \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$, $\gamma \in (0, 1]$. Navíc tyto funkce musí splňovat podmínku kompatibility. Na tomto místě ještě upozorníme na značení. Vždy budeme značit $u = (u_1, u_2)$, $f = (f_1, f_2)$ a podobně. Případně operace mezi takto značenými funkcemi budeme vždy chápat po složkách, nebude-li řečeno jinak. Další předpoklady budeme specifikovat v dalších sekcích. Strukturálně budeme postupovat identicky jako v předchozí kapitole. Nejprve uvedeme výsledky, které byly dosaženy pro stacionární úlohu a poté ukážeme, že mají přímé důsledky pro parabolickou úlohu.

4.1 Stacionární úloha

Ve zmíněném článku autoři studovali existenci silných řešení úlohy

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda f_1(u_2) & \text{v } \Omega, \\ -\Delta u_2 = \lambda f_2(u_1) & \text{v } \Omega, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (4.2)$$

na omezené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s hranicí třídy $C^{2,\nu}$ v dimenzi $n \geq 2$. Předpokládali, že $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jsou neklesající spojité funkce, které dále splňují tyto

předpoklady:

$$(P1) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f_1(s)}{s} = +\infty = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f_2(s)}{s},$$

$$(P2) \quad \exists a, b > 0 \forall s \in \mathbb{R} : f_1(s), f_2(s) > as + b.$$

Silným řešením byla myšlena trojice

$$(\lambda, (u_1, u_2)) \in \mathbb{R} \times E, \quad (4.3)$$

kde $E := [W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)]^2$ pro $p > n$ s normou

$$\|(u_1, u_2)\|_E := \|u_1\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|u_2\|_{W^{2,p}(\Omega)}. \quad (4.4)$$

Obdobně jako ve skalárním případě, který jsme studovali v minulé kapitole, bylo ukázáno, že za platnosti výše uvedených předpokladů existuje hodnota λ^* taková, že úloha (4.2) nemá žádné řešení pro $\lambda \geq \lambda^*$.

Pokud zvolíme φ_1 tak, že je kladná v Ω , předpoklad (P2) nám pak umožňuje přesně lokalizovat hodnotu λ^* .

Věta 4.1 ([9], Theorem 1.1, str. 5721)

Nechť spojité funkce f_1, f_2 splňují předpoklad (P2). Potom úloha (4.2) nemá pro $\lambda \geq \lambda^ := \lambda_1/a$ řešení.*

DŮKAZ. Uvedeme důkaz z [9]. Nechť $(\lambda, u_1, u_2), \lambda > 0$ je silným řešením (4.2). Z principu maxima pak musí být $u_1, u_2 > 0$. Sečtením obou rovnic dostaneme

$$-\Delta \left(u_1 + u_2 + \frac{2b}{a} \right) = -\Delta(u_1 + u_2) > a\lambda \left(u_1 + u_2 + \frac{2b}{a} \right),$$

kde jsme použili předpoklad (P2).

Označíme-li $w := u_1 + u_2 + \frac{2b}{a}$, pak $w > 0$ v $\bar{\Omega}$, $-\Delta w > a\lambda w$ v Ω a platí

$$\int_{\Omega} (\varphi_1 \Delta w - w \Delta \varphi_1) dx < \int_{\Omega} (-a\lambda w \varphi_1 + \lambda_1 w \varphi_1) dx = (-a\lambda + \lambda_1) \int_{\Omega} w \varphi_1 dx. \quad (4.5)$$

Na druhou stranu z Greenovy identity (2.18)

$$\int_{\Omega} (\varphi_1 \Delta w - w \Delta \varphi_1) dx = \int_{\partial\Omega} (\varphi_1 \nabla w - w \nabla \varphi_1) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (4.6)$$

která je použitelná, protože w je silné řešení, tedy $w \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ a $\varphi_1(x) \in C^{2,\nu}(\bar{\Omega})$ dle Schauderovy teorie. Protože

$$\int_{\partial\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \Delta \varphi_1 dx = - \int_{\Omega} \lambda_1 \varphi_1 dx < 0, \quad (4.7)$$

dostaneme $\nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n} < 0$ na $\partial\Omega$, $\varphi_1 = 0$ na $\partial\Omega$, $\inf_{\partial\Omega} w > 0$ a tedy v (4.6)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\varphi_1 \nabla w - w \nabla \varphi_1) \cdot \mathbf{n} dS &= - \int_{\partial\Omega} w \nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n} dS > \\ &- \inf_{\partial\Omega} w \int_{\partial\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n} dS > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Z (4.5) a (4.8) pak plyne, že pokud má být trojice (λ, u_1, u_2) řešením, nerovnost $\lambda \geq \frac{\lambda_1}{a} = \lambda^*$ nesmí nastat. \square

Dalším důležitým výsledkem bylo prokázání existence silných řešení pro hodnoty $\lambda < \lambda^*$. Označme \mathcal{S} množinu trojic $(\lambda, (u_1, u_2)) \in \mathbb{R} \times E$ takových, že tyto trojice řeší (4.2) a

$$\text{Proj}_{\lambda \in [0, +\infty)} := \{\lambda \in [0, +\infty) : \exists (u_1, u_2) \in E \text{ takové, že } (\lambda, (u_1, u_2)) \in \mathcal{K}\},$$

kde $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ je tzv. kontinuum řešení. Kontinuem je myšlena souvislá uzavřená množina.

Věta 4.2 ([9], Theorem 1.2, str. 5721)

Nechť f_1, f_2 jsou spojité a splňují předpoklad (P1). Pak existuje neomezené kontinuum řešení $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ a platí:

1. $(\lambda, (u_1, u_2)) \in \mathcal{K}$ je nezáporné řešení právě tehdy, když $\lambda \in (0, \lambda^*)$,
2. pro $\lambda = 0$ je prvek $(0, 0, 0)$ jediným prvkem, který náleží do \mathcal{K} ,
3. $\text{Proj}_{\lambda \in [0, +\infty)} \subset [0, \lambda^*)$,
4. Existuje posloupnost řešení $(\lambda_n, (u_{1n}, u_{2n})) \in \mathcal{K}$ taková, že $\lambda_n \in (0, \lambda^*)$ pro všechna n a $\|(u_{1n}, u_{2n})\|_E \rightarrow +\infty$ pro $n \rightarrow +\infty$.

První bod plyne snadno z principu maxima a Věty 4.1, druhý bod je pak důsledkem principu maxima samotného. Třetí a čtvrtý bod implikují existenci alespoň dvou nezáporných řešení pro každé $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Jejich důkazy jsou netriviální, využívají aproximaci (4.2) pomocí asymptoticky pozitivně homogenního systému. Pro podrobný důkaz odkažme na [9].

Zmíněný článek také dále rozšiřuje výsledky, které byly dosaženy pro skalární rovnice s hladkou pravou stranou na konvexní oblasti. Jmenovitě bylo dokázáno následující tvrzení.

Věta 4.3 ([9], Theorem 1.3, str. 5721)

Nechť f_1, f_2 jsou neklesající hladké funkce splňující (P1) a Ω je konvexní oblast. Pokud buď

1. $n = 2$ a existují kladná čísla K, q_1, q_2 , a $q_1 + q_2 < 2$ jsou taková, že pro všechna $s \in \mathbb{R}$ platí

$$f_1(s) \leq K \exp(|s|^{q_1}) \text{ a } f_2(s) \leq K \exp(|s|^{q_2}), \quad (4.9)$$

anebo

2. $n \geq 3$, Ω je třídy C^3 a existují kladná čísla b_1, b_2 tak, že

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f_1(s)}{s^{p_1}} = b_1 \text{ a } \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{f_2(s)}{s^{p_2}} = b_2, \quad (4.10)$$

kde $p_1, p_2 > 1$ jsou takové, že

$$\frac{1}{p_1 + 1} + \frac{1}{p_2 + 1} > \frac{n - 2}{n}, \quad (4.11)$$

pak bod $\lambda_\infty = 0$ je jednoznačným bifurkačním bodem kontinua řešení \mathcal{K} z nekonečna.

Bod λ_∞ je nazýván bifurkačním bodem systému (4.2) z nekonečna, neboť je to takový bod, pro který množina řešení \mathcal{S} obsahuje posloupnost λ_n takovou, že $\lambda_n \rightarrow \lambda_\infty$ a $\|(u_{1n}, u_{2n})\|_E \rightarrow +\infty$ pro $n \rightarrow \infty$. Předchozí věta zobecňuje výsledky získané pro skalární úlohu. I v případě systému dvou rovnic (při platnosti zmíněných předpokladů) tedy bifurkační diagram vypadá obdobně, jako jsme uvedli na Obrázku 3.1.

Od tohoto místa budeme pracovat se silnějším předpokladem pro funkce f_1, f_2 , konkrétně

$$(P3) \quad f_1, f_2 \text{ jsou } \gamma - \text{hölderovsky spojité funkce, } \gamma \in (0, 1).$$

Od těchto funkcí budeme vyžadovat splnění jednostranné Lipschitzovy podmínky (3.13), tj. předpokládáme, že existují konstanty $L_i > 0$ tak, že

$$f_i(s_1) - f_i(s_2) \leq L_i(s_1 - s_2) \quad \text{pro } s_1 \geq s_2, \quad (4.12)$$

pro $i = 1, 2$. Ostatní předpoklady zůstanou nezměněny.

Důvodem pro zesílení předpokladů je to, že spojitost pravé strany obecně nemusí pro existenci klasického řešení eliptických úloh stačit. Hölderovská spojitost nám ale umožňuje ukázat, že silná řešení musí být rovněž klasická. Jednostranná Lipschitzova podmínka zajistí jednoznačnost řešení, viz Sekce 3.3.1.

Lemma 4.4

Nechť $(\lambda, (u_1, u_2))$ je silné řešení (4.2). Pokud f_1, f_2 jsou γ -hölderovsky spojité funkce, pak $(\lambda, (u_1, u_2))$ je klasické řešení.

DŮKAZ. Provedeme modifikaci důkazu dle Lemmatu A.1 na straně 4991 v [8]. Pro fixní hodnotu λ je $u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, $p > n$. Protože Ω je třídy $C^{2,\nu}$, platí následující spojitě vnoření (Věta 2.8, str. 14).

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\gamma_1}(\bar{\Omega}) \quad \text{pro } 0 < \gamma_1 < 1 - \frac{n}{p}. \quad (4.13)$$

Funkce z prostoru $C^{1,\gamma_1}(\bar{\Omega})$ je zároveň Lipschitzovsky spojitá a z γ -hölderovské spojitosti funkce f_1 plyne, že

$$\begin{aligned} |f_1(u_2(x)) - f_1(u_2(y))| &= \frac{|f_1(u_2(x)) - f_1(u_2(y))|}{|u_2(x) - u_2(y)|^\gamma} |u_2(x) - u_2(y)|^\gamma \\ &\leq [f_1]_\gamma |u_2(x) - u_2(y)|^\gamma \\ &\leq [f_1]_\gamma c^\gamma \|x - y\|^\gamma \quad \forall x, y \in \Omega, \end{aligned}$$

kde c je Lipschitzova konstanta. Z tohoto odhadu tedy plyne $f_1(u_2) \in C^\gamma(\bar{\Omega})$. Protože nyní platí rovnost $-\Delta u_1 = f_1(u_2)$, lze využít Schauderovy odhady pro lineární eliptické úlohy a dostaneme $u_1 \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$ pro $\beta \in (0, \gamma)$. Z toho plyne, že u_1 je klasické. Pro u_2 se postupuje analogicky. \square

4.2 Metoda horních a dolních řešení

Nyní se vraťme k nestacionárnímu systému (4.1). Nalezneme dolní a horní řešení a ukážeme existenci klasického řešení u takového, že $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$. Nejprve však uvedeme důkaz slíbené obdoby Věty 3.8 na straně 24.

Věta 4.5 ([39], Theorem 12.1.1, str. 327)

Nechť Ω je třídy $C^{2,\nu}$, $\nu \in [0, 1]$, $u_1^0, u_2^0 \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ splňují podmínku kompatibility, neklesající funkce f_1, f_2 splňují předpoklad (P3) a jednostrannou Lipschitzovu podmínku (3.13). Nechť existují horní a dolní řešení taková, že $\underline{u}(x, t) \leq \bar{u}(x, t)$. Potom existuje jednoznačné řešení $u(x, t)$ systému (4.1) takové, že

$$\underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \bar{u}(x, t) \quad \text{v } \bar{\Omega}_T.$$

DŮKAZ. Nastíníme nejprve myšlenku důkazu. Pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme posloupnost $u^{(k)}(x, t) = (u_1^{(k)}(x, t), u_2^{(k)}(x, t))$, tak že $u^{(k)}$ je řešením úlohy

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta u_1^{(k)} = \lambda f_1(u_2^{(k-1)}) & \text{v } \Omega_T, \\ \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta u_2^{(k)} = \lambda f_2(u_1^{(k-1)}) & \text{v } \Omega_T, \\ u_1^{(k)} = u_2^{(k)} = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u_1^{(k)}(x, 0) = u_1^0(x) \geq 0 & \text{v } \Omega, \\ u_2^{(k)}(x, 0) = u_2^0(x) \geq 0 & \text{v } \Omega. \end{cases} \quad (4.14)$$

Na tomto místě upozorníme čtenáře na značení - $u^{(0)}$ bude značit nultý prvek posloupnosti $u^{(k)}$ (tedy počáteční podmínku iteračního procesu), kdežto u^0 potom počáteční podmínku systému (4.1).

Pokud zvolíme $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ jde o systém lineárních úloh a z Schauderovy teorie (Věta 2.24 na straně 17) plyne existence právě jednoho klasického řešení. Navíc z Schauderova odhadu (2.21) potom získáme informaci o regularitě řešení, konkrétně

$$u^{(k)} \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T), \quad (4.15)$$

pro $k \in \mathbb{N}$. Jako počáteční podmínku pro iterační proces (4.14) lze zvolit dolní řešení úlohy (4.1), tj. $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$. Takto vzniklou posloupnost označíme $\underline{u}^{(k)} = (\underline{u}_1^{(k)}, \underline{u}_2^{(k)})$. Tato volba ovšem není jediná. Je totiž možné zvolit také horní řešení, tj. $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, kdy obdobně tuto posloupnost označíme $\bar{u}^{(k)} = (\bar{u}_1^{(k)}, \bar{u}_2^{(k)})$.

Nyní ukážeme, že pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ v $\bar{\Omega}_T$ platí

$$\underline{u}^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k)}(x, t). \quad (4.16)$$

Pro $i = 1, 2$ označme $w_i^{(0)} = \bar{u}_i^{(0)} - \underline{u}_i^{(1)} = \bar{u}_i - \underline{u}_i^{(1)}$ a v Ω_T dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1^{(0)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(0)} &= \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1 - \left(\frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(1)} \right) &\geq \lambda f_1(\bar{u}_2) - \lambda f_1(\underline{u}_2) = 0, \\ \frac{\partial w_2^{(0)}}{\partial t} - \Delta w_2^{(0)} &= \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2 - \left(\frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(1)} \right) &\geq \lambda f_2(\bar{u}_1) - \lambda f_2(\underline{u}_1) = 0, \end{aligned}$$

kde jsme využili definici horního řešení a (4.14). Dále zřejmě

$$\begin{aligned} w_i^{(0)} &= \bar{u}_i^{(0)} - \bar{u}_i^{(1)} = \bar{u}_i - \bar{u}_i^{(1)} \geq 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \\ w_i^{(0)}(x, 0) &= \bar{u}_i(x, 0) - \bar{u}_i^{(1)}(x, 0) \geq u_i^0 - u_i^0 = 0 \quad \text{v } \Omega. \end{aligned}$$

Z principu maxima tedy $w_i \geq 0$ v $\bar{\Omega}_T$, tj. $\bar{u}_i \geq \bar{u}_i^{(1)}$. Zcela stejným postupem bychom ukázali, že v $\bar{\Omega}_T$ platí $\underline{u}_i^{(1)} \geq \underline{u}_i$, pokud bychom jako počáteční podmínku iteračního procesu zvolili dolní řešení.

Nyní označme $v_i^{(1)} = \bar{u}_i^{(1)} - \underline{u}_i^{(1)}$. Potom v Ω_T

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} - \Delta v_1^{(1)} &= \\ \frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(1)} - \left(\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_1^{(1)} \right) &= \lambda f_1(\bar{u}_2^{(0)}) - \lambda f_1(\underline{u}_2^{(0)}) \geq 0, \\ \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial t} - \Delta v_2^{(1)} &= \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(1)} - \left(\frac{\partial \underline{u}_2^{(1)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_2^{(1)} \right) &= \lambda f_2(\bar{u}_1^{(0)}) - \lambda f_2(\underline{u}_1^{(0)}) \geq 0, \end{aligned}$$

kde jsme využili kvazimonotonii funkce $f = (f_1, f_2)$. Obdobně i nyní platí

$$\begin{aligned} v_i^{(1)} &= \bar{u}_i^{(1)} - \underline{u}_i^{(1)} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \\ v_i^{(1)}(x, 0) &= \bar{u}_i^{(1)}(x, 0) - \underline{u}_i^{(1)}(x, 0) = u_i^0 - u_i^0 = 0 \quad \text{v } \Omega. \end{aligned}$$

Z principu maxima potom i nyní plyne nerovnost $\bar{u}_i^{(1)} \geq \underline{u}_i^{(1)}$ v $\bar{\Omega}_T$. Celkově tedy v $\bar{\Omega}_T$

$$\underline{u}^{(0)} \leq \underline{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(1)} \leq \bar{u}^{(0)}.$$

Nyní předpokládejme, že pro $k \geq 2$ v $\bar{\Omega}_T$ platí

$$\underline{u}^{(k-1)} \leq \underline{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(k)} \leq \bar{u}^{(k-1)}.$$

Označme $w_i^{(k)} = \bar{u}_i^{(k)} - \bar{u}_i^{(k+1)}$. Stejným způsobem jako v předchozím dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta w_1^{(k)} &= \\ \frac{\partial \bar{u}_1^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(k)} - \left(\frac{\partial \bar{u}_1^{(k+1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^{(k+1)} \right) &= \lambda f_1(\bar{u}_2^{(k-1)}) - \lambda f_1(\bar{u}_2^{(k)}) \geq 0, \\ \frac{\partial w_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta w_2^{(k)} &= \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(k)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(k)} - \left(\frac{\partial \bar{u}_2^{(k+1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^{(k+1)} \right) &= \lambda f_2(\bar{u}_1^{(k-1)}) - \lambda f_2(\bar{u}_1^{(k)}) \geq 0, \end{aligned}$$

tedy v $\bar{\Omega}_T$ bude $\bar{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k)}$. Obdobným způsobem lze snadno ukázat platnost nerovností $\underline{u}_i^{(k+1)} \geq \underline{u}_i^{(k)}$ a $\underline{u}_i^{(k+1)} \leq \bar{u}_i^{(k+1)}$. Nyní tedy nerovnost

$$\underline{u}^{(k)}(x, t) \leq \underline{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k+1)}(x, t) \leq \bar{u}^{(k)}(x, t), \quad (4.17)$$

plyne z principu matematické indukce. Protože posloupnost $\underline{u}^{(k)}$ ($\bar{u}^{(k)}$) je shora (zdola) omezená a neklesající (nerostoucí), existují bodové limity

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow +\infty} \underline{u}^{(k)}(x, t) &=: \underline{u}^\infty(x, t), \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{u}^{(k)}(x, t) &=: \bar{u}^\infty(x, t).\end{aligned}$$

Ze spojitosti $f = (f_1, f_2)$ plyne konvergence funkcí $f_1(u_2^{(k)})$, resp. $f_2(u_1^{(k)})$ k limitnímu prvku $f_1(u_2)$, resp. $f_2(u_1)$ (bez ohledu na to, jak zvolíme nultý prvek iteračního procesu, proto nyní značíme u_1, u_2 „standardně“). Ze Schauderových odhadů pak plyne avizovaná regularita (4.15). Z Schauderových odhadů také plyne stejnoměrná omezenost (pro každé k) posloupnosti $u^{(k)}$ v prostoru

$$C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T), \quad (4.18)$$

tj. jde skutečně o řešení systému (4.1).

Nyní ukážeme, že $\underline{u}^\infty(x, t) = \bar{u}^\infty(x, t)$. V $\bar{\Omega}_T$ označme $w_i = \underline{u}_i^\infty - \bar{u}_i^\infty$ pro $i = 1, 2$. Po dosazení do předpisu iteračního procesu (4.14) dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial t} - \Delta(w_1 + w_2) &= \\ \frac{\partial \underline{u}_1^\infty}{\partial t} - \Delta \underline{u}_1^\infty - \left(\frac{\partial \bar{u}_1^\infty}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1^\infty \right) + \frac{\partial \underline{u}_2^\infty}{\partial t} - \Delta \underline{u}_2^\infty - \left(\frac{\partial \bar{u}_2^\infty}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2^\infty \right) &= \\ \lambda(f_1(\underline{u}_2^\infty) - f_1(\bar{u}_2^\infty) + f_2(\underline{u}_1^\infty) - f_2(\bar{u}_1^\infty)) &\geq \lambda(L_1 + L_2)(w_1 + w_2) \geq 0,\end{aligned}$$

kde v poslední řádce jsme využili jednostrannou Lipschitzovskou podmínku (4.12). Z principu maxima pak plyne $w_1 + w_2 \geq 0$, ale zároveň $w_i \leq 0$ (dle nerovnosti (4.17)). Z toho plyne, že $w \equiv 0$ tj. $\underline{u}^\infty(x, t) = \bar{u}^\infty(x, t)$. Nalezené řešení je tedy jednoznačné. \square

Poznámka 4.6

V některých situacích může být požadavek regularity počátečních dat

$$u^{(0)} \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$$

zbytečně přísný. Ukazuje se, že je možné zvolit $u^{(0)}$ z prostoru

$$C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$$

a iterační proces i v tomto případě konverguje k požadovanému řešení. Jedinou odlišností je to, že nyní bude

$$\begin{aligned}u^{(1)} &\in C^{\gamma, \frac{\gamma}{2}}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T), \\ u^{(k)} &\in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T),\end{aligned}$$

pro $k > 1$. První iterace tedy ztratí prostorovou i časovou hladkost, další iterace se ale už ovšem (důsledkem platnosti Schauderových odhadů) v očekávaných prostorech nachází.

Ukazuje se, že takto získané řešení je definované pouze pro $t < \bar{T}$, tj. jen do času výbuchu eventuálního horního řešení. Pokud máme k dispozici dolní řešení, je možné $u(x, t)$ lokálně prodloužit. Je zřejmé, že pokud požadujeme opět klasické řešení, je toto prodloužení možné pouze pro $t < \underline{T}$, což je čas výbuchu dolního řešení. Z tohoto důvodu je potřeba další tvrzení o lokální existenci.

Věta 4.7 ([25], Theorem 8.2, str. 200, reformulováno pro systém dvou rovnic)
Nechť $t_0 > 0$, Ω je třídy $C^{2,\nu}$, $\nu \in [0, 1]$, $u_1^0, u_2^0 \in C^{2,\gamma}(\Omega)$ splňují podmínku kompatibility, f_1, f_2 splňují předpoklad (P3). Označíme-li

$$\Omega_{t_0} := \{(x, t) \in \Omega_T : t - t_0 < T\}, \quad (4.19)$$

pak existuje t_0 takové, že úloha (4.1) má klasické řešení v Ω_{t_0} .

V citované literatuře je toto tvrzení uvedeno pouze pro skalární rovnici, ale vzhledem k důkazové technice (Schauderova věta o pevném bodě) je možné získat totožný výsledek i pro systémy více rovnic.

Poznámka 4.8

V některých případech je možné takto získané řešení prodloužit v zobecněném (například slabém) smyslu i pro $t > T$. Otázky, zda je to možné a případně zda je toto rozšíření jednoznačné, jsou ovšem extrémně obtížné. Navíc je třeba některých dalších požadavků na hladkost a růst funkce f .

4.2.1 Globální omezená řešení

V této sekci se budeme zabývat hledáním hodnot λ takových, že systém (4.1) má globální omezené řešení. Analýza stacionární úlohy z minulé sekce naznačuje, že pro každé $\lambda \in [0, \lambda^*)$ by mělo být možné najít globální klasické řešení příslušné parabolické úlohy.

Věta 4.9

Nechť Ω je třídy $C^{2,\nu}$, $\nu \in [0, 1]$, $u_0^1, u_0^2 \in C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$ splňují podmínku kompatibility a f_1, f_2 jsou neklesající funkce, které splňují (P1) a (P3). Dále nechť $\lambda \in [0, \lambda^)$ a $(u_1^0, u_2^0) \leq (w_1(x), w_2(x))$, kde $w(x) = (w_1(x), w_2(x))$ je minimální klasické řešení stacionární úlohy (4.2). Potom úloha (4.1) má globální klasické řešení.*

DŮKAZ. Existence kladného minimálního klasického řešení $w(x) = (w_1(x), w_2(x))$ plyne z Věty 4.2 a Lemmatu 4.4. Stačí tedy zvolit

$$(\underline{u}_1(x, t), \underline{u}_2(x, t)) = (0, 0) \leq (w_1(x), w_2(x)) = (\bar{u}_1(x, t), \bar{u}_2(x, t)).$$

Pak jde zřejmě o dolní a horní řešení systému (4.1). Na základě Věty 4.5 dostaneme existenci globálního klasického řešení parabolické úlohy (4.1). \square

Dále se budeme zabývat řešeními, která přísluší hodnotám $\lambda \geq \lambda^*$. S ohledem na zkušenosti se skalárními úlohami lze očekávat, že nyní bude existovat pouze lokální řešení.

4.2.2 Výbuch řešení v konečném čase

Využijeme myšlenky uvedené v Sekci 3.3.2 předchozí kapitoly a ukážeme, že existuje dolní řešení, které vybuchuje v konečném čase.

Konstrukce dolního řešení

Nášim cílem je ukázat, že $\underline{u}(x, t) = (\underline{u}_1(x, t), \underline{u}_2(x, t)) = (z(v(x, t)), z(v(x, t)))$, kde

$$\begin{cases} z_v = g_\epsilon(z), \\ z(0) = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

pro vhodné $g_\epsilon(z)$ (značení bude zřejmé dále) je dolní řešení. Pokud totiž provedeme dosazení takto definované funkce do (4.1), dostaneme obdobně jako ve skalárním případě

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} - \Delta \underline{u}_1 &= g_\epsilon(z)(v_t - \Delta v) - g'_\epsilon(z)g_\epsilon(z)|\nabla v|^2, \\ \frac{\partial \underline{u}_2}{\partial t} - \Delta \underline{u}_2 &= g_\epsilon(z)(v_t - \Delta v) - g'_\epsilon(z)g_\epsilon(z)|\nabla v|^2,\end{aligned}\tag{4.21}$$

pro vhodné $v(x, t)$. Pokud $g_\epsilon(z)$ bude neklesající, kladná a diferencovatelná funkce a pokud $v(x, t)$ zvolíme stejně jako v Lemmatu 3.11, pak je zřejmé, že stačí $g_\epsilon(z)$ volit tak, aby platilo

$$g_\epsilon(z) \leq f_1(z) \text{ a } g_\epsilon(z) \leq f_2(z),\tag{4.22}$$

k tomu, aby $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ bylo dolní řešení. Naivní volbou by na první pohled mohla být funkce $\min(f_1(z), f_2(z))$. Bohužel, tato funkce není diferencovatelná. K dosažení požadovaného výsledku ji proto aproximujeme posloupností hladkých funkcí zdola.

Pro další potřeby označme $q(s) := \min(f_1(s), f_2(s))$, $g(s) = q(s) - \delta$, pro $0 < \delta < b$ (viz předpoklad (P2)) a připomeňme, že pro $\epsilon > 0$ značí ϕ_ϵ zhlazovací jádro (viz. Sekce 2.2) a existují $K_i \geq 0$ tak, že

$$|f_i(s_1) - f_i(s_2)| \leq K_i |s_1 - s_2|^\gamma, \quad \text{pro všechna } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, i = 1, 2.\tag{4.23}$$

Věta 4.10

Nechť

$$0 < \delta < b,$$

$$0 < \epsilon \leq \left(\frac{\delta}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\lambda \geq \lambda^k = \lambda^*(1 + k) \text{ pro } k \geq 0.$$

Nechť dále

- z je řešením (4.20), kde $g_\epsilon(z) := (\phi_\epsilon * g)(z)$ a
- $v(x, t)$ je řešením (3.18).

Potom funkce $\underline{u}(x, t) = (\underline{u}_1(x, t), \underline{u}_2(x, t)) = (z(v(x, t)), z(v(x, t)))$ je dolní řešení systému (4.1), které vybuchuje v konečném čase

$$\underline{T} \leq -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{aI}{1 + k} \right),\tag{4.24}$$

kde jsme označili

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{1}{g_\epsilon(s)} ds.\tag{4.25}$$

K důkazu tohoto tvrzení potřebujeme následující technické lemma.

Lemma 4.11

Nechť f_1, f_2 jsou neklesající a splňují předpoklad (P3). Potom

1. q je neklesající a splňuje předpoklad (P3),
2. $g_\epsilon(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$,

3. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(s) = g(s)$ stejnoměrně na kompaktních podintervalech \mathbb{R} ,
4. $g_\epsilon(s)$ je neklesající v proměnné s na \mathbb{R} ,
5. pro každé pevné $s \in \mathbb{R} : g_\epsilon(s) \nearrow g(s)$ pro $\epsilon \searrow 0$,
6. pro všechna $0 < \epsilon \leq \left(\frac{\delta}{K_1 + K_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$ a všechna $s \in \mathbb{R}$ platí $g_\epsilon(s) \leq f(s)$.

DŮKAZ. K důkazu první části prvního bodu vezměme $s_1 < s_2$ a ukažme, že platí $q(s_1) \leq q(s_2)$.

Nechť nejprve platí $f_1(s_1) \leq f_2(s_1)$. Potom z vlastností minima musí být $q(s_1) = f_1(s_1)$. Nyní pro bod s_2 mohou nastat dvě možnosti.

- (a) $f_1(s_2) \leq f_2(s_2)$
V tomto případě $q(s_1) = f_1(s_1) \leq f_1(s_2) = q(s_2)$.
- (b) $f_1(s_2) \geq f_2(s_2)$
Potom $q(s_1) = f_1(s_1) \leq f_2(s_1) \leq f_2(s_2) \leq f_1(s_2) = q(s_2)$.

Nyní naopak nechť platí $f_1(s_1) \geq f_2(s_1)$. Pro bod s_2 nastává

- (a) $f_1(s_2) \leq f_2(s_2)$
V tomto případě $q(s_1) = f_2(s_1) \leq f_1(s_1) \leq f_1(s_2) \leq f_2(s_2) = q(s_2)$.
- (b) $f_1(s_2) \geq f_2(s_2)$
 $q(s_1) = f_2(s_1) \leq f_2(s_2) = q(s_2)$.

K důkazu druhé části tohoto bodu využijeme identitu

$$q(s) = \min(f_1(s), f_2(s)) = \frac{1}{2}(f_1(s) + f_2(s) - |f_1(s) - f_2(s)|)$$

a dále pro $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\begin{aligned} |q(s_1) - q(s_2)| &= \\ \left| \frac{f_1(s_1) + f_2(s_1) - |f_1(s_1) - f_2(s_1)|}{2} - \frac{f_1(s_2) + f_2(s_2) - |f_1(s_2) - f_2(s_2)|}{2} \right| &= \\ \left| \frac{f_1(s_1) - f_1(s_2)}{2} + \frac{f_2(s_1) - f_2(s_2)}{2} + \frac{|f_1(s_2) - f_2(s_2) - |f_1(s_1) - f_2(s_1)||}{2} \right| &\leq \\ |f_1(s_1) - f_2(s_2)| + |f_2(s_1) - f_2(s_2)| &\leq (K_1 + K_2)|s_1 - s_2|^\gamma. \end{aligned}$$

Druhý a třetí bod plyne snadno z definice $g_\epsilon(s)$ a z vlastností zhlazovacích jader uvedených v Sekci 2.2.

Čtvrtý bod plyne z bodu prvního – q je neklesající a vzhledem k definici $g_\epsilon(s)$ pak pro pevné s a $\epsilon \rightarrow 0$ plyne, že derivace se může maximálně zvětšit.

Dále, protože platí $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_{\epsilon}(y) dy = 1$, q je neklesající a $y \in (-\epsilon, \epsilon)$, dostaneme

$$\begin{aligned} g_{\epsilon}(s) - q(s) &= (\phi_{\epsilon} * g)(s) - q(s) = \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_{\epsilon}(y)(g(s-y) - q(s)) dy = \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_{\epsilon}(y)(q(s-y) - q(s) - \delta) dy \leq \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_{\epsilon}(y)(q(s+\epsilon) - q(s) - \delta) dy. \end{aligned}$$

Protože funkce q je ale také γ -hölderovsky spojitá, dostaneme v posledním řádku

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_{\epsilon}(y)(q(s+\epsilon) - q(s) - \delta) dy \leq (K_1 + K_2)\epsilon^{\gamma} - \delta \leq 0,$$

pro

$$0 < \epsilon \leq \left(\frac{\delta}{K_1 + K_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

□

Nyní již můžeme dokázat Větu 4.24.

Důkaz Věty 4.24. Vyjdeme z (4.21). Dle předchozího Lemmatu je funkce $g_{\epsilon}(z)$ neklesající a hladká, z čehož plyne nezápornost členu $g'_{\epsilon}(z)g_{\epsilon}(z)|\nabla v|^2$. Protože nyní skutečně platí (4.22), s využitím konstrukce funkce v z Lemmatu 3.11, předpokladu $\lambda \geq \lambda^k = \lambda^*(1+k)$ pro $k \geq 0$ a Lemmatu 4.11 dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} - \Delta \underline{u} &= g_{\epsilon}(z)(v_t - \Delta v) - g'_{\epsilon}(z)g_{\epsilon}(z)|\nabla v|^2 \leq \lambda f_1(\underline{u}_2), \\ \frac{\partial \underline{u}_2}{\partial t} - \Delta \underline{u} &= g_{\epsilon}(z)(v_t - \Delta v) - g'_{\epsilon}(z)g_{\epsilon}(z)|\nabla v|^2 \leq \lambda f_2(\underline{u}_1). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Nerovnosti v okrajových a počátečních podmínkách jsou splněny beze změny oproti skalární úloze. Čas výbuchu dolního řešení dostaneme opět s využitím postačující podmínky z Věty 3.10. □

Konstrukce horního řešení

Nyní uvedeme konstrukci horního řešení. K bodovému srovnání dolního řešení s řešením horním by bylo vhodné mít k dispozici analogii srovnávacího principu, který byl uveden ve Větě 3.12 na str. 28. Bohužel se ukazuje, že bez doplňujících předpokladů tento výsledek pro systémy rovnic neplatí. Pokud je ovšem nelinearita $f = (f_1, f_2)$ kvazimonotónně neklesající funkce (Definice 2.2 na str. 11), pak obdoba Věty 3.12 platí. Tento fakt je nutné zohlednit zejména v případech, kdy se monotonie funkcí f_1, f_2 liší (tj. např. f_1 je neklesající a f_2 nerostoucí).

Věta 4.12 ([5], Theorem 4.3, str. 90)

Nechť $f = (f_1, f_2)$ je kvazimonotónně neklesající,

$$\underline{u}, \bar{u} \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$$

jsou takové, že

$$\begin{aligned} \underline{u}_t - \Delta \underline{u} - \lambda f(\underline{u}) &< \bar{u}_t - \Delta \bar{u} - \lambda f(\bar{u}) && \text{v } \Omega_T, \\ \underline{u} &< \bar{u} && \text{na } \partial_p \Omega_T. \end{aligned}$$

Pak $\underline{u}(x, t) < \bar{u}(x, t)$ v $\bar{\Omega}_T$.

DŮKAZ. Důkaz je obdobný jako v případě skalární úlohy ve Větě 3.12. \square

Nyní již můžeme přistoupit ke konstrukci horního řešení. Zvolme proto

$$\bar{u}(x, t) = (\bar{u}_1(x, t), \bar{u}_2(x, t)) = (\theta(t), \theta(t)), \quad (4.27)$$

kde θ je řešením úlohy

$$\begin{cases} \theta'(t) = \lambda \max(f_1(\theta), f_2(\theta)) + \epsilon, & t > 0, \\ \theta(0) = \epsilon, \end{cases} \quad (4.28)$$

pro $\epsilon > \max_{x \in \bar{\Omega}} \{u_1^0(x), u_2^0(x)\} =: M$.

Věta 4.13

Funkce $\bar{u}(x, t) = (\bar{u}_1(x, t), \bar{u}_2(x, t)) = (\theta(t), \theta(t))$ definovaná úlohou (4.28) je striktním horním řešením systému (4.1).

DŮKAZ. Přímým dosazením do (4.1) dostaneme

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - \Delta \bar{u}_1 = \lambda \max(f_1(\theta), f_2(\theta)) + \epsilon > \lambda f_1(\theta) = \lambda f_1(\bar{u}_2), \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \Delta \bar{u}_2 = \lambda \max(f_1(\theta), f_2(\theta)) + \epsilon > \lambda f_2(\theta) = \lambda f_2(\bar{u}_1). \end{cases}$$

Budeme-li ověřovat požadované nerovnosti v počátečních podmínkách, dostaneme

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x, 0) &= \theta(0) = \epsilon > M \geq u_1^0, \\ \bar{u}_2(x, 0) &= \theta(0) = \epsilon > M \geq u_2^0. \end{aligned}$$

Skutečně tedy jde o striktní horní řešení. \square

Nyní, když máme dolní i horní řešení, můžeme, obdobně jako ve skalárním případě, využít Větu 4.12 a dostaneme, že $\underline{u} < \bar{u}$ i v případě systému (4.1). Nyní již shrneme dosažené výsledky.

Věta 4.14

Nechť $f = (f_1, f_2)$ je kvazimonotónně neklesající funkce, jež splňuje předpoklady (P1), (P2), (P3), nutnou podmínku (3.5) a jednostrannou Lipschitzovu podmínku (3.13). Zvolme nejmenší $k \geq 0$ takové, že $aI < 1 + k$, kde $I < +\infty$ je definováno v (4.25). Potom pro $\lambda \geq \lambda^k$ vybuchuje jednoznačné řešení úlohy

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \lambda f_1(u_2) & \text{v } \Omega_T, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = \lambda f_2(u_1) & \text{v } \Omega_T, \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{na } \partial \Omega_T, \\ u_1(x, 0) = u_1^0 & \text{v } \Omega, \\ u_2(x, 0) = u_2^0 & \text{v } \Omega. \end{cases}$$

v konečném čase T_0 . Pro časy výbuchu navíc platí odhad

$$\bar{T} = \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{1}{\lambda \max(f_1(s), f_2(s)) + \epsilon} ds \leq T_0 \leq -\frac{1}{\lambda_1} \ln \left(1 - \frac{aI}{1+k} \right) = \underline{T}.$$

DŮKAZ. Jako počáteční data pro iterační proces (4.14) zvolíme dolní řešení konstruované ve Větě 4.10, tj.

$$u^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}) = (\underline{u}_1(x, t), \underline{u}_2(x, t)) = (z(v(x, t)), z(v(x, t))).$$

Dle Poznámky 2.15 na straně 16 platí $\varphi_1(x) \in C^{2,\nu}(\bar{\Omega})$ pro první vlastní funkci Laplaceova operátoru s Dirichletovou okrajovou podmínkou. Na základě tohoto výsledky potom z Schauderovy teorie pro parabolické rovnice (viz (2.21) na straně 17) dostaneme $v(x, t) \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}_T)$. Z diferencovatelnosti z plyne Lipschitzovská spojitost této funkce a tedy (obdobně jako v důkazu Lemmatu 4.4) $z(v(x, t)) \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}_T)$. Existence a jednoznačnost řešení tedy následně plyne z Věty 4.5. Odhady časů výbuchu potom plynou z Vět 4.10 a 4.13. \square

Teorie samovznícení je důležitá oblast aplikovaného výzkumu, která je široce využitelná v praxi. Bohužel, vzhledem ke složitosti těchto úloh, je nutné uvažovat mnohá zjednodušení, které jsme zmínili v úvodní sekci. I přes tato zjednodušení ale není známo mnoho výsledků, které by postihli reakčně difuzní úlohy (nejen) se superlineární nelinearitou v maximální možné obecnosti. Většina studií se zabývá pouze konkrétními typy nelinearity, např. exponenciálními nebo mocninnými.

S ohledem na reálné aplikace je nutné nejenom zjistit, zda k výbuchu řešení v konečném čase může dojít, ale také je potřeba tento čas blíže specifikovat.

Z hlediska kvalitativní analýzy (nejen) těchto úloh je použitelná víceméně pouze námi zmiňovaná metoda horních a dolních řešení. I přes její nesporné výhody má taktéž několik nedostatků. Zejména pak to, že horní a dolní řešení daného systému není dané jednoznačně. To znamená, že najdeme-li tuto dvojici, jež v konečném čase vybuchují, máme také odhad intervalu $(\underline{T}, \overline{T})$, kde se nachází skutečný čas výbuchu. Problém nastává, pokud je jedno z řešení (dolní nebo horní) zvoleno nevhodně. Metoda pak sice poskytne informaci o tom, že skutečné řešení vybuchne v konečném čase, ale uvedený interval může být značně široký.

Z hlediska numerické analýzy reakčně difuzních rovnic se superlineárními nelinearity se setkáváme s několika obtížemi. Jednak oblast, na které je úloha modelovaná, může mít poměrně složitou geometrii a její diskretizace nemusí být snadná. Dalším problémem je chování takového systému na okolí času výbuchu T_0 . Zde dochází k prudkému nárůstu funkčních hodnot řešení, profil řešení je strmý a řešení ztrácí hladkost. Zvláště pak v případech extrémně rychlého růstu pravé strany je numericky nemožné řešení rekonstruovat.

Z těchto důvodů je vždy nutné kombinovat numerický a analytický přístup pro získání maximálního možného množství informací o chování studovaného systému.

Ilustrační příklad – Kaplanova metoda

Pro názornost uvažujme úlohu s konkrétní nelinearitou a s obecnou počáteční podmínkou

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda(u^2 + 1) & \text{v } \Omega_T, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega_T, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{v } \Omega. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Zvolme funkci φ_1 tak, že je kladná v Ω a $\int_{\Omega} \varphi_1(x) \, dx = 1$. Rovnici (A.1) vynásobíme funkcí φ_1 a integrujeme přes oblast Ω . Pak s využitím Greenovy identity dostaneme

$$\int_{\Omega} u_t(x, t) \varphi_1(x) \, dx + \lambda_1 \int_{\Omega} u(x, t) \varphi_1(x) \, dx = \lambda \int_{\Omega} (u^2(x, t) + 1) \varphi_1(x) \, dx. \quad (\text{A.2})$$

Označíme-li $w(t) = \int_{\Omega} u(x, t) \varphi_1(x) \, dx$, potom dostaneme

$$|w(t)| \leq \int_{\Omega} |u(x, t) \varphi_1(x)| \, dx \leq |\Omega| \sup_{x \in \Omega} |u(x, t)|, \quad (\text{A.3})$$

kde $|\Omega|$ je Lebesgueova míra oblasti Ω . S využitím Jensenovy nerovnosti dostaneme diferenciální nerovnost

$$\begin{cases} w' \geq \lambda \left(w^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda} w + 1 \right), & t > 0, \\ w(0) = w_0(x), \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

kde $w_0(x) := \int_{\Omega} u_0(x) \varphi_1(x) \, dx$. Poznamenejme, že záměna derivace a integrálu je možná, neboť u je klasické, tj. partiální derivace existují a jsou spojité. Nyní vezměme úlohu

$$\begin{cases} v' = \lambda \left(v^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda} v + 1 \right), & t > 0, \\ v(0) = v_0 \geq 0, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

kde $v_0 = w_0$. Na tuto úlohu aplikujeme srovnávací princip pro obyčejné diferenciální rovnici z Věty 2.28, str. 18, ze kterého plyne $w(t) \geq v(t)$. Stačí tedy vyšetřovat řešení úlohy (A.5).

Separujeme-li v (A.5) proměnné a provedeme-li integraci,

$$\int \frac{dv}{\lambda \left(v^2 - \frac{\lambda_1}{\lambda} v + 1 \right)} = \int dt, \quad (\text{A.6})$$

dostaneme řešení ve tvaru

$$v(t) = \frac{\lambda_1 + B \tan \left(\frac{B}{2} t + \arctan \left(\frac{2\lambda v_0 - \lambda_1}{B} \right) \right)}{2\lambda}, \quad (\text{A.7})$$

kde $B := \sqrt{4\lambda^2 - \lambda_1^2} \neq 0$. Nyní rozlišme tři případy.

1. $\lambda > \frac{\lambda_1}{2}$

V tomto případě je $B \in \mathbb{R}$ a vzhledem k definičnímu oboru funkce $t \mapsto \tan t$ dochází k výbuchu řešení v konečném čase T_0 pokud

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} \frac{B}{2} t + \arctan \left(\frac{2\lambda v_0 - \lambda_1}{B} \right) = \frac{\pi}{2},$$

z čehož získáme

$$T_0 = \frac{2}{B} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{2\lambda v_0 - \lambda_1}{B} \right) \right).$$

2. $\lambda < \frac{\lambda_1}{2}$

Nyní je $B = i\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}$ ryze imaginární, tj. po dosazení dostaneme

$$v(t) = \frac{\lambda_1 + i\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2} \tan \left(i\frac{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}}{2} t + \operatorname{arctanh} \left(i\frac{2\lambda v_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}} \right) \right)}{2\lambda}.$$

Využijeme-li identity

$$\begin{aligned} \arctan(it) &= -i \operatorname{arctanh}(t), \\ \tan(it) &= i \tanh(t), \end{aligned}$$

platné pro každé reálné t , lze získat řešení ve tvaru

$$v(t) = \frac{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}}{2} t - \operatorname{arctanh} \left(\frac{2\lambda v_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}} \right) \right)}{2\lambda},$$

které je konečné jen tehdy, když

$$-1 < \frac{2\lambda v_0 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}} < 1,$$

tj.

$$\frac{\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda} < v_0 < \frac{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda}, \quad (\text{A.8})$$

jak plyne z definičního oboru funkce $t \mapsto \operatorname{arctanh} t$.

$$3. \lambda = \frac{\lambda_1}{2}$$

V tomto případě nemá řešení tvar (A.7). Namísto toho lze opět separací úlohy po dosažení hodnoty $\lambda = \frac{\lambda_1}{2}$ dospět k

$$v(t) = \frac{2(1-v_0)}{2 + \lambda_1(1-v_0)t} + 1, \quad (\text{A.9})$$

a snadno získáme, že pro $v_0 > 1$ řešení vybuchuje v čase

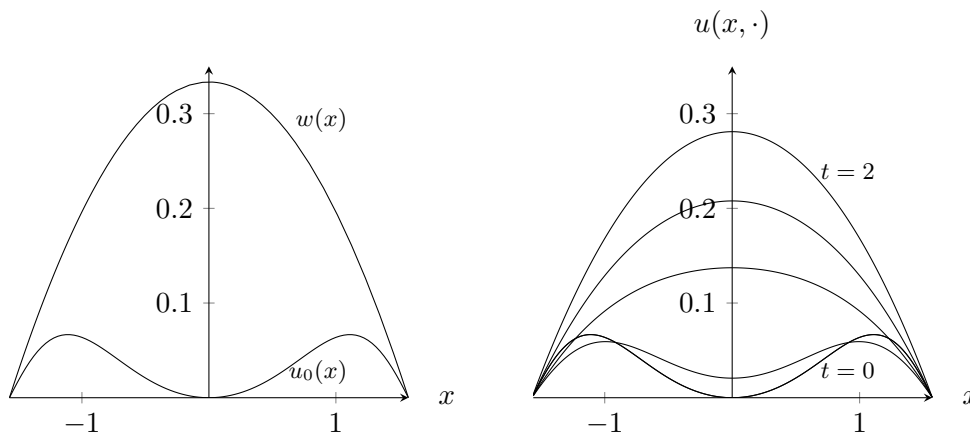
$$T_0 = \frac{2}{\lambda_1(1-v_0)} < +\infty. \quad (\text{A.10})$$

Je zajímavé, co se děje v případě kritické hodnoty $\lambda_1/2$. Pokud zvětšujeme oblast Ω , pak se jistě zmenšuje první vlastní číslo λ_1 , tj. kritická λ^* hodnota se přibližuje hodnotě $\lambda = 0$. Čas výbuchu řešení se bude taktéž zvětšovat.

Pro potřeby numerické ilustrace zvolme v uvedeném příkladu $\Omega = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. První vlastní číslo Dirichletova Laplaciánu na tomto intervalu je $\lambda_1 = 1$. Kritická hodnota je potom rovna $\lambda^* = \frac{1}{2}$, jak plyne z nerovnosti $s^2 + 1 > 2s + \epsilon_1$, $\epsilon_1 > 0$.

Nyní zvolíme jednu hodnotu $\lambda = \frac{1}{4}$, počáteční podmínku $u_0(x) = \frac{1}{15} \sin \frac{4}{\pi} x^2$ a stacionární řešení označme $w(x)$.

V následujících obrázcích je naznačena konvergence $u(x, t)$ ke stacionárnímu



Obrázek A.1: Stacionární řešení $w(x)$, počáteční podmínka $u_0(x)$ a profil řešení pro hodnotu $\frac{1}{4}$ na některých časových hladinách.

řešení $w(x)$ pro $t \rightarrow +\infty$. To je očekávané chování, neboť víme, že pro zvolenou hodnotu λ existuje globální řešení.

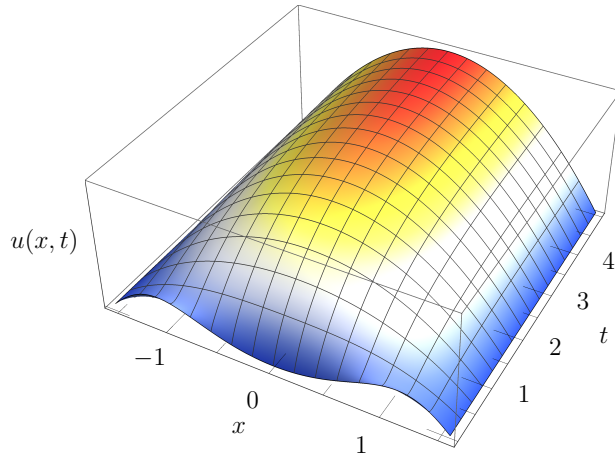
Dále zvolme hodnotu $\lambda = 1.58$. V souladu s Větou 3.15 platí

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Je tedy třeba najít hodnotu k takovou, že zároveň platí

$$\lambda \geq \lambda^*(1+k) \text{ a } aI < 1+k. \quad (\text{A.11})$$

Dosažením dostaneme $1.58 \geq 1/2(1+k)$ a zároveň $\pi < 1+k$. Takový systém nerovností má jistě neprázdný průnik a tedy hledané číslo k existuje.

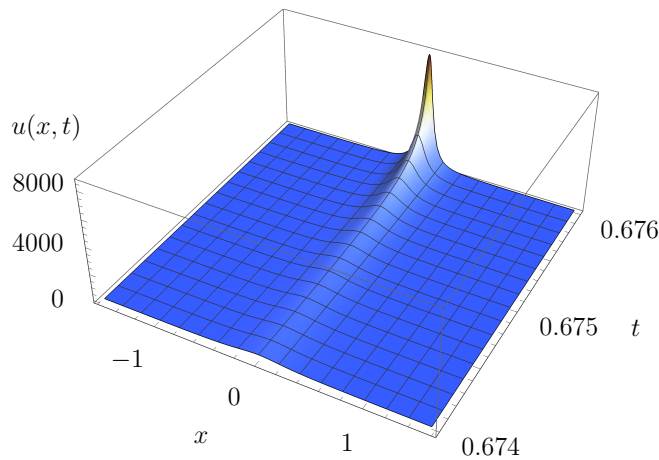


Obrázek A.2: Prostorový graf řešení $u(x, t)$ pro hodnotu $\lambda = \frac{1}{2}$.

Volba $\lambda = 1.58$ tedy vede k výbuchu řešení v konečném čase. Tento čas je zdola omezen dle nerovnosti (3.30), ze které dostaneme

$$T(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{ds}{1.58(s^2 + 1) + \epsilon}. \quad (\text{A.12})$$

Lze ověřit, že $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T(\epsilon) = 1$. Obrázek A.3 ukazuje profil řešení. Z monotonie řešení v čase je zřejmé, že k problémům z hlediska numerického výpočtu dochází v čase mnohem menším, než jsme dostali analytickým postupem. V tomto případě dochází již pro $t = 0.676$ k extrémnímu nárůstu funkčních hodnot, profil řešení je strmý a numerická rekonstrukce řešení není snadná.

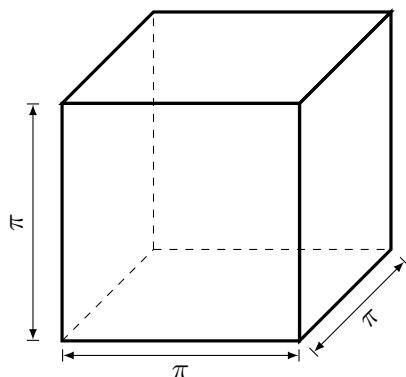


Obrázek A.3: Profil řešení pro $t \in (0.674, 0.676)$.

 Ilustrační příklad – skladovací prostor

Pro představu uvažujme zmíněný nákladový prostor v námořní lodi, v němž je přepravováno jisté množství uhlí. Pro potřeby této sekce budeme body prostoru \mathbb{R}^3 značit standardně, tj. souřadnicemi (x, y, z) .

Uvažujme množinu $\Omega := [0, \pi]^3$ v prostoru \mathbb{R}^3 , viz následující obrázek.



Obrázek B.1: Ilustrační obrázek k příkladu.

Bez újmy na obecnosti lze uvažovat, že délky stran jsou rovny π . Tato skutečnost je výhodná při výpočtu prvního vlastního čísla Laplaceova operátoru na této oblasti.

První vlastní číslo úlohy spolu s vlastní funkcí

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

budeme hledat separací proměnných, tj. $u(x, y, z) = V_1(x)V_2(y)V_3(z)$, $u \not\equiv 0$. Dosazením zpět do definiční úlohy dostaneme

$$-\left(\frac{V_1''(x)}{V_1(x)} + \frac{V_2''(y)}{V_2(y)} + \frac{V_3''(z)}{V_3(z)}\right) = \lambda. \quad (\text{B.2})$$

Z tohoto řádku plyne, že každý z výrazů na levé straně musí být roven konstantě m_i , $i = 1, 2, 3$. Hodnota λ potom bude dána součtem $\lambda = m_1 + m_2 + m_3$. Po zohlednění okrajových podmínek potom dostaneme funkce V_i jako řešení okrajových

úloh pro obyčejné diferenciální rovnice

$$\begin{cases} -V_i'' = m_i V_i, & x, y, z \in (0, \pi), \\ V_i(0) = V_i(\pi) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

pro $i = 1, 2, 3$.

Ze standardní teorie obyčejných diferenciálních rovnic plyne, že

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sin(\sqrt{m_1}x) \sin(\sqrt{m_2}y) \sin(\sqrt{m_3}z), \\ \lambda_{k,l,n} &= k^2 + l^2 + n^2, \quad k, l, m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Potom tedy $\lambda_1 := \lambda_{1,1,1} = 3$.

Kinetické parametry uhlí jsme převzali z článku [40], který je podložen americkou studií z roku 1987 [36]. Autoři prvního zmíněného článku pomocí CFD modelu studovali vývoj teploty uhlí v komoře, kam by bylo možné umístit přibližně 12000 kg uhlí. Počáteční teplota byla stanovena na 300 K a uvažovaným reaktantem byl pouze kyslík, jehož koncentrace ve vzduchu je přibližně 20.95 %. Navíc autoři uvažují, že komora má otvor, kudy do ní proudí vzduch. Tím byla zajištěna stálá koncentrace kyslíku v objemu komory, ale dochází tímto způsobem také ke chlazení. Bylo zjištěno, že asi po 25 dnech by došlo k prudkému nárůstu teploty materiálu na teplotu kolem 500 K, což by vedlo k nezvratné reakci.

Pro naše ilustrační účely budeme uvažovat po celou dobu experimentu konstantní 20.95% koncentraci kyslíku v komoře. Počáteční teplota vzduchu i materiálu bude 300 K, tj. $\Theta_0 = \Theta_a = 300$ K, což je přibližně pokojová teplota. Z této volby plyne (viz odvození v sekci Předmluva), že $u_0 = 0$. Kinetické a fyzikální vlastnosti studovaného uhlí (lignit, tj. hnědé uhlí, označeno jako No. 80–2, obsahuje 65.2 % uhlíku, 5.9 % vodíku, 1.6 % dusíku, 0.7 % síry, vlhkost je 11 %) jsou uvedeny v následující tabulce.

Parametr	Hodnota	Jednotka
Hustota uhlí ρ	1240	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Sypná hustota	870	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Měrná tepelná kapacita c	1003.2	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Tepelná vodivost k	0.1998	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Reakční teplo Q_0	300	$\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
Aktivační energie E	66.5	$\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
Pre-exponenciální faktor A^*	$1.9 \cdot 10^6$	$\text{K} \cdot \text{s}^{-1}$
Průměr uhlí	2	cm
Univerzální plynová konstanta R	$8.3144598 \cdot 10^{-3}$	$\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Tabulka B.1: Tabulka fyzikálních a kinetických parametrů, převzato z [40].

Mimo složení uvažovaného uhlí je také důležitá jeho vlhkost. Tepelná vodivost vody je totiž až 25–krát větší než tepelná vodivost vzduchu, tj. vlhké uhlí bude mít větší reaktivitu.

Uvedená tabulka neposkytuje všechny hodnoty, které budou k výpočtu nutné. Některé tedy budeme muset dopočítat. Molární objem vzduchu při teplotě 300 K a atmosférickém tlaku je $24.62 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$. Koncentrace kyslíku ve vzduchu (tj. počet molů na litr vzduchu) potom bude

$$C = \frac{0.2095}{24.62} = 0.00851 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1} = 0.00851 \text{ kmol} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (\text{B.4})$$

Další veličinou, kterou je nutno dopočítat je pre-exponenciální faktor A . Hodnota A^* , která je uvedena v tabulce, odpovídá reakci nultého řádu. Dle odhadů z [33] je ale pro zvolený druh uhlí reakce přibližně řádu 0.61. Vztah mezi hodnotami A a A^* je pak dle [40] dán jako

$$A = \frac{\rho c}{Q_0 C^{0.61}} A^* \approx 1.44273 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}. \quad (\text{B.5})$$

Pro další výpočet potom použijeme

$$\begin{aligned} \frac{E}{R} &\approx 7998.11 \text{ K}, \\ CQ_0 &\approx 2553000 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}, \\ k &= 0.1998 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \Theta_0 &= 300 \text{ K}, \\ r &= \frac{E}{R\Theta_0^2} \approx 0.089 \text{ K}^{-1}. \end{aligned}$$

S ohledem na Větu 3.4 na str. 22 potom řešení této úlohy vybuchuje z nulové počáteční podmínky, pokud $\lambda \geq \lambda^*$. Pokud dosadíme všechny uvedené hodnoty do (14), tj.

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{d^2}{k} CQ_0 A \exp\left(-\frac{E}{R\Theta_0}\right) \exp\left(-\frac{Eu_0}{R\Theta_0^2}\right), \\ \lambda^* &= \frac{\lambda_1}{r}, \end{aligned}$$

dostaneme $d \approx 2.63$, jakožto kritickou hodnotu nerovnosti $\lambda \geq \lambda^*$.

Vzhledem k definici čísla d (viz (8) na straně 5) potom bude kritický objem oblasti Ω roven

$$V = (2.63 \cdot \pi)^3 \text{ m}^3 = 565.28 \text{ m}^3. \quad (\text{B.6})$$

Protože sypná hustota analyzovaného vzorku je $870 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, kritická hmotnost je přibližně 491 t uhlí daných vlastností. V tomto případě je objem V skutečně kritický, neboť hodnota λ^* je horní mezí, pro kterou může existovat klasické řešení. V případě oblasti tvaru krychle není známo, zda platí rovnost $\lambda^* = \lambda_*$, (značení dle Poznámky 3.7 na straně 22), ovšem to zjištěnou skutečnost nijak neovlivní.

- [1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F.: *Sobolev spaces*. Elsevier, 2003.
- [2] Agarwal, R. P., Lakshmikantham, V.: *Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations*. World Scientific, 1993.
- [3] Amann, H.: *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*. SIAM review, 18:620–709, 1976.
- [4] Bandle, C.: *Isoperimetric inequalities for a class of nonlinear parabolic problems*. Z. Angew. Math. Phys., 27:377–384, 1976.
- [5] Bebernes, J., Eberly, D.: *Mathematical Problems from Combustion Theory*. Springer–Verlag, 1989.
- [6] Brezis, H., Vázquez, J. L.: *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*. Rev. Mat. Univ. Compl. Madrid, 10, n^o 2:443–469, 1997.
- [7] Brezis, H., Cazenave, T., Martel, Y., Ramiandrisoa, A.: *Blow-up for $u_t - \Delta u = g(u)$ – revisited*. Advances in Differential Equations 1, 1:73–90, 1996.
- [8] Chhetri, M., Girg, P.: *Existence and nonexistence of positive solutions for a class of superlinear semipositone systems*. Nonlinear Analysis, 71:4984–4996, 2009.
- [9] Chhetri, M., Girg, P.: *Global bifurcation of positive solutions for a class of superlinear elliptic systems*. J. Differential Equations, 261:5719–5733, 2016.
- [10] Dhillon, B. S.: *Mine Safety: A modern approach*. Springer, 2006.
- [11] Drábek, P., Milota, J.: *Methods of Nonlinear Analysis*. Birkhäuser, 2007.
- [12] Dupaigne, L.: *Stable solutions of elliptic partial differential equations*. Chapman and Hall/CRC, 2011.
- [13] Evans, J. C.: *Partial Differential Equations*. AMS, 1998.
- [14] Figueiredo, D. G. De, Lions, P. L., Nassbaum, R. D.: *A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations*. J. Math pures et appl., 61:41–63, 1982.

- [15] Frank-Kamenetskii, D. A.: *Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics*. Princeton University Press, 1955.
- [16] Friedman, A.: *On Quasi-Linear Parabolic Equations of the Second Order*. Journal of Mathematics and Mechanics, 7:793–809, 1958.
- [17] Fujita, H., Watanabe, S.: *On the uniqueness and non-uniqueness of solutions of initial value problems for some quasi-linear parabolic equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 21:631–652, 1968.
- [18] Fulford, G. R., Broadbridge, P.: *Industrial Mathematics: case studies in the diffusion of heat and matter*. Cambridge University Press, 2002.
- [19] Gilbard, D., Trudinger, N. S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 2000.
- [20] Hill, J. M., Marchant, T. R.: *Modelling microwave heating*. Applied Mathematical Modelling, 20:3–15, 1996.
- [21] Joseph, D. D., Lundgren, T. S.: *Quasilinear Dirichlet Problems Driven by Positive Sources*. Arch. Rat. Mech. Anal., 49:241–269, 1973.
- [22] Kaplan, S.: *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*. Comm. on Pure and Appl. Math., XVI:305–330, 1963.
- [23] Keller, H. B., Cohen, D. S.: *Some Positive Problems Suggested by Nonlinear Heat Generation*. Journal of Mathematics and Mechanics, 16:1361–1376, 1967.
- [24] Keller, H. B., Keener, J.: *Positive solutions of convex nonlinear eigenvalue problems*. J. Differential Equations, 16:103–125, 1974.
- [25] Lieberman, G. M.: *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Scientific, 1996.
- [26] Meier, P.: *Blow-up of solutions of semilinear parabolic differential equations*. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 39:135–149, 1988.
- [27] Mignot, F., Puel, J. -P.: *Sur une classe de problèmes non linéaires avec non linéarité positive, croissante, convexe*. Comm. PDE, 5:791–836, 1980.
- [28] Miyake, A., Wakakura, M., Uchida, T., Ushikubo, A.: *Investigation of Accidental Explosion of Raw Garbage Composting System*. Journal of Thermal Analysis and Calorimetry, 85:643–649, 2006.
- [29] Mueller, C. E., Weissler, F. B.: *Single point Blow-up for a general Semilinear Heat Equation*. Indiana University Mathematics Journal, 34:881–913, 1985.
- [30] Osgood, W. F.: *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung*. Monatshefte für Mathematik und Physik, 9:331–345, 1989.
- [31] Peral, I., Velázquez, J. J. L.: *On the Stability or Instability of the Singular Solution of the Semilinear Heat Equation with Exponential Reaction Term*. Arch. Rational Mech. Anal., 129:201–224, 1995.

- [32] Roubíček, T.: *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications*. Birkhäuser–Verlag, 2013.
- [33] Schmidt, L. D., Elder, J. L.: *Atmospheric oxidation of coal at moderate temperatures*. *Industrial and Engineering Chemistry*, 32:249–256, 1940.
- [34] Semenov, N. N.: *Chemical Kinetics and Chain Reactions*. Oxford Clarendon Press, 1935.
- [35] Singh, R. V. K.: *Spontaneous heating and fire in coal mines*. *Procedia Engineering*, 62:78–90, 2013.
- [36] Smith, A. C. , Lazzara, C. P.: *Spontaneous combustion studies of U.S. coals*. U.S. Bureau of Mines, 1987.
- [37] Teschl, G.: *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2012.
- [38] Velázquez, J. J. L., Galaktionov, V. A., Pohashkov, S. A., Herrero, M. Á.: *On a general approach to extinction and blow-up for quasilinear heat equations*. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 33:246–258, 1993.
- [39] Wu, Z., Yin, J., Wang Ch.: *Elliptic & Parabolic Equations*. World Scientific, 2006.
- [40] Yuan, L., Smith A. C.: *CFD modeling of spontaneous heating in a large-scale coal chamber*. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 22(4):426–433, 2009.
- [41] Zeldovich, Y. B.: *Selected Works of Yakov Borisovich Zeldovich*. Princeton University Press, 2016.