FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2021

Normalizace míry nelinearity pro estimaci

Jindřich Havlík[1]

1 Úvod

Teorie lineárních systémů je velice podrobně probádaná oblast s širokou nabídkou efektivních řešení. Bohužel, naprostá většina modelů reálného světa je nelineární. V zájmu zachování racionálních výpočetních nároků se ve vhodných případech v hojné míře využívá aplikace lineárních metod spíše než plně nelinárních přístupů. Ke zjištění vhodnosti použití lineárních metod je nezbytné kvantifikovat, jak moc je daný problém lineární či nelineární. Právě k tomu slouží i nová míra nelinearity navržená autory Liu a Li (2015). Jedná se o jedinou míru nelinearity speciálně určenou pro stochastické systémy, která dokáže zahrnout i vliv šumu, který je nedílnou součástí stochastického modelu.

Tato míra nelinearity má řadu výhodných vlastností, které z ní dělají takřka univerzální míru nelinearity pro odhad. Bohužel, míra má jednu nepříjemnou vlastnost - její hodnota je ovlivněna implementací. Přesněji řečeno její hodnotu ovlivňuje volba jednotek. To je obzvláště u normalizované míry problém. Na následujících řádcích bude tento problém analyzován.

2 Míra nelinearity podle střední kvadratické chyby

Liu a Li (2015) navrhli míru nelinearity pro nelineární transformaci $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ spojité náhodné proměnné $\mathbf{x}$ a na ní nezávislém šumu $\mathbf{v}$. Pro účely tohoto textu bude nelineární transformace $\mathbf{g}$ omezena na případy s multiplikativním šumem, tj. $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v})$, kde $\mathbf{f}$ a $\boldsymbol{\pi}$ jsou vektorová a maticová funkce $\mathbf{x}$ příslušných dimenzí a $\boldsymbol{\gamma}$ je vektorová funkce $\mathbf{v}$. Speciálním případem multiplikativního šumu je šum aditivní s $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) = 1$. Autoři předpokládají, že lineární vztah mezi $\mathbf{x}$ a výstupní náhodnou proměnou $\mathbf{y}$ nastává, pokud platí rovnost $\mathbf{y} = \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} + \mathbf{w}$, pro matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$ příslušných rozměrů a šum $\mathbf{w}$.

Míra nelinearity je autory definována $\mathcal{M} = \sqrt{\min\limits_{\mathbf{A},\mathbf{b},\psi(\mathbf{w},\mathbf{v})} \mathrm{E}_{\mathbf{x},\mathbf{w},\mathbf{v}}[\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{w})\|_2^2]}$ a její normalizovaná verze je $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{gg})}$, kde $\Sigma_{(\cdot)}$ je kovarianční matice $(\cdot)$ a $\psi(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ je sdružená distribuční funkce. Pro nelineární transformaci s multiplikativním šumem má míra hodnotu $\mathcal{M} = \sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{ff} - \boldsymbol{\Sigma}_{fx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{xf}) + \mathrm{tr}[\mathrm{E}(\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T\tilde{\boldsymbol{\pi}})\boldsymbol{\Sigma}_\gamma]}$, kde $\tilde{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi} - \mathrm{E}[\boldsymbol{\pi}]$.

Za pozornost stojí: a) kdyby byla $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ lineární v $\mathbf{x}$, vzhledem k závislosti šumu na $\mathbf{x}$ bude $\mathcal{M} = \sqrt{\mathrm{tr}\,\mathrm{E}(\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T\tilde{\boldsymbol{\pi}})\boldsymbol{\Sigma}_\gamma)}$, b) v případě aditivního šumu druhá stopa matice zmizí a nenormalizovaná míra nebude záviset na šumu. Na šumu bude vždy záviset až normalizovaná míra nelinearity, která vznikne přenásobením míry normalizační konstantou $(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{gg}))^{-1/2}$.

3 Kritika

Výsledné řešení obsahuje stopu matice. Stopa matice jako součet prvků na diagonále zcela ignoruje fyzikální realitu a v případě různých jednotek složek $\mathbf{y}$ může vést k nesmy-

[1] student doktorského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Kybernetika, téma disertační práce: Rozvoj metod nelineární filtrace, e-mail: havlikj@ntis.zcu.cz

slným závěrům (ve smyslu interpretace). V případě normalizované míry bude dokonce dramaticky ovlivňovat do jaké míry je funkce nelineární. **Příklad:** Objekt v kartézských souřadnicích $\mathbf{x} = [x, y]^T$ je sledován radarem v polárních souřadnicích jako vzdálenost a úhel, tj. $\mathbf{y} = [\sqrt{x^2 + y^2}[km], \mathrm{arctg}(y/x)[°]]^T$ a náhodná proměnná $\mathbf{x}$ má gaussovské rozdělení se střední hodnotou $[1, 1]^T[km]$ a kovariancí $10^{-3} \cdot \sigma^2 \cdot \mathbf{I}\,[km^2]$, kde hodnoty σ^2 jsou postupně voleny z intervalu $\langle 10^{-4}, 10^2 \rangle$ a $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Obrázek 1 ilustruje závislost normalizované míry nelinearity na zvolených jednotkách implementace. Pro různé relevantní implementace může vyjít normalizovaná míra i o 60% jinak, což je zcela neakceptovatelné.

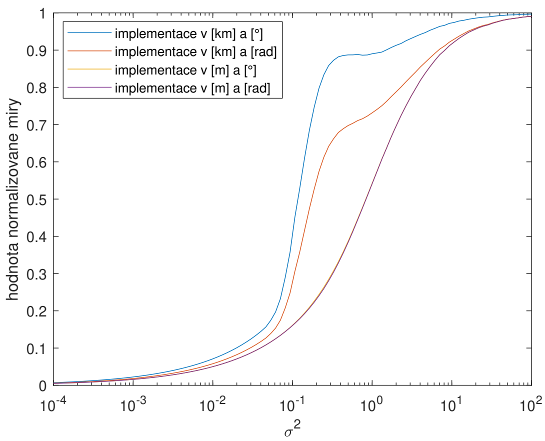
4 Řešení závislosti na jednotkách složek stavu

Řešením problému je zajištění bezrozměrosti jednotek složek stavu ještě před jejich sečtením stopou matice. Toho lze elegantně dosáhnout zavedením pozitivně definitní symetrické váhové matice $\mathbf{W}$ do návrhového kritéria, tj.

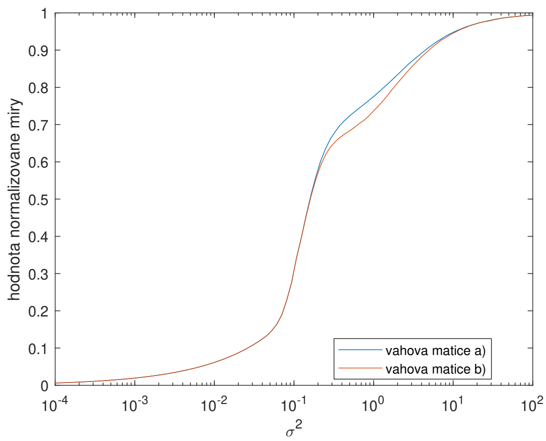
$$\mathcal{M}(\mathbf{W}) = \sqrt{\min_{\mathbf{A},\mathbf{b},\psi(\mathbf{w},\mathbf{v})} \mathrm{E}_{\mathbf{x},\mathbf{w},\mathbf{v}}[(\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{w}))^T \mathbf{W} (\mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{v}) - \mathbf{L}(\mathbf{x},\mathbf{w}))]}$$
$$= \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{W}(\boldsymbol{\Sigma}_{ff} - \boldsymbol{\Sigma}_{fx}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{xf} + \mathrm{E}_{\mathbf{x}}[\tilde{\boldsymbol{\pi}}\boldsymbol{\Sigma}_{\gamma}\tilde{\boldsymbol{\pi}}^T]))},$$

Za povšimnutí stojí, že volba $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ vede na původní míru nelinearity a volba $(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{gg}))^{-1/2}$ na původní normalizovanou míru.

Z analýz vyplynuly dvě možné volby váhové matice $\mathbf{W}$ zajišťující nezávislost na implementaci: a) $\mathbf{W} = \frac{1}{n_g}\boldsymbol{\Sigma}_{gg}^{-1}$, b) $\frac{1}{n_g}\,\mathrm{diag}^{-1}(\boldsymbol{\Sigma}_{gg})$, kde n_g je výstupní dimenze transformace $\mathbf{g}$ a diag značí výběr diagonálních prvků matice. Výhodou volby a) oproti b) je, že plně respektuje korelovanost jednotlivých složek $\mathbf{y}$, ale inverze $\boldsymbol{\Sigma}_{gg}$ může při špatné podmíněnosti způsobovat problémy. Obě volby také (stejně jako $(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{gg}))^{-1/2}$) zajistí normalizaci na požadovaný interval $\langle 0, 1 \rangle$. Výsledky nově navržených měr pro stejný příklad ilustruje Obrázek 2. Ani jedna z měr nyní nezávisí na implementaci.



Obrázek 1: Vliv implementace na původní normalizovanou míru nelinearity.



Obrázek 2: Normalizované míry nelinearity bez vlivu implementace.

Literatura

Liu, Y.; Li, X. R.: Measure of Nonlinearity for Estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*, ročník 63, č. 9, 2015: s. 2377–2388.