ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ

Katedra technologií a měření

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Infinitezimální počet a jeho použití v elektrotechnice

vedoucí práce: **Ing. Petr Preuss, Csc.** **2012**
autor: **Iveta Petrášová**

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta elektrotechnická
Akademický rok: **2011/2012**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Iveta PETRÁŠOVÁ**
Osobní číslo:	**E09B0176P**
Studijní program:	**B2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor:	**Komerční elektrotechnika**
Název tématu:	**Infinitezimální počet a jeho použití v elektrotechnice**
Zadávající katedra:	**Katedra technologií a měření**

Zásady pro vypracování:

1. Zpracujte historický přehled vývojových kroků, vedoucích k postulaci infinitezimálního počtu a vektorové analýzy v matematice.
2. Charakterizujte význam infinitezimálního počtu při formování základních zákonů teoretické elektrotechniky.
3. Diskutujte platnost infinitezimálních matematických modelů v souvislosti s hypotetickým předpokladem diskrétní reality.
4. Zkuste vyhledat a posoudit duální souvislosti v matematických modelech fyzikálních polí.

Rozsah grafických prací: **podle doporučení vedoucího**
Rozsah pracovní zprávy: **20 - 30 stran**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**
Seznam odborné literatury:

Student si vhodnou literaturu vyhledá v dostupných pramenech podle doporučení vedoucího práce.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Petr Preuss, CSc.**
Katedra teoretické elektrotechniky

Datum zadání bakalářské práce: **17. října 2011**
Termín odevzdání bakalářské práce: **3. června 2012**

Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta elektrotechnická
L.S.

Doc. Ing. Vlastimil
vedoucí ka

V Plzni dne 17. října 2011

Anotace

Práce je zaměřena na objev a celou historii infinitezimálního počtu od prvopočátku. Zabývá se myšlenkami, které vedly k postulaci infinizetimálního kalkulu, problémem s aktuálně nekonečně malou a formováním celého derivačního a integrálního počtu v matematice a elektrotechnice.

Klíčová slova

Infinitesimální počet, aktuálně nekonečně malá, derivace, integrál, limita, diferenciální počet

Abstract

The work is focused on the discovery and the history of infinitesimal calculus from the beginning. It deals with the ideas that led to postulation of infinitesimal calculus problem with infinitely small current and the formation of the derivative and integral calculus in mathematics and electrical engineering

Key words

Infinitesimal calculus, infinitesimal current, derivatives, integrals, limits, differential calculus

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této bakalářské práce, je legální.

V Plzni dne 8.6. 2012 Jméno příjmení

…………………..

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucímu diplomové práce Ing.Petru Perussovi, CSc. za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah

Úvod

Tato práce se snaží poukázat na úzkou spolupráci matematiky se všemi ostatními vědními obory. Je zaměřena na postupný vývoj infinitezimálního počtu utvářený s pomocí vztahů a zákonů objevených již ve Starém Řecku. Poukazuje na to, jak složitý a hlavně zdlouhavý byl tento vývoj, že se nejednalo jen o otázku několika minulých století, nýbrž se tyto vztahy formovaly již po několik tisíciletí. Dalším bodem je souvislost tohoto kalkulu právě s elektrotechnikou, kde sledujeme jeho užitečnost při formulaci nově objevených postupů a vztahů týkajících se především teorie elektromagnetického pole.

K utvoření takovýchto charakterizujících vztahů je zapotřebí správné použití nějakého ideálního modelu pro daný problém, je důležité správně si uvědomit, jak lze vůbec mechanismy kolem nás pracují a na základě toho se pokusit sestrojit právě takový ideální model okolního prostředí, který by vedl k rozšíření a k ověření teoretických poznatků.

Poslední část práce je zaměřena na princip duálních souvislostí, kde je poukázáno, jak by se mohl chovat integrální počet, pokud bychom ho nechtěli vyjadřovat jako nekonečný součet veličin, ale pokud bychom se ho pokusili vyjádřit jako výsledek u nekonečného součinu.

Seznam symbolů

ε .... velikost úhlu

υ …………………… velikost úhlu

H …………………… intenzita magnetického pole

B …………………… magnetická indukce

A …………………..... magnetický vektorový potenciál

Φ …………………… magnetický tok

e ……………………. elektrická indukce

J ……………………. proudová hustota

E …………………… intenzita elektrického pole

D …………………… elektrická indukce

ε …………………….. permitivita

μ_0 …………………..... permeabilita vakua

Γ ……………………. Heavisidův faktor

N ……………………. tok hustoty

P ……………………. elektromagnetická energie

G …………………...... tvar funkce

V …………………...... prostorová oblast

1 Vývojové kroky vedoucí k postulaci infinitezimálního počtu a vektorové analýzy v matematice

Integrál je jeden z ústředních pojmů matematické analýzy a matematiky vůbec. Vznikl na základě dvou úloh

- Určení funkce na základě znalosti její derivace
- Výpočet plochy, která je vymezená grafem funkce f na intervalu [a,b] a s osou nezávislé proměnné x

Tyto dvě úlohy vedou k pojmu určitého a neurčitého integrálu.

S rozvojem matematiky a v souvislosti s potřebami přírodních věd a techniky se pojem integrálu vyvíjel, byl předmětem mnoha zobecnění a prošel řadou změn.[1]

Neurčitý integrál: Množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu (a ; b) se nazývá neurčitým integrálem funkce f na intervalu (a,b) a bývá označována symbolem

$$\int f(x)\,dx$$

Základní věta integrálního počtu nám říká, že: každá funkce f, která je spojitá v intervalu (a; b), má na tomto intervalu primitivní funkci, tedy neurčitý integrál.[1]

Určitý integrál: definován buď jako jistá limita integrálních součtů, nebo v případě, že je dána funkce f, ke které existuje primitivní funkce funkce F, jako rozdíl F(b) – F(a). Určitý integrál funkce f na intervalu (a ; b) se označuje symbolem.[1]

$$\int_a^b f(x)\;dx$$

1.1 Počátky matematiky

1.1.1 Starověk

Vývoj matematiky není datován jen k posledním několika staletím. Naopak, samotná matematika sahá až k prvopočátkům lidského pokolení. O tomto svědčí nejstarší dochovaný důkaz tzv. Věstonické vrubovky, jejíž stáří je odhadováno na přibližně 30 000 let. Tento důkaz je také mnohými považován za základní kámen matematiky.

1.1.2 Matematika ve Starém Řecku

Od období kolem 8000 př. n. l. se začíná rozvíjet hlavně egyptská a mezopotámská matematika.

Pro matematiky je největším mezníkem ve vývoji samotné matematiky období Starého Řecka. Zrod této nové matematiky je datován přibližně k 2000 př. n. l. V tomto období se jednalo ještě o matematiku „praktickou", jež byla potřebná hlavně k běžnému životu. Od 6. století př. n. l. se začíná matematika rozvíjet více po teoretické stránce.[2][3]

Otcem takovéto matematiky je nazýván Thales z Miletu. Jemu jsou přičítány následující úkazy:

- objev, že průměr kruhu jej dělí na polovinu
- vrcholové úhly jsou shodné
- všechny úhly, jež sestrojíme nad tímto průměrem, jsou pravé
- úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné
- dva trojúhelníky jsou shodné, shodují – li se jednou stranou a přilehlými úhly

Významnými Thaletovými následovníky byli Pythagorejci, kteří nesli jméno po svém zakladateli Pythagorovi. V době Pythagorejců dochází k tzv. 1. metodologické krizi matematiky. Jejich objev nesouměřitelných veličin (iracionálních čísel) vedl od diskrétního chápání veličin ke spojitému, Pythagorejci také přivedli matematiky k pojmu nekonečnosti. Na tento problém navázal i Zenon z Eleje, který již v té době poukazoval na rozpory, jež jsou mezi smyslovým vnímáním a mezi jeho logickým vysvětlením. Dílo Zenona z Eleje rozvířilo problém nekonečných veličin, vedl k počátku diskuzí mezi potenciálním a aktuálním nekonečnem – Řekové chápali nekonečno jen potenciálně, jako možnost „jít dál". [1]

Pokud se zmiňujeme o významných matematicích, nesmíme vynechat Euklida, jenž je považován za jednoho z největších matematiků všech dob. Vydal třináct knih, tzv. „Základy". Podle nich matematici sbírají důkazy a získávají z nich poznatky dodnes.

Další významnou osobou je Archimédes. Archimédes byl schopen pomocí metody páky odvodit obsahy plošných útvarů, ale dokázal odvodit i objemy těles. Jelikož měl Archimédes „obavy" z nekonečna, tak jeho práce postrádají některé důležité matematické nástroje, např. pojem limity, obecné algoritmy pro výpočet obsahů a objemů těles (při těchto úlohách vycházel pouze z geometrických vlastností tělesa). K objasnění těchto pojmů bylo zapotřebí dalšího vývoje infinitezimálního počtu. Celkově se řecká matematika vztažená k pojmu integrál vyznačuje intuitivním přístupem a také strachem z nekonečně malých veličin, dále rozvojem účinných technik k výpočtu obsahů a objemů těles na exhaustivní metodě. O existenci aktuálně nekonečně malé hodnoty byl přesvědčen i Demokritos, který pod pojmem aktuálně nekonečně malé spatřoval tzv. rohový úhel, což je úhel mezi kružnicí a libovolnou tečnou.[1][2][3]

1.2 Formování matematiky ve středověku

V době vzniku matematické analýzy většina matematiků nevěnovala pozornost teoretickému základu u nově vznikajícího infinitezimálního počtu. V této době postačovalo, když správnost výsledků byla podložena jejich praktickým ověřením. [1]

K dalšímu rozvoji matematiky dochází až o mnoho století později.

1.2.1 Kepler, Cavalieri

Velkým zlomem ve zdokonalení metody integrálního počtu je práce Johanese Keplera – Stereometrie vinných sudů. Kepler byl průkopníkem infinitezimální metody, kterou se snažil používat ve většině svých prací. Jeho následovník Cavalieri ve svém díle „Sto rozličných úloh“ vyčísluje integrály:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \qquad (1.1)$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \qquad (1.2)$$

$$\int x^n = \frac{x^{n-1}}{n-1} \qquad (1.3)$$

Toto dokázal pro n = 1, 2, 3, 4. Toto bylo dokázáno již Fermatem a Robervalem v roce 1634. Toricelli byl velmi úspěšný pro vyčíslení objemu tělesa s použití metodou nedělitelných, které se rozprostíralo do nekonečna ostrého hyperboloidu, podle současných pojmů tedy vyčíslil dnešní integrál.[1][3]

$$\pi \int x^2 \, dx \tag{1.4}$$

1.2.2 Fermat

Dalším významným jménem v odvětví integrálního počtu a celé matematiky je bezesporu Fermat. Fermatova věta o nutné podmínce extrému funkce – jestliže má funkce v některém bodě extrém, pak v tomto bodě bude derivace rovna nule – tato věta byla nakonec dokázána až v roce 1993. Jeho úspěchy na poli integrálního počtu jsou nepopiratelné. Fermat pod pojmem kvadratura rozuměl:

$$\int_0^a x^n \, dx \tag{1.5}$$

Zkoumal dále exponenty ve tvaru zlomku, vyčíslil dokonce integrály.[3]

$$\int x^{\frac{p}{q}} \, dx \tag{1.6}$$

Pozici aktuálně nekonečně malé skvěle charakterizoval L. Carnot: „Protože úvahy o aktuálně nekonečně malé postrádají smyslové názornosti, bylo velmi těžké vytvořit si správnou představu o těchto objektech, které jsou osobitým projevem bytí…a musí se zkoumat jako absolutní nic a které obdařené protikladnými vlastnostmi zaujímají místo někde mezi veličinami a nulou, mezi bytím a nebytím. "[2]

1.3 Vznik a formování integrálu

Za nejvýznamnější postavy při utváření integrálního počtu můžeme bezesporu považovat Isaaca Newtona a Wilhelma Gottfrieda Leibnize.

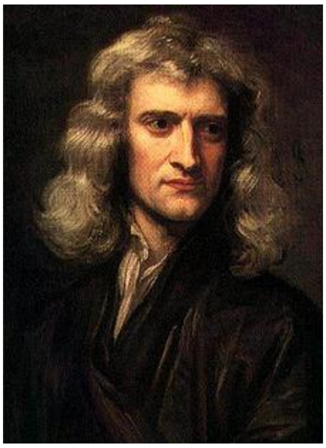
Koncem 17. století vypukla 2. metodologická krize, jež měla souvislost v Newtonových a Leibnizových pokusech o odůvodnění kalkulu nekonečně malých. Tato záležitost se táhla celé 18. století a ještě na počátku 19. století se většina nejvýznamnějších a nejpřednějších matematiků pokoušela o odůvodnění matematické analýzy a zároveň tím i o vyřešení celé 2.

metodologické krize.[1]

Základním pojmem vznikajícího infinitesimálního počtu byla aktuálně nekonečně malá. Nebyla prozatím exaktně definována a ani ještě nebyla racionálně odůvodněna. Zakladatelé infinitesimálního počtu k ní přistupovali zcela intuitivně. Pokud použijeme myšlenku podle [1], tak nekonečně malou definovali jako rezultát nekonečného dělení, chápali ji tedy jako veličinu, která je již dále nedělitelná. V jejich představách to tedy byla definitivní, konečná hodnota nekonečně se zmenšující veličiny, tj. veličina různá od nuly., ale současně byla menší než libovolná nenulová veličina. Aktuálně nekonečně malá byla tedy dle jejich představ „ztuhlou veličinou“ a matematikové byli přesvědčeni, že neexistuje.

1.3.1 Isaac Newton

Isaac Newton vyslovil předpoklad, že geometrická podoba, jako jsou čáry, povrchy tělesa, se získávají jako výsledky pohybu. Uskutečňují se v čase a za jakkoliv malý časový přírůstek bod projde libovolně malou dráhu. Pro nacházení okamžité rychlosti bylo potřeba najít limitu poměru přírůstku dráhy k poměru přírůstku času – vzít „poslední poměr“, kdy přírůstek konverguje k nule – tímto způsobem Newton zavedl fluxe – derivace. Newton díky své dobré znalosti derivací mnoha funkcí mohl nalézt fluenty – funkce – to znamená, že mohl tedy integrovat. Integroval pomocí rozkladu funkce v mocninnou řadu a integroval člen po členu. Podle Newtona platilo to, že díky tomu, že každý pohyb má svojí rychlost, tak každá spojitá funkce má derivaci, že tedy každé přiblížení k limitě má monotonní charakter, pohybující se těleso se tedy může blížit k některému bodu jen z jedné strany. Podle něj pojem fluxe znamenal v podstatě totéž jako rychlost (až téměř po sto letech našel Lagrange odůvodnění), Leibniz vycházel spíše z geometrických odůvodnění. Například Leibniz pod diferenciálním dy rozuměl veličinu, která je různá od nuly, ale současně jej považoval za tak malou veličinu, že její libovolný konečný násobek nemohl dát konečnou veličinu. Leibniz tak vzkřísil ideu nearchimédovských veličin, které nesplňují Eudoxovo – Archimédův axiom. Jestliže je aktuálně nekonečně malá, potom žádným jejím n – násobkem nelze překročit veličinu b, která je konečnou nenulovou veličinou.[1][2][3]



Obr. 1: Portrét Isaaca Newtona, převzato z [7]

1.3.2 Newton – Leibnizova formule

Newton si pod pojmem nekonečně malých představuje momenty, Leibniz zase počítá s diferenciály, ale momenty i diferenciály mají rozporné vlastnosti, co se týče nuly a nenulovosti, protože nebyly rovné nule, ale mohly se zanedbat, aniž by se porušila rovnost, což samo o sobě vyvolalo značný rozpor.

Příklad může být i Leibnizův důkaz $y = x^2$ podle [2]:

$$y = x^2 \tag{1.7.1}$$

$$y + dy = (x + dx)^2 + 2x\,dx \tag{1.7.2}$$

$$dy = 2x\,dx + dx^2 \tag{1.7.3}$$

$$dy = 2x\,dx \tag{1.7.4}$$

...dx^2 Leibniz z rovnice odstranil, a došel tudíž ke správnému výsledku $dy = 2xdx$, což ovšem nelze, pokud totiž budeme dx pokládat za rovno nule, musí ostatně i $dy = 0$, a pokud dx nebude rovno nule, nelze dx^2 zanedbat.

Leibniz je ve svých studiích silně inspirován a hojně využívá Euklidových „Základů". Diferenciál chápe jako úsečku, která je tzv. čtvrtou geometrickou úměrnou. Tohoto si byl vědom i Newton a jeho následovník Taylor. Ti zkoumali infinitezimální počet jako součást učení o pohybu, jako teoretickou kinematiku. Leibniz poprvé užil pojmu „funkce", roku 1686 ve svém díle uvádí poprvé znak integrálu a poukazuje také na inverznost derivace a integrálu.[1][3]

Obr. 2: Gottfried Wilhelm Leibniz, převzato z [8]

Na chyby zakladatelů infinitezimálního počtu upozornil Berkeley: „Existovat znamená být vnímán.“, z jeho výroku tudíž vyplývá, že podle jeho teorie nekonečně malé veličiny neexistují. V případě vzniku infinitezimálního počtu tedy dochází k rozporu kalkulu nekonečně malých s dosud existujícím systémem vnímání. Jeho hlavní odpor byl namířen proti Newtonově teorii fluxí, zvláště pak proti flexím vyšších řádů.[2]

V l´Hospitalově „Analýze nekonečně malých“ dokonce nalézáme vnitřně rozporný postulát: „Veličina, která je zvětšena či zmenšena o nekonečně malou veličinu, než je sama, se musí považovat jako nezměněná.“[2]

Leibniz poprvé užil pojmu „funkce“, roku 1686 ve svém díle uvádí poprvé znak integrálu a poukazuje také na inverznost derivace a integrálu.
V jedné úloze získal vyjádření ∫ x dx a zapsal,

$$\int x \; dx = \frac{x^2}{2} \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x \tag{1.9}$$

nakolik se $d(x^2/2)$ rovná x, to objasňoval takto: *“..u nás sumy a rozdíly ∫ a d jsou navzájem inverzní, jako mocniny a odmocniny v obyčejném kalkulu.*“ [3]

Toto období je tedy úzce poznamenáno spory Newtona a Leibnize, ty však vytvořily podklad moderní matematické analýzy.

Toto období můžeme shrnout:

- Propojení metod integrování a diferencování, diferenciální metody se staly prvotními, z nich se při infinitezimálním počtu vycházelo, integrál **f *[a,b]:***

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a) \tag{1.10}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), pro\ \forall\, x \epsilon\, (a\,; b) \tag{1.11}$$

kde F(a,b) je jako primitivní funkce k funkci f na intervalu (a ; b), tj. taková, že platí:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x), pro\ \forall\, x \epsilon\, (a\,; b) \tag{1.12}$$

- Statický určitý integrál se propojil s dynamickým neurčitým integrálem zejména pod vlivem mechanických představ o pohybu
- Odvozováno na základě potřeb fyziky
- Základní názor na pojem funkce. Která se stala hlavním objektem zkoumání nové vědní disciplíny (analýzy). [2]

Správné výsledky infinitesimálního počtu, které jsou potvrzovány praxí, jsou dosaženy kompenzací chyb. První chyba spočívá v hypotetické existenci aktuálně nekonečně malé – objektu, který je vnitřně normálně rozporný, druhá chyba, kdy se pokládá rovna nule, spočívá v jejím trikovém odstranění.

Trvalo velmi dlouho, než se prosadila myšlenka, že infinitesimální počet se nemusí úzce spojovat s kinematikou, ale že je tomu spíš naopak, že mechanické pojmy mohou být exaktně vymezeny pomocí pojmů infinitesimálního počtu. Například podle Lagrangea je třeba infinitesimální počet zkoumat jako logicky preciznější teorii ve srovnání s kinematikou, a proto je třeba infinitesimální počet vyložit nezávisle na kinematických představách a na jakýchkoli empirických hypotézách vůbec. Jestliže pro Newtona fluxe veličiny byla její rychlostí, tak to trvalo téměř sto let, než Lagrange chápal rychlost jako derivaci dráhy podle času. Leibniz, jak již bylo psáno, se snažil o geometrické odůvodnění infinitesimálního počtu, Lagrange i d´Alembert separovali nově vzniklý kalkul nekonečně malých od kinematiky.[2][3]

1.3.3 Taylor, d´Alembert, bratři Bernoulliové

Bylo mnoho odpůrců tohoto nově vznikajícího kalkulu, o Berkeleym jsme se již zmínili, dalším byl Bernard Nieuwentijt, patřil mezi největší Leibnizovy kritiky. , ten přímo tvrdil, že diferenciály vyšších řádu nemají vůbec žádný smysl. Tyto spory se vlekly po celé 18. století, které bylo založeno na snaze vymezit základní pojmy infinitezimálního počtu. Jak je patrno v [2], mnozí se snažili vyhýbat použití nekonečně malé veličiny a pracovali jen s konečnými přírůstky dx, jiní se zabývali limitním přechodem a připravovali půdu pro zavedení definice spojitosti, limity a derivace, jak je zavedli později Cauchy a Bolzano. Další skupinu tvořili ti, kteří odmítali pojem nekonečně malé veličiny vůbec a snažili se odůvodnit infinitezimální počet algebraickou cestou.

Z příznivců, kteří se snažili pokračovat ve stopách Newtona, musíme jmenovat Brooka Taylora, ten je znám znám díky své Taylorově řadě.

Snahu o vyřešení problému s nekonečně malou můžeme přičítat i Jeanu Baptistu Le Rond d´Alembertovi, ten se totiž pokoušel definovat derivaci jako limitu poměru přírůstku veličin. Dnes by to vypadalo asi takto: $\frac{dx}{dy} = \lim_{dx\to 0}\frac{dx}{dy}$, v této myšlence je již obsažen základ dnešní definice derivace pomocí limity. [3]

O další přínos v kalkulu nekonečně malých se zasloužili bezesporu i dva bratři Bernoulliové. Jakob Bernoulli učinil důležité výzkumy v oblasti číselných řad. Vydal pět memoárů pod názvem *„Aritmetické věty o nekonečných řadách a jejich konečných součtů“.* Jeho snaha o napřímení oblouku spirály přivedla Jakoba k prvnímu eliptickému integrálu v matematické historii. Ve tvaru eliptického diferenciálu vyjádřil element oblouku spirály, odkud vytvořil možnost srovnání rozličných částí oblouku. [3]

Johann Bernoulli provedli integraci následujících funkcí $log(x)$, $x\log(x)$, $\frac{\log x}{x}$

S objevem logaritmické funkce se stalo možné integrovat racionální čísla. Při vyčíslování integrálu používal Johann Bernoulli rozklad integrované složky do řady.

Největším matematikem této doby a celého 18. století je ale bezesporu Leonhard Euler. Celkový počet jeho vydaných děl je 886. Euler jako první uvádí definici logaritmu jako exponent. Definuje základ přirozeného logaritmu a zavádí číslo e, definice vznikla pomocí číselné řady, svůj výpočet provádí na 23 desetinných míst. Ve svém *„Úvodu do analýzy nekonečně malých“* vykládá teorii nekonečných řad a rozvoj funkcí e^x, *sin x, cos x,* a $e^{+-ix}=cosx +- isinx$, dnes hojně využívaného v elektrotechnice.[1][3]

Další významný matematik Joseph Fourier zboural vžité představy o tom, že funkce, které lze vyšetřovat, musí být spojité.

1.3.4 19. století – Riemann

V 19. století se vyznačuje rozlišením pojmů konvergence řady, konvergence a stejnosměrná konvergence posloupnosti funkcí, spojitost, atd. V 18. stoleté totiž tyto pojmy nebyly ještě zdaleka uceleny, matematikové přistupovali k problémům jen intuitivně a toto se nedalo rozlišit. V tomto století dochází k zavedení součtové definice integrálu, vědci se snaží o návrat k exhaustivním metodám.[1]

Významným jménem matematiky 19. století je bezesporu Cauchy. Roku 1823 nová definice integrálu, kdy se snaží určovat obsah plochy vymezené přímkami x = a, x = b.

Na jeho myšlenky navazuje i Riemann, jenž je pro nás znám především díky Riemannovu integrálu. Riemann se opět začal zabývat otázkou, co je vlastně $\int_a^b f(x)dx$?

Podle [1]:“ *Abychom stanovili toto, zvolme mezi a a b seřazenou dle velikosti řadu hodnot x_1, x_2, x_{n-1} a označme kvůli krátkosti x_{1-a} znakem δ_1, $x_2 – x_1$ znakem δ_2, b – x_{n-1} znakem δ_n, a buď ε kladný pravý zlomek. Potom hodnota součtu $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon\,_1\delta_1)$ bude záviset na volbě intervalu δ a veličin ε. Bude – li nyní mít tu vlastnost, že ať jsou zvoleny δ a ε jakkoli, bude se nekonečně blížit k pevné hranici A jakmile budou všechna δ nekonečně malá, pak se tato hodnota (A) nazývá $\int_a^b f(x)dx$. Pokud tuto vlastnost nemá, pak nemá $\int_a^b f(x)dx$ význam.“*

Nevlastní integrál je Reimannem definován tak, že pokud je *f(x)* integrovatelná někde mezi *(a + ε, b)* pro všechna jakkoliv malá kladná ε, a není integrovatelná mezi a a b, pak existuje limita $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$, pak se pod pojmem určitého nevlastního integrálu $\int_a^b f(x)dx$ rozumí právě tato limita.[1]

Obr. 3. Georg Friedrich Bernhard Reimann, převzato z [9]

1.3.5 20. století

20. století lze nazvat stoletím Lebesguea. Je porovnáván s Riemannem, ale jeho integrály mají oproti Reimannovým některé výhody, např. když má být funkce podle Lebesguea integrovatelná, nemusí být spojitá v žádném bodě z intervalu.[3]

Lebesgue pomocí již dříve známých postupů formuloval následující větu uvedenou v [1]: *„ …cílem je přiřadit ke každé omezené funkci f(x) definované na konečném intervalu (a, b), kladném, záporném nebo nulovém, nějaké konečné číslo* $\int_a^b f(x)$*, které nazveme integrálem f(x) na (a, b), a které splňuje následující podmínky ,převzaté z [1] :“*

1) Pro libovolná a, b, h máme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-h}^{b-h} f(x+h)\,dx$$

2) Pro libovolná a, b, c máme

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$$

3)

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

4) Když $f \geq 0$ a $b > a$, potom také

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

5)

$$\int_0^1 1\,dx = 1$$

6) Když posloupnost $f_n(x)$ konverguje k $f(x)$, přičemž monotonně roste, potom posloupnost integrálů z $f_n(x)$konvergují k integrálu z $f(x)$.

1.3.5.1 Vztahy v Lebesgueově integrálu:

Převzato z [1]:

a) K tomu, aby funkce byla integrovatelná podle Lebesgueova smyslu, nemusí být spojitá v žádném bodě intervalu.

b) Když je f_n *:[a, b]náležících R,* posloupnost funkcí integrovatelných v Lebesgueově smyslu, která bodově konverguje k funkci f: [a, b]→R a kde je $|f_n| \leq$ g, kde g:[a,b] → R a je integrovatelná v Lebesgueově smyslu, potom je f : [a, b] →R integrovatelná v Lebesgueově smyslu a platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Pokud je integrovatelná v Lebesgueově smyslu, pak pro každé s z [a, b] platí:

$$\int_a^s f(x)\,dx = F(s)$$

c) Když má funkce F v intervalu [a, b] omezenou derivaci F´, pak je funkce F´ integrovatelná v Lebesgueově smyslu v [a, b] a platí:

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

d) Je – li funkce F spojitá v [a, b] a má – li [a, b] derivaci F´všude až na spočetnou množinu bodů a je – li F´integrovatelná v Lebesgueově smyslu, platí pro každé x z [a,b]

$$\int_a^x F'(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

Obr. 4: Henri Lebesgue, převzato z [10]

2 Význam infinitezimálního počtu při formování základní modelů teoretické elektrotechniky

Počátky vývoje elektrotechniky byly především hromaděním poznatků, získávaných výhradně experimentálně. Pojmový a matematický aparát k popisu elektrických a magnetických jevů se v tomto období utvářel jen zvolna. Technika experimentů byla poplatná své době, jedinými měřícími přístroji byla magnetka a elektroskop. Vážnou překážkou bylo mnohdy iracionální myšlení, ovlivněné náboženskými představami. Objevitelé jen zvolna nalézali vhodné metodické postupy, učili se hledat přístupové cesty, získávali zkušenosti jak zpracovávat a hodnotit získané poznatky. Slovo *elektřina* pochází ze slova *jantar* a slovo *magnetismus* nejspíše od názvu maloasijského města *Magnesia,* v jehož okolí se nacházela magnetická ruda – magnetovec. Převzato z [6].

První zmínky o působení elektrických a magnetických jevů sahají opět až do Starého Řecka. První písemnou zmínku přináší Thales z Milétu (7. století př. n. l.)., ten popsal přitahování malých těles jantarem po jeho předchozím tření. O podobném jevu se zmiňuje i Seneca a Lucius Carus, to hovoří o tom, že železná ruda přitahuje další částečky této rudy. V Číně už magnetické jevy byly dávno známy a využívány jako kompas, ten byl např. až v Evropě poprvé zmíněn v roce 1187. [6].

V podstatě prvním elektrickým jevem, se kterým se člověk kdy setkal byly atmosférické úkazy, jako je například blesk. Tyto přírodní úkazy byly zpravidla posuzovány jako projev božské moci. Ve Starém Řecku byl vládcem blesků Zeus, v Římě zas Jupiter, u Slovanů zase Perun. Pokusy o logické vysvětlení atmosférických jevů mají počátky opět ve Starém Řecku, kde se filozofové snažili o racionální odůvodnění. Například Aristoteles (4. stol. př. n. l.) se tento jev snažil vysvětlit tak, že blesk vznikne zapálením hořlavých plynů, které jsou přítomny ve vzduchu, nebo Epikuros (4. stol. př. n. l.) je vysvětloval jako důsledek tření mraků o sebe. Tyto pokusy v podstatě neměly žádný význam. Oproti tomu egyptský faraon Rammesse III. (12 stol. př. n. l.) nechal na krámu v Karnaku postavit stožáry s pozlacenými hroty, které měly fungovat jako první bleskosvody. [6].

2.1 První aplikace matematiky

Nástup matematiky do elektrotechnických a magnetických jevů se stává významným mezníkem elektrotechniky. [6].

Jedním z významných myslitelů té doby, který se věnoval aplikaci integrálního počtu a zkoumání vektorové analýzy byl Pierre de Laplace (1749 - 1827). Laplaceovvi přísluší například zobecnění teorie Biota a Savarta. Ti provedli řadu experimentů, ze kterých následně odvodili empirický vztah pro sílu, kterou působí tenký proudovodič na magnetku. Předpokládali, že proudovodič leží s magnetkou v rovině. Pro sílu, jíž působí proudový element *i ds* na pól magnetu, která je ve vzdálenosti r, stanovili vztah podle [6]:

$$dF = K\, i\, \frac{ds}{r^2}\, sin\alpha \tag{2.1}$$

Kde:

K *konstanta, jejíž velikost závisí na použité soustavě jednotek*

Ze studií vedoucích ke vzniku tohoto vztahu poté vycházel i sám Laplace. Tento vztah se mu podařilo zobecnit a aplikovat na případ, kdy proudovodič bude mít tvar libovolné prostorové křivky. Pro sílu pak odvodil vztah, který je dnes jmenován jako Biotův – Savartův zákon. [6].

$$dF = K\, i\, \frac{d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{2.2}$$

Dalším významným pokrokem v tomto období byly objevy André Marii Ampéra. Ten se pokoušel zjistit, jak vlastně na sebe silově mohou působit dva proudovodiče. Podařilo se mu zjistit, že souhlasné proudy se přitahují a nesouhlasné proudy se přitahují. Tyto vztahy vyjádřil i v matematickém podání. Ampér tedy formuluje zákon pro sílu, kterou na sebe působí tyto dva proudovodiče[6].

:

$$d\boldsymbol{F} = K\, i\, i'\, \frac{ds\, ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\vartheta\cos\vartheta'\right) \tag{2.3}$$

Kde

ε *značí úhel mezi elemeny i ds a i´ ds´*

υ *úhly, které tyto elementy svírají se spojnicí*

r *délka spojnice*

K *konstanta*

Dnes tento vztah je vyjádřen vzorcem, jak jej později upravil geometr Grossmann[6].

.

$$\boldsymbol{F} = K\, i\, i' \oint_c \oint_{c'} \frac{d\boldsymbol{s} \times (d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r})}{r^3} \tag{2.4}$$

Kde

c, c´ *jsou křivky, jež vyjadřují tvary vodičů*

i, i´ *proudy protékající vodiči*

Po intuitivním zobecnění tohoto zákona byl nakonec odvozen i zákon celkového proudu, tj. první Maxwellova rovnice[6]..

$$\oint_c \boldsymbol{H}\, dl = \boldsymbol{I} \tag{2.5}$$

Tímto vlastně Ampér položil základy velmi významného zákonu, ten po doplnění Maxwellem nyní tvoří základy současné elektrotechniky. [6]

Ampér uveřejnil tyto své poznatky v knize Teorie elektrodynamických jevů odvozená výlučně z experimentů (1826). Toto dílo bylo ve své době stěžejním dílem ve svém oboru. [6]

2.2 Wilhelm Eduard Weber

Z významných Ampérových pokračovatelů musíme připomenout Wilhelma Eduarda Webera. Ten pro zdůvodnění svých poznatků vycházel z Ampérových elektrodynamických poznatků. Podařilo se mu odvodit vztah pro sílu působící na dva náboje, kdy tyto náboje se pohybují podle [6]:

$$F \approx \frac{QQ'}{r^2}\left[1 - \frac{\alpha}{16}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha}{8}\, 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right] \tag{2.6}$$

Kde

a	*konstanta*
r	*vzdálenost mezi dvěma náboji*
dr/dt	*relativní rychlost*
d^2r/dt^2	*zrychlení*

V tomto vztahu můžeme názorně vidět použití Newtonových zákonů síly, kdy rychlost je vyjádřena jako derivace dráhy tohoto pohybu a zrychlení jako derivace rychlosti, to znamená tedy druhou derivaci této dráhy. Tímto se Weberovi podařilo dokázat, že tato síla, která působí na vodiče, není závislá jen a pouze na vzdálenosti, nýbrž i na rychlosti a také na svém zrychlení a že tyto proudy jsou vlastně pohybující se náboje. Detailnější pohled na tento vztah ukazuje, že tato rovnice zároveň obsahuje i elektromagnetickou indukci. Weberova definice byla ve své době považována za základ elektrotechniky, tak tomu bylo až do roku 1890, kdy byly odhaleny nedostatky tohoto zákona, které tkvěly v tom, že nebyla respektována konečná rychlost šíření elektrického působení, to znamená, že vycházel z působení „na dálku“ [6].

2.2.1 Franz Ernst Neumann

Další významnou osobou byl ve svém oboru i Franz Ernst Neumann. Ten přispěl k budování matematické teorie magnetismu. Zavedl vektorový magnetický potenciál A vztahem podle [6]:

$$\boldsymbol{B} = rot\boldsymbol{A} \tag{2.7}$$

Kde

B *je magnetická indukce,*

a následně i doložil jak tento vztah vypočítat. Pro přímý tenký vodič se mu, podařilo tedy odvodit vztah podle vzdálenosti [6]:

$$A = i \int_c \frac{ds}{r} \tag{2.8}$$

Tato teorie ovšem nebyla tak docela vyhovující. Dosáhlo se však poznání zákonitostí elektrických a magnetických jevů na takové úrovni, že toto dalo vzniknout nové teorii elektromagnetického pole, která vysvětlovala všechny doposud známé elektrické a magnetické jevy. Tato teorie tedy vznikala ve třech etapách, převzato z [6]:

- Byla slovně formulována koncepce a nové poznatky, z nichž vzešla teorie elektromagnetického pole, především díky Faradayovi.
- Byl taktéž vytvořen i matematický model této teorie.
- Tato teorie byla ověřena i experimentálně, byla prohloubena a vyjádřena v matematickém tvaru.

2.2.2 Michael Faraday

Michael Faraday byl silně přesvědčen o tom, že přírodní síly jsou jednotné (elektřina, magnetismus, chemická slučivost, světla a gravitace). Jemu vděčíme za vztah pro elektromagnetickou indukci ve tvaru podle [6].

:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.9}$$

Faraday přišel na to, že po připojení galvanického článku k jedné z cívek na prstenu z měkkého železa vyvolá ve druhé z cívek proudový impulz. Při odpojení galvanického článku přišel Faraday na opačný proudový impulz. Faraday tedy objevil princip elektromagnetické indukce, tímto experimentem se mu dokonce povedlo odhalit, na jakém principu pracuje transformátor. Tento jeho objev je popsán v jeho deníku (1831), převzato z [6]: „*Dal udělat železný kruh sedm osmin palce tlustý, o vnějším průměru šest palců. Navinul měděný drát A mnohokrát kolem jedné poloviny prstence, na druhou stranu navinul asi 60 stop dalšího drátu B. Spojil konce drátu B měděným drátem, který vedl nad magnetkou. Oba konce drátu A spojil s baterií: objevil se zřetelný účinek na magnetku – oscilovala a vrátila se do původní polohy. Po přerušení spojení s baterií se opět objevil účinek na magnetku* .“. Dalším pokusem se Faradayovi povedlo proměnit magnetismus v elektřinu, vsunutím tyčového magnetu do cívky, vznikl tak proudový impuls, po vysunutí vznikl impuls opačný. Toto nazval magnetoelektrickou indukcí. [6]

Obr. 5: Michael Faraday, převzato z [11]

2.2.3 James Clerk Maxwell

Jamesi Clerku Maxwellovi se povedlo sestavit matematický model elektromagnetických jevů, jenž ve svých poznatcích využíval Faradayových experimentálních objevů o elektromagnetickém poli. Ve svém díle dokonce i sám Maxwell hovoří o tom, že se jen snažil o to, aby mohl přeložit Faradayovy myšlenky do matematického tvaru.[6].

Maxwell vycházel z analogie – mezi teoretickou hydrodynamikou a Faradayovou teorií siločar. Toto Maxwell podle [6] vyjádřil takto: „Abychom si vytvořili fyzikální představu, aniž bychom převzali určitou fyzikální teorii, je třeba si osvojit fyzikální analogie. Pod pojmem fyzikální analogie rozumím částečnou podobnost mezi zákony jisté vědy a nějaké jiné vědy, přičemž pomocí každou z nich můžeme znázornit pomocí druhé.“

S pomocí analogie užité u magnetických jevů se Maxwellovi podařilo například odvodit rovnici kontinuity [6]:

$$div\, \boldsymbol{J} = 0 \qquad (2.10)$$

Vztah pro proudovou hustotu závislou na intenzitě magnetického pole definoval jako [6]:

:

$$\boldsymbol{J} = rot\, \boldsymbol{H} \qquad (2.11)$$

Maxwell také poukázal na rozpory u silového působení mezi elektrickými a magnetickými objekty, kdy se užívají vztahy pro Newtonovu gravitační teorii. Tyto vztahy již ale přestaly být dostačující, neboť se mezi těmito objekty neuplatňovala jen jejich vzájemná rychlost, ale i rychlost relativní. Maxwell si vytvořil model pro elektromagnetickou soustavu. Tento model měl být vyplněn éterem s elastickými vlastnostmi. Pokud se tento éter rozkmitá nějakou velkou rychlostí, dojde k přenášení pohybu hmotných částic umístěných v prostoru. Maxwell se toto snažil vysvětlit nejprve jen mechanicky, podle pohybů a napětí již zmíněného éteru. V tomto svém modelu použil poprvé význam elektromagnetické pole. Pro tento model se Maxwell sestavil pomocí 20 ti veličin jeho 20 charakteristických rovnic. [6]

Definiční vztah pro vektorový potenciál podle [6] ve své dnešní podobě:

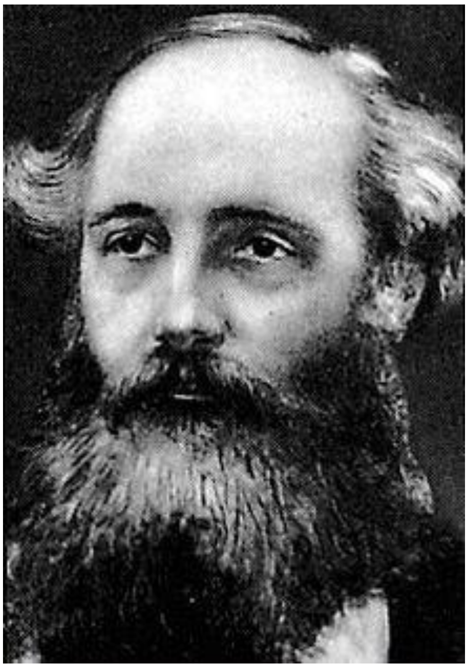
$$\boldsymbol{B} = rot\ \boldsymbol{A} \tag{2.12.1}$$

Definiční vztah pro vektorový potenciál podle [6] zapsaný ve své době dle Maxwella:

$$\mu\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz} \tag{2.12.2}$$

$$\mu\beta = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx} \tag{2.12.3}$$

$$\mu\gamma = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} \tag{2.12.4}$$



Obr. 6: James Clerk Maxwell, převzato z [12]

2.2.4 Oliver Heaviside

Heaviside je dalším z Maxwellových pokračovatelů, díky studiu jeho teorie se nakonec stal jedním ze zakladatelů vektorového počtu, pomocí něhož mohl matematicky formulovat tyto teorie, které díky tomuto získala na přehlednosti. Základní zákony Maxwelloévy teorie vyjádřené Heavisidem [6]:

$$rot\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{2.13.1}$$

$$\boldsymbol{J} = \gamma\,\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.13.2}$$

$$rot\,\boldsymbol{E} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.13.3}$$

$$div\,\boldsymbol{J} = 0 \tag{2.13.4}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu\,\boldsymbol{H} \tag{2.13.5}$$

$$div\,\boldsymbol{D} = \rho, \qquad div\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.13.6}$$

Pro intenzitu elektrického pole E a magnetickou indukci B podle [6].:

$$\boldsymbol{E} = \Gamma\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{r}^{(\ )} \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{B} = \Gamma\,\frac{\mu_0 Q}{4\pi r^2}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}) \tag{2.15}$$

$$\Gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin\Theta\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{2.16}$$

Kde *Γ je Heavisidův faktor*

Heaviside se nezabýval jen teorií elektromagnetismu, ale řešil i rovnice, které popisují přechodné jevy v lineárních obvodech. Podle [6] nahradil symbol pro derivaci d/dt operátorem *p* a symbol integrování

$$\int_0^t (\dots)\,d\tau$$

je zde nahrazen takzvaným inverzním operátorem *1/p*. Pokud budeme *p* považovat za algebraickou proměnnou, potom můžeme tyto rovnice převést na algebraické rovnice, které lze pak vyřešit pomocí známých vzorců.

2.2.5 John Henri Poynting

Poyntingovi se podařilo vyjádřit tok hustoty vektorem, který je dnes nazýván Poyntingovým vektorem, a můžeme ho vyjádřit jako vektorový součin vektorů E a H, převzato z [6].:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{2.17}$$

Z této rovnice můžeme pak lze odvodit vztah pro elektromagnetickou energii, která bude vytékat z oblasti o povrchu S:

$$P = \oint_S \boldsymbol{N}\, d\boldsymbol{S} \tag{2.18}$$

2.2.6 Henrik Antoon Lorentz

Lorentz je považován za zakladatele elektronové teorie. Základy jeho úvah byly podle [6] stavěny na rovnicích pole charakterizovaných pro vakuum, k popisu tohoto pole mu postačily jen dva vektory – E (elektrická intenzita) a H (magnetická intenzita). Látkové prostředí charakterizoval bodovými náboji, které dle jeho úvah byly rozloženy s určitou mikroskopickou strukturou r_{mikro} a pohybovaly se prostorem rychlostí $\boldsymbol{v}$. Mikroskopické pole odvozené pomocí Lorentzových vztahů vypadá takto [6]:

$$rot\, \boldsymbol{h} = \rho_{mikro} \boldsymbol{v} + e_0 \frac{\partial e}{\partial t} \tag{2.19.1}$$

$$div\, \boldsymbol{e} = \frac{1}{e} \rho_{mikro} \tag{2.19.2}$$

$$rot\, \boldsymbol{e} = -m_0 \frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} \tag{2.20.1}$$

$$div\, \boldsymbol{h} = 0 \tag{2.20.2}$$

Tato teorie má velký rozsah platnosti, až do rozměrů 10^{-13} cm. K těmto vztahům existuje ještě Lorentzova rovnice pro sílu, která působí na náboj q v daném prostředí a má nějakou rychlost ***v***. Tato rovnice je pro veřejnost jeho nejznámějším počinem a je známa pod názvem Lorentzova síla [6].

$$\boldsymbol{F} = q\ (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{B}) \tag{2.21}$$

2.3 Matematická teorie

2.3.1 Simeón Denis Poisson

Poisson se jako jeden z prvních pokusil dát teoretickému pojetí elektřiny a magnetismu matematický tvar. Jeho snahy vycházely z již dobře známých poznatků ověřených již několika slavnými jmény – Franklin, Coulomb, atd. Jednalo se především o tyto vlastnosti fyzikálních systémů, rozdělených podle [6]:

- Všechna tělesa jsou nositeli dvou fluid. Jsou – li jejich množství v rovnováze, těleso se nachází v tzv. přirozeném stavu, pokud je tato rovnováha porušena, těleso je kladně nebo záporně elektrované.
- V kovech se fluida dobře šíří, zatímco v izolantech nikoliv.
- Fluidum, jež je přivedené na kovové těleso v přirozeném stavu, se rozloží po jeho povrchu.
- Částice souhlasných či opačných fluid se odpuzují silou, která je nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti. Uvnitř kovového tělesa je silové působení fluid vždy nulové.

Snaha vytvořit matematický model tohoto systému ho dovedla až k tomu, aby se pokusil zobecnit gravitační zákon pro sílu formulovaný Newtonem, přičemž tato síla nepůsobí mezi dvěma hmotnými body, ale působí mezi dvojicí nějakých libovolných těles. Tento poznatek byl již definován vztahem F= - grad(φ) a vztahem: [6]

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2.22}$$

Z těchto poznatků poté Poisson vytvořil vztah platící i pro vnitřní oblast uvažovaných těles, jenž je v [6] zapsán takto:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \; . \tag{2.23}$$

2.3.2 George Green

Další významnou postavou v historii elektrotechniky a matematiky je George Green, který při zpracovávání těchto poznatků vytvořil matematický vztah, který dnes můžeme znát pod názvem Greenova věta a poté i funkci G, tzv. Greenovu funkci[6]:

Greenova věta:

$$\int_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) \tag{2.24}$$

Kde:

V	*uvažovaná prostorová oblast*
S	*hraniční plocha*
φ, ψ	*spojité funkce v tomto prostoru*

Greenova funkce:

Tato funkce je charakterizována jen uvnitř prostorové oblasti, na povrchu S je tato funkce rovna nule [6].

$$G = \frac{1}{r} + \omega(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) \tag{2.26}$$

Kde

G	*tvar funkce uvnitř prostorové oblasti V*
N (ξ, η, ζ), M (x, y, z)	*dva body oblasti V*
R	*vzdálenost mezi dvěma body*
ω	*funkce harmonická v celé oblasti V*

2.3.3 William Thomson

William Thomson jako ředitel nové atlantické telegrafní společnosti se pokoušel realizovat položení telegrafního kabelu, který by spojil Ameriku s Evropou. Ač první pokus selhal, tento kabel se nakonec povedlo položit, bohužel byl zničen při občanské válce v Americe roku 1861. [13]

Thomson byl prvním ve vypracování teorie dlouhého vedení s ohledem na odpor *R* a kapacitu *C*. Sestavil tzv. difuzní rovnici v diferenciálním tvaru pro napětí *u(t)* v nějakém místě *x* na vedení: [6]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - RC\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{2.27}$$

3 Platnost infinitezimálních modelů elektromagnetických polí

K odvozování vztahů mezi fyzikálními veličinami a zkoumání jejich chování v určité realitě slouží konkrétní vztažené modely, jejichž charakter může být fyzikální, matematicko-analytický nebo grafický (schématický). Výše jsme se zmiňovali např. o Maxwellově elastickém modelu elektromagnetického pole, s jehož pomocí odvozoval poznatky pro své rovnice. Pokud budeme takto přemýšlet, je třeba vzít v potaz, že jevy popisované integrálními funkcemi se – stejně jako všechny ostatní - odehrávají v určitém prostoru a čase.

3.1 Integrace v prostoru

Prostorová integrace se uplatňuje buď při určování celkové energie konkrétního prostorového uspořádání (objektu), respektive veličin, které tuto energii charakterizují, nebo při stanovování souhrnného parametru (vlastnosti) prostorové součásti. V druhém případě jde o integraci určité vlastnosti prostředí a výsledkem v elektrotechnice může být například kapacita, indukčnost, odpor nebo vodivost idealizovaného obvodového prvku.

Sledovaná vlastnost prostředí (permitivita, permeabilita, rezistivita, atd.) přitom může být rozložena homogenním či nehomogenním způsobem a často uvažujeme, že se může v prostoru měnit i nespojitě. Při bližším náhledu na reálné prostředí si však uvědomíme, že jeho vlastnosti jsou určeny hmotnými částicemi, v něm rozloženými, které se uplatňují výlučně prostřednictvím interakcí svého pole.

Makroskopicky jde pouze o pole elektromagnetické a gravitační, při subatomárních vzdálenostech pak přistupuje pole tzv. silných interakcí. V každém případě se vyjmenovaná pole šíří prostorem spojitě, eventuálně kvazikontinuálně. Poslední termín se týká předpokladu diskrétní struktury prostoru a času, takže změny hodnot polí by byly též diskrétní, ale rozdíl hodnot, příslušných sousedním prostorovým elementům, nikdy nepřesáhne odpovídající elementární kvantum energie. V dostatečně rozsáhlém měřítku, kde elementární délka již není patrná, nelze pak zaznamenat ani nespojitosti veličin pole.

Z uvedeného vyplývá, že vlastnosti prostředí a energie v něm rozložená se – při zanedbání dosud ani neprokázané diskrétní struktury prostoru (a času) – mění zásadně spojitě. Rozdíly ve strmostech změn – v prostorových derivacích – však mohou být diametrální, o mnoho řádů.

3.2 Integrace v čase

Podstatou všech fyzikálních jevů je energie, její přeměny v čase a přenos v prostoru. Fyzikální veličiny, s výjimkou prostorové a časové metriky a parametrů prostředí, jsou zavedeny tak, aby popisovaly projevy energie v prostoru a čase. To znamená, že všechny fyzikální veličiny příslušné fyzikálním dějům jsou ve skutečnosti stavové a charakterizují míru energie v soustavě. Vyloučíme-li na základě odvěké zkušenosti lidstva nekonečné výkony, lze tvrdit, že všechny fyzikální veličiny jsou „setrvačné“ a spojité v čase.

Opět platí, že množství energie akumulované v uvažovaném systému v různých formách mohou být vzájemně nesouměřitelná. Derivace změn některých fyzikálních veličin se tak mohou o mnoho řádů lišit od jiných. Jestliže v určitém časovém měřítku sledujeme pomalejší děje, odpovídající hlavnímu toku energie, je logické, že jevy v daném měřítku nezobrazitelné považujeme za okamžité, s nespojitým chováním. Je to potřeba i s ohledem na zjednodušení a zpřehlednění abstraktních modelů.

3.3 Fyzikální a matematické modely

Analýza v elektrotechnice, stejně jako všude jinde, spočívá v hledání adekvátních modelů reality. Přiřazení vhodného modelu k objektu je ekvivalentem jeho pochopení. Dokud není nalezen žádný model, nelze předpovědět chování objektu a to se zdá být zcela nepochopitelné.

Jelikož realita je téměř nekonečně složitá a různými způsoby vzájemně propojená (je koherentní a zřejmě nemá separátní části), každý racionálně pochopitelný model musí být zjednodušen v maximální možné míře. Požaduje se, aby zjednodušený model vystihoval chování objektu s chybou, která odpovídá možnostem rozlišení při měření dané fyzikální veličiny.

V technické praxi se hranice zanedbatelnosti obvykle pohybuje mezi 1 % a 0,1 %. Přibližně v těchto mezích se pohybuje i rozlišení intenzit dvou současných signálů v případě lidského sluchu a zraku.

Uvedenou relativně nízkou přípustnou hodnotu chyby může zjednodušený model garantovat vždy jenom v omezeném rozsahu hodnot. Různým intervalům (např. frekvencí, teplot, napětí atd.) je nutno přiřazovat různé modely, lišící se stupněm abstrakce a tím, které tzv. okrajové vlivy a vazby mohou být zanedbány.

Těžištěm práce při vytváření modelů je rozhodování o tom, co ještě lze zanedbat (a tedy musí být zanedbáno) a které závislosti je již nutno respektovat. Nejčastější idealizace modelů v elektrotechnice spočívají v zanedbání konečné rychlosti šíření elektromagnetické energie, zanedbání odporu, kapacity a indukčnosti vodičů, v linearizaci vlastností prvků (vlastnost prvku se považuje za konstantní vzhledem k proměnným) a v tom, že u každé součástky uvažujeme pouze jedinou dominantní vlastnost, zatímco ostatní hodnotami nepodstatné abstrahujeme.

V elektrických obvodech se zpravidla nejdříve formulují topologické modely – schémata – s vyznačením fyzikálních vlastností idealizovaných elementů. Následně se model standardními postupy (metoda smyčkových proudů, metoda uzlových napětí) převádí do matematické podoby – soustavy rovnic. V matematické formě se pak nabízejí další ekvivalentní úpravy v rámci tzv. řešení soustavy. V podstatě jde o otáčení matematického modelu tak, aby informace implicitně v něm obsažené byly zobrazeny explicitně a bez vzájemných kombinací.

V důsledku idealizace se některé veličiny v modelech stávají nespojitými v prostoru nebo čase. Například každý bod prostoru vykazuje permitivitu a permeabilitu, typicky vakua. Každé prostorové uspořádání (objekt) tedy jeví kapacitu i indukčnost. Pokud ovšem budeme modelovat induktor, jehož indukčnost je výrazně zvýšena použitím feromagnetického jádra a vzájemnými vazbami mezi závity vinutí, budeme jeho kapacitu jako nepodstatnou (akumuluje malé množství energie) zanedbávat.

3.4 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice jsou v dnešní době zapisovány v diferenciálním tvaru pro nekonečně malý element a v integrálním tvaru pro makroskopické uzavřené křivky či oblasti.

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \oint_c \mathbf{H} \cdot \mathrm{dl} = I + \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_c \mathbf{E} \cdot \mathrm{dl} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

$$div\vec{D} = \rho \qquad \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = Q,$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$$

Zatímco jejich integrální forma se snadno vyrovná i s nespojitosmi vlastností prostředí, diferenciální tvar v nediferencovatelných bodech na (nespojitém) rozhraní prostředí nemusí fungovat.

Jak bylo ukázáno výše, jde pouze o umělý problém. Realita nespojitosti nezná, ty se vyskytují jen v idealizovaných abstraktních modelech. Prostředí se vzhledem ke své polní podstatě na přechodu z jednoho do druhého prolínají, a proto při přechodu mezi prostředími se i elektromagnetické veličiny ve skutečnosti mění plynule

Pokud bychom nalezli a akceptovali diskrétní model prostoru a času, bylo by vhodné jejich elementární kvanta postulovat jako absolutní jednotky délky a času. Souřadnice by pak byly dány celočíselnými údaji.

Lineární spojité modely by se pro makroskopické úlohy nadále s výhodou používaly, ale alternativně by bylo možné pro mikroskopické účely nahradit integrace sumacemi a derivace rozdíly hodnot sousedních elementů. Vyřešily by se tak třeba potíže při modelování homogenního vedení, kde od elementu požadujeme, aby byl současně jednotkový a přitom nekonečně malý.

Operace rotace by dostala interpretaci orientovaného součtu vektorů v elementární smyčce (smyčka v obecné prostorové poloze) a začala by korespondovat s druhým Kirchhoffovým zákonem. Podobně divergence by byla chápána jako součet vektorů, incidujících s elementárním uzlem a korespondovala by s prvním (proudovým) Kirchhoffovým zákonem. Současně by se stala zřetelnou nulová bilance obou operací u fyzikálních polí, podobně jako se uvažuje v elektrických obvodech u Kirchhoffových zákonů.

4 Dualita polí

Dualitu můžeme definovat jako inverzní analogii na dvojici objektů, jevů nebo metod. Úplná dualita zahrnuje dvojakost v obsahu i formě, neboli v objektech (resp. veličinách) a ve způsobu jejich interakcí [14].

S dualitou se lze setkat již na ryze abstraktní úrovni v mnoha matematických a logických souvislostech. V rámci Booleovy algebry jde o známé De Morganovy zákony, které uvádějí do duálního vztahu logický součin a logický součet, za předpokladu, že operujeme s negovanými veličinami (včetně výsledku).

Důkladně je zpracována problematika duálních postupů a duálních metod mj. při optimalizacích v Operačním výzkumu (Simplexová metoda, Modifikovaný dopravní problém,…). Teorie duality je tu významným nástrojem pro testování optimality řešení. Platí věta, že základní řešení, které je současně přípustné pro primární i duální formulaci optimalizační úlohy, je řešením optimálním.

V elektrotechnice můžeme spatřovat vztah duality například v teorii obvodů mezi Kirchhoffovými zákony, potažmo pak mezi metodou smyčkových proudů a metodou řezů (speciálně metodou uzlových napětí).

Je zde rozlišována fyzikální dualita a topologická dualita. V prvním případě jde o dvojici prvků kapacitor – induktor, vlastnosti odpor – vodivost nebo veličiny napětí – proud. V rámci topologické duality se k sobě ne zcela správně přiřazuje dvojice smyčka – uzel. Ve skutečnosti je smyčka hranicí, která dělí rovinu na dvě části – exteriér a interiér. Ke každé této části duálně přísluší jeden uzel, takže přesněji jde o dualitu mezi smyčkou a uzlovým párem.

Dualita nepochybně patří k základním principům fyzikální reality. Z prostorového hlediska je vesměs spojena také s ortogonalitou duálních objektů. Duální zobrazení patrně má co činit s exponenciální funkcí (přiřazení 0 a 1 nebo vztah násobení a sčítání, ale také časová a spektrální analýza fyzikálních jevů). Původ fyzikální duality můžeme tušit v dualitě prostoru a času, resp. klidu a pohybu. Současně shledáme, proč dualita ve fyzikální teorii zdaleka nezaujímá místo, které by jí mezi ostatními zákonitostmi mělo náležet:

Duální objekty by s ohledem na symetrickou analogii měly mít stejnou dimenzi. Prostor a čas takto nevnímáme. Naše představivost je orientována výlučně prostorově a je trojrozměrně limitována. Časové závislosti, které nejsme schopni přímo vnímat, spojujeme do jedné – tzv. časové – osy (tj. vše, co není vidět jako prostor). Zde může být příčina nesouměrného pojetí prostoru a času, které blokuje širší uplatnění pojmu duality třeba v případě elektrického a magnetického pole.

Přírodní procesy i technické regulace vedou zpravidla ke konvergentním průběhům. Často je lze modelovat jako lineární soustavu 1. řádu. Řešením časového průběhu, podle kterého se příslušné veličiny přibližují k požadovanému ustálenému stavu, je pak exponenciální funkce. Fyzikální realita generuje exponenciální funkci prostřednictvím záporné zpětné vazby. Rychlost konvergence k ustálenému stavu vyplývá z rozdílu cílové hodnoty a aktuální hodnoty. Úměrně tomuto rozdílu se zvyšuje sledovaná veličina. Čím menší je odchylka od cílové hodnoty, tím pomalejší je konvergence k ní. Výsledkem je teoreticky nekonečný průběh přechodného jevu s funkcí zpravidla

$$1 - e^{-t/\tau}$$

Vnitřní záporná zpětná vazba spočívá v tom, že výsledná hodnota veličiny ovlivňuje další průběh jejích změn.

Tento řídicí algoritmus lze v diskrétní numerické podobě snadno simulovat pomocí výpočetní či mikroprocesorové techniky. Výpočet nové hodnoty a její korekce se provádí vždy v ekvidistantních časových intervalech Δt.

V této souvislosti se nabízí možnost nahradit vyhodnocování odchylky namísto rozdílem podílem žádané a aktuální hodnoty. Výsledek nepřičítat, ale korekci provádět násobením. Ve skutečnosti jde o přechod od numerické integrace k duální operaci, kde opakované sčítání je nahrazeno opakovaným násobením. V předchozím textu bylo přitom ukázáno, že sčítání a násobení můžeme považovat za duálně sdružené operace, které vzájemně transformuje exponenciální funkce.

Zpracovat obecnou teorii duálního aparátu k infinitesimálnímu počtu, definovat jeho terminologii a analyzovat jeho možné přínosy výrazně přesahuje rámec bakalářské kvalifikační práce. Této problematice bych se ráda – budu-li k tomu mít podmínky a možnosti - věnovala v následujících letech.

Závěr

S pojmem derivací a integrálů se dnes setkáme nejen v matematice. Jak jsem se snažila v práci poukázat, metoda infinitezimálního počtu je nezbytná pro formulování matematických vztahů, ale i pro formování fyzikálních vztahů v teoretické části všech technických oborů. Z práce je patrné, jak úzce matematika souvisí a spolupracuje s elektrotechnikou, ale i s ostatními vědními disciplínami.

Základní kámen infinitezimálního počtu, na který je práce zaměřena, byl položen již před několika tisíciletími ve Starém Řecku. S postupem času se matematické uvažování upevňovalo a lidé se snažili logicky vysvětlit pro ně dosud nepochopitelné přírodní úkazy. Formování těchto myšlenek potom vedlo k rozvoji matematiky, elektrotechniky a ostatních vědních oborů. Z tohoto je patrné, že matematiku a elektrotechniku nelze zkoumat a posuzovat jen z pohledu několika století zpět, ale je třeba se podívat hlouběji do historie, neboť lidé se s projevy elektřiny a magnetismu setkávali již od prvopočátků, avšak vztahy a zákonitosti v přírodě panující odhalovali jen velmi pomalu.

První část práce je zaměřena na matematický pohled vzniku infinitezimálního počtu a to právě již od Starého Řecka až po současnost.

Ve druhé kapitole jsem se snažila poukázat na důležité elektrotechnické a elektromagnetické vztahy, které mohly díky postupné formulaci infinitezimálního počtu v matematice vzniknout.

Ve třetím bodě práce je zobecněn pohled na „ideální modely“ prostředí, které souvisí se vznikem fyzikálních vztahů a proč vůbec se vůbec tyto modely tvoří.

V závěru práce je poukázáno porovnání, jak by vypadal integrální počet, pokud by byl vyjádřen v duální formě, a tedy ne jako výsledek nekonečného součtu veličin, nýbrž jako nekonečný součin.

Použitá literatura

[1] SCHWABIK Š., Šarmnová P. Malý průvodce historií integrálu. 1. české vydání. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-038-1.

[2] Kubešová, Ivana. Výklad matematické analýzy v 19. století. Plzen. ZČU. Diplomová práce. Západočeská univerzita, 1985.

[3] NIKIFOROVSKIJ, Viktor Arsen'jevič. Cesta k integrálu. 1. české vyd. Pardubice: Karel Vašíček-mathpublishing.eu, 2006.

[4] BEČVÁŘ, J., Fuchs, E.:. Matematika v 19. století: Sborník přednášek z letních škol. 1. české vydání. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-019-5.

[5] JAHNKE, Hans Niels, OHLY, Sybille; ARCHIBALD, Thomas; přeložil Vašíček, Karel. Historie analýzy. 1. české vyd. Pardubice: Karel Vašíček-mathpublishing.eu, 2007. ISBN 978-80-903838-1-4.

[6] MAYER, Daniel. Pohledy do minulosti elektrotechniky: objevy, myšlenky, vynálezy, osobnosti /. 2., dopl. vyd. České Budějovice: Kopp, 2004. ISBN 80-7232-219-2.

[7] Wikipedia: Isaac Newton. [online]. [cit. 2012-06-05]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

[8] Wikipedia: Gottfried Wilhelm Leibniz. [online]. [cit. 2012-06-05]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Leibniz

[9] Wikipedia: Bernhard Riemann. [online]. [cit. 2012-06-05]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Riemann

[10] Wikipedia: Henri Léon Lebesgue. [online]. [cit. 2012-06-05]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Lebesgue

[11] Wikipedia: Michael Faraday. [online]. [cit. 2012-06-04]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday

[12] Wikipedia: James Clerk Maxwell. [online]. [cit. 2012-06-05]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell

[13] Wikipedia: William Thomson. [online]. [cit. 2012-06-07]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/William_Thomson

[14] Odborné konzultace s vedoucím bakalářské práce Ing. Petrem Preussem, CSc.