

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zobecněná $L(p, q)$ -ohodnocení grafů

Autor: Bc. Martin Kopřiva

Vedoucí práce: doc. RNDr. Přemysl Holub, Ph.D.

Plzeň, 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury, jež je uvedena v seznamu literatury na konci této práce.

V Plzni dne

Podpis

Poděkování

Děkuji svému vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph.D., za jeho cenné rady, které mi v průběhu vypracování poskytoval, za trpělivost, ochotu a spoustu času, jež mi věnoval.

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá $L(p, q)$ -ohodnocením grafů a $L(p, q, r)$ -ohodnocením grafů. Příslušným ohodnocením rozumíme přiřazení nezáporných celých čísel vrcholům grafu G tak, že sousední vrcholy musejí být ohodnoceny hodnotami lišícími se aspoň o p , vrcholy ve vzdálenosti 2 se musejí lišit aspoň o q a ev. vrcholy ve vzdálenosti 3 se musejí lišit alespoň o r , kde p, q a r jsou nezáporná celá čísla. První část práce shrnuje některé dosud známé výsledky v oblasti $L(p, q)$ -ohodnocení, a to především pro parametry $p = 0$ a $q = 1$, $p = q = 1$, v praxi nejvíce se vyskytující $p = 2$ a $q = 1$, ale i pro obecné p a q . Kapitola 4 pak pojednává o vlastním výzkumu – $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení cirkulantů.

Klíčová slova

$L(p, q)$ -ohodnocení, $L(p, q, r)$ -ohodnocení, cirkulant

Abstract

This thesis deals with $L(p, q)$ -labellings of graphs and $L(p, q, r)$ -labellings of graphs. By appropriate labellings we mean an assignment of non-negative integers to vertices of graph G according to the following rules: adjacent vertices are labelled by values differing by at least p , vertices at distance two apart labelled by values differing by at least q and, eventually, vertices at distance three are labelled by values differing by at least r , where p, q, r are non-negative integers. Already known results for $L(p, q)$ -labelling of graphs with respect to $p = 0$ and $q = 1$, $p = q = 1$, the most common in practice $p = 2$ and $q = 1$, but also for p a q in general are summarized in the first part of this thesis. Our own research, which concentrates on $L(3, 2, 1)$ -labelling of circulant graphs, is described in Chapter 4.

Keywords

$L(p, q)$ -labelling, $L(p, q, r)$ -labelling, circulant

Obsah

1	Úvod	1
2	Základní pojmy	2
3	Shrnutí výsledků v oblasti $L(p, q)$-ohodnocení	8
3.1	$L(0, 1)$ -ohodnocení grafů	9
3.2	$L(1, 1)$ -ohodnocení grafů	11
3.3	$L(2, 1)$ -ohodnocení grafů	14
3.4	$L(p, q)$ -ohodnocení grafů	29
4	$L(p, q, r)$-ohodnocení grafů	41
4.1	Vybrané známé výsledky pro $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení grafů	41
4.2	$L(3, 2, 1)$ -ohodnocení cirkulantů	42
4.2.1	Husté cirkulanty	43
4.2.2	Řídké cirkulanty	47
5	Závěr	62

1 Úvod

Nechť jsou dána dvě nezáporná celá čísla p, q ; $L(p, q)$ -ohodnocením rozumíme přiřazování nezáporných celých čísel vrcholům příslušného grafu G tak, že sousedním vrcholům jsou přiřazeny hodnoty lišící se aspoň o p a vrcholy ve vzdálenosti 2 jsou ohodnoceny hodnotami lišícími se aspoň o q . Rozpětím $L(p, q)$ -ohodnocení rozumíme rozdíl mezi největší a nejmenší použitou hodnotou, cílem je toto rozpětí minimalizovat. Minimální rozpětí příslušného grafu G pak budeme nazývat ohodnocovací číslo a značit jej budeme $\lambda_{(p,q)}(G)$.

Problém ohodnocování vychází z klasického barvení grafů. Toto zobecnění bylo motivováno praktickým problémem, který se objevil na počátku 20. století, totiž přiřazováním frekvencí. Protože bylo potřeba stále více frekvencí, na nichž by se dalo vysílat, bylo těžké najít volné frekvence tak, aby nedocházelo k rušení vysílání ostatních stanic v blízkém okolí. Tento problém byl poprvé formulován W. K. Halem [45] v roce 1980, a to jako problém barvení grafu. S variací zohledňující vzdálenost vysílačů přišel F. S. Roberts [100] v roce 1991. V této variantě „blízké“ vysílače musejí vysílat na různých kmitočtech, „velmi blízké“ vysílače pak musejí vysílat na kmitočtech s rozdílem aspoň dva. Převvedeme-li tento praktický problém do teorie grafů, hovoříme o vrcholech ve vzdálenosti 2, resp. o sousedních vrcholech. Minimální rozsah kmitočtů pak odpovídá ohodnocovacímu číslu $\lambda_{(2,1)}(G)$. Griggs a Yeh [43] pak v roce 1992 přišli s příslušnou definicí $L(2, 1)$ -ohodnocení.

Toto ohodnocení lze dále zobecnit a rozšířit, původní $L(2, 1)$ -ohodnocení je ale stále v praxi nejčastější. V úvodním přehledu se budeme zabývat $L(p, q)$ -ohodnocením grafů, představíme si horní a dolní odhady ohodnocovacího čísla $\lambda_{(p,q)}(G)$, případně přesné hodnoty tohoto rozpětí u některých tříd grafů.

V kapitole 4 se podíváme právě na jedno konkrétní rozšíření. Můžeme totiž rozlišovat nejen vysílače „blízké“ a „velmi blízké“, ale i vysílače „relativně blízké“. To v řeči matematiky znamená, že přidáme podmínku na vrcholy ve vzdálenosti 3. S nejklaštější verzí tohoto problému přišli Liu a Shao [91], kteří představili definici $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení grafů. Opět ale můžeme tuto verzi zobecnit na $L(p, q, r)$ -ohodnocení apod.

Tato práce se zaměřuje jednak na shrnutí již známých výsledků z oblasti $L(p, q)$ -ohodnocení a rovněž na vlastní výzkum v oblasti $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení speciální třídy grafů, tzv. cirkulantů. Přehled o $L(p, q, r)$ -ohodnocení je uveden v bakalářské práci [80], a proto jej zde již neopakujeme.

2 Základní pojmy

Symbollem $[k]$, kde $k \in \mathbb{N}$, rozumíme množinu $\{1, \dots, k\}$.

V tomto textu pracujeme s následujícími pojmy a definicemi, z nichž většina byla převzata z [23], [82] nebo [83].

Grafem G rozumíme uspořádanou dvojici $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G)$ je konečná množina a $E(G) \subset \binom{V(G)}{2}$, přičemž $\binom{V(G)}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V(G), u \neq v\}$. Mluvíme tedy o neorientovaném grafu bez smyček a násobných hran. *Netriviální graf* obsahuje aspoň dva vrcholy. Symboly $V(G)$ a $E(G)$ značí množinu vrcholů a hran příslušnou k danému grafu G . Hranu mezi dvěma vrcholy u a v zapisujeme uv . *Stupeň vrcholu* u v grafu G je počet hran grafu G , které obsahují vrchol u – značíme $\deg_G(u)$. Maximální stupeň $\max\{\deg_G(u)\}$ grafu G pak budeme značit $\Delta(G)$. Graf G nazveme *r -regulárním*, jestliže všechny jeho vrcholy mají stupeň r .

Cestou délky t v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran $u_0, e_1, u_1, \dots, e_t, u_t$, kde vrcholy u_0, \dots, u_t jsou navzájem různé a pro každé $i = 1, \dots, t$ je $e_i = u_{i-1}u_i \in E(G)$. *Vzdálenost vrcholů* u a v v grafu G je délka nejkratší cesty z vrcholu u do vrcholu v a značíme ji $\text{dist}_G(u, v)$. Pokud taková cesta neexistuje, položíme $\text{dist}_G(u, v) = \infty$. Graf G je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u a v existuje cesta z vrcholu u do vrcholu v . Graf G je navíc *k -souvislý* ($k \in \mathbb{N}$), pokud $|V(G)| > k$ a graf $G \setminus U$ je souvislý pro každou množinu $U \subset V(G)$ takovou, že $|U| < k$.

Graf H je *podgrafem grafu* G (zapisujeme $H \subset G$), pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) \subset E(G)$. Graf H je navíc *indukovaným podgrafem grafu* G , pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. *Komponenta grafu* G je maximální souvislý podgraf grafu G .

Izomorfismus grafů G a H je bijekce $f : V(G) \rightarrow V(H)$, pro kterou platí, že dvojice $\{u, v\}$ je hranou grafu G právě tehdy, když dvojice $\{f(u), f(v)\}$ je hranou grafu H . Grafy G a H , mezi kterými existuje izomorfismus, jsou izomorfní (zapisujeme $G \simeq H$).

Komplementem (doplňkem) grafu $G = (V(G), E(G))$ budeme rozumět graf $G' = (V(G), E'(G))$, kde $E'(G) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$. Komplement grafu G značíme G^C .

Definujeme základní třídy grafů, s nimiž budeme v textu pracovat – konkrétně jde o cesty, kružnice, kola, kaktusy, úplné grafy, bipartitní grafy, stromy.

Cesta na n vrcholech je graf $P_n = (V(P_n), E(P_n))$, kde $V(P_n) = [n]$ a $E(P_n) = \{i(i+1) : 1 \leq i < n\}$. *Kružnice* na n vrcholech, kde $n \geq 3$, je graf $C_n = (V(C_n), E(C_n))$, kde $V(C_n) = [n]$ a $E(C_n) = E(P_n) \cup 1n$.

Obvod grafu G je délka nejkratší kružnice v grafu G a značíme jej $g(G)$. Kružnice, která prochází všemi vrcholy grafu se nazývá *hamiltonovská*, a graf obsahující nějakou takovou kružnici se nazývá *hamiltonovský*. *Kolo* W_n , kde $n \geq 3$, je graf na $n+1$ vrcholech, jež vznikne z kružnice C_n přidáním jednoho vrcholu sousedícího se všemi vrcholy kružnice C_n . *Kaktus* je souvislý konečný graf, jehož každá hrana je součástí nejvýše jedné kružnice. *Strom* T je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici. *List stromu* T je pak libovolný vrchol, jehož stupeň v T je 1.

Úplným grafem na n vrcholech rozumíme graf $K_n = (V(K_n), E(K_n))$, kde $V(K_n) = [n]$

a $E(K_n) = \binom{[n]}{2}$. *Klika grafu* G je úplný podgraf grafu G . *Klikovost grafu* G je přirozené číslo, jež udává velikost největší (na počet vrcholů) kliky v příslušném grafu G a značí se $\omega(G)$.

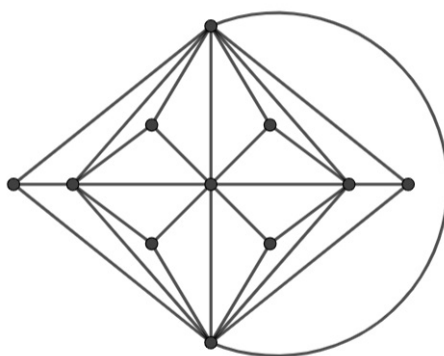
Graf $G = (V(G), E(G))$ nazveme *bipartitním grafem*, jestliže $V(G) = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a pro všechny hrany $uv \in E(G) : u \in V_1 \wedge v \in V_2$. Jestliže pro každé dva vrcholy $u \in V_1$ a $v \in V_2$ je $uv \in E(G)$, hovoříme o *úplném bipartitním grafu*, který značíme $K_{m,n}$, kde $m = |V_1|$ a $n = |V_2|$. *Biklika bipartitního grafu* G je úplný bipartitní podgraf grafu G . *Biklikovost bipartitního grafu* G je přirozené číslo, jež udává velikost největší (na počet vrcholů) bikliky v příslušném grafu G a značí se $bc(G)$. Zobecníme-li předchozí definici tak, že $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$) a pro všechny hrany $uv \in E(G) : u \in V_i \wedge v \in V_j$, kde $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, k$), dostaneme definici *k-partitního grafu*. Jestliže pro každé dva vrcholy $u \in V_i$ a $v \in V_j$, kde $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, k$, je $uv \in E(G)$, hovoříme o *úplném k-partitním grafu*, který značíme K_{n_1, \dots, n_k} , kde $n_i = |V_i|$ ($i = 1, \dots, k$).

Z [18] si rekurzivně zavedeme pojem *t-strom*:

1. Úplný graf K_t je *t-strom*.
2. Nechť graf H je *t-strom*. Pak graf H' , jež vznikne z grafu H přidáním vrcholu v připojením k *t*-klice (tj. K_t) grafu H , je rovněž *t-strom*.
3. Všechny *t*-stromy mohou být vytvořeny použitím předchozích dvou pravidel.

Je zřejmé, že každý strom je 1-strom. Minimální hodnota t , pro níž je graf G podgrafem *t*-stromu, se nazývá *stromová šířka* a značí se $tw(G)$.

Příkladem rovinného 3-stromu je Goldner-Hararyův graf, což je nejmenší nehamiltonovský maximální planární graf (graf je planární, jestliže je možné zakreslit jej do roviny tak, aby žádné dvě hrany neměly jiné společné body než koncové, graf je maximální planární, pokud přidáním nějaké hrany – k dané množině vrcholů – ztratíme jeho planaritu). Tento graf na 11 vrcholech a 27 hranách je znázorněn na obrázku 1.



Obrázek 1: Goldner-Hararyův graf jako příklad 3-stromu.

Minorem grafu G [69] rozumíme graf H , který lze získat z grafu G jakoukoliv sérií těchto tří operací: odebráním hrany, odebráním vrcholu a kontrakcí hrany (tj. pokud $uv \in E(G)$, kontrakcí této hrany rozumíme její odebrání a zidentifikování obou koncových vrcholů). Graf G se nazývá *H-bezminorní*, pokud neobsahuje graf H jako minor.

Podrozdělením grafu G rozumíme graf, který vznikne z grafu G (případným) nahrazením některých hran cestami.

Následující dvě definice představují k -tou mocninou grafu, resp. kartézský produkt grafů.

Nechť $k \in \mathbb{N}$; k -tou mocninou grafu G budeme rozumět graf G^k , jež vznikne z grafu G přidáním všech hran uv takových, že v grafu G existuje cesta z vrcholu u do vrcholu v délky nejvýše k .

Kartézským produktem (součinem) grafů $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ a $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ rozumíme graf $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ a dva vrcholy (u_1, v_1) a (u_2, v_2) jsou spojeny hranou právě tehdy, když platí $u_1 = u_2$ a $v_1 v_2 \in E(G_2)$ nebo $v_1 = v_2$ a $u_1 u_2 \in E(G_1)$. Kartézský produkt grafů G_1 a G_2 značíme $G_1 \square G_2$. Graf definovaný jako $Q_n = \underbrace{K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2}_n$, kde n je přirozené číslo, se nazývá n -rozměrná

krychle neboli n -dimenzionální hyperkrychle Q_n . *Hammingův graf* je kartézský produkt $K_{n_1} \square K_{n_2} \square \dots \square K_{n_d}$ úplných d grafů, kde $n_i \geq 2$ pro každé $i = 1, \dots, d$.

Kromě kartézského součinu grafů existují další dva součiny grafů G a H , a to *tenzorový součin*, jež se značí $G \times H$, a *úplný součin*, jež se značí $G \otimes H$. Pro tenzorový součin platí $V(G \times H) = V(G \square H)$ a $E(G \times H) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : (u_1, v_1) \in E(G) \wedge (u_2, v_2) \in E(H)\}$. Úplný součin $G \otimes H$ grafů G a H má stejnou množinu vrcholů jako oba předchozí součiny a množinu hran dostaneme jako sjednocení $E(G \square H)$ a $E(G \times H)$. Kartézský součin a tenzorový součin jsou vzájemně neizomorfní s jedinou výjimkou, když grafy G, H jsou liché kružnice stejné délky. Tyto definice byly převzaty z [18].

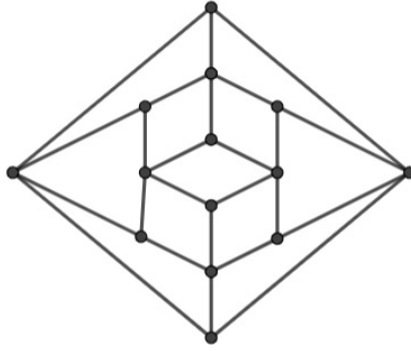
Graf G je *planární (rovinný)*, pokud jej lze zakreslit do roviny tak, aby žádné dvě hrany neměly jiné společné body než koncové. Stěny planárního grafu G jsou části roviny, které jsou omezeny hranami (vnější stěnou pak rozumíme část roviny „okolo“ grafu G). Příkladem rovinných grafů jsou tzv. mřížky.

Grafem Γ_Δ , kde $\Delta = 3, 4$ nebo 6 , značíme šestiúhelníkovou, čtvercovou, respektive trojúhelníkovou mřížku. Intuitivně definujeme příslušnou mřížku jako nekonečný graf (tj. graf s nekonečným počtem vrcholů), jehož vrcholy jsou pravidelně uspořádány do (šestiúhelníkové, čtvercové, resp. trojúhelníkové) mřížky. Řádnou definici, jež využívá pojmů z geometrie, trojúhelníkové sítě nabízí [67]: Nechť $e_1 = (1, 0)$ a $e_3 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ jsou vektory v Eukleidově rovině. Pak grafem $\Gamma_6 = (V(\Gamma_6), E(\Gamma_6))$, kde $V(\Gamma_6) = \{ie_1 + je_3 : i, j \in \mathbb{Z}\}$ a $E(\Gamma_6) = \{uv : u, v \in V(\Gamma_6), \text{dist}_{ER}(u, v) = 1\}$, kde symbolem dist_{ER} rozumíme Eukleidovu vzdálenost mezi vrcholy u, v .

Speciální podtřídou rovinných grafů jsou tzv. *vnějškově rovinné grafy* – to jsou takové rovinné grafy, jejichž všechny vrcholy leží na vnější stěně. To znamená, že graf je vnějškově rovinný, má-li rovinné nakreslení takové, že všechny jeho vrcholy jsou incidentní s vnější stěnou. Graf G je *l -vnějškově rovinný*, pokud je graf G pro $l = 1$ vnějškově rovinný a pro $l > 1$ má graf G rovinné znázornění takové, že pokud odstraníme všechny vrcholy vnější stěny, souvislé komponenty zbytku grafu jsou $(l - 1)$ vnějškově rovinné.

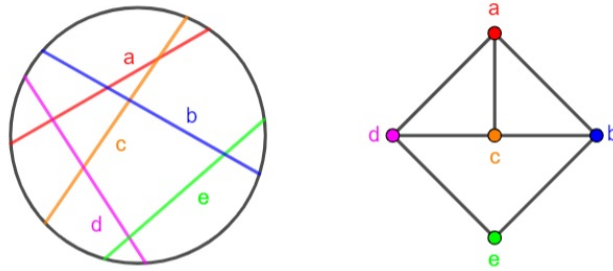
Na obrázku 2 je znázorněn 3-vnějškově rovinný graf G .

Věta 2.1 [60]. *Graf G je vnějškově rovinný právě tehdy, když je K_4 -bezminorní a $K_{2,3}$ -bezminorní.*



Obrázek 2: Graf G jakožto 3-vnějškově rovinný graf.

Pro danou množinu objektů M (pro kterou má průnik smysl) je odpovídající *průnikový graf* G neorientovaný graf, jehož vrcholy jsou objekty a hrana spojuje dva vrcholy, pokud se odpovídají objekty protínají. Množina M se nazývá *model grafu G s ohledem na průsečky*. Příkladem může být kružnicový graf, tedy průnikový graf množiny tětiv v kružnici: každá tětiva značí vrchol a dvě tětivy se protnou právě tehdy, když jsou vrcholy v grafu spojeny hranou. Příklad takového grafu znázorňuje obrázek 3.



Obrázek 3: Vlevo kružnice s pěti tětivami, vpravo pak odpovídající kružnicový graf.

V této práci budeme hovořit o několika zajímavých podtřídách průnikových grafů. *Kruhový graf* je průnikový graf množiny kruhů v rovině, kde každý kruh je jednoznačně určen jeho středem a průměrem. Mezi tuto třídu grafů patří například rovinné grafy. Jestliže mají všechny kruhy stejný průměr, graf nazveme *jednotkový kruhový graf*.

Pro každou pevnou dvojici reálných čísel $r > 0$ a $s > 0$ patří graf G do třídy (r, s) -civilizovaných grafů, pokud existuje přirozené číslo $d \geq 2$ takové, že průnikový model je množinou koulí \mathbb{R}^d , středy protínajících se koulí jsou ve vzdálenosti nejvýše r a vzdálenost mezi každými dvěma středy je aspoň s . My se budeme zabývat jen rovinnými (r, s) -civilizovanými grafy (tj. s $d = 2$), všechny dosažené výsledky však lze přímo rozšířit do vyšších dimenzí. Třída (r, s) -civilizovaných grafů zahrnuje kruhové grafy, kdykoliv existuje (pevná) minimální vzdálenost mezi středy jakýchkoliv dvojic koulí.

Chordální graf je průnikový graf podstromů ve stromě. Chordální graf lze definovat i jako graf, který neobsahuje kružnici velikosti alespoň 4 jako indukovaný podgraf (tzn., že každá kružnice délky větší než 3 má chordu, tedy hranu spojující vrcholy, jež nejsou v této kružnici spojeny hranou). Graf n -slunce je chordální graf s hamiltonovskou kružnicí $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, u_1$, ve které je každý vrchol u_i ($i = 1, \dots, n$) stupně právě 2.

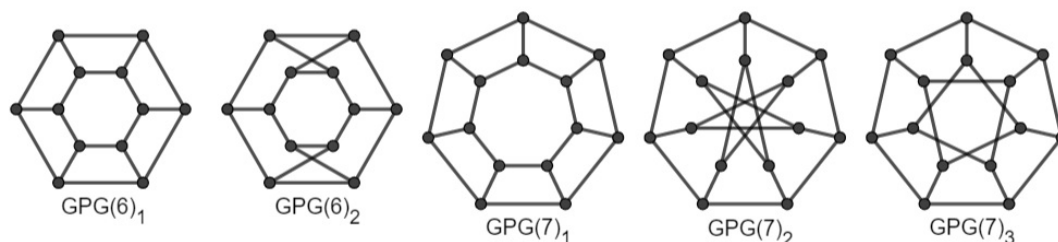
Dále nás budou zajímat chordální grafy neobsahující n -slunce ($n \geq 3$) jako indukovaný podgraf. Těmto grafům budeme říkat *silně chordální*. A konečně graf je *slabě chordální*, jestliže neobsahuje indukovanou kružnici délky aspoň 5. Podtřídou chordálních grafů jsou například t -stromy.

Intervalový graf je průnikový graf, jehož modelem je množina intervalů na reálné ose. Podtřídou intervalových grafů je třída *jednotkových intervalových grafů*, tj. grafů, pro které mají všechny intervaly stejnou délku.

Permutační graf je průnikový graf úseček, jejichž koncové body leží na dvou rovnoběžných přímkách (na každé z nich je n takových bodů).

Nyní si představíme několik speciálních tříd grafů, definice převzaty z [18]. Definice Sierpiňského grafu byla přejata z [40].

Pro $n \geq 3$ nazveme graf G s $n = 2N$ vrcholy *zobecněným Petersenovým grafem řádu N* právě tehdy, když graf G sestává ze dvou disjunktních N -kružnic, kterým budeme říkat vnitřní a vnější kružnice, takových, že každý vrchol vnější kružnice je sousední s právě jedním vrcholem vnitřní kružnice. Tyto grafy budeme značit $GPG(N)$. Na obrázku 4 je zachyceno pět zobecněných Petersenových grafů.



Obrázek 4: Některé zobecněné Petersenovy grafy pro hodnoty $n = 6$ a $n = 7$.

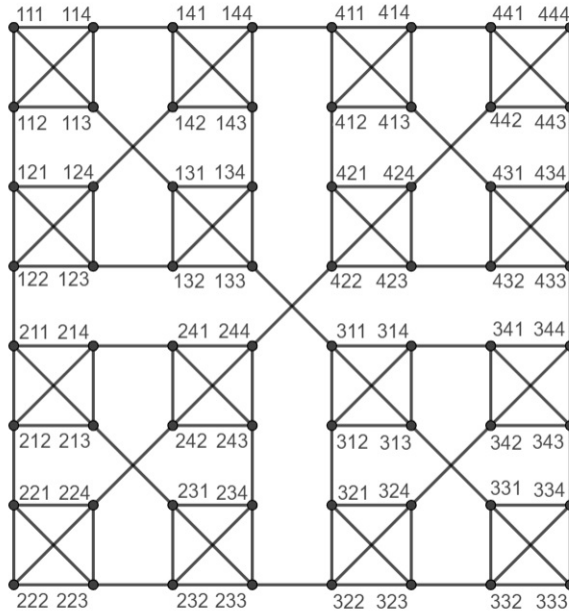
Kneserův graf $K(n, k)$ je graf, jehož vrcholy tvoří neuspořádané k -tice z n prvků. Dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když odpovídají disjunktním k -ticím. Uvažujme pouze případ $n \geq 2k$, protože při $n < 2k$ by graf neobsahoval žádnou hranu. Graf $K(n, 1)$ je úplný graf na n vrcholech, graf $K(5, 2)$ je Petersenův graf. Dodejme, že pro Kneserovy grafy $G = K(n, k)$ platí: $\Delta(G) = \binom{n-k}{k}$.

Sierpiňského graf $S(n, k)$, kde n a k jsou přirozená čísla, je graf, jehož množinu vrcholů tvoří n -tice z množiny $\{1, \dots, k\}$ (neboli $\{1, \dots, k\}^n$), dva různé vrcholy $u = (i_1, \dots, i_n)$ a $v = (j_1, \dots, j_n)$ jsou sousední právě tehdy, když $u \sim v$. Relace \sim je definována následovně: $u \sim v$, pokud existuje nějaké $h \in \{1, \dots, n\}$ takové, že zároveň platí:

- $i_t = j_t$ pro $t = 1, \dots, h-1$,
- $i_h \neq j_h$ a
- $i_t = j_h$ a $j_t = i_h$ pro $t = h+1, \dots, n$.

Na obrázku 5 je znázorněn Sierpiňského graf $S(3, 4)$.

Totální graf $T(G)$ grafu G je graf, jehož vrcholy odpovídají vrcholům a hranám grafu G a dva vrcholy jsou spojeny hranou, pokud odpovídající vrcholy grafu G jsou sousední, hrany grafu G jsou sousední nebo hrany a vrcholy jsou incidentní v grafu G .



Obrázek 5: Sierpiňského graf $S(3, 4)$.

Distanční graf $G(\mathbb{Z}, D)$ [28] s distanční množinou D , $D \subset \mathbb{N}$, je graf s vrcholovou množinou \mathbb{Z} , kde dva vrcholy u a v jsou spojeny hranou právě tehdy, když $|u - v| \in D$.

Definujme si i cirkulanty; pro přehledovou část, v níž budeme prezentovat výsledky Mitry a Bhoumika, využijeme definici cirkulantů použitou právě v jejich článku [95]. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, nechť \mathbb{Z}_n je cyklická grupa a $S \subset \mathbb{Z}_n$ taková, že $0 \notin S$. Definujme graf $G = G(\mathbb{Z}_n, S)$ předpisem $V(G) = \mathbb{Z}_n$ a $E(G) = \{(u, v) : v - u \in S\}$. Takový graf nazveme *cirkulantom daným množinou* S . Navíc platí, že $S = S^{-1} = \{-s : s \in S\}$.

Chromatické číslo příslušného grafu G označující minimální počet barev potřebných k obarvení grafu G tak, že každé dva sousední vrcholy mají různou barvu, budeme značit $\chi(G)$. Následující větu představil Brooks.

Věta 2.2 [16]. *Nechť G je graf, který není úplný ani lichá kružnice C_n . Potom platí $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

V textu se na několika málo místech zmíníme i o náročnosti příslušného algoritmu, a proto tyto pojmy nedefinujeme příliš exaktně. Úloha, kterou řeší nějaký polynomiální algoritmus, patří do třídy problémů P . Úloha, kterou řeší nějaký algoritmus nedeterministicky (tj. v některých krocích může algoritmus volit náhodně z několika možností dalších kroků) v polynomiálním čase, patří do třídy problémů NP . Úloha je *NP-těžká*, jestliže na ni lze převést jakýkoliv problém z NP (může tak být sama NP nebo i náročnější). Úloha je *NP-úplná*, jestliže je NP -těžká, ale zároveň je NP .

3 Shrnutí výsledků v oblasti $L(p, q)$ -ohodnocení

V této části práce se zaměříme na shrnutí již dosažených výsledků v oblasti $L(p, q)$ -ohodnocení grafů.

Následující definice pochází od Griggse a Yeha [43], kteří ji formulovali v roce 1992, a byla upravena pro $L(p, q)$ -ohodnocení. Vzhledem k aplikačním problémům popsaným v úvodu práce se obvykle pracuje s $p > q$, v obecném případě ale pracujeme bez této podmínky na parametry p, q .

Definice 3.1 [43]. Necht' G je graf. Pak $L(p, q)$ -ohodnocením grafu G rozumíme funkci $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ takovou, že pro každou dvojici $u, v \in V(G)$ platí:

- je-li $uv \in E(G)$, pak $|f(u) - f(v)| \geq p$,
- je-li $\text{dist}_G(u, v) = 2$, pak $|f(u) - f(v)| \geq q$.

Rozpětím $L(p, q)$ -ohodnocení budeme nazývat rozdíl mezi největší a nejmenší použitou hodnotou při tomto ohodnocování. Minimální rozpětí příslušného grafu pak budeme značit $\lambda_{(p,q)}(G)$ a budeme jej nazývat ohodnocovací číslo. Dále předpokládejme, že nejmenší použitou hodnotou bude 0, naopak tou největší bude hodnota $\lambda_{(p,q)}(G)$.

Hojně budeme využívat i následující tvrzení, jež lze zobecnit i pro $L(p, q)$ -ohodnocení.

Tvrzení 3.2 [58]. Necht' H je podgraf grafu G . Pak $\lambda_{(2,1)}(H) \leq \lambda_{(2,1)}(G)$.

Převážně budeme sledovat shrnující článek Calamoneri [18] z roku 2014. Využijeme i definici $L(p, q)$ -ohodnocení použitou právě v tomto článku:

Definice 3.3 [18]. Necht' je dán graf $G = (V(G), E(G))$ a dvě nezáporná celá čísla p, q ; $L(p, q)$ -ohodnocením grafu G rozumíme přiřazení nezáporných celých čísel vrcholům grafu G tak, že sousední vrcholy jsou ohodnoceny hodnotami lišícími se aspoň o p a vrcholy mající společného souseda jsou ohodnoceny hodnotami lišícími se aspoň o q .

Tato definice pracuje s *vrcholy majícími společného souseda*, na rozdíl od častěji používané definice využívající *vrcholy ve vzdálenosti 2*. Obě definice v zásadě umožňují jak $p \geq q$ (s tímto případem se obvykle pracuje, a to z důvodu praktického využití popsaného v úvodu práce), tak i $p < q$. Rozdíl mezi oběma definicemi si představíme na úplném grafu K_3 . V grafu K_3 neexistují vrcholy ve vzdálenosti 2, a tak v případě definice 3.1 je $\lambda_{(p,q)}(K_3) = 2p$. A to navíc bez ohledu na to, zda $p > q$ či nikoliv. V případě definice 3.3 je ale situace obtížnější. Každá dvojice vrcholů je zde sousední a zároveň má společného souseda. Proto $\lambda_{(p,q)}(K_3) = 2 \max\{p, q\}$, a tedy platí $\lambda_{(p,q)}(K_3) = \lambda_{(q,p)}(K_3)$. Jak poznává Calamoneri [18]: je-li $p \geq q$, jsou obě definice v souladu.

Dodejme, že obě definice jsou ekvivalentní, je-li $p \geq q$, nebo je-li $p < q$ a příslušný graf G neobsahuje jako podgraf K_3 . Pokud je tedy $p < q$ a příslušný graf obsahuje jako podgraf K_3 , je nutno uvést, s jakou definicí $L(p, q)$ -ohodnocení grafů pracujeme.

Toto tvrzení vyplývá přímo z definice $L(p, q)$ -ohodnocení.

Tvrzení 3.4 [31]. Necht' G je graf. Pak

- $\lambda_{(cp,cq)}(G) = c\lambda_{(p,q)}(G)$ pro všechna přirozená čísla c a $p \geq q$,
- $\lambda_{(p,q)}(G) \leq \lambda_{(j,k)}(G)$ pro všechna přirozená čísla $p \geq q$, $j \geq k$ navíc splňující $p \leq j$ a $q \leq k$.

Následující text rozdělíme do podkapitol, a to dle parametrů p, q . První podkapitola bude patřit poněkud netradičnímu $L(0, 1)$ -ohodnocení, přes $L(1, 1)$ a nejtýpičtější $L(2, 1)$ -ohodnocení pak dojdeme až k obecnému $L(p, q)$ -ohodnocení. Ve všech případech si ukážeme dolní a horní odhady čísla $\lambda_{(p,q)}$, popřípadě jeho přesné hodnoty pro základní třídy grafů. Tento text nepokrývá veškeré informace o všech grafech ani o všech ohodnoceních. Například článek [67] hovoří mj. o $L(1, 2)$ -ohodnocení grafů. Začneme ale podkapitolou věnující se $L(0, 1)$ -ohodnocení. Musíme tak pracovat s oběma možnými definicemi příslušného ohodnocení.

3.1 $L(0, 1)$ -ohodnocení grafů

Dolní odhad rozpětí $\lambda_{(0,1)}$ libovolného grafu G s maximálním stupněm Δ nám pomůže najít ohodnocení hvězdy $K_{1,\Delta}$ jakožto podgrafu grafu G . Vrcholy stupně 1 hvězdy $K_{1,\Delta}$ totiž nemohou být ohodnoceny stejnou hodnotou, tu můžeme použít jen na ohodnocení vrcholu maximálního stupně a na jeden z dalších vrcholů. Nechť je tedy vrchol maximálního stupně ohodnocen hodnotou 0. Zbylé vrcholy hvězdy lze ohodnotit hodnotami $0, 1, \dots, \Delta(K_{1,\Delta}) - 1$. Odtud triviálně dostáváme, že $\lambda_{(0,1)}(G) \geq \lambda_{(0,1)}(K_{1,\Delta}) = \Delta(K_{1,\Delta}) - 1 = \Delta - 1$. O horním odhadu hovoří další věta.

Věta 3.5 [67]. *Pro každý graf G s maximálním stupněm Δ platí, že $\lambda_{(0,1)}(G) \leq \Delta^2 - \Delta$.*

Výše uvedený odhad lze zpřesnit u kaktusů, třídy souvislých konečných grafů, v nichž každá hrana je součástí maximálně jedné kružnice. Nejprve se ale podívejme, jak je to s $L(0, 1)$ -ohodnocením cest a kružnic.

Věta 3.6 [94]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a P_n značí cestu na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(0,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 1, 2; \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Následující větu pro kružnice dokázali Bertossi a Bonuccelli [12]. Větu ale musíme upravit v závislosti na n , protože v případě, že $n = 3$, je C_3 úplný graf na třech vrcholech. A jelikož $p < q$, rozcházejí se i naše definice.

Věta 3.7 [12]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ a C_n značí kružnici na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(0,1)}(C_n) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{4}; \\ 2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Případ pro $n = 3$ zahrneme v úplných grafech, při nichž již musíme uvádět příslušnou definici $L(p, q)$ -ohodnocení.

Následující dvě věty hovoří o $L(0, 1)$ -ohodnocení kol. Opět musíme vydělit dva případy dle použité definice příslušného ohodnocení.

Věta 3.8 [67]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a W_n značí kolo na $n + 1$ vrcholech. Potom $\lambda_{(0,1)}(W_n) = \lambda_{(1,1)}(W_n) = n$ při definici 3.3.*

Vydeme-li ale z definice 3.1, budeme muset předchozí vztah revidovat:

Věta 3.9 [67]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a W_n značí kolo na $n + 1$ vrcholech. Potom $\lambda_{(0,1)}(W_n) = \lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor$ při definici 3.1.*

A nyní už dojde na slíbené $L(0, 1)$ -ohodnocení úplného grafu.

Věta 3.10 [18]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a K_n značí úplný graf na n vrcholech. Potom $\lambda_{(0,1)}(K_n) = \lambda_{(1,1)}(K_n) = n - 1$ při definici 3.3.*

Triviálně pak platí následující tvrzení.

Tvrzení 3.11. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a K_n značí úplný graf na n vrcholech. Potom $\lambda_{(0,1)}(K_n) = \lambda_{(0,q)}(K_n) = 0$ při definici 3.1.*

O existenci bipartitního grafu G s $\lambda_{(0,1)}(G)$ aspoň $\frac{\Delta^2(G)}{4}$ hovoří věta 3.12.

Věta 3.12 [13]. *Pro každé $\Delta \geq 2$ existuje bipartitní graf G s maximálním stupněm Δ takový, že $\lambda_{(0,1)}(G) \geq \frac{\Delta^2}{4}$.*

Tato dolní hranice existuje i pro všechna rozpětí $\lambda_{(p,1)}$, kde $p \geq 1$ (viz [18]).

A nyní se již dostáváme k vylepšeným odhadům pro třídu kaktusů. K tomu je ještě třeba nalézt příčné ohodnocení stromů.

Věta 3.13 [74]. *Nechť T je strom s maximálním stupněm $\Delta(T) = \Delta$. Pak $\lambda_{(0,1)}(T) = \Delta - 1$.*

Tato věta je rovněž v souladu s objevem Bertossiho a Bonucelliho [12], podle níž stačí k ohodnocení úplného binárního stromu 3 hodnoty.

Bodlaender a spol. [13] našli horní hranici pro grafy stromové šířky nejvýše t , když dokázali, že pro graf G s maximálním stupněm Δ je $\lambda_{(0,1)}(G) \leq t\Delta - t$. Rovnou zde uvedeme i další případy, totiž kdy $p = 1$ nebo $p = 2$. V případě, že $p = 1$, je $\lambda_{(1,1)}(G) \leq t\Delta$, a v případě, že $p = 2$, je $\lambda_{(2,1)}(G) \leq t\Delta + 2t$.

Již známe rozpětí $\lambda_{(0,1)}$ u stromů a kružnic, a tak můžeme vyslovit větu hovořící o $L(0, 1)$ -ohodnocení kaktusů.

Věta 3.14 [74]. *Nechť G je kaktus s maximálním stupněm $\Delta(G) = \Delta$. Pak $\Delta - 1 \leq \lambda_{(0,1)}(G) \leq \Delta$.*

Přejdeme k trojúhelníkovým a čtvercovým regulárním mřížkám, jakožto příkladům rovinných grafů.

Věta 3.15 [67]. *Nechť $G = \Gamma_6$ značí trojúhelníkovou mřížku. Pak $\lambda_{(0,1)}(G) = 3$, a to při definici 3.1.*

Kolo W_6 na sedmi vrcholech je podgrafem grafu $G = \Gamma_6$, a tak při definici 3.3 je $\lambda_{(0,1)}(G) \geq n$.

Věta 3.16 [67]. *Nechť $G = \Gamma_4$ značí čtvercovou mřížku. Pak $\lambda_{(0,1)}(G) = 3$.*

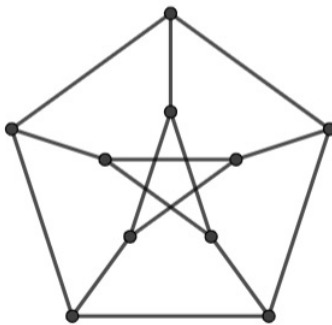
Tento graf neobsahuje jako podgraf úplný graf na třech vrcholech, a tak již nemusíme rozdělovat náš výsledek podle příslušné definice $L(0,1)$ -ohodnocení. Dále představíme výsledek pro hyperkrychle.

Věta 3.17 [112]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a Q_n značí n -dimenzionální hyperkrychli. Potom $\lambda_{(0,1)}(Q_n) \leq 2^{\lceil \log_2 n \rceil}$.*

Toto ohodnocení je optimální, když $n = 2^k$ pro nějaké přirozené číslo k . Protože $g(Q_n) \geq 4$, pokud $n \geq 2$, neobsahuje graf Q_n žádnou kružnici na třech vrcholech, a tedy nemusíme vydělovat dva různé případy dle použité definice $L(0,1)$ -ohodnocení.

3.2 $L(1,1)$ -ohodnocení grafů

Sledujme úvahu popsanou v článku [18] a zkoumejme horní odhad čísla $\lambda_{(1,1)}(G)$. Definujme si funkci $f(\Delta, g)$ jako maximální možnou hodnotu čísla $\lambda_{(1,1)}$ přes všechny grafy maximálního stupně Δ a obvodu g . Zřejmě $L(1,1)$ -ohodnocení je ekvivalentní přípustnému obarvení grafu G^2 s tím, že ohodnocení používá hodnotu 0 a barvení ne, tj. $\lambda_{(1,1)}(G) = \chi(G^2) - 1$. Protože maximální stupeň grafu G^2 je nejvýše Δ^2 , je $f(\Delta, g) \leq \Delta^2$ pro každé g . Rovnost nastává například pro $\Delta = 2$ a $g = 5$ u kružnice na pěti vrcholech C_5 , protože graf C_5^2 je izomorfní s grafem K_5 . Dalším příkladem je pak na obrázku 6 zachycený Petersenův graf ($\Delta = 3$ a $g = 5$) či Hoffmann-Singletonův graf ($\Delta = 7$ a $g = 5$). Hoffmann Singletonův graf je graf na 50 vrcholech, jeho znázornění je možné nalézt například na anglické Wikipedii [53].



Obrázek 6: Petersenův graf.

Z Brooksovy věty 2.2 dále vyplývá, že rovnost může nastat pouze pro $g \leq 5$, a to pouze tehdy pokud existuje Δ -regulární graf průměru 2 na $\Delta^2 + 1$ vrcholech. Pokud takový graf existuje, je $\Delta \in \{2, 3, 7, 57\}$. Případy $\Delta = 2, \Delta = 3, \Delta = 7$ jsme již představili. Graf s $\Delta = 57$ splňující výše uvedené podmínky dosud nebyl nalezen, jeho existence zůstává neobjasněná. Rovněž platí, že $f(2, g) = 4$ pro všechna $g \geq 6$.

Pro dolní odhad čísla $\lambda_{(1,1)}(G)$ využijeme opět ohodnocení hvězdy (každý její vrchol musí být ohodnocen různou hodnotou) a snadno zjistíme, že $\lambda_{(1,1)}(G) \geq \Delta(G)$.

Začneme opět se základními třídami grafů – cestami a kružnicemi. O nich hovoří následující dvě věty.

Věta 3.18 [10]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a P_n značí cestu na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(1,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 1; \\ 1, & \text{pokud } n = 2; \\ 2, & \text{pokud } n \geq 3. \end{cases}$$

Věta 3.19 [10]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a C_n značí kružnici na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(1,1)}(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ 3, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$L(1, 1)$ -ohodnocení stromu T je závislé na maximálním stupni stromu T .

Věta 3.20 [31]. *Pro každý strom T je $\lambda_{(1,1)}(T) = \Delta(T)$.*

Z předchozí věty vyplývá [31], že $\lambda_{(p,p)}(T) = p\Delta(T)$.

Přesuneme se k $L(1, 1)$ -ohodnocení planárních grafů. De facto prvním, kdo se touto problematikou zabýval, byl již v roce 1977 Wegner [118]. Zkoumal totiž odhady klikovosti druhé mocniny planárních grafů. Wegner představil následující hypotézu:

Hypotéza 3.21 [118]. *Nechť G je planární graf s maximálním stupněm Δ . Pak*

$$\chi(G^2) \leq \begin{cases} 7, & \text{pokud } \Delta \leq 3; \\ \Delta + 5, & \text{pokud } 4 \leq \Delta \leq 7; \\ \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor + 1, & \text{pokud } \Delta \geq 8. \end{cases}$$

Vzhledem k tomu, že $\chi(G^2)$ je to samé jako $\lambda_{1,1}(G) + 1$, je jasný vztah mezi Wegnerovou prací a naším problémem. V průběhu let (viz například přehled v článku [18] nebo v Byczekově přednáškovém textu [17]) docházelo k řadě vylepšení těchto odhadů v závislosti na Δ . To přineslo i řadu „bizarních“ výsledků. Například Agnarsson a Halldórsson v [5] představili výsledek $\lambda_{(1,1)}(G) \leq \lfloor \frac{9}{5}\Delta(G) \rfloor + 1$, pokud $\Delta(G) \geq 749$. Molloy a Salavatipour [96] dokázali následující odhad.

Věta 3.22 [96]. *Nechť G je planární graf s maximálním stupněm Δ . Pak $\chi(G^2) \leq \lfloor \frac{5}{3}\Delta \rfloor + 78$.*

Dále pak odhad vylepšili (na $\lceil \frac{5}{3}\Delta \rceil + 25$), a to za předpokladu $\Delta(G) \geq 241$. Autoři pak dále představili odhad čísla $\lambda_{(p,q)}$ v případě planárního grafu. O tom si ale povíme v příslušné sekci. Daleko se dostali Havet a spol. [47], když ukázali, že $\chi(G^2)$ planárního grafu G s maximálním stupněm Δ je nejvýše $\frac{3}{2}\Delta(1+o(1))$, čímž asymptoticky dali Wegnerovi za pravdu. Shao a Yeh [105] dokázali, že $\lambda_{(1,1)}(G) \leq 5\Delta(G)$, pokud je graf G planární. Docházíme tedy k závěru, že tento výsledek je lepší než ten, který udává předchozí věta 3.22, a to za předpokladu $\Delta(G) \leq 24$.

I zde se podíváme na regulární mřížky, konkrétně na tu trojúhelníkovou a čtvercovou.

Věta 3.23 [67]. *Nechť $G_1 = \Gamma_6$ značí trojúhelníkovou mřížku a necht' $G_2 = \Gamma_4$ značí čtvercovou mřížku. Pak $\lambda_{(1,1)}(G_1) = 6$ a $\lambda_{(1,1)}(G_2) = 4$.*

Odhady na rozpětí $\lambda_{(1,1)}$ planárních grafů lze tvořit i z parametru $g(G)$, tedy obvodu grafu. Výsledky uvedeme v obecném $L(p,q)$ -ohodnocení. Zde jen představíme Wangovu a Lihovu hypotézu [115], která říká, že pro každé přirozené číslo $g \geq 5$ existuje přirozené číslo $M(g)$ takové, že pokud graf G je planární s obvodem g a s maximálním stupněm $\Delta \geq M(g)$, je $\lambda_{(1,1)}(G) \leq \Delta$. Tato hypotéza se ukázala obecně nepravdivá pro obvody $g = 5, 6$, jinak ale byla potvrzena – viz [14] a [15].

Calamoneri a Petreschi [20] našli v lineárním čase pracující algoritmus pro hledání optimálního $L(1,1)$ -ohodnocení vnějškově rovinných grafů maximálního stupně $\Delta \geq 7$ s nejvýše $\Delta + 1$ použitými hodnotami. Později Agnarsson a Halldórsson [6, 7] odvodili optimální horní mez rozpětí $\lambda_{(1,1)}$ pro vnějškově rovinné grafy s malým ($\Delta < 7$) maximálním stupněm. Sjednocením těchto poznatků získáme tuto větu.

Věta 3.24 [6, 7, 20]. *Nechť G je vnějškově rovinný graf s maximálním stupněm Δ . Pak*

$$\lambda_{(1,1)}(G) \leq \begin{cases} \Delta + 2, & \text{pokud } \Delta = 2; \\ \Delta + 1, & \text{pokud } \Delta = 3, 4, 5 \text{ nebo pokud } \Delta \geq 7; \\ \Delta, & \text{pokud } \Delta = 6. \end{cases}$$

Wan [112] našel algoritmus, jež používá $2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}$ hodnot pro $L(1,1)$ -ohodnocení hyperkrychle. Tento odhad byl ještě vylepšen autory článku [24]: $\lambda_{(1,1)}(Q_n) \leq 2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1}$. Závěrečná věta k $L(1,1)$ -ohodnocení hyperkrychlí patří Zhouovi a spol. [122].

Věta 3.25 [122]. *Nechť n a k jsou dvě přirozená čísla a necht' Q_n značí n -rozměrnou hyperkrychli. Pak $\lambda_{(1,1)}(Q_n) = n$, jestliže $n = 2^k - 1$.*

Georges a spol. [35] představili rozpětí kartézského součinu t úplných grafů na r vrcholech (zapisujeme K_r^t).

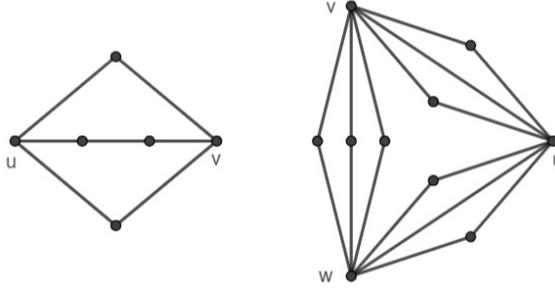
Věta 3.26 [35]. *Nechť r je liché prvočíslo a necht' K_r^r (resp. K_r^{r+1}) značí kartézský součin r (resp. $r + 1$) úplných grafů na r vrcholech. Potom $\lambda_{(1,1)}(K_r^r) = \lambda_{(1,1)}(K_r^{r+1}) = r^2 - 1$.*

O $L(1, 1)$ -ohodnocení K_4 -bezminorních grafů hovoří Lih, Wang a Zhu [90].

Věta 3.27 [90]. *Nechť G je K_4 -bezminorní graf s maximálním stupněm Δ . Pak*

$$\lambda_{(1,1)}(G) \leq \begin{cases} \Delta + 2, & \text{pokud } \Delta = 2, 3; \\ \lfloor \frac{3}{2}\Delta \rfloor, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Této horní hranice se dá dosáhnout, jak ukazují následující příklady. Pro $\Delta = 2$ je oním případem kružnice C_5 , pro níž je $\lambda_{(1,1)}(C_5) = 4$. Příklad $\Delta = 3$ rozřeší graf G skládající se ze tří (vnitřně disjunktích) cest spojujících vrcholy u a v , z nichž dvě jsou délky 2 a zbývající třetí je délky 3. Tento graf G má $\lambda_{(1,1)}(G) = 5$. Pro maximální stupeň $\Delta = 2d \geq 4$ se využije graf G_{2d} sestávající se z d (vnitřně disjunktích) cest spojující vrcholy u a v , d (vnitřně disjunktích) cest spojující vrcholy u a w a d (vnitřně disjunktích) cest spojující vrcholy v a w ; všechny tyto cesty jsou délky 2 s výjimkou jedné cesty spojující vrcholy u a v , jež je délky 1, a jedné cesty spojující vrcholy u a w , jež je rovněž délky 1. Takovýto graf G_{2d} má $\lambda_{(1,1)}(G_{2d}) = 3d$. A konečně pro $\Delta = 2d + 1 \geq 5$ využijeme graf G_{2d+1} , což je graf, jež vznikne z grafu G_{2d} přidáním cesty délky 2 spojující vrcholy v a w . Zde pak $\lambda_{(1,1)}(G_{2d+1}) = 3d + 1$. Graf G z případu $\Delta = 3$ a graf G_{2d} pro $d = 3$ (tj. graf s $\Delta = 6$) znázorňuje obrázek 7.



Obrázek 7: Vlevo graf G s $\lambda_{(1,1)}(G) = 5$ a vpravo graf G_{2d} , kde $d = 3$, s $\lambda_{(1,1)}(G_{2d}) = 3d$.

3.3 $L(2, 1)$ -ohodnocení grafů

Nyní se zaměříme na v praxi se nejvíce objevující $L(2, 1)$ -ohodnocení. Toto ohodnocení je nejtýpčtější z důvodu praktického využití, jež bylo popsáno v úvodu práce.

Polynomiální výsledky $L(2, 1)$ -ohodnocení jsou známy pro třídy grafů jako jsou kaktusy nebo souvislé grafy obsahující právě jednu nebo právě dvě kružnice [68].

Triviálně platí [43], že $\lambda_{(2,1)}(G) \geq \Delta(G) + 1$ (rovnost nastává pro hvězdu $K_{1,\Delta}$). Rovněž ale Griggs a Yeh [43] našli graf G s rozpětím $\Delta^2(G) - \Delta(G)$. Tento graf se nazývá incidenční graf projektivní roviny $\pi(n)$ a řádu n .

Griggs a Yeh [43] v původním článku dokázali následující větu.

Věta 3.28 [43]. *Nechť G je graf, jež obsahuje tři vrcholy maximálního stupně $\Delta \geq 2$, z nichž jeden je sousední s oběma dalšími. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

Dále sledujme zmíněný článek Griggse a Yeha [43], v něm autoři představili snad nejnámější hypotézu týkající se $L(2, 1)$ -ohodnocení grafů.

Hypotéza 3.29 [43]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$. Potom platí $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2$.*

Poznamenejme, že podmínku $\Delta(G) \geq 2$ nemůžeme ve výše uvedené hypotéze vynechat, protože například $\Delta(P_2) = 1$, ale $\lambda_{(2,1)}(P_2) = 2$. Tato domněnka stále nebyla potvrzena ani vyvrácena, byť k některým dílčím úspěchům během let došlo. Sami autoři ji potvrdili pro $\Delta(G) = 2$ a dokázali, že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2(G) + 2\Delta(G)$. Tento horní odhad dále vylepšili pro 3-souvislé grafy a grafy o průměru 2.

Věta 3.30 [43]. *Nechť G je 3-souvislý graf. Potom $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2(G) + 2\Delta(G) - 3$.*

Věta 3.31 [43]. *Nechť G je graf o průměru 2. Potom $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2(G)$.*

Grafy s průměrem 2 jsou tak jedním z mnoha příkladů grafů, jež jsou v souladu s hypotézou 3.29. Existují grafy s maximálním stupněm Δ , průměrem 2 a $\Delta^2 + 1$ vrcholy (konkrétně kružnice na pěti vrcholech C_5 , Petersenův graf – viz obrázek 6, Hoffman-Singletonův graf) takové, že rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ těchto grafů je právě Δ^2 . Posledním možným grafem je graf s $\Delta = 57$, jehož existence nebyla dosud prokázána. Protože průměr těchto grafů je 2, všechny hodnoty přiřazené vrcholům musejí být odlišné. Z $\lambda_{(2,1)}(G) \geq n - 1 = \Delta^2$ a věty 3.31 dostáváme požadovanou rovnost. Griggsova a Yehova hypotéza 3.29 byla Kangem [70] dokázána pro 3-regulární Hamiltonovské grafy.

Problém s horním odhadem rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ byl poměrně intenzivně studován, a tak došlo k řadě vylepšení. Představme si některé takové odhady: výsledek $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2(G) + 2\Delta(G) - 4$, pokud $\Delta(G) \geq 2$, představil Jonas [68], Chang a Kuo [58] pak posunuli hranici na $\Delta^2(G) + \Delta(G)$. Další posun nastal v roce 2003, kdy Král' a Škrekovski [85] dokázali, že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2(G) + \Delta(G) - 1$ pro libovolný graf G s maximálním stupněm $\Delta(G) \geq 2$. Další posun v roce 2011 představil Gonçalves [38].

Věta 3.32 [38]. *Nechť je dán graf G s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$.*

Zmíněná věta platí i pro $\Delta = 2$ (viz komentář pod hypotézou 3.29), nicméně v tomto zmíněném článku [38] Gonçalves dokázal obecnější tvrzení, a to konkrétně tvrzení 3.110, které nalezneme v sekci o $L(p, q)$ -ohodnocení a které hovoří o horním odhadu rozpětí $\lambda_{(p,1)}$ grafu G maximálního stupně $\Delta \geq 3$.

Havet, Reed a Sereni [48] hypotézu 3.29 dokázali pro dostatečně velké hodnoty Δ (cca $\Delta \geq 10^{69}$). Stejní autoři pak v článku [49] hypotézu asymptoticky dokázali až na konstantu na pravé straně.

Věta 3.33 [49]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2 + c$ pro nějakou konstantu c .*

Zkoumejme odhady i s jinými parametry. Jednoduchým pozorováním [18] dostaneme vztah mezi rozpětím $\lambda_{(2,1)}(G)$ a klikovostí $\omega(G)$, konkrétně $\lambda_{(2,1)}(G) \geq 2(\omega(G) - 1)$. Griggs a Yeh [43] pak představili vztah mezi $\lambda_{(2,1)}(G)$ a chromatickým číslem $\chi(G)$.

Věta 3.34 [43]. *Nechť G je graf s chromatickým číslem $\chi(G)$ a počtem vrcholů n . Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq n + \chi(G) - 2$.*

Rovnost v předchozím vztahu nastává pro úplný k -partitní graf, tj. $\lambda_{(2,1)}(G) = n + k - 2$.

Autoři v [36] zkoumali vztah mezi $\lambda_{(2,1)}(G)$ a nejmenším počtem nedisjunktních cest potřebných k pokrytí vrcholů grafu G , tj. každý vrchol grafu G bude součástí nějaké takové cesty. Označíme-li tento počet c , počet vrcholů grafu G jako n a značí-li G^C doplněk grafu G , dostáváme vztah $\lambda_{(2,1)}(G) = n + c(G^C) - 2$ právě tehdy, když $c(G^C) \geq 2$, a $\lambda_{(2,1)}(G) \leq n - 1$ právě tehdy, když $c(G^C) = 1$.

Balakrishnan a Deo [9] pak udávají následující horní a dolní odhady součtu a součinu rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ grafu G na n vrcholech a jeho doplňku.

Věta 3.35 [9]. *Nechť G je graf na n vrcholech a nechť G^C značí doplněk grafu G . Pak platí následující dva vztahy:*

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} - 2 &\leq \lambda_{(2,1)}(G) + \lambda_{(2,1)}(G^C) \leq 3n - 3, \\ 0 &\leq \lambda_{(2,1)}(G) \cdot \lambda_{(2,1)}(G^C) \leq \left(\frac{3n-3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Nyní si představme přesné hodnoty $\lambda_{(2,1)}$ základních tříd grafů.

Věta 3.36 [43]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a P_n značí cestu na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(2,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 1; \\ 2, & \text{pokud } n = 2; \\ 3, & \text{pokud } n = 3, 4; \\ 4, & \text{pokud } n \geq 5. \end{cases}$$

Věta 3.37 [43]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a C_n značí kružnici na n vrcholech. Potom $\lambda_{(2,1)}(C_n) = 4$.*

Autoři v článku [43] rovněž nalézají příslušné ohodnocení kol, úplného grafu a úplného k -partitního grafu.

Věta 3.38 [43]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a W_n značí kolo na $n + 1$ vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(2,1)}(W_n) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } n = 3, 4; \\ n + 1, & \text{pokud } n \geq 5. \end{cases}$$

Věta 3.39 [43]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ a K_n značí úplný graf na n vrcholech. Potom $\lambda_{(2,1)}(K_n) = 2(n - 1) = 2\Delta(K_n)$.*

Protože každý vrchol je sousední s každým dalším vrcholem, závisí $L(p, q)$ -ohodnocení pouze na parametru p . Větu tak lze jednoduše zobecnit: $\lambda_{(p,q)}(K_n) = p(n-1) = p\Delta(K_n)$.

Věta 3.40 [43]. *Nechť n, n_1, \dots, n_k jsou přirozená čísla a nechť $G = K_{n_1, \dots, n_k}$ značí úplný k -partitní graf na n vrcholech (tj. $n = n_1 + \dots + n_k$). Potom $\lambda_{(2,1)}(G) = n + k - 2$.*

Nyní nás čeká $L(2, 1)$ -ohodnocení stromů.

Věta 3.41 [43]. *Nechť T značí (netriviální) strom s maximálním stupněm Δ . Potom $\lambda_{(2,1)}(T)$ je buď $\Delta + 1$, nebo $\Delta + 2$.*

Z předchozí věty jsme vyřadili triviální strom, a to proto, že triviální strom T s jedním vrcholem má $\Delta(T) = 0 = \lambda_{(2,1)}(T)$. Oba autoři [43] se rovněž domnívali, že rozpoznání těchto dvou tříd bude NP -těžký problém. Chang a Kuo [58] však tuto hypotézu vyvracejí nalezením polynomiálního algoritmu. Tento algoritmus běží v lineárním čase, pokud $\Delta = O(1)$. Nakonec Hasunama, Ishii, Ono a Uno [46] našli algoritmus, který hledá rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ stromů, pracující v lineárním čase.

Z předchozí věty tedy vyplývá, že stromy rozdělujeme do dvou kategorií, a to dle příslušné hodnoty $\lambda_{(2,1)}$. Strom T je typu 1, má-li $\lambda_{(2,1)}(T)$ hodnotu $\Delta + 1$, a typu 2, má-li $\lambda_{(2,1)}(T)$ hodnotu $\Delta + 2$. Wang [113] udává postačující podmínku, aby byl strom typu 1.

Věta 3.42 [113]. *Nechť T je strom s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$, jež neobsahuje dva vrcholy maximálního stupně Δ ve vzdálenosti 1, 2 nebo 4. Pak $\lambda_{(2,1)}(T) = \Delta + 1$.*

Khan, Pal a Pal [75] se opět věnovali třídě kaktusů. Došli k tomuto závěru.

Věta 3.43 [75]. *Nechť G je kaktus s maximálním stupněm $\Delta(G) = \Delta$. Pak $\Delta + 1 \leq \lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta + 3$.*

Horní odhad je skutečnou hodnotou pro graf G , jež je tvořen kružnicí libovolné délky, jejíž každý vrchol je součástí nějaké další kružnice délky 3. Dolní odhad je pak skutečnou hodnotou například pro hvězdu, rovnost $\lambda_{(2,1)}(G) = \Delta(G) + 2$ nastává například, pokud G je kružnice.

Podobného tématu se drželi i Vaidya a Bantva [111], když o rok dříve než Khan a spol. určili $\lambda_{(2,1)}(C_n^{(k)})$, kde grafem $C_n^{(k)}$ rozumíme graf, který se skládá z k kružnic délky n , jež všechny mají jeden společný vrchol.

Věta 3.44 [111]. *Nechť $n \geq 3$ a $k \geq 2$ jsou přirozená čísla. Pak $\lambda_{(2,1)}(C_n^{(k)}) = 2k + 1$.*

Předchozí výsledek je roven číslu $\Delta + 1$, kde symbol Δ značí maximální stupeň grafu $C_n^{(k)}$.

Postupných vylepšení se dostávalo odhadům pracujících s planárními grafy. V této oblasti se pracuje především s dvěma parametry, a to maximálním stupněm grafu a obvodem grafu. Shrnující výsledky nabízí článek [44]. My si výsledky pro planární grafy představíme až v části věnující se obecnému $L(p, q)$ -ohodnocení. Na tomto místě si ale představíme rezultáty z podtřídy rovinných grafů, podíváme se totiž na rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ regulárních mřížek a vnějškově rovinných grafů. Calamoneri a Petreschi [20] našli rozpětí $\lambda_{(2,1)}(\Gamma_\Delta)$.

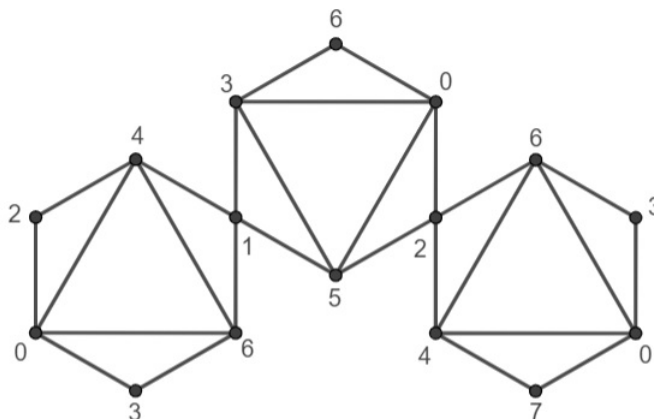
Věta 3.45 [20]. *Nechť Γ_Δ značí regulární mřížku s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(2,1)}(\Gamma_\Delta) = \Delta + 2$.*

Všimněme si, že například pro čtvercovou mřížku ($\Delta = 4$) dostáváme $\lambda_{(2,1)}(\Gamma_\Delta) = 6$, a výsledek tedy odpovídá níže uvedené větě 3.48 týkající se kartézského produktu dvou cest, kde za m a n symbolicky dosadíme nekonečno.

Jelikož vnějškově rovinné grafy jsou grafy stromové šířky 2, z výsledku v [13] snadno nalezneme první horní odhad, totiž $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 2\Delta(G) + 4$, kde G je nějaký vnějškově rovinný graf. Stejní autoři ale přišli s lepším odhadem.

Věta 3.46 [13]. *Nechť G je vnějškově rovinný graf s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta + 8$.*

Bodlaender a spol. [13] se nicméně domnívali, že nejtěsnější horní hranice by mohla být $\Delta + 2$. V [20] autoři tuto hypotézu potvrzují pro každý vnějškově rovinný graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 8$ a předpokládají, že tato hranice platí pro všechny vnějškově rovinné grafy s $\Delta \geq 4$. Wang a Luo [116] nalézají odhady pro vnějškově rovinné grafy malého maximálního stupně Δ : $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta + 4$ (tuto hodnotu ještě o 1 snížili Li a Zhou [89]) pro $\Delta = 3$, $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta + 5$ pro $\Delta = 4$, a dále vyvracejí předchozí hypotézu nalezením vnějškově rovinného grafu maximálního stupně 4, na jehož ohodnocení je třeba použít 8 hodnot. Tento graf ohodnocený hodnotami $0 \div 7$ je zachycen na obrázku 8.



Obrázek 8: Vnějškově rovinný graf G s $\Delta(G) = 4$ a $\lambda_{(2,1)}(G) = \Delta(G) + 3$.

Pokud je graf G triangulace (tj. každá stěna je tvořena trojúhelníkem) vnějškově rovinného grafu s maximálním stupněm Δ , lze horní odhad uvedený ve větě 3.46 ještě vylepšit. Bodlaender a spol. [13] pro tyto grafy G dokázali, že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta(G) + 6$. Tento odhad opět vylepšili Calamoneri a Petreschi [20].

Věta 3.47 [20]. *Nechť graf G je triangulace vnějškově rovinného grafu s maximálním stupněm Δ . Potom*

$$\lambda_{(2,1)}(G) \leq \begin{cases} \Delta + 1, & \text{pokud } \Delta \geq 8; \\ 9, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní se podíváme na kartézský součin dvou a více grafů. Začneme kartézským produktem (dvou) cest a dále se přes kartézský součin kružnice a cesty dostaneme ke kartézskému produktu dvou kružnic.

Věta 3.48 [119]. *Nechť $n, m \geq 2$ jsou přirozená čísla a $P_n \square P_m$ značí kartézský produkt dvou cest P_n a P_m . Potom*

$$\lambda_{(2,1)}(P_n \square P_m) = \begin{cases} 5, & \text{pokud } n = 2, m \geq 4; \\ 6, & \text{pokud } n, m \geq 4 \text{ nebo pokud } n \geq 3, m \geq 5. \end{cases}$$

Whittlesey a kolektiv [119] ukázali i následující dvě věty pracující s kartézským produktem k cest.

Věta 3.49 [119]. *Nechť $k \geq 2, m_i \geq 3$ pro všechna i a $m_i \geq 4$ pro alespoň dvě různá i , kde $i \in [k]$. Dále nechť $P_{m_1} \square P_{m_2} \square \cdots \square P_{m_k}$ značí kartézský produkt k cest. Pak $\lambda_{(2,1)}(P_{m_1} \square P_{m_2} \square \cdots \square P_{m_k}) = 2k + 2$.*

Věta 3.50 [119]. *Nechť $k \geq 2, m_k = 2, m_i \geq 3$ pro všechna $1 \leq i \leq k - 1, m_i \geq 4$ pro alespoň dvě různá i nebo $m_i \geq 5$ pro aspoň jedno i . Dále nechť $P_{m_1} \square P_{m_2} \square \cdots \square P_{m_k}$ značí kartézský produkt k cest. Pak $\lambda_{(2,1)}(P_{m_1} \square P_{m_2} \square \cdots \square P_{m_k}) = 2k + 1$.*

Griggs a Yeh [43] našli přesné hodnoty rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ hyperkrychle Q_n pro malá n (konkrétně určili, že $\lambda_{(2,1)}(Q_1) = 2, \lambda_{(2,1)}(Q_2) = 4, \lambda_{(2,1)}(Q_3) = 6, \lambda_{(2,1)}(Q_4) = 7$ a $\lambda_{(2,1)}(Q_5) = 8$) a ukázali odhad čísla $\lambda_{(2,1)}$ pro hyperkrychli Q_n , totiž, že $n + 3 \leq \lambda_{(2,1)}(Q_n) \leq 2n + 1$, kde $n \geq 5$. Navíc pro $n = 8$ a $n = 16$ dolní odhad o 1 vylepšili. Whittlesey a spol. [119] horní odhad ještě zmenšili o 1.

Věta 3.51 [119]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a Q_n značí hyperkrychli. Pak $n + 3 \leq \lambda_{(2,1)}(Q_n) \leq 2n$.*

Whittlesey, Georges a Mauro [119] navíc ukázali následující limitní přechod.

Věta 3.52 [119]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a Q_n značí hyperkrychli. Pak $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{(2,1)}(Q_n)}{n} = 1$.*

Jha a kolektiv [66] studovali $L(2, 1)$ -ohodnocení kartézského produktu kružnice a cesty, resp. dvou kružnic. Autoři došli k tomuto závěru:

Tvrzení 3.53 [66]. *Nechť $C_m \square P_n$, kde $m \geq 3$, značí kartézský produkt kružnice na m vrcholech a cesty na n vrcholech. Pak*

- $\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_2) = 5$, pokud $m \equiv 0 \pmod{3}$,
- $\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_2) \leq 6$, pokud $m \not\equiv 0 \pmod{3}$,
- $\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_n) = 6$, pokud $m \equiv 0 \pmod{7}$ a $n \geq 3$,
- $\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_n) \leq 7$, pokud $m, n \geq 3$.

Tvrzení 3.54 [66]. *Nechť $C_m \square C_n$, kde $m, n \geq 3$, značí kartézský produkt dvou kružnic na m a n vrcholech. Pak*

- $\lambda_{(2,1)}(C_{7k} \square C_{7l}) = 6$ pro $k, l \in \mathbb{N}$,
- $\lambda_{(2,1)}(C_{4k} \square C_n) \leq 7$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $n \geq 4$,
- $\lambda_{(2,1)}(C_{3k} \square C_{6l}) \leq 7$ pro $k, l \in \mathbb{N}$.

Na Jha a spol. [66] pak navázali nezávisle na sobě Klavžar a Vesel [78] a Kuo a Yan [86]. Ti představili tyto výsledky.

Věta 3.55 [78, 86]. *Nechť $C_m \square P_2$, kde $m \geq 3$, je kartézský produkt kružnice C_m a cesty na dvou vrcholech. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_2) = \begin{cases} 5, & \text{pokud } m \equiv 0 \pmod{3}; \\ 6, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 3.56 [78, 86]. *Nechť $C_m \square P_3$, kde $m \geq 3$, je kartézský produkt kružnice C_m a cesty na třech vrcholech. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_3) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } m = 4, 5; \\ 6, & \text{pokud } m = 3 \text{ nebo pokud } m \geq 6. \end{cases}$$

Věta 3.57 [86]. *Nechť $C_m \square P_4$, kde $m \geq 3$, značí kartézský produkt kružnice a cesty na čtyřech vrcholech. Pokud $\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_4) = 6$, je $m \equiv 0 \pmod{7}$.*

Obecně pak pro kartézský produkt kružnice C_m , kde $m \geq 3$, a cesty P_n , kde $n \geq 4$ dostáváme následující rozpětí.

Věta 3.58 [78, 86]. *Nechť $C_m \square P_n$, kde $m \geq 3$ a $n \geq 4$, značí kartézský produkt kružnice C_m a cesty P_n . Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(C_m \square P_n) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } m \equiv 0 \pmod{7}; \\ 7, & \text{pokud } m \not\equiv 0 \pmod{7}. \end{cases}$$

Autoři [86] dále hledali rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ u kartézského produktu dvou kružnic $C_m \square C_n$. Konkrétně se zabývali případy, kdy $m = 3$ nebo m je násobek čísla 4 či 5.

Věta 3.59 [86]. *Nechť $C_3 \square C_n$, kde $n \geq 3$, je kartézský produkt dvou kružnic na 3 a n vrcholech. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(C_3 \square C_n) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{2} \text{ a } n \neq 4, 10; \\ 8, & \text{pokud } n \equiv 1 \pmod{2} \text{ nebo } n = 4. \end{cases}$$

Věta 3.60 [86]. *Nechť $C_m \square C_n$, kde $m, n \geq 3$, značí kartézský produkt dvou kružnic na m a n vrcholech. Pak $\lambda_{(2,1)}(C_m \square C_n) \geq 6$ a rovnost nastává jen v případě, že $m, n \equiv 0 \pmod{7}$.*

Jestliže jedna z kružnic má $4m$ vrcholů, nastávají tři možnosti rozpětí $\lambda_{(2,1)}$.

Věta 3.61 [86]. *Nechť $C_{4m} \square C_n$, kde $n \geq 3$, je kartézský produkt dvou kružnic na $4m$ a n vrcholech. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(C_{4m} \square C_n) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } m, n \equiv 0 \pmod{7}; \\ 8, & \text{pokud } m = 1, n = 3; \\ 7, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Autoři v [86] dokázali i větu pro kartézský součin dvou kružnic, z nichž jedna má $5m$ vrcholů.

Věta 3.62 [86]. *Nechť $C_{5m} \square C_n$ značí kartézský součin dvou kružnic na $5m$ a n vrcholech. Pak $\lambda_{(2,1)}(C_{5m} \square C_n) = 7$, jestliže $n \neq 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17$ a $m, n \not\equiv 0 \pmod{7}$.*

Problém s $L(2, 1)$ -ohodnocením kartézského produktu dvou kružnic zakončíme větou z článku [108], která již popisuje všechny možnosti.

Věta 3.63 [108]. *Nechť $C_m \square C_n$, kde $m, n \geq 3$, značí kartézský součin dvou kružnic na m a n vrcholech. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(C_m \square C_n) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } m, n \equiv 0 \pmod{7}; \\ 8, & \text{pokud } \{m, n\} \in A; \\ 7, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $A = \{\{3, i\} : i \geq 3, i \text{ je liché nebo } i = 4, 10\} \cup \{\{5, i\} : i = 5, 6, 9, 10, 13, 17\} \cup \{\{6, 7\}, \{6, 11\}, \{7, 9\}, \{9, 10\}\}$.

Jha v článku [63] představil výsledek kartézského součinu vícero kružnic.

Věta 3.64 [63]. *Nechť n je liché číslo větší než 4 a necht' $k = \frac{n-3}{2}$. Dále necht' $C_{m_0} \square C_{m_1} \square \dots \square C_{m_{k-1}}$ značí kartézský produkt k kružnic, kde $m_i \geq 3$ pro všechna i . Jestliže m_0, m_1, \dots, m_{k-1} jsou všechno násobky čísla n , je $\lambda_{(2,1)}(C_{m_0} \square C_{m_1} \square \dots \square C_{m_{k-1}}) = n - 1$.*

Ghosh, Paul a Pal [37] pak zkoumali kartézský součin úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$ a cesty P_l . Ověřili, že pro každý graf $G = K_{m,n} \square P_l$ platí Griggssova a Yehova hypotéza 3.29. Tj, že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2(G)$.

Nyní se přes kartézský produkt úplných grafů dostaneme až k pojmu amalgamace.

Věta 3.65 [35]. *Nechť $n, m \geq 2$ jsou přirozená čísla a $K_n \square K_m$ značí kartézský produkt dvou úplných grafů K_n a K_m . Potom*

$$\lambda_{(2,1)}(K_n \square K_m) = \begin{cases} 4, & \text{pokud } n = m = 2; \\ nm - 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Georges, Mauro a Stein [35] představili obecnější větu (viz věta 3.137), kterou si ukážeme v kapitole o $L(p, q)$ -ohodnocení. Nyní ale následuje věta o $L(2, 1)$ -ohodnocení kartézského produktu úplných grafů.

Věta 3.66 [35]. *Nechť $d \geq 3$ a n jsou dvě přirozená čísla, k je prvočíslo a $K_n^d = \underbrace{K_n \square K_n \square \dots \square K_n}_d$ značí kartézský produkt d úplných grafů na n vrcholech. Pak*

- $\lambda_{(2,1)}(K_{k^l}^d) = k^{2l} - 1$, pokud $l > 1$ ($l \in \mathbb{N}$) a $d \leq k$,
- $\lambda_{(2,1)}(K_k^d) = k^2 - 1$, pokud $d < k$.

I tato věta má svoje zobecnění – viz věta 3.138.

Nyní už se seznámme s pojmem amalgamace [73]: Nechť G_1, \dots, G_r , kde $r \geq 2$, jsou po dvou disjunkt ní grafy, z nichž každý obsahuje pevný indukovaný podgraf $H_i \subseteq G_i$ izomorfní ke grafu G_0 . Amalgamací G_1, \dots, G_r dle grafu G_0 rozumíme graf $G = \text{Amalg}(G_0; G_1, \dots, G_r)$ získaný zidentifikováním podgrafů H_i ve všech grafech G_i ($i = 1, \dots, r$). Graf G_0 nazýváme páteř a graf G_k se pro $k = 1, \dots, r$ nazývá list k grafu G . Tyto grafy jsou zkoumány například v článcích [4] a [73].

Představme si některé dosažené výsledky z obou článků.

Věta 3.67 [4]. *Nechť $K = \text{Amalg}(K_0; K_1, \dots, K_r)$, kde K_0 je úplný graf na n_0 vrcholech a K_i je úplný graf na $n_0 + n_i$ vrcholech, kde $i = 1, \dots, r$, tak že $n_1 \geq n_i \geq 1$ pro $i = 2, 3, \dots, r$. Označíme-li $k = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, je*

$$\lambda_{(2,1)}(K) = \begin{cases} 2n_0 + k - 1, & \text{pokud } n_1 \leq \frac{k}{2}; \\ 2(n_0 + n_1 - 1), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z předchozí věty vyplývá následující tvrzení.

Tvrzení 3.68 [4]. *Nechť G_1, \dots, G_r , kde $r \geq 2$, jsou grafy, z nichž každý obsahuje fixovaný indukovaný podgraf izomorfní ke grafu G_0 s t vrcholy. Pokud graf G_1 s m vrcholy má z grafů G_1, \dots, G_r nejvíce vrcholů a pokud $G = \text{Amalg}(G_0; G_1, \dots, G_r)$ má n vrcholů, je*

$$\lambda_{(2,1)}(G) \leq \begin{cases} n + t - 1, & \text{pokud } m \leq \frac{n+t}{2}; \\ 2(m - 1), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poslední případ, který na tomto místě z článku [4] rozebereme, se bude týkat grafu $G = \text{Amalg}(P_2; P_2 \square P_{n_1}, P_2 \square P_{n_2}, \dots, P_2 \square P_{n_r})$.

Věta 3.69 [4]. *Nechť $G = \text{Amalg}(P_2; P_2 \square P_{n_1}, P_2 \square P_{n_2}, \dots, P_2 \square P_{n_r})$ je graf s $r \geq 3$, $n_k \geq 2$ pro $k = 1, \dots, r$, kde P_i je cesta na i vrcholech. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(G) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } r = 3; \\ r + 2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nyní se podíváme ještě na některé věty z článku [73], kde nás bude zajímat amalgamace kartézských produktů úplných grafů podél úplného grafu.

Věta 3.70 [73]. *Nechť $K = \text{Amalg}(K_n; K_n \square K_m, K_n \square K_m, \dots, K_n \square K_m)$ s r listy, kde $n > 3, m = 2$ a $r = n - 2$ nebo $n, m \geq 3$ a $r = n - 1$. Pak $\lambda_{(2,1)}(K) = nm - 1$.*

Věta 3.71 [73]. *Nechť $n \geq 3$ a $K = \text{Amalg}(K_n; K_n \square K_2, K_n \square K_2, \dots, K_n \square K_2)$ s $n - 1$ listy. Pak $\lambda_{(2,1)}(K) = 2n$.*

Věta 3.72 [73]. *Nechť $n \geq 3$ a $m \geq 4$ jsou dvě přirozená čísla. Jestliže $K = \text{Amalg}(K_n; K_n \square K_m, K_n \square K_m, \dots, K_n \square K_m, K_n \square K_{m-2})$ má n listů, z nichž $n - 1$ je izomorfních s $K_n \square K_m$, je $\lambda_{(2,1)}(K) = nm - 1$.*

Představme si závěrečnou větu a její důsledek týkající se amalgamace grafů.

Věta 3.73 [73]. *Nechť $K = \text{Amalg}(K_2; K_2 \square K_m, K_2 \square K_m, \dots, K_2 \square K_m)$ s $r \geq 2$ listy a $s, m \geq 2$. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(K) = \begin{cases} \Delta(K) + 2, & \text{pokud } m = 2, r = 2, 3 \text{ nebo pokud } m = 3, r = 2; \\ \Delta(K) + 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důsledek 3.74 [73]. *Nechť $K = \text{Amalg}(K_2; K_2 \square K_{n_1}, K_2 \square K_{n_2}, \dots, K_2 \square K_{n_r})$, kde $r \geq 2$ a $n_1 \geq n_i \geq 2$ pro $i = 2, 3, \dots, r$. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(K) \leq \begin{cases} (n_1 - 1)r + 3, & \text{pokud } n_1 = 2, r = 2, 3 \text{ nebo pokud } n_1 = 3, r = 2; \\ (n_1 - 1)r + 2, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Krátce se ještě zmiňme o tenzorovém součíně, případně o úplném součíně grafů. V [64] autoři předkládají několik tvrzení týkajících se tenzorového součíně kružnic, resp. tenzorového součíně cesty a kružnice.

Věta 3.75 [64]. *Nechť $r, s \equiv 0 \pmod{7}$ jsou dvě přirozená čísla větší než 2 a nechť $C_r \times C_s$ značí tenzorový součín dvou kružnic na r a s vrcholech. Pak $\lambda_{(2,1)}(C_r \times C_s) = 6$.*

Věta 3.76 [64]. *Nechť $r, s, t \equiv 0 \pmod{11}$ jsou tři přirozená čísla větší než 2 a nechť $C_r \times C_s \times C_t$ značí tenzorový součín tří kružnic na r, s a t vrcholech. Pak $\lambda_{(2,1)}(C_r \times C_s \times C_t) = 10$.*

Na závěr z tohoto článku [64] přestavíme tři věty týkající se tenzorového součíně cesty a kružnice.

Věta 3.77 [64]. *Nechť $m \geq 3$ a $P_4 \times C_m$ značí tenzorový součín cesty na 4 vrcholech a kružnice na m vrcholech. Pak $\lambda_{(2,1)}(P_4 \times C_m) = 6$.*

Věta 3.78 [64]. *Nechť $m \geq 3$ a $P_5 \times C_m$ značí tenzorový součin cesty na 5 vrcholech a kružnice na m vrcholech. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(P_5 \times C_m) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } m = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 17, 18, 20, 24, 26, 34, 40; \\ 6, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 3.79 [64]. *Nechť $n \geq 6, m \geq 7$ a $P_n \times C_m$ značí tenzorový součin cesty na n vrcholech a kružnice na m vrcholech. Pak $\lambda_{(2,1)}(P_n \times C_m) = 6$ právě tehdy, když $m = 7k$ ($k \in \mathbb{N}$).*

Úplný součin kružnic je zkoumán například v článcích [81] a [76]. V něm autoři udávají přesné hodnoty rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ grafů $C_3 \otimes C_n$ a $C_4 \otimes C_n$ ($n \geq 3$).

Autoři článků [77] a [104] studují $L(2, 1)$ -ohodnocení kartézského, resp. tenzorového a úplného součinu netriviálních grafů. A pro tento typ grafů potvrzují Griggsovu a Yehovu hypotézu, s výjimkou speciálních případů. Onou výjimkou je například graf $P_2 \times P_2$, který není souvislý. (Alternativní) horní odhady rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ pro grafy $G \star K_2$, kde symbolem \star rozumíme jeden ze součinů grafů, udává článek [62].

Věta 3.80 [62]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 0$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G \times K_2) \leq \lambda_{(2,1)}(G)$.*

Věta 3.81 [62]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 1$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G \square K_2) \leq 2\lambda_{(2,1)}(G) + 1$.*

Věta 3.82 [62]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 0$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G \otimes K_2) \leq 2\lambda_{(2,1)}(G) + 2$.*

Jediný výsledek, který si představíme u $L(2, 1)$ -ohodnocení (a v konečném důsledku i v obecném $L(p, q)$ -ohodnocení) kruhových grafů, je následující odhad.

Věta 3.83 [106]. *Nechť G je jednotkový kruhový graf s maximálním stupněm Δ . Potom $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \frac{4}{5}\Delta^2 + 2\Delta$.*

Výše uvedená hranice není ale příliš těsná. Uvažujeme-li trojúhelníkovou mřížku G_6 , což je graf jednotkového kruhu s maximálním stupněm 6, zjistíme, že rozpětí tohoto grafu je 8, ale hodnota této horní hranice je 40. Většina výzkumů v této oblasti se zabývala algoritmickými problémy.

Sakai [101] byl první, kdo zkoumal $L(2, 1)$ -ohodnocení chordálních grafů, dokázal, že splňují Griggsovu a Yehovu hypotézu 3.29. My však uvedeme ještě o 1 vylepšený horní odhad Lama a spol. [87].

Věta 3.84 [87]. *Nechť G je chordální graf s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \frac{1}{4}(\Delta + 3)^2 - 1$.*

Chang a Kuo [58] studovali horní odhady rozpětí $\lambda_{(2,1)}(G)$ speciálních chordálních grafů.

Věta 3.85 [58]. *Nechť G je chordální graf maximálního stupně Δ . Potom*

- $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 2\Delta$, pokud graf G neobsahuje n -slunce ($n \geq 3$) jako indukovaný podgraf,
- $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta + 2\chi(G) - 2$, pokud graf G je silně chordální.

Rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ u silných chordálních grafů je zobecněním již výše uvedeného výsledku $\lambda_{(2,1)}(T) \leq \Delta(T) + 2$, kde T značí netriviální strom – viz věta 3.41. Pro silné chordální grafy G autoři dále vyslovili hypotézu, že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta(G) + \chi(G)$. Cerioli a Posner [21] pro chordální bipartitní grafy G s maximálním stupněm Δ dokázali, že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 2$. Výrazně lepší odhad pak předvedli Panda a Goel [97].

Věta 3.86 [97]. *Nechť G je chordální bipartitní graf s maximálním stupněm Δ . Potom $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 4\Delta - 1$.*

Tato věta ukazuje, že Griggsova a Yehova hypotéza 3.29 je pravdivá pro chordální bipartitní grafy s $\Delta \neq 3$. Tato hypotéza je pravdivá i pro slabě chordální grafy G : autoři [21] totiž dokazují, že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2(G)$.

Nyní se podíváme na $L(2,1)$ -ohodnocení (jednotkových) intervalových grafů. Tato oblast není příliš prozkoumána, a tak se spokojíme jen právě s tímto ohodnocením. Sakai [101] odhad rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ pro jednotkové intervalové grafy pomocí chromatického čísla χ příslušného grafu.

Věta 3.87 [101]. *Nechť G je jednotkový intervalový graf s chromatickým číslem $\chi(G)$. Pak $2\chi(G) - 2 \leq \lambda_{(2,1)}(G) \leq 2\chi(G)$.*

V článku [88] pak autoři diskutují postačující a nutné podmínky pro přesné hodnoty $\lambda_{(2,1)}(G)$ jednotkových intervalových grafů. V řeči maximálního stupně můžeme předchozí větu převést takto: protože $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, je $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 2(\Delta(G) + 1)$. Tento odhad je poměrně těsný, neboť v případě úplného grafu (což je příklad intervalového grafu) je $\lambda_{(2,1)}(K_n) = 2(n - 1) = 2\Delta$. Konečně článek [98] dává do souvislosti rozpětí $\lambda_{(2,1)}(G)$ s maximálním stupněm grafu G a klikovostí grafu G .

Věta 3.88 [98]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$ a klikovostí $\omega(G)$. Potom $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta(G) + \omega(G)$.*

Již byl zmíněn Petersenův graf (viz obrázek 6). Tento graf je příkladem r -regulárního grafu, konkrétně pro $r = 3$. Fiala a Kratochvíl [30] ukázali, že pro každé $r \geq 3$ je NP -úplný problém rozhodnutí, zda r -regulární graf je možné ohodnotit s rozsahem hodnot $0 \div (r + 2)$. Tento výsledek je nejlepší možný, protože žádný r -regulární graf G s $r \geq 2$ není možné ohodnotit s rozpětím nejvýše $r + 1$.

Podívejme se na $L(2,1)$ -ohodnocení zobecněných Petersenových grafů. Samotný Petersenův graf (viz obrázek 6) budeme značit P , zobecněné Petersenovy grafy pak budeme

značit $GPG(N)$. To, že $L(2, 1)$ -ohodnocení zobecněných Petersenových grafů splňuje Griggsovu a Yehovu hypotézu 3.29, ukázali Georges a Mauro [33], určili totiž následující odhad.

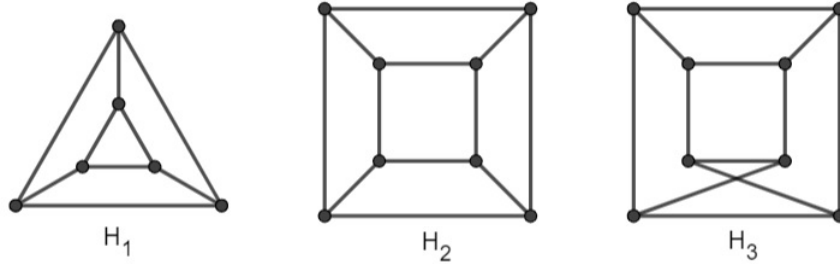
Věta 3.89 [33]. *Nechť $GPG = GPG(N)$ značí (nějaký) zobecněný Petersenův graf na $2N$ vrcholech a P značí Petersenův graf. Pak $\lambda_{(2,1)}(GPG) \leq 9$. Navíc $\lambda_{(2,1)}(GPG) = 9$ právě tehdy, když graf GPG je izomorfní s grafem P .*

Platí tedy, že $\lambda_{(2,1)}(GPG) \leq 8$, a to s jedinou výjimkou, když GPG je Petersenův graf. Autoři dále ukazují, že pokud existuje nějaký zobecněný Petersenův graf $G = GPG(N)$ s $\lambda_{(2,1)}(G) = 8$, musí být *dostatečně* velký.

Věta 3.90 [33]. *Nechť $GPG = GPG(N)$ značí zobecněný Petersenův graf na $2N$ vrcholech. Pokud $\lambda_{(2,1)}(GPG) = 8$, je $N \geq 7$.*

Jinými slovy $\lambda_{(2,1)}(GPG) \leq 7$ pro zobecněné Petersenovy grafy řádu $N \leq 6$. Na závěr článku [33] autoři předkládají hypotézu, že Petersenův graf je jediný souvislý 3-regulární graf s rozpětím 9 při $L(2, 1)$ -ohodnocení. Domnívají se, že neexistuje žádný zobecněný Petersenův graf $GPG(N)$ s $\lambda_{(2,1)}(GPG) = 8$, ale rovněž že neexistuje žádný 3-regulární graf s takovýmto rozpětím. Svoji hypotézu potvrzují pro $N = 3$ a $N = 4$.

Věta 3.91 [33]. *Nechť $G_1 = GPG(3)$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G_1) = 5$ a graf G_1 je izomorfní s grafem H_1 zachyceným na obrázku 9 (vlevo). Dále nechť $G_2 = GPG(4)$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G_2) = 6$, pokud je graf G_2 izomorfní s grafem H_2 zachyceným na obrázku 9 (uprostřed), jinak $\lambda_{(2,1)}(G_2) = 7$, a graf G_2 je izomorfní s grafem H_3 zachyceným na obrázku 9 (vpravo).*

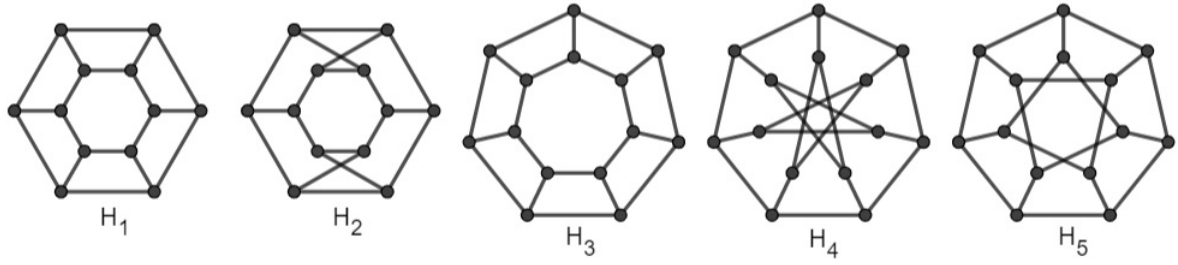


Obrázek 9: Tři zobecněné Petersenovy grafy; zleva doprava: $H_1 = GPG(3)$, H_2 a H_3 .

Dalšího zkoumání se chopili Adams a spol. [1], [2], [3]. Představme si jejich výsledky. Pro tyto potřeby zde připomeňme obrázek z úvodu této práce (viz obrázek 4).

Věta 3.92 [3]. *Nechť $G = GPG(5)$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) = 9$, jestliže G je izomorfní s Petersenovým grafem P (zachyceným na obrázku 6), jinak $\lambda_{(2,1)}(G) = 6$.*

Věta 3.93 [2]. *Nechť $G = GPG(6)$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) = 5$, jestliže G je izomorfní s grafem H_1 (zachyceným na obrázku 10 úplně vlevo) nebo grafem H_2 (zachyceným na obrázku 10 druhý zleva), jinak $\lambda_{(2,1)}(G) = 6$.*



Obrázek 10: Některé zobecněné Petersenovy grafy pro hodnoty $n = 6$ a $n = 7$.

Podobným způsobem našli i rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ u zobecněného Petersenova grafu $GPG(7)$.

Věta 3.94 [3]. *Nechť $G = GPG(7)$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) = 5$, jestliže G je izomorfní s grafem H_4 (zachyceným na obrázku 10 druhý zprava) nebo grafem H_5 (zachyceným na obrázku 10 vpravo), jinak $\lambda_{(2,1)}(G) = 6$.*

Podobně Adams a spol. [3] ukázali, že $\lambda_{(2,1)}(G)$, kde $G = GPG(8)$, je buď 6 nebo 7. V článku [1] pak Adams a kol. ukázali, že $\lambda_{(2,1)}(G)$ je 5 nebo 6, pokud G je zobecněný Petersenův graf $GPG(N)$ řádu $N = 9, 10$ nebo 12. Pokud $N = 11$, je $\lambda_{(2,1)}(G)$, kde $G = GPG(11)$, buď 6 nebo 7. Otázkou zůstává, zda existuje nějaký zobecněný Petersenův graf $G = GPG(N)$ s $N \geq 12$ takový, že $\lambda_{(2,1)}(G) \geq 7$. Celkový počet zobecněných Petersenových grafů je už i při tak malém řádu N poměrně velký.

Ukažme si několik výsledků dosažených při $L(2, 1)$ -ohodnocení Kneserových grafů.

Věta 3.95 [71]. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $G = K(2k+1, k)$ značí Kneserův graf. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 4k + 2$.*

Shao a spol. [103] přišli s následujícím odhadem.

Věta 3.96 [103]. *Nechť $k \geq 2$ a n jsou dvě přirozená čísla a nechť $G = K(n, k)$ značí Kneserův graf. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \binom{n}{k} - 1$. Rovnost nastává pro $n \geq 3k - 1$.*

Závěrečné slovo u Kneserových grafů bude patřit Shaovi, Averbakhovi a Solis-Obovi [102].

Věta 3.97 [102]. *Nechť n a k jsou dvě přirozená čísla a nechť G značí Kneserův graf $K(n, k)$ s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$. Potom*

$$\lambda_{(2,1)}(G) \begin{cases} = \binom{n}{k} - 1 < \Delta^2 - 4, 4\Delta, & \text{pokud } n \geq 3k - 1 \text{ a } k \geq 3; \\ = \binom{n}{k} - 1 < \Delta^2 - 3, 5\Delta, & \text{pokud } n > 3k - 1 \text{ a } k = 2; \\ = 9 = \Delta^2, & \text{pokud } n = 3k - 1 \text{ a } k = 2; \\ < \Delta^2 - \Delta(k(1 - (\frac{k}{n-k})^{n-2k}) - 1) + k < \Delta^2, & \text{pokud } 2k + 2 \leq n \leq 3k - 2; \\ \leq \Delta^2 - 2, & \text{pokud } n = 2k + 1 \text{ a } k \geq 3; \\ = 2, & \text{pokud } n = 2k. \end{cases}$$

Stejní autoři pak uvádějí i rozpětí $\lambda_{(1,1)}(G) = \chi(G^2) - 1$ Kneserova grafu $G = K(n, k)$. Tento výsledek již zde uvádět nebudeme. Spokojíme se tak se zjištěním, že Kneserovy grafy splňují Griggsovu a Yehovu hypotézu 3.29. Tu splňují i totální grafy.

Věta 3.98 [107]. *Nechť $TG = T(G)$ s maximálním stupněm Δ značí totální graf grafu G . Pak $\lambda_{(2,1)}(TG) \leq \max\{\frac{3}{4}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta, \frac{1}{2}\Delta^2 + 2\Delta\}$.*

Horní hranice byla v článku [25] ještě vylepšena, a to na $\frac{1}{2}\Delta^2 + \Delta$. Další větu této podkapitoly věnujme $L(2, 1)$ -ohodnocení Sierpiňského grafů.

Věta 3.99 [40]. *Nechť $n \geq 2$ a $k \geq 3$ jsou dvě přirozená čísla a nechť $G = S(n, k)$ značí Sierpiňského graf. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) = 2k$.*

$L(2, 1)$ -ohodnocení distančních grafů se věnovali především Fangyun, Guohua a Kexiang [110]. Nejprve si ale představíme větu jejich kolegů Taa a Gua [110]. Příslušné rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ distančního grafu $G(\mathbb{Z}, D) = G(D)$ budeme značit $\lambda_{(2,1)}(D)$.

Věta 3.100 [110]. *Nechť D je konečná distanční množina. Pak $2|D| + 2 \leq \lambda_{(2,1)}(D) \leq |D^2| + 3|D|$.*

Pokud $|D| = 1$, skládá se distanční graf $G(D)$ z $|D|$ komponent, z nichž každá tvoří cestu na nekonečně mnoho vrcholech. Pro $|D| = 1$ je tedy věta ekvivalentní poznatku Griggse a Yeha, totiž že $\lambda_{(2,1)}(P_n) = 4$ pro $n \geq 5$ (viz věta 3.36). Protože distanční graf $G(D)$ s maximálním stupněm $\Delta = 2|D| \geq 2$ je $2|D|$ -regulární, snadno z předchozí věty zjistíme [28], že $\lambda_{(2,1)}(D) \leq \frac{\Delta^2}{4} + \frac{3}{2}\Delta$. Z toho tedy vyplývá, že distanční grafy splňují Griggsovu a Yehovu hypotézu 3.29. Nyní se zaměříme na konkrétní množiny D .

Věta 3.101 [28]. *Nechť $D = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ nebo $D = \{1, 3, 5, \dots, 2k - 1\}$, kde k je přirozené číslo. Pak $\lambda_{(2,1)}(D) = 2k + 2$.*

Věta 3.102 [28]. *Nechť $D = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + k - 1\}$, kde $a, k \geq 2$ jsou dvě přirozená čísla. Pak $\lambda_{(2,1)}(D) \leq \min\{2(a + k - 1), 6k - 2\}$.*

Pokud v předchozí větě platí $k \geq a \geq 2$, je $\lambda_{(2,1)}(D) = 2(a + k - 1)$ – viz [28]. Nyní vylepšíme odhady pro $|D| = 2$.

Věta 3.103 [28]. *Nechť $D = \{a, b\}$, kde $1 \neq a < b$ jsou dvě přirozená čísla. Pak $6 \leq \lambda_{(2,1)}(D) \leq 8$.*

Věta 3.104 [28]. *Nechť $D = \{1, b\}$, kde $b > 1$ je přirozené číslo. Pak*

$$\lambda_{(2,1)}(D) \leq \begin{cases} 8, & \text{pokud } b \equiv 0 \pmod{3}; \\ 7, & \text{jinak.} \end{cases}$$

A konečně nyní vylepšíme odhad pro $D = \{k, k + 1\}$.

Věta 3.105 [28]. *Nechť $D = \{k, k + 1\}$, kde k je přirozené číslo. Pak $\lambda_{(2,1)}(D) \leq 7$.*

Ještě než se dostaneme k obecnému $L(p, q)$ -ohodnocení, představíme si výsledky, jež získali Mitra a Bhoumik [95], kteří se v článku [95] zabývali $L(2, 1)$ -ohodnocením cirkulantů $G = G(\mathbb{Z}_n, S)$. Tento článek byl jednou motivací k této práci.

Pro $|S| = n - 1$ dostáváme úplný graf, a tedy dle věty 3.39 je $\lambda_{(2,1)}(K_n) = 2n - 2$. Ve zmíněném článku autoři pracují s množinou S , pro níž $|S| = n - 2, n - 3$ nebo $n - 4$. V prvním a třetím případě musí být n sudé.

Věta 3.106 [95]. *Nechť $G = G(\mathbb{Z}_n, S)$ je cirkulant na n vrcholech a $|S| = n - 2$, (tj. $\frac{n}{2} \notin S$), kde $n \geq 4$ je sudé číslo. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \frac{3}{2}n - 2$.*

Možnost $|S| = n - 3$ nastává, pokud $\{0, a, n - a\} \notin S$. Z důvodu symetrie dále předpokládejme, že $a \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} - 1 \rceil\}$.

Věta 3.107 [95]. *Nechť $G = G(\mathbb{Z}_n, S)$ je cirkulant na n vrcholech, $|S| = n - 3$ (tj. $\{0, a, n - a\} \notin S$, $a \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} - 1 \rceil\}$), kde $n \geq 4$. Dále nechť $d = \gcd(n, a)$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq n + d - 2$.*

Představíme si i větu pro cirkulanty s $|S| = n - 4$.

Věta 3.108 [95]. *Nechť $G = G(\mathbb{Z}_n, S)$ je cirkulant na n vrcholech, $|S| = n - 4$ (tj. $\{0, a, \frac{n}{2}, n - a\} \notin S$, $a \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$), kde $n \geq 4$ je sudé. Dále nechť $d = \gcd(n, a)$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq n + \frac{d}{2} - 2$.*

Poslední věta této podkapitoly pak bude patřit určitému zobecnění.

Věta 3.109 [95]. *Nechť G je cirkulant. Nechť $d = \min\{\gcd(n, a)\}$, $S^C = \mathbb{Z}_n \setminus S$. Pokud pro všechna $a \in S^C$ existují s_1 a $s_2 \in S$ taková, že $a \equiv s_1 - s_2 \pmod{n}$, je*

$$\lambda_{(2,1)}(G) = \begin{cases} n + d - 2, & \text{pokud } |S^C| \text{ je liché;} \\ n + \frac{d}{2} - 2, & \text{pokud } |S^C| \text{ je sudé.} \end{cases}$$

3.4 $L(p, q)$ -ohodnocení grafů

V tuto chvíli nastává čas věnovat se obecnému $L(p, q)$ -ohodnocení. Jak již bylo řečeno, nejčastěji se pracuje s parametry $p > q$. Dají se ale objevit i články pracující s $p = q$, ba dokonce s $p < q$. Příkladem mohou být úvodní dvě podkapitoly této sekce, ale i článek [67], který se zabývá $L(1, 2)$ -ohodnocením grafů.

Pro každá dvě přirozená čísla p, q taková, že $p \geq q$, je $\lambda_{(p,q)}(G) \geq p + (\Delta(G) - 1)q$, jak ukázali autoři článku [59]. Rovnost nastává u hvězdy. Rovněž můžeme zobecnit i některé výsledky s $q = 1$. Například lze ověřit, že pro $p \geq 2$ je $\lambda_{(p,1)}(G) \leq \Delta^2(G) + (p - 1)\Delta(G)$ – viz [57]. Tato hranice byla vylepšena pro grafy s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$, jež je zobecněním věty 3.32.

Věta 3.110 [38]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$ a přirozené číslo $p \geq 2$. Pak $\lambda_{(p,1)}(G) \leq \Delta^2 + (p - 1)\Delta - 2$.*

Rozsáhlejší článek Gonçalvese pak vyšel i v Discrete Mathematics [39]. Navíc, jak ukázali autoři v článku [57], platí i následující limitní vztah.

Věta 3.111 [57]. *Nechť G je graf s alespoň jednou hranou. Potom $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{(p+1,1)}(G)}{\lambda_{(p,1)}(G)} = 1$.*

Podmínka na existenci alespoň jedné hrany zajišťuje ve jmenovateli nenulové (kladné) číslo. Jak jsme již poznamenali před větou 3.33, platnost Griggsovy a Yehovy hypotézy 3.29 pro dostatečně velké $\Delta(G)$ Havet, Reed a Sereni [48]. Autoři dokonce ukázali, že $\lambda_{(p,1)}(G) \leq \Delta^2$ pro každý graf G s maximálním stupněm $\Delta \geq 10^{69}$, a $\lambda_{(p,1)}(G) \leq \Delta^2 + c(p)$ pro každé přirozené Δ a pro vhodnou konstantu $c(p)$ závislou na parametru p – to je zobecnění věty 3.33.

Základní výsledek uvádí, že pro všechny grafy G existuje optimální $L(p, q)$ -ohodnocení grafu G takové, že každý vrchol je ohodnocen hodnotou ve tvaru $\alpha p + \beta q$, kde α, β jsou nezáporná celá čísla. Z toho pozorování tedy vyplývá následující věta.

Věta 3.112 [31]. *Nechť $p \geq q$ jsou dvě přirozená čísla a G je graf. Pak $\lambda_{(p,q)}(G) = \alpha p + \beta q$ pro nějaká nezáporná celá čísla α, β .*

Podívejme se ještě na jeden základní výsledek z [31].

Věta 3.113 [31]. *Uvažujme graf G s maximálním stupněm Δ . Nechť $p \geq \Delta q$ a necht existuje vrchol v s Δ sousedy, z nichž každý je stupně Δ . Pak $\lambda_{(p,q)}(G) \geq p + (2\Delta - 2)q$, pokud $p \geq \Delta q$, a $\lambda_{(p,q)}(G) \geq 2p + (\Delta - 2)q$, pokud $p \leq \Delta q$.*

Představme si následující dolní odhad čísla $\lambda_{(p,q)}(G)$.

Tvrzení 3.114 [59]. *Nechť je dán graf G s maximálním stupněm $\Delta \geq 1$ a přirozená čísla p, q taková, že $p \geq q$. Pak $\lambda_{(p,q)}(G) \geq p + (\Delta - 1)q$. A navíc, pokud $p > q$ a v předchozím vztahu nastává rovnost, v každém $L(p, q)$ -ohodnocení grafu G musí být každý vrchol stupně Δ ohodnocen hodnotou 0 (resp. hodnotou $p + (\Delta - 1)q$) a jeho sousedi musí být ohodnoceny hodnotami $p + iq$ (resp. hodnotami iq) pro všechna $i = 0, 1, \dots, \Delta - 1$.*

Grafy s $\lambda_{(p,q)} = p + (\Delta(G) - 1)q$ jsou studovány v [59] a nazývají se $\lambda_{(p,q)}$ -minimální grafy. To, zda je daný graf $\lambda_{(p,q)}$ -minimální, je dáno právě hodnotami p, q , což si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 3.115 [59]. Představme si jako graf G dvojhvězdu D_Δ , která vznikne ze dvou hvězd $K_{1,\Delta}$ zidentifikováním listu jedné hvězdy s listem druhé hvězdy. Z předchozího tvrzení vyplývá, že jeden z vrcholů s maximálním stupněm Δ musí být ohodnocen hodnotou 0 (a jeho sousedi pak hodnotami $p, p + q, \dots, p + (\Delta - 1)q$) a druhý vrchol s maximálním stupněm Δ musí být ohodnocen hodnotou $p + (\Delta - 1)q$ (a jeho sousedi pak hodnotami $0, q, \dots, (\Delta - 1)q$). Tzn., že jediný soused obou dvou vrcholů maximálního stupně Δ musí být ohodnocen hodnotou $p + i'q = i''q$ pro nějaká $i' \geq 0$ a $i'' \leq \Delta - 1$. To je ale možné jen tehdy, pokud $p = iq$ pro nějaké $1 \leq i \leq \Delta - 1$. To tedy znamená, že graf D_Δ je $\lambda_{(p,q)}$ -minimální právě tehdy, když $p = iq$ pro nějaké $1 \leq i \leq \Delta - 1$.

Následující větu lze dokázat pomocí tvrzení 3.4 uvedeného v úvodu kapitoly 3.

Věta 3.116 [59]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 1$ a $p \geq q$, $j \geq k$ jsou přirozená čísla taková, že $j = \lfloor \frac{kp}{q} \rfloor$. Je-li graf G $\lambda_{(p,q)}$ -minimální, je graf G i $\lambda_{(j,k)}$ -minimální.*

Věta 3.117 hovoří o tom, kdy graf G je $\lambda_{(p,q)}$ -minimální.

Věta 3.117 [59]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 1$ a $p \geq q$ jsou přirozená čísla splňující $p \geq \Delta q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- Graf G je $\lambda_{(p,q)}$ -minimální.
- Existuje $\lambda_{(p,q)}$ -ohodnocení g grafu G takové, že každý vrchol v v grafu G má $g(v)$ ve tvaru $a_v p + b_v q$, kde $a_v \in \{0, 1\}$ a $b_v \in \{0, 1, \dots, \Delta - 1\}$. A navíc:
 - 1) Pokud $\text{dist}_G(u, v) = 1$, je $a_u \neq a_v$. A pokud $a_u = 0$ a $a_v = 1$, je $b_u \leq b_v$.
 - 2) Pokud $\text{dist}_G(u, v) = 2$, je $a_u = a_v$ a $b_u \neq b_v$.
- Graf G je $\lambda_{(j,k)}$ -minimální pro všechna přirozená čísla $j \geq k$.

Důsledkem této věty je tvrzení, které říká, že pokud graf G je $\lambda_{(p,q)}$ -minimální s maximálním stupněm $\Delta \geq 1$ a přirozenými čísly $p \geq \Delta q$, je graf G bipartitní. Důvodem je, že dle předchozí věty je každý vrchol ohodnocen hodnotou ve tvaru $a_v p + b_v q$ a $a_u \neq a_v$, kdykoliv uv je hrana. A tedy $V(G) = A \cup B$, kde $A = \{v : a_v = 0\}$ a $B = \{v : a_v = 1\}$.

Georges a Mauro [31] našli ohodnocovací číslo $\lambda_{(p,q)}$ pro kružnice a cesty pro každé $p \geq q$:

Věta 3.118 [31]. *Nechť $p \geq q$ jsou dvě přirozená čísla, $n \in \mathbb{N}$ a P_n značí cestu na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(p,q)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 1; \\ p, & \text{pokud } n = 2; \\ p + q, & \text{pokud } n = 3 \text{ nebo } n = 4; \\ p + 2q, & \text{pokud } n \geq 5 \text{ a } p \geq 2q; \\ 2p, & \text{pokud } n \geq 5 \text{ a } p \leq 2q. \end{cases}$$

Věta 3.119 [31]. *Nechť $p \geq q$ jsou dvě přirozená čísla, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a C_n značí kružnici na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(p,q)}(C_n) = \begin{cases} 2p, & \text{pokud } n \geq 3 \text{ je liché a } p \geq 2q, \\ & \text{nebo } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ a } p \leq 2q, \\ & \text{nebo } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ a } p \leq 3q, \\ & \text{nebo } n \geq 5 \text{ a } p \leq 2q; \\ p + 2k, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ a } p \geq 2q, \\ & \text{nebo } n \not\equiv 0 \pmod{3}, n \neq 5 \text{ a } p \leq 2q; \\ p + 3q, & \text{pokud } n \equiv 2 \pmod{4} \text{ a } p \geq 3q; \\ 4q, & \text{pokud } n = 5. \end{cases}$$

Griggs a Jin [41] pak našli ohodnocovací číslo $\lambda_{(p,q)}$ pro cesty, kružnice a kola pro každé $p \leq q$. Protože vztah pro kola je poměrně komplikovaný, nebudeme jej zde uvádět. Pro první dva typy grafů představíme jednotlivé výsledky.

Věta 3.120 [41]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, p \leq q$ a P_n značí cestu na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(p,q)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 1; \\ p, & \text{pokud } n = 2; \\ q, & \text{pokud } n = 3 \text{ a } 0 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}; \\ 2p, & \text{pokud } n = 3 \text{ a } \frac{1}{2} \leq \frac{p}{q} \leq 1; \\ p + q, & \text{pokud } n = 4, 5, 6 \text{ nebo pokud } n \geq 7 \text{ a } 0 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}; \\ 3p, & \text{pokud } n \geq 7 \text{ a } \frac{1}{2} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{2}{3}; \\ 2q, & \text{pokud } n \geq 7 \text{ a } \frac{2}{3} \leq \frac{p}{q} \leq 1. \end{cases}$$

U kružnice délky $n \geq 3$ nastává relativně hodně případů, a proto výsledky rozdělíme do dvou vět v závislosti na n .

Věta 3.121 [41]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, 3 \leq n \leq 5, p \leq q$ a C_n značí kružnici na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(p,q)}(C_n) = \begin{cases} 2p, & \text{pokud } n = 3; \\ p + q, & \text{pokud } n = 4 \text{ a } 0 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}; \\ 3p, & \text{pokud } n = 4 \text{ a } \frac{1}{2} \leq \frac{p}{q} \leq 1; \\ 2q, & \text{pokud } n = 5 \text{ a } 0 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}; \\ 4p, & \text{pokud } n = 5 \text{ a } \frac{1}{2} \leq \frac{p}{q} \leq 1. \end{cases}$$

Věta 3.122 [41]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 6, p \leq q$ a C_n značí kružnici na n vrcholech. Potom*

$$\lambda_{(p,q)}(C_n) = \begin{cases} 2q, & \text{pokud } n \not\equiv 0 \pmod{4} \text{ a } 0 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{2}{3}, \\ & \text{nebo } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ a } \frac{2}{3} \leq \frac{p}{q} \leq 1; \\ 3p, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ a } \frac{1}{2} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{2}{3}, \\ & \text{nebo } n \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ a } \frac{2}{3} \leq \frac{p}{q} \leq 1; \\ p + q, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{4} \text{ a } 0 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

V článku [41] autoři pracují s $L(k_1, k_2)$ -ohodnocením, jež je převedeno na $L(k, 1)$ -ohodnocení, kde $k = \frac{k_1}{k_2}$ je reálné kladné číslo. Všechny předchozí tři výsledky byly transformovány do $L(p, q)$ -ohodnocení s $p \leq q$, kde p, q jsou již tradičně přirozená čísla (do úvahy přichází i možnost $p = 0$).

O úplných grafech již byla řeč, viz zobecnění věty 3.39, přejdeme tak rovnou na úplné bipartitní grafy. Začneme rozpětím $\lambda_{(p,1)}$ u bipartitních grafů. Následující větu dokázal Griggs a Jin v článku [42]. V tomto článku přešli autoři od přirozených čísel k číslům reálným.

Věta 3.123 [42]. *Nechť $p \geq 0$ je reálné číslo a nechť $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$, kde $|V(G_1)| = n_1$ a $|V(G_2)| = n_2$, přičemž $n_1 \geq n_2$, je bipartitní graf. Potom*

$$\lambda_{(p,1)}G = \begin{cases} \max\{n_1 - 1, n_2 - 1 + p\}, & \text{pokud } 0 \leq p \leq \frac{1}{2}; \\ (2n_2 - 1)p + \max\{n_1 - n_2 - 1 + p, 0\}, & \text{pokud } \frac{1}{2} \leq p \leq 1; \\ p + n_1 + n_2 - 2, & \text{pokud } p \geq 1. \end{cases}$$

Kompletním bipartitním grafem je rovněž hvězda $K_{1,\Delta}$.

Věta 3.124 [19]. *Nechť p, q jsou přirozená čísla a $G = K_{1,\Delta}$ je hvězda s maximálním stupněm Δ . Pak*

$$\lambda_{(p,q)}G = \begin{cases} (\Delta - 1)q, & \text{pokud } p \leq \frac{q}{2}; \\ (\Delta - 2)q + 2p, & \text{pokud } \frac{q}{2} \leq p \leq q; \\ (\Delta - 1)q + p, & \text{pokud } p \geq q. \end{cases}$$

Oba tyto výsledky jsou v korespondenci, jak ukazuje dosazení $n_1 = \Delta, n_2 = 1$ a $q = 1$. Teď nás bude zajímat $L(p, q)$ -ohodnocení stromů.

Věta 3.125 [57]. *Nechť $p \in \mathbb{N}$ a nechť T značí strom s maximálním stupněm Δ . Pak $\Delta + p - 1 \leq \lambda_{(p,1)}(T) \leq \min\{\Delta + 2p - 2, 2\Delta + p - 2\}$.*

Dodejme, že obě krajní hodnoty jsou dosažitelné: $\lambda_{(p,1)}(G) = \Delta(G) + p - 1$ v případě hvězdy a horní odhad nastane v případě stromu s 12 listy, v němž každý vrchol kromě listů má stupeň 4 – viz článek [57].

Na tomto místě vzpomeňme Changův a Kuoův algoritmus, o němž jsme se zmínili v předchozí podkapitole 3.3 za větou 3.41. Zobecnění tohoto případu je snadné pro $q = 1$, dlouhou dobu však nebylo známo, jak je to s případem, kdy $q > 1$. Odpověď na tuto otázku dali až Fiala, Golovach a Kratochvíl [29], kteří ukázali, že pro přirozená čísla $p \geq q$ je problém $L(p, q)$ -ohodnocení stromů řešitelný v polynomiálním čase pouze tehdy, pokud q dělí p , jinak je NP -úplný.

Georges a Mauro [31] dokázali následující větu.

Věta 3.126 [31]. *Nechť T je strom s vrcholem v maximálního stupně Δ , dále nechť všichni sousedí vrcholu v mají rovněž stupeň Δ a nechť $p \geq q$ jsou dvě přirozená čísla. Pak $\lambda_{(p,q)}(T) = p + (2\Delta - 2)q$.*

V [31] lze rovněž nalézt tento vztah pro hvězdu: $\lambda_{(p,q)}(K_{1,\Delta}) = p + (\Delta - 1)q$. V případě, že $\frac{p}{q} \geq \Delta$, tento vztah pro hvězdu a předchozí věta nám udává spodní a horní hranici čísla $\lambda_{(p,q)}$ stromů s maximálním stupněm Δ . Autoři [32] dále v závislosti na $\frac{p}{q}$ hledají $\lambda_{(p,q)}$ nekonečných stromů, představíme si jednu větu.

Věta 3.127 [32]. *Nechť T_∞ je nekonečný strom s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$. Dále nechť $p \geq q$ jsou dvě přirozená čísla a $a = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$. Potom*

- *pokud $a \geq \Delta$, je $\lambda_{(p,q)}(T_\infty) = p + (2\Delta - 2)q$ a*

- pokud $a = \Delta - 1$, je $\lambda_{(p,q)}(T_\infty) = 2p + (\Delta - 2)q$.

Georges a Mauro [32] se zabývají i případem, kdy $a \leq \Delta - 2$. Tento případ je ale o poznání složitější, a proto jej zde nebudeme uvádět. Uvedeme ale výsledek Calamoneri, Pelce a Petreschi [19], kteří se zabývali $L(p, q)$ -ohodnocením stromů s $p \leq q$.

Věta 3.128 [19]. *Nechť T je strom s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$ a p, q jsou dvě přirozená čísla. Pak*

- pokud $p \leq \frac{q}{2}$, je $\lambda_{(p,q)}(T) = p + (\Delta - 1)q$,
- pokud $\frac{q}{2} \leq p \leq \frac{\Delta}{2\Delta-1}q$, je $\lambda_{(p,q)}(T) = (2\Delta - 1)p$ a
- pokud $\frac{\Delta}{2\Delta-1}q \leq p \leq q$, je $\lambda_{(p,q)}(T) = \Delta q$.

Chang a Lu [59] pro každé přirozené Δ zavádějí Δ -sekvenci (b_0, b_1, \dots, b_m) celých čísel splňující: $b_0 = 0, 0 \leq b_i \leq \Delta - 1$ pro všechna i , $b_i \geq b_{i-1}$ a $b_i \geq b_{i+1}$ pro všechna lichá i a $b_i \neq b_{i+2}$ pro všechna i a definují T_Δ jako nekonečný (tj. s nekonečným počtem vrcholů) strom (s výjimkou, že T_1 je K_2), jehož množina vrcholů obsahuje všechny Δ -sekvence a vrchol (b_0, b_1, \dots, b_m) je sousední s dalším vrcholem (c_0, \dots, c_n) právě tehdy, když $|m - n| = 1$ a $b_i = c_i$ pro $0 \leq i \leq \min\{m, n\}$. Konečně dostáváme následující větu.

Věta 3.129 [59]. *Nechť T je strom s maximálním stupněm $\Delta \geq 1$ a nechť $p \geq q$ jsou přirozená čísla splňující $p \geq \Delta q$. Pak strom T je $\lambda_{(p,q)}$ -minimální právě tehdy, když je strom T podgrafem stromu T_Δ .*

Chang a spol. [57] dávají horní odhad čísla $\lambda_{(p,1)}$ pro t -stromy, když dokazují, že pro graf G maximálního stupně Δ je $\lambda_{(p,1)}(G) \leq (2p - 1 + \Delta - t)t$.

V minulé podkapitole jsme vynechali výsledky týkající se ohodnocení planárních grafů, a to proto, že veškeré výsledky ponecháme v obecném tvaru. Pro planární grafy lze triviálně nalézt [18] dolní odhad rozpětí $\lambda_{(p,q)}$ příslušného planárního grafu, a to $\lambda_{(p,q)} \geq \Delta(G)q + p - q$. Otevřeným problémem ale zůstávají případy, pro něž je dolní mez skutečnou přesnou hodnotou.

Heuvel a McGuinness [52] ukázali, že pro všechna přirozená čísla $p \geq q$ a planární graf G s maximálním stupněm Δ je $\lambda_{(p,q)}(G) \leq (4q - 2)\Delta + 10p + 38q - 23$. Tento odhad byl následně vylepšen Molloyem a Salavatipourem [96], kteří číslo $\lambda_{(p,q)}(G)$ planárního grafu G shora odhadli následovně.

Věta 3.130 [96]. *Nechť p a q jsou přirozená čísla a nechť G je planární graf s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(p,q)}(G) \leq q\lceil \frac{5}{3}\Delta \rceil + 18p + 77q - 18$.*

V případě $p = 2$ a $q = 1$ z Heuvelova a McGuinnessova vztahu [52] vyplývá, že pro planární grafy s maximálním stupněm $\Delta \geq 7$ je Griggsova a Yehova hypotéza 3.29 (tj., že $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \Delta^2$) splněna. Bella a spol. [11] pak určili horní odhady čísla $\lambda_{(2,1)}$ pro planární grafy G maximálního stupně $\Delta = 4, 5, 6$.

Věta 3.131 [11]. *Nechť G je planární graf s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 16$ v případě, že $\Delta(G) = 4$, $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 25$ v případě, že $\Delta(G) = 5$ a $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 32$ v případě, že $\Delta(G) = 6$.*

Všechny tyto případy tedy opět splňují Griggsovu a Yehovu hypotézu 3.29. Problém $L(p, q)$ -ohodnocení planárních grafů byl rovněž studován v závislosti na obvodu $g(G)$. Příkladem je věta z článku [115].

Věta 3.132 [115]. *Nechť p, q jsou libovolná dvě přirozená čísla a necht' G je planární graf s maximálním stupněm Δ a obvodem g . Potom platí:*

- pokud $g \geq 7$, je $\lambda(p, q)(G) \leq (2q - 1)\Delta + 4p + 4q - 4$;
- pokud $g \geq 6$, je $\lambda(p, q)(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 12q - 9$;
- pokud $g \geq 5$, je $\lambda(p, q)(G) \leq (2q - 1)\Delta + 6p + 24q - 15$.

Protože $\Delta + 8 \leq \Delta^2$ pro $\Delta \geq 4$, $\Delta + 15 \leq \Delta^2$ pro $\Delta \geq 5$ a $\Delta + 21 \leq \Delta^2$ pro $\Delta \geq 6$, je Griggsova a Yehova hypotéza 3.29 pro planární grafy splněna pro $g \geq 7$ a $\Delta \geq 4$ nebo pro $g = 6$ a $\Delta \geq 5$ nebo pro $g = 5$ a $\Delta \geq 6$ – viz [18]. Výše uvedené odhady lze dále vylepšovat pro větší a větší hodnoty Δ .

Článek [114] se zabývá $L(p, q)$ -ohodnocením planárních grafů, jež neobsahují žádné kružnice délky 4.

Věta 3.133 [114]. *Nechť p a q jsou dvě přirozená čísla a necht' G je planární graf s maximálním stupněm Δ neobsahující kružnici délky 4. Pak $\lambda_{(p,q)}(G) \leq \min\{(8q - 4)\Delta + 8p - 6q - 1, (2q - 1)\Delta + 10p + 84q - 47\}$ pro každé $p, q \geq 1$.*

Pro naše dva konkrétní případy tedy dostáváme: $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \min\{4\Delta + 9, \Delta + 57\}$ a $\lambda_{(1,1)}(G) \leq \min\{4\Delta + 1, \Delta + 47\}$. Z toho vyplývá, že Griggsova a Yehova hypotéza 3.29 je splněna pro planární grafy neobsahující kružnice délky 4 za předpokladu, že Δ takového grafu je aspoň 9. Pro stejný typ grafu je splněna i Wegnerova hypotéza 3.21 týkající se $\lambda_{(1,1)}$, a to za předpokladu, že $\Delta \geq 96$.

Jedním z mála článků zabývajícím se obecným $L(p, q)$ -ohodnocením vnějškově rovinných grafů je článek [120].

Věta 3.134 [120]. *Nechť $p \geq q$ jsou dvě přirozená čísla a necht' graf G je vnějškově rovinný graf s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(p,q)}(G) \leq (2q - 1)\Delta + 2(2p - 1)$.*

Dosadíme-li do předchozího vztahu za p čísla 2 nebo 1 a za q číslo 1, nedostaneme tak dobré odhady jako při studiu těchto konkrétních případů v předchozích podkapitolách. Je tedy otázkou, jak je hranice $(2q - 1)\Delta + 2(2p - 1)$ skutečně vzdálená od přesné hodnoty.

O $L(p, 1)$ -ohodnocení r -té mocniny cesty na n vrcholech hovoří věta dokázaná autory článku [57].

Věta 3.135 [57]. *Nechť $r \geq 2$ a P_n^r značí r -tou mocninu cesty na n vrcholech. Pak $\lambda_{(1,1)}(P_n^r) = \min\{n - 1, 2r\}$. Jestliže $p \geq 2$, je*

$$\lambda_{(p,1)}(P_n^r) = \begin{cases} (n - 1)p, & \text{pokud } n \leq r + 1; \\ rp + 1, & \text{pokud } r + 2 \leq n \leq 2r + 2; \\ rp + 2, & \text{pokud } n \geq 2r + 3. \end{cases}$$

Zhou [121] představil poměrně komplikovaný vztah pro horní hranici rozpětí $\lambda_{(p,q)}(Q_n)$.

Věta 3.136 [121]. *Nechť $p \geq q$ a n jsou tři přirozená čísla. Dále nechť $s = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$, $t = \min\{2^s - n - 1, s\}$ a Q_n značí n -dimenzionální hyperkrychli. Pak $\lambda_{(p,q)}(Q_n) \leq 2^s \cdot \max\{q, \lceil \frac{p}{2} \rceil\} + 2^{s-t} \cdot \min\{p - q, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor\} - p$.*

Pokud je v předcházející větě $2q \geq p$, je $\lambda_{(p,q)}(Q_n) \leq 2^s q + 2^{s-t}(p - q) - p$, z čehož dostáváme, že $\lambda_{(2,1)}(Q_n) \leq 2^s + 2^{s-t} - 2$.

V předchozí kapitole jsme slíbili obecný vztah $\lambda_{(p,q)}$ pro kartézský produkt úplných grafů. O tom hovoří tyto dvě věty.

Věta 3.137 [35]. *Nechť $p \geq q$ a $2 \leq n < m$ jsou čtyři přirozená čísla a $K_n \square K_m$ značí kartézský produkt dvou úplných grafů na n a m vrcholech. Pak*

- $\lambda_{(p,q)}(K_n \square K_m) = (m - 1)p + (n - 1)q$, pokud $\frac{p}{q} > n$,
- $\lambda_{(p,q)}(K_n \square K_m) = (mn - 1)q$, pokud $\frac{p}{q} \leq n$.

Věta 3.138 [35]. *Nechť $p \geq q$ a $n \geq 2$ jsou tři přirozená čísla a $K_n^2 = K_n \square K_n$ značí kartézský produkt dvou úplných grafů na n vrcholech. Pak*

- $\lambda_{(p,q)}(K_n^2) = (n - 1)p + (2n - 2)q$, pokud $\frac{p}{q} > n - 1$,
- $\lambda_{(p,q)}(K_n^2) = (n^2 - 1)q$, pokud $\frac{p}{q} \leq n - 1$.

Georges a Mauro [34] představili výsledky pro $\lambda_{(p,q)}(K_n^3)$, kde $K_n^3 = K_n \square K_n \square K_n$ je kartézský produkt tří úplných grafů na n vrcholech. Výsledek je uváděn v závislosti na paritě n a poměru $\frac{p}{q}$. Níže si představíme výsledek pro kartézský součin k úplných grafů na n vrcholech.

Věta 3.139 [54]. *Nechť $p \geq q \geq 1$ a $2 \leq k \leq h$, kde h je minimální prvočinitel čísla $n \geq 2$. Pak*

$$\lambda_{(p,q)}(K_n^k) \begin{cases} = (n^2 - 1)q, & \text{pokud } \frac{p}{q} \leq n - k + 1; \\ \leq (n - 1)(p + kq), & \text{pokud } \frac{p}{q} > n - k + 1; \\ = (n - 1)(p + kq), & \text{pokud } \frac{p}{q} \geq kn - 2k + 2. \end{cases}$$

Věta 3.140 [54]. *Nechť $p \geq q \geq 1$ a nechť h je minimální prvočinitel čísla $n \geq 2$. Pak $\lambda_{(p,q)}(K_n^{h+1}) = (n^2 - 1)q$, kdykoliv je $\frac{p}{q} \leq \frac{n}{h}$.*

Erwin a kolektiv [27] pak tento výsledek ještě více zobecnili, když našli rozpětí $\lambda_{(2,1)}(K_{n_1} \square K_{n_2} \square \cdots \square K_{n_s})$ pro $s \geq 3$ a nesoudělná čísla n_1, n_2, \dots, n_s . Shrnující pohled na $L(p, q)$ -ohodnocení Hammingových grafů nabízí například článek [54].

Článek [65] pak představuje dvě věty o kartézském a tenzorovém součinu kružnic při $L(p, 1)$ -ohodnocení.

Věta 3.141 [65]. *Nechť $p \geq 1$, $k \geq 1$ jsou dvě přirozená čísla a m_0, m_1, \dots, m_{k-1} je k čísel, z nichž všechna jsou násobkem čísla $2k + 2p - 1$. Dále nechť $C_{m_0} \square \cdots \square C_{m_{k-1}}$ značí kartézský součin k kružnic. Pak $\lambda_{(p,1)}(C_{m_0} \square \cdots \square C_{m_{k-1}}) \leq 2k + 2p - 2$. Rovnost nastává, jestliže $1 \leq p \leq 2k$.*

Věta 3.142 [65]. *Nechť $p \geq 1$, $k \geq 2$ jsou dvě přirozená čísla a m_0, m_1, \dots, m_{k-1} je k čísel, z nichž všechna jsou násobkem čísla $2^k + 2p - 1$. Dále nechť $C_{m_0} \times \cdots \times C_{m_{k-1}}$ značí tenzorový součin k kružnic. Pak $\lambda_{(p,1)}(C_{m_0} \times \cdots \times C_{m_{k-1}}) \leq 2^k + 2p - 2$. Rovnost nastává, jestliže $1 \leq p \leq 2^k$.*

Wang a Wang [117] zobecnili předchozí výsledek o $L(1, 1)$ -ohodnocení K_4 -bezminorních grafů (viz věta 3.27), a to tím, že dokázali tuto větu.

Věta 3.143 [117]. *Nechť $p + q \geq 3$ a graf G je K_4 -bezminorní s maximálním stupněm Δ . Pak $\lambda_{(p,q)}(G) \leq 2(2p - 1) + (2q - 1) \lfloor \frac{3}{2} \Delta \rfloor$.*

Můžeme se ptát, zda je tato horní hranice optimální (dosažitelná), jako tomu bylo v případě $\lambda_{(1,1)}$. Autoři článku [84] dokazují, že tomu tak není. Ukazují totiž, že pro každé $p \geq q \geq 1$ existuje Δ_0 takové, že každý K_4 -bezminorní graf G s maximálním stupněm $\Delta \geq \Delta_0$ má rozpětí $\lambda_{(p,q)}(G) \leq q \frac{3}{2} \Delta$ a tuto hranici nelze dále snižovat.

Chang a spol. [57] zobecnili známé výsledky pro $p = 2$ v případě chordálních grafů maximálního stupně Δ .

Věta 3.144 [57]. *Nechť G je chordální graf maximálního stupně Δ . Pak $\lambda_{(p,1)}(G) \leq \frac{1}{4}(2p + \Delta - 1)^2$. Pokud graf G je navíc silně chordální, je $\lambda_{(p,1)}(G) \leq \Delta + (2p - 2)(\chi(G) - 1)$.*

Autoři dále ukázali, že $\lambda_{(p,1)}(G) \leq p\Delta$, pokud chordální graf G neobsahuje n -slunce, kde $n \geq 3$ je liché, jako indukovaný podgraf.

Několik málo výsledků je známo i o permutačních grafech. Bodlaender a spol. [13] představili aproximační algoritmus pro $L(p, 1)$ -ohodnocení ($p = 0, 1, 2$) permutačních grafů. Tento algoritmus garantuje následující horní odhady.

Věta 3.145 [13]. *Nechť G je permutační graf s maximálním stupněm Δ . Pak*

- $\lambda_{(0,1)}(G) \leq 2\Delta - 2$,
- $\lambda_{(1,1)}(G) \leq 3\Delta - 2$,
- $\lambda_{(2,1)}(G) \leq 5\Delta - 2$.

V článku [99] vylepšují horní odhad pro $L(2, 1)$ -ohodnocení permutačních grafů s maximálním stupněm Δ , totiž: $\lambda_{(2,1)}(G) \leq \max\{4\Delta - 2, 5\Delta - 8\}$. Pro obecné $L(p, q)$ -ohodnocení permutačních bipartitních grafů našel Araki [8] polynomiální algoritmus využívající biklikovost $bc(G)$, který garantuje horní hranici nejvýše $(2p-1)+q(bc(G)-2)$. A protože $\lambda_{(p,q)}(G) \geq p + q(bc(G) - 2)$ pro každý bipartitní graf, dostáváme tuto větu.

Věta 3.146 [8]. *Nechť $p \geq q$ jsou dvě přirozená čísla, nechť G je permutační bipartitní graf a nechť $bc(G)$ značí jeho biklikovost. Pak $p + q(bc(G) - 2) \leq \lambda_{(p,q)}(G) \leq (2p - 1) + q(bc(G) - 2)$.*

V tento okamžik se zaměříme na grafy s průměrem 2, tj. na grafy, kde každé dva vrcholy jsou ve vzdálenosti nejvýše dva (a existuje dvojice vrcholů, jež je právě ve vzdálenosti 2). Intuitivně je jasné, že rozpětí $\lambda_{(1,1)}$ těchto grafů je $n - 1$ (stejnou hodnotu použít nemůžeme). Griggs a Yeh [43] ale ukázali, že v případě $L(2, 1)$ -ohodnocení se už jedná o NP -těžký problém. Jak již bylo řečeno, dále ukázali, že grafy průměru 2 splňují hypotézu 3.29 – viz věta 3.31 – a rovnost nastává pro grafy s $\Delta(G) = 2, 3, 7$ (a případně 57) a $\Delta^2 + 1$ vrcholy. Nyní se přesuneme k obecnějšímu $L(p, 1)$ -ohodnocení.

Věta 3.147 [79]. *Nechť $p \geq 2$ je přirozené číslo a nechť G je graf o průměru 2 s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$ a počtem vrcholů $n \leq \Delta^2 - 1$. Pak $\lambda_{(p,1)}(G) \leq \Delta^2 + (p - 2)\Delta - 1$.*

Tato věta postihuje téměř všechny případy grafů s průměrem 2. Protože graf G je průměru 2, může mít tento graf nejvýše $\Delta^2 + 1$ vrcholů. S jednou jedinou výjimkou, kterou je kružnice C_4 , neexistuje žádný jiný graf G průměru 2 s maximálním stupněm Δ a Δ^2 vrcholy – [26]. Zbývá tedy prozkoumat již výše zmíněné regulární grafy s $\Delta = 2, 3, 7$. Hypotetický graf s $\Delta = 57$ nebudeme uvažovat. Kružnici na pěti vrcholech jsme již probírali (viz věta 3.119, [31]), připomeňme, že $\lambda_{(p,1)}(C_5) = 2p$. Griggs a Yeh [43] našli rozpětí $\lambda_{(2,1)}$ Petersenova grafu P , pro $p \geq 3$ výsledek zobecnila Kohl [79]. Souhrnný výsledek nabízí nadcházející věta.

Věta 3.148 [43, 79]. *Nechť $p \geq 2$ je přirozené číslo a nechť P značí Petersenův graf. Pak*

$$\lambda_{(p,1)}(P) = \begin{cases} 9, & \text{pokud } p = 2; \\ 3 + 2p, & \text{pokud } p \geq 3. \end{cases}$$

Kohl [79] našla odhad $L(p, 1)$ -ohodnocení pro Hoffman-Singletonův graf (HS), totiž: $\max\{49, 3p\} \leq \lambda_{(p,1)}(HS) \leq 19 + 3p$ pro $p \geq 10$. Jestliže $p \leq 10$, je $\lambda_{(p,1)}(HS) = 49$, což je optimální hodnota (počet vrcholů je $n = 50$ a graf je průměru 2). Dostáváme tedy tuto větu.

Věta 3.149 [79]. *Nechť p je přirozené číslo a HS značí Hoffman-Singletonův graf. Pak $\lambda_{(p,1)}(HS) = 49$ pro $1 \leq p \leq 10$ a $\max\{49, 3p\} \leq \lambda_{(p,1)}(HS) \leq 19 + 3p$ pro $p \geq 10$.*

Nechť je dán graf G a funkce h z $E(G)$ do \mathbb{N} , které budeme říkat h -podrozdělení grafu G . Graf $G_{(h)}$ vznikne z grafu G tak, že každá hrana uv v G je nahrazena cestou délky $h(uv)$. Pokud $h(e) = c$ je konstantní pro všechny hrany $e \in E(G)$, graf budeme značit

$G_{(c)}$. V této části textu je čerpáno především ze článku [55], který byl publikován v roce 2021 a v němž je shrnuta řada výsledků dosažených v předchozích letech a zabývajících se $L(p, q)$ -ohodnocením podrozdělení grafů.

Whittlesey, Georges a Mauro [119] studovali $L(2, 1)$ -ohodnocení incidenčního grafu G , což je graf G' , který vznikne z G nahrazením každé hrany cestou délky 2. Příslušné $L(2, 1)$ -ohodnocení incidenčního grafu G je ekvivalentní totálnímu $L^T(2, 1)$ -ohodnocení grafu G , kdy ohodnocujeme nejen všechny vrcholy v G , ale rovněž i všechny hrany v G , a to dle následujících pravidel: každým dvěma sousedním vrcholům je přiřazena různá hodnota, různá hodnota je přiřazena i dvěma hranám přilehlým ke stejnému vrcholu, a konečně rozdíl hodnot je v absolutní hodnotě aspoň 2 pro každý vrchol a jeho incidenční hranu. Toto totální $L^T(2, 1)$ -ohodnocení bylo uvedeno Havetem a Yuem v roce 2002 [50] a následně zobecněno pro totální $L^T(p, 1)$ -ohodnocení. V obecném případě hovoříme o totálním $L^T(p, q)$ -ohodnocení s totálním ohodnocovacím číslem $\lambda_{(p,q)}^T$. V [51] oba autoři dále dokázali následující větu.

Věta 3.150 [51]. *Nechť G je graf. Pro každé přirozené číslo p je $\Delta(G) + p - 1 \leq \lambda_{(p,1)}^T(G) \leq 2\Delta(G) + p - 1$.*

Ve stejném článku pak uvedli hypotézu, že pro každé přirozené číslo p a libovolný graf G , je $\lambda_{(p,1)}^T(G) \leq \Delta(G) + 2p - 1$, kterou následně dokázali pro $\Delta(G) \leq 3$.

Vraťme se k problému nastolenému před větou 3.150 a poznamenejme, že pro libovolný graf G platí $\lambda_{(2,1)}(G_{(1)}) = \lambda_{(2,1)}(G)$ a $\lambda_{(2,1)}(G_{(2)}) = \lambda_{(2,1)}^T(G) -$ viz [55]. Následující větu dokázal v roce 2013 Lů [92].

Věta 3.151 [92]. *Nechť G je graf. Pro každé přirozené číslo $c \geq 4$ platí $\lambda_{(2,1)}(G_{(c)}) \leq \Delta(G) + 2$.*

Lů dále rovněž ukázal, že $\lambda_{(2,1)}(G_{(3)}) \leq \Delta(G) + 4$. Lů a Lin [93] se pak zabývali $L(p, 1)$ verzí tohoto problému a ukázali, že $\lambda_{(p,1)}(G_{(3)}) \leq \Delta(G) + 2p - 1$ pro každý graf G s $\Delta(G) \geq 3$, z čehož odvodili, že $\lambda_{(2,1)}(G_{(3)}) \leq \Delta(G) + 3$ pro libovolný graf G . Na Lůa a Lina pak v roce 2015 navázali Karst a kolektiv [72].

Věta 3.152 [72]. *Nechť G je graf s $\Delta(G) \geq 3$. Pak pro každé přirozené číslo p je $\lambda_{(p,1)}(G_{(3)}) \leq p + \lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil + \max\{\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \rceil, p\} - 1$.*

Z této věty jako bonus odvodili vztah $\lambda_{(2,1)}(G_{(3)}) = \Delta(G) + 1$ pro každé $\Delta(G) \geq 4$ sudé a potvrdili Lůovu hypotézu z [92]:

Věta 3.153 [72]. *Nechť G je graf. Pak $\lambda_{(2,1)}(G_3) \leq \Delta(G) + 2$.*

Chang a spol. [56] výsledek z minulého odstavce upřesnili a dokázali jej pro všechna $\Delta(G) \geq 4$. K tomu přidali další zobecnění.

Věta 3.154 [56]. *Nechť G je graf s $\Delta(G) \geq 4$ a $c = 3$. Pak $\lambda_{(2,1)}(G_{(3)}) = \Delta(G) + 1$.*

Věta 3.155 [56]. *Nechť G je graf. Pak $\lambda_{(2,1)}(G_{(h)}) = \Delta(G) + 1$, pokud $\Delta(G) \geq 5$ a h je funkce z $E(G)$ do \mathbb{N} taková, že $h(e) \geq 3$ pro všechny hrany $e \in E(G)$, nebo pokud $\Delta(G) \geq 4$ a h je funkce z $E(G)$ do \mathbb{N} taková, že $h(e) \geq 4$ pro všechny hrany $e \in E(G)$.*

Právě na článek od Changa a kolektivu [56] navazuje citovaný článek [55], když rozšiřuje výsledky, jež byly dosaženy. Konkrétně se článek zabývá $L(p, q)$ -ohodnocením podrozdělení grafů.

Věta 3.156 [55]. *Nechť G je graf a nechtě jsou dána dvě přirozená čísla p, q , pro něž $p \geq 2q$. Pak $\lambda_{(p,q)}(G_{(3)}) = p + (\Delta(G) - 1)q$, kde $\Delta(G) > 2\lceil \frac{p}{q} \rceil$.*

Věta 3.157 [55]. *Nechť G je graf a nechtě jsou dána dvě přirozená čísla p, q , pro něž $p \geq 2q$. Pak $\lambda_{(p,q)}(G_{(h)}) = p + (\Delta(G) - 1)q$, kde $\Delta(G) \geq 3\lceil \frac{p}{q} \rceil$ a kde h je funkce z $E(G)$ do \mathbb{N} taková, že $h(e) \geq 3$ pro všechny hrany $e \in E(G)$.*

Odstavec zakončíme hypotézou z článku [55].

Hypotéza 3.158 [55]. *Nechť $p \geq 2q$ jsou dvě přirozená čísla. Pak $\lambda_{(p,q)}(G_{(3)}) = p + (\Delta(G) - 1)q$, kde $\Delta(G) \geq 2\lceil \frac{p}{q} \rceil$ a h je funkce z $E(G)$ do \mathbb{N} taková, že $h(e) \geq 3$ pro všechny hrany $e \in E(G)$.*

4 $L(p, q, r)$ -ohodnocení grafů

Vyjdeme-li z definice 3.1 a přidáme-li podmínku na vrcholy ve vzdálenosti 3, dostaneme definici $L(p, q, r)$ -ohodnocení. Tato definice byla převzata z [61] a upravena pro $L(p, q, r)$ -ohodnocení.

Definice 4.1 [61]. Necht' G je graf. Potom $L(p, q, r)$ -ohodnocením grafu G rozumíme funkci $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ takovou, že pro každou dvojici $u, v \in V(G)$ platí:

- je-li $uv \in E(G)$, pak $|f(u) - f(v)| \geq p$,
- je-li $\text{dist}_G(u, v) = 2$, pak $|f(u) - f(v)| \geq q$,
- je-li $\text{dist}_G(u, v) = 3$, pak $|f(u) - f(v)| \geq r$.

Obdobně jako při $L(p, q)$ -ohodnocení budeme i zde hovořit o minimálním rozpětí – tentokrát jej budeme značit $\lambda_{(p,q,r)}(G)$. Opět jej budeme nazývat ohodnocovacím číslem a opět budeme předpokládat, že nejmenší použitou hodnotou je 0 a největší je $\lambda_{(p,q,r)}(G)$. Využijeme i obdobu tvrzení 3.2 – tentokrát se bude tvrzení týkat $\lambda_{(3,2,1)}(G)$, které lze zobecnit pro obecné $\lambda_{(p,q,r)}(G)$.

Tvrzení 4.2 [61]. Necht' H je podgraf grafu G . Potom $\lambda_{(3,2,1)}(H) \leq \lambda_{(3,2,1)}(G)$.

4.1 Vybrané známé výsledky pro $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení grafů

Určitý přehled o $L(p, q, r)$ -ohodnocení (s důrazem na $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení) nabízí bakalářská práce [80]. Na tomto místě tak uvedeme jen několik již dosažených výsledků, které následně využijeme v podkapitole 4.2 o vlastním výzkumu, v němž jsme se zabývali $L(3, 2, 1)$ -ohodnocením cirkulantů. Nejprve si představíme dosažené výsledky u cesty, kružnice a úplného grafu.

Věta 4.3 [22]. Necht' $n \in \mathbb{N}$ a P_n značí cestu na n vrcholech. Potom

$$\lambda_{(3,2,1)}(P_n) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } n = 1; \\ 3, & \text{pokud } n = 2; \\ 5, & \text{pokud } n = 3, 4; \\ 6, & \text{pokud } n = 5, 6, 7; \\ 7, & \text{pokud } n \geq 8. \end{cases}$$

Věta 4.4 [22]. Necht' $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a C_n značí kružnici na n vrcholech. Potom

$$\lambda_{(3,2,1)}(C_n) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } n = 3; \\ 7, & \text{pokud } n \text{ je sudé}; \\ 8, & \text{pokud } n \text{ je liché a pokud } n \neq 3, 7; \\ 9, & \text{pokud } n = 7. \end{cases}$$

Věta 4.5 [22]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a K_n značí úplný graf na n vrcholech. Potom $\lambda_{(3,2,1)}(K_n) = 3(n-1)$.*

Závěrečné poznatky se budou týkat $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení kartézského produktu cesty na dvou vrcholech a cesty, resp. kružnice na n vrcholech.

Věta 4.6 [61]. *Nechť $n \geq 2$ a nechť $P_2 \square P_n$ značí kartézský produkt dvou cest P_2 a P_n . Potom*

$$\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square P_n) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } n = 2; \\ 8, & \text{pokud } n = 3, 4; \\ 9, & \text{pokud } n \geq 5. \end{cases}$$

Věta 4.7 [61]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a nechť $P_2 \square C_n$ značí kartézský produkt cesty na 2 vrcholech a kružnice na n vrcholech. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square C_n) = 9$ tehdy a jen tehdy, je-li $n \equiv 0 \pmod{10}$.*

Věta 4.8 [61]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a nechť $P_2 \square C_n$ značí kartézský produkt cesty na 2 vrcholech a kružnice na n vrcholech. Pokud n je sudé, $n \not\equiv 0 \pmod{10}$ a $n \neq 6$, pak $\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square C_n) = 10$.*

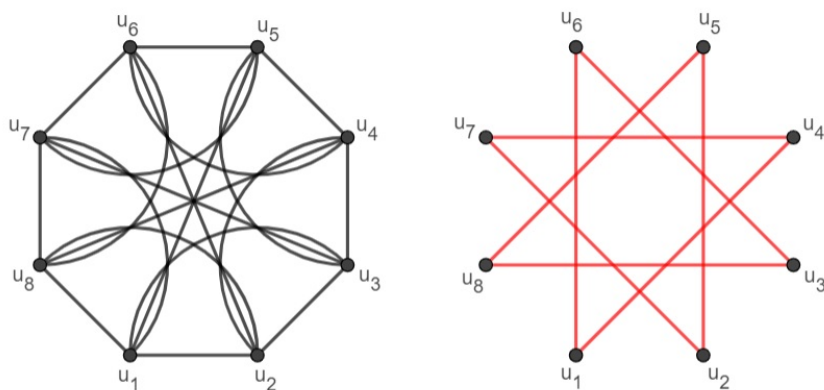
Věta 4.9 [61]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a nechť $P_2 \square C_n$ značí kartézský produkt cesty na 2 vrcholech a kružnice na n vrcholech. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(P_2 \square C_n) \leq 11$, pokud $n \equiv 1 \pmod{4}$ a $n \geq 21$, nebo $n \equiv 3 \pmod{4}$ a $n \geq 11$.*

4.2 $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení cirkulantů

Cirkulanty jsme si již v úvodu nadefinovali. Pro naše potřeby ale využijeme jinou definici cirkulantů.

Definice 4.10. *Nechť je dána množina $S \subset [n-1]$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, taková, že pokud $x \in S$, pak i $(n-x) \in S$. Potom souvislý graf $G = (V(G), E(G))$, kde $V(G) = \{1, \dots, n\}$ a $E(G) = \{uv; |v-u| \in S\}$, nazveme cirkulantem daným množinou S a budeme jej značit $C_n(S)$.*

V dalším textu budeme již předpokládat, že $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Pokud $1 \in S$ (a tedy i $n-1 \in S$), vrcholy u_1, u_2, \dots, u_n , u_1 tvoří kružnici, které budeme říkat vnější kružnice. Například, pro $n = 8$, $S = \{1, 2, 4, 6, 7\}$ znamená, že vrchol u_i je hranou spojen s vrcholem u_{i+1} , u_{i+2} , u_{i+4} , u_{i+6} a u_{i+7} , vždy bráno $(\text{mod } n)$. Jinými slovy, každý vrchol vnější kružnice je spojen s vrcholy ve vzdálenosti 2 a 4 (vzdálenost bereme jako vzdálenost na kružnici). Tento příklad ilustruje obrázek 11 vlevo, na obrázku vpravo je znázorněn komplement tohoto grafu. Očíslování vrcholů, které je na obrázku znázorněno, budeme dodržovat v celém textu. Rovněž v celém textu budeme hrany znázorňovat černou barvou a nehrany v případě komplementu budou znázorněny červeně.



Obrázek 11: Hustý cirkulant $C_8([7] \setminus \{3, 5\})$ na 8 vrcholech (vlevo) a jeho komplement.

4.2.1 Husté cirkulanty

Máme tedy dán cirkulant na n vrcholech, velikost množiny hran S pak říká, kolik vrcholů bude spojeno s každým z vrcholů příslušného grafu. Zřejmě $|S| \leq n - 1$, rovnost nastává v případě úplného grafu.

Mezi husté grafy budeme považovat ty, kde $|S|$ je $n - 2$ nebo $n - 3$. První případ nastává, pokud každý vrchol grafu není spojen s právě jedním dalším vrcholem, z důvodu symetrie to k danému vrcholu u_i musí být vrchol $u_i + \frac{n}{2} \pmod{n}$. Poznamenejme, že pro $S = [n - 1] \setminus \{\frac{n}{2}\}$ musí být n sudé. Takto vzniklý cirkulant budeme značit $C_n([n - 1] \setminus \{\frac{n}{2}\})$. Předpoklad $|S| = n - 3$ znamená, že $S = [n - 1] \setminus \{a, n - a\}$ pro námi zvolené $a \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} - 1 \rceil\}$ – takto vzniklý cirkulant budeme značit $C_n([n - 1] \setminus \{a, n - a\})$.

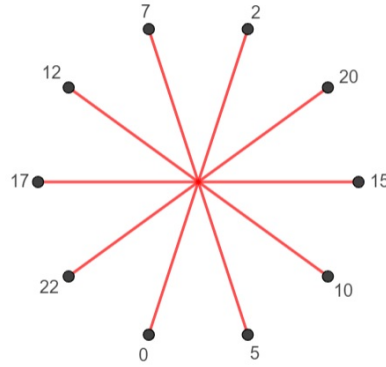
Na obrázku 11 vlevo vidíme cirkulant na osmi vrcholech s $|S| = n - 3$, kde $a = 3$ (tzn., že nejsou spojeny jen vrcholy ve vzdálenosti 3). Graf vpravo je jeho komplement. S rostoucím n se graf se zakreslenými hranami stává nepřehledným, a tak v této části budeme pracovat především s komplementy takovýchto grafů, jejichž hrany budou výhradně znázorněny červenou barvou.

Tvrzení 4.11. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n([n - 1] \setminus \{\frac{n}{2}\})$, kde n je sudé číslo větší než 2. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 5\frac{n}{2} - 3$.*

Důkaz. Ohodnotíme vrchol u_i , kde $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$, hodnotou $5i - 5$. Následně ohodnotíme vrcholy u_i , kde $i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n$, hodnotou $5(i - \frac{n}{2}) - 3$. Největší použitou hodnotou pak bude hodnota $5\frac{n}{2} - 3$, kterou bude ohodnocen vrchol u_n , a tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 5\frac{n}{2} - 3$.

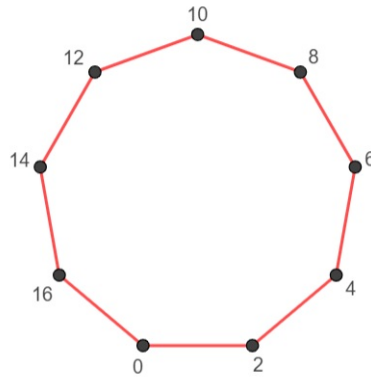
Ohodnotíme-li vrchol u_i hodnotou s , pak nelze ohodnotit žádný vrchol hodnotou $s + 1$, ani $s - 1$, protože $\text{diam}(G) = 2$. Hodnotu $s + 2$ lze pak použít jen pro vrchol $u_{i + \frac{n}{2} \pmod{n}}$. V grafu G pak ale neexistuje dosud neohodnocený vrchol v takový, že není sousední s vrcholem $u_{i + \frac{n}{2} \pmod{n}}$. Nejmenší větší hodnotou, kterou tak můžeme použít, je pak hodnota $s + 5$. Proto nejmenší rozsah hodnot dostaneme při použití hodnot $0 - 2 - 5 - 7 - 10 - \dots - (5\frac{n}{2} - 3)$. A jelikož jsme takovéto ohodnocení grafu G našli, pak už nutně dostáváme $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 5\frac{n}{2} - 3$. \square

Následující tvrzení uvažuje cirkulant s $a = 1$ a $n \geq 5$. Kdyby $3 \leq n \leq 4$, nebyl by graf souvislý.



Obrázek 12: Komplement cirkulantu $C_{10}([9] \setminus \{5\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 22$.

Tvrzení 4.12. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n([n-1] \setminus \{1, n-1\})$, kde $n \geq 5$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2(n-1)$.*



Obrázek 13: Komplement cirkulantu $C_9([8] \setminus \{1, 8\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 16$.

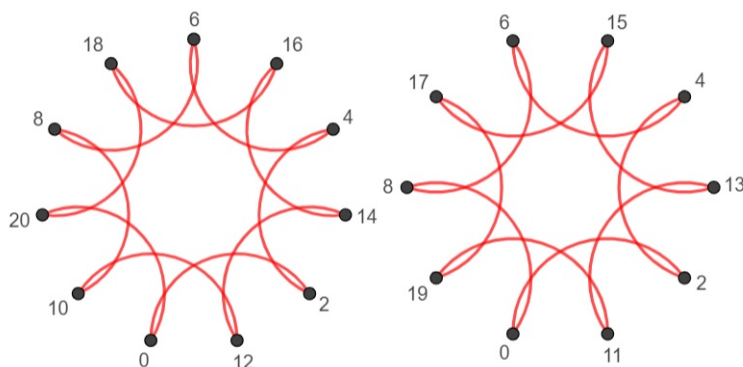
Důkaz. Vrcholy $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ ohodnotíme postupně hodnotami $0, 2, 4, \dots, 2(n-1)$, podobně jako tomu je na obrázku 13 pro $n = 9$. Předpokládejme nyní, že graf G lze ohodnotit hodnotami v rozsahu $0 \div (2n-3)$. To ale znamená, že buď musíme nějakou hodnotu zopakovat nebo musíme použít nějakou hodnotu s a zároveň hodnotu $s+1$. Jelikož ale průměr grafu je 2, nemůžeme dva vrcholy ohodnotit stejnými, ani o jedna lišícími se hodnotami, dostáváme tedy spor. A proto $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2(n-1)$. \square

Následující dvě tvrzení pracují s parametrem $a = 2$. V prvním případě uvažujeme n liché a větší než 3 (pokud $n = 3$, graf by nebyl souvislý), ve druhém případě uvažujeme n sudé (tedy $n \geq 4$).

Tvrzení 4.13. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n([n-1] \setminus \{2, n-2\})$, kde n je liché číslo větší než 3. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2(n-1)$.*

Důkaz. Cirkulant G obsahuje právě jednu nekružnici $u_1, u_3, \dots, u_n, u_2, u_4, \dots, u_{n-1}$. Ohodnoťme postupně vrcholy této nekružnice hodnotami $0, 2, 4, \dots, 2(n-1)$. Toto ohodnocení je přípustné, protože vrcholy, jež byly ohodnoceny hodnotami s a $s+2$, jsou ve vzdálenosti

2. Na obrázku 14 vlevo je znázorněn komplement grafu G , kde $n = 11$, s rozsahem hodnot $0 \div 20$. Abychom graf ohodnotili s menším rozsahem hodnot, pak bychom nějakou dvojici vrcholů museli ohodnotit stejnými hodnotami nebo hodnotami lišícími se o jedna. Jelikož je ale $\text{diam}(G) = 2$, žádnou takovou dvojici vrcholů nenajdeme. A proto $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2(n - 1)$. \square



Obrázek 14: Komplement cirkulantu $C_{11}([10] \setminus \{2, 9\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 20$ a komplement cirkulantu $C_{10}([9] \setminus \{2, 8\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 19$.

Tvrzení 4.14. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n([n - 1] \setminus \{2, n - 2\})$, kde n je sudé číslo větší než 2. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n - 1$.*

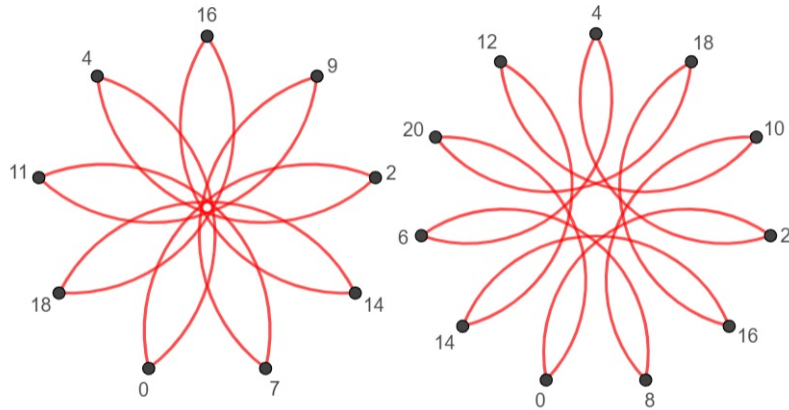
Důkaz. Graf G obsahuje dvě nekružnice: jednu na vrcholech u_1, u_3, \dots, u_{n-1} a druhou na vrcholech u_2, u_4, \dots, u_n . Ohodnotíme postupně vrcholy jedné nekružnice hodnotami $0, 2, \dots, n - 2$ a následně ohodnotíme vrcholy druhé nekružnice hodnotami $n + 1, n + 3, \dots, 2n - 1$. Toto ohodnocení je přípustné, jelikož vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 2$ jsou vždy ve vzdálenosti 2. Na obrázku 14 vpravo je znázorněn komplement grafu $C_{10}([9] \setminus \{2, 8\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 19$. Průměr grafu je 2, a tedy nelze ohodnotit dva různé vrcholy stejnými hodnotami, ani hodnotami lišícími se o jedna. Abychom tedy graf G ohodnotili s menším rozsahem hodnot, uvažujme ohodnocení grafu G hodnotami $0, 2, \dots, 2(n - 1)$. Jelikož je ale každý vrchol jedné nekružnice sousední s každým vrcholem druhé nekružnice, žádné dva takovéto vrcholy nemůžeme ohodnotit hodnotami s a $s + 2$. A tedy neexistuje ohodnocení grafu G v rozsahu hodnot $0 \div 2(n - 1)$. A proto $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n - 1$. \square

Nyní přejdeme k $a = 3$. Tento případ opět rozdělíme na dvě tvrzení: v prvním bude $n \equiv 0 \pmod{3}$, přičemž $n \geq 6$ (pro $n = 3$ graf s parametrem $a = 3$ neexistuje), ve druhém případě bude $n \not\equiv 0 \pmod{3}$. Vzhledem k tomu, že pro $n = 4$ by byl graf nesouvislý, uvažujme v tomto druhém případě $n \geq 5$.

Tvrzení 4.15. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n([n - 1] \setminus \{3, n - 3\})$, kde $n = 3k$, $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n$.*

Důkaz. Poznamenejme, že pro $n = 6$ se zároveň jedná o graf $C_n([n - 1] \setminus \{\frac{n}{2}\})$ a že oba vztahy pro $\lambda_{(3,2,1)}$ – totiž $2n$ a $5\frac{n}{2} - 3$ – jsou shodné. Důkaz provedeme analogicky jako v důkazu předchozího tvrzení. Graf G obsahuje tři nekružnice. Nejprve hodnotami

$0, 2, \dots, 2(k-1)$ ohodnotíme první nekružnici, druhou nekružnici pak ohodnotíme hodnotami $2k+1, 2k+3, \dots, 4k-1$ a konečně vrcholy třetí nekružnice budou ohodnoceny hodnotami $4k+2, 4k+4, \dots, 6k = 2n$. Toto ohodnocení je přípustné, jelikož vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s+2$ jsou vždy ve vzdálenosti 2. Na obrázku 15 vlevo je znázorněn komplement grafu G , kde $n = 9$, s rozsahem hodnot $0 \div 18$. Průměr grafu je 2, a tedy nelze ohodnotit dva různé vrcholy stejnými hodnotami, ani hodnotami lišícími se o jedna. Jelikož je ale každý vrchol jedné nekružnice sousední s každým vrcholem každé ze zbývajících nekružnic, hodnota příslušná vrcholu na i -té kružnici, musí být vždy aspoň o tři odlišná od hodnoty vrcholu patřícího j -té kružnici ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$). Tedy graf G nelze ohodnotit hodnotami $0 \div (2n-1)$. A proto $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n$. \square



Obrázek 15: Komplement cirkulantu $C_9([8] \setminus \{3, 6\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 18$ a komplement cirkulantu $C_{11}([10] \setminus \{3, 8\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 20$.

Tvrzení 4.16. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n([n-1] \setminus \{3, n-3\})$, kde $n = 3k+1$ nebo $n = 3k+2$ a $n \geq 5$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2(n-1)$.*

Důkaz. Vrcholy grafu G tvoří jednu nekružnici, a tak je postupně ohodnotíme hodnotami $0, 2, \dots, 2(n-1)$. Na obrázku 15 vpravo je zachycen komplement grafu G ohodnocený hodnotami $0 \div 20$. Abychom graf G ohodnotili s menším rozsahem hodnot, museli bychom nějakým dvěma vrcholům grafu přiřadit stejnou hodnotu nebo hodnoty lišící se o jedna. Jelikož ale opět $\text{diam}(G) = 2$, hodnoty příslušné každým dvěma vrcholům se musejí lišit aspoň o dva. A proto $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2(n-1)$. \square

Nyní nastává čas zobecnit předchozí tvrzení.

Věta 4.17. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n([n-1] \setminus \{a, n-a\})$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n+g-3$, kde $g = \gcd(a, n)$.*

Důkaz. Nechť a a n jsou nesoudělná. Pak graf G je tvořen jednou nekružnicí. Ohodnotíme vrcholy této nekružnice postupně hodnotami $0, 2, \dots, 2(n-1)$. Toto ohodnocení vrcholů je přípustné, protože vrcholy, jež byly ohodnoceny hodnotami s a $s+2$, jsou ve vzdálenosti 2. Abychom graf G ohodnotili s menším rozsahem hodnot, museli bychom nějakou dvojici vrcholů ohodnotit stejnými hodnotami nebo hodnotami lišícími se o jedna. Jelikož je ale

$\text{diam}(G) = 2$, žádnou takovou dvojici nenajdeme. A proto $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2(n-1)$. Protože jsme uvažovali a a n nesoudělná, je $g = \gcd(a, n) = 1$, a věta tedy platí.

Nechť a a n jsou soudělná s největším společným dělitelem g . Pak graf G je tvořen právě g nekružnicemi. Ohodnotíme vrcholy první nekružnice hodnotami $0, 2, \dots, 2\frac{n}{g} - 2$, druhé nekružnice hodnotami $2\frac{n}{g} + 1, 2\frac{n}{g} + 3, \dots, 4\frac{n}{g} - 1$ atd. až vrcholy g -té nekružnice ohodnotíme hodnotami $2(g-1)\frac{n}{g} + g - 1, 2(g-1)\frac{n}{g} + g + 1, \dots, 2n + g - 3$. Průměr grafu G je 2, a tedy nelze ohodnotit dva různé vrcholy stejnými hodnotami, ani hodnotami lišícími se o jedna. Jelikož je ale každý vrchol jedné nekružnice sousední s každým vrcholem každé ze zbývajících nekružnic, hodnota příslušná vrcholu na i -té kružnici, musí být vždy aspoň o tři odlišná od hodnoty vrcholu patřícího j -té kružnici ($i, j = 1, 2, \dots, g$). Tedy graf G nelze ohodnotit s menším rozdílem hodnot než $2n + g - 3$. \square

Tato věta je zobecněním předchozích tvrzení, které jsou jejími speciálními případy. Pokud $a = 2$ a n je liché číslo větší než 3, je $g = 1$ a cirkulant G obsahuje právě jednu nekružnici. Dle předchozí věty je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n - 2 = 2(n-1)$, což je v souladu s tvrzením 4.13. Pokud n je sudé číslo větší než 4, je $g = 2$ a cirkulant G obsahuje právě dvě nekružnice. Dle předchozí věty je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n - 1$, což je v souladu s tvrzením 4.14. Obdobně pro $a = 3$ – pokud je $n = 3k$, kde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, je $g = 3$ a G obsahuje tři nekružnice. Dle vztahu z poslední věty je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n$, což odpovídá tvrzení 4.15. Pokud pro $k \in \mathbb{N}$ a $n \geq 5$, je $n = 3k + 1$ nebo $n = 3k + 2$, je $g = 1$ a G obsahuje jednu nekružnici. Dle vztahu z poslední věty je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 2n - 2 = 2(n-1)$, což odpovídá tvrzení 4.16. Tvrzení samozřejmě platí i pro $a = 1$.

4.2.2 Řídké cirkulanty

Pokud $|S| = 2$, je grafem kružnice na n vrcholech (nemusí jít nutně o kružnici s hranami $u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_nu_1$, díky souvislosti cirkulantu ale skutečně vznikne právě jedna kružnice), a tedy rozsah hodnot tohoto grafu je určen dle věty 4.4. Mezi řídké cirkulanty budeme řadit ty, pro něž $|S| = 3$ nebo $|S| = 4$. V souladu s definicí 4.10 budeme řídké cirkulanty označovat $C_n(S)$ – pro $|S| = 3$ dostáváme $C_n(\{a, \frac{n}{2}, n-a\})$, kde n je nutně sudé a $1 \leq a < \frac{n}{2}$; pro $|S| = 4$ dostáváme $C_n(\{a, b, n-b, n-a\})$, kde $a \in \{1, 2, \dots, \lceil \frac{n}{2} - 2 \rceil\}$, $b \in \{2, 3, \dots, \lceil \frac{n}{2} - 1 \rceil\}$ a $a < b$. V našem textu budeme pracovat s parametry $a = 1$ a $b = 2$. Začneme s $|S| = 3$ a úvodními příklady.

Tvrzení 4.18. *Nechť je dán cirkulant $G = C_4(\{1, 2, 3\})$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 9$.*

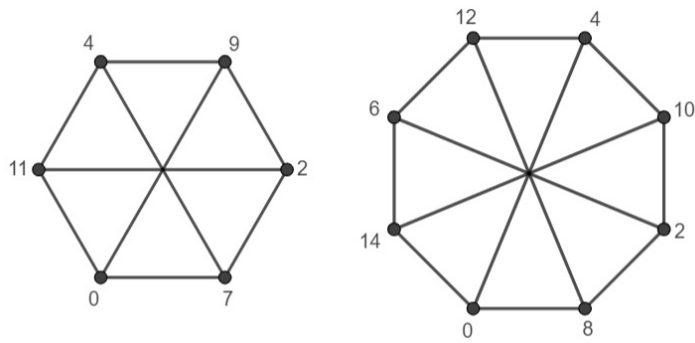
Důkaz. Platí, že $G \cong K_4$, a proto dle věty 4.5 je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 9$. \square

Tvrzení 4.19. *Nechť je dán cirkulant $G = C_6(\{1, 3, 5\})$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 11$.*

Důkaz. Vrcholy grafu G označme postupně symboly u_1, \dots, u_6 a v tomto pořadí je ohodnotíme hodnotami $0, 7, 2, 9, 4, 11$, jak je zachyceno na obrázku 16 vlevo. Jedná se rovněž o hustý cirkulant s parametrem $a = 2$. Jde tak o speciální případ tvrzení 4.14 pro $n = 6$. Odtud plyne, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 11$. \square

Tvrzení 4.20. *Nechť je dán cirkulant $G = C_8(\{1, 4, 7\})$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 14$.*

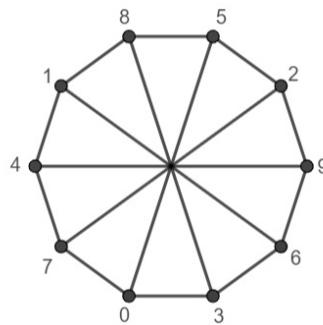
Důkaz. Vrcholy grafu G označíme postupně symboly u_1, \dots, u_8 a v tomto pořadí je ohodnotíme hodnotami $0, 8, 2, 10, 4, 12, 6, 14$, jak je zachyceno na obrázku 16 vpravo. Jde



Obrázek 16: Vlevo cirkulant $G = C_6(\{1, 3, 5\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 11$, vpravo cirkulant $G = C_8(\{1, 4, 7\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 14$.

o přípustné ohodnocení grafu G , protože hodnoty lišící se o 2 jsou vždy ve vzdálenosti 2. Vzhledem k tomu, že $\text{diam}(G) = 2$, nelze na ohodnocení dvou různých vrcholů použít dvě po sobě jdoucí hodnoty s a $s + 1$. Z toho již vyplývá, že graf G nelze ohodnotit s menším rozsahem hodnot než 14. \square

Tvrzení 4.21. *Nechť je dán cirkulant $G = C_{10}(\{1, 5, 9\})$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 9$.*



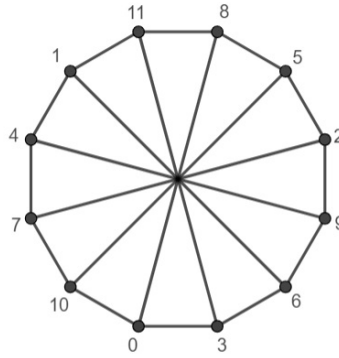
Obrázek 17: Cirkulant $G = C_{10}(\{1, 5, 9\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 9$.

Důkaz. Vrcholy grafu G označíme postupně symboly u_1, \dots, u_{10} a v tomto pořadí je ohodnotíme hodnotami 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, jak je zachyceno na obrázku 17. Jde o přípustné ohodnocení grafu G , protože hodnoty lišící se o 1 jsou vždy ve vzdálenosti 3 a hodnoty lišící se o 2 jsou vždy ve vzdálenosti 2. Vzhledem k tomu, že $\text{diam}(G) = 3$, nelze na ohodnocení dvou různých vrcholů použít stejné hodnoty. Z toho již vyplývá, že graf G nelze ohodnotit s menším rozsahem hodnot než 9. \square

Předtím, než se dostaneme k určitým zobecněním, se ještě podíváme na dva konkrétní případy, totiž na cirkulanty $G = C_{12}(\{1, 6, 11\})$ a $G' = C_{14}(\{1, 7, 13\})$.

Tvrzení 4.22. *Nechť je dán cirkulant $G = C_{12}(\{1, 6, 11\})$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 11$.*

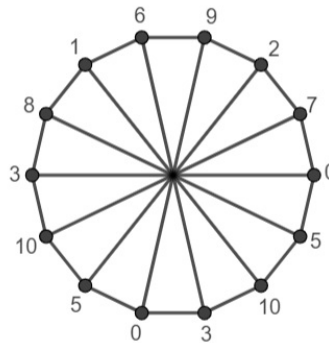
Důkaz. Vrcholy grafu G označíme postupně symboly u_1, \dots, u_{12} a v tomto pořadí je ohodnotíme hodnotami 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 11, 1, 4, 7, 10, jak je zachyceno na obrázku 18. Jde o přípustné ohodnocení grafu G , protože hodnoty lišící se o 1 jsou vždy ve vzdálenosti 3



Obrázek 18: Cirkulant $G = C_{12}(\{1, 6, 11\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 11$.

a hodnoty lišící se o 2 jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 2. Vzhledem k tomu, že $\text{diam}(G) = 3$, nelze na ohodnocení dvou různých vrcholů použít stejné hodnoty. Z toho již vyplývá, že graf G nelze ohodnotit s menším rozsahem hodnot než 11. \square

Tvrzení 4.23. *Nechť je dán cirkulant $G = C_{14}(\{1, 7, 13\})$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 10$.*



Obrázek 19: Cirkulant $G = C_{14}(\{1, 7, 13\})$ ohodnocený hodnotami $0 \div 10$.

Důkaz. Vrcholy grafu G označíme postupně symboly u_1, \dots, u_{14} a v tomto pořadí je ohodnotíme hodnotami 0, 3, 10, 5, 0, 7, 2, 9, 6, 1, 8, 3, 10, 5, jak je zachyceno na obrázku 19. Hodnoty 0, 3, 5 a 10 jsou použity dvakrát, vždy jsou jimi ohodnoceny vrcholy ve vzdálenosti 4. A jelikož vrcholy ohodnocené po sobě jdoucími hodnotami jsou vždy ve vzdálenosti tři a vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 2$ ($s = 0, \dots, 8$) jsou vždy ve vzdálenosti dva, jedná se o přípustné ohodnocení grafu G .

Ukážeme, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) > 9$. Pokud $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 9$, určitě musíme nějakou hodnotu použít opakovaně. Bez újmy na obecnosti nechť s představuje tuto hodnotu, kterou ohodnotíme vrchol u_1 . Hodnotu s lze dále použít jen na ohodnocení vrcholu u_5 nebo symetricky na ohodnocení vrcholu u_{11} . Pak už žádný další vrchol nelze ohodnotit hodnotou s a hodnotu $s + 1$ nebo $s - 1$ lze použít jen na ohodnocení vrcholu u_{10} , resp. na ohodnocení vrcholu u_6 . Protože jsou obě možnosti symetrické, předpokládejme, že hodnotou s ohodnotíme vrcholy u_1 a u_5 , hodnotou $s + 1$ (resp. $s - 1$) je tak ohodnocen vrchol u_{10} . Hodnotu $s + 1$ (resp. $s - 1$) tedy nemůžeme již znovu použít a nelze použít ani hodnotu $s - 1$ (resp. $s + 1$). Hodnotu $s + 2$ (resp. $s - 2$) pak lze použít jen na ohodnocení vrcholu u_7 nebo

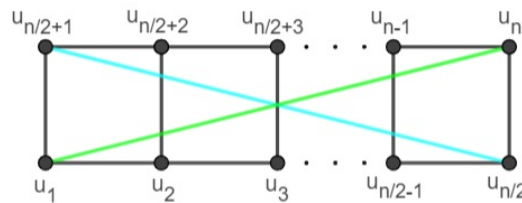
na ohodnocení vrcholu u_{13} . Protože jsou vrcholy u_7 a u_{13} ve vzdálenosti 2, nemůžeme hodnotu $s + 2$ (resp. $s - 2$) použít na ohodnocení obou těchto vrcholů. Z toho tedy vyplývá, že na ohodnocení libovolných pěti vrcholů grafu G nelze použít hodnoty $s, s, s + 1, s + 2$ a $s + 2$.

Abychom graf G ohodnotili s rozsahem hodnot $0 \div 9$, je potřeba nalézt alespoň čtyři dvojice vrcholů, z nichž každá dvojice by byla ohodnocena stejnou hodnotou. Protože nelze využít hodnoty $s, s, s + 1, s + 1$, lze nalézt jen čtyři nebo pět takových dvojic vrcholů. V prvním případě nemůžeme vynechat žádnou hodnotu, přičemž musíme dvakrát použít nějakou hodnotu $s' \neq 0, 9$. To ale znamená, že nemůžeme použít jednu z hodnot $s' - 1$ nebo $s' + 1$, dostáváme tedy spor. Ve druhém případě můžeme vynechat maximálně jednu hodnotu, přičemž musíme použít hodnoty $s, s, s + 2, s + 2, s + 4$ a $s + 4$ (konkrétně $0, 0, 2, 2, 4, 4$ nebo symetricky $5, 5, 7, 7, 9, 9$). Tedy nelze použít hodnoty $s + 1$ a $s + 3$, dostáváme spor. Z toho již vyplývá, že graf G nelze ohodnotit s menším rozsahem hodnot než 10. \square

Nyní si představíme poznámku, jež si všímá důležité podobnosti mezi cirkulanty s $|S| = 3$ a kartézským produktem dvou cest P_2 a P_n , resp. produktem cesty P_2 a kružnice C_n .

Poznámka 4.24. Každý vrchol cirkulantu $G = C_n(\{1, \frac{n}{2}, n - 1\})$, kde n musí být sudé, je sousední s třemi dalšími vrcholy, například vrchol u_1 je sousední s vrcholy u_n, u_2 a $u_{\frac{n}{2}+1}$. Všimněme si, že graf G můžeme znázornit i jiným způsobem, než jsme dosud byli zvyklí. Tento druhý způsob je zachycen na obrázku 20, graf zachycený na tomto obrázku označme G' . Pro oba grafy G i G' samozřejmě platí $\lambda_{(3,2,1)}(G) = \lambda_{(3,2,1)}(G')$. Budeme nadále používat oba dva grafy G i G' , vždy použijeme ten, který lépe ilustruje danou skutečnost.

Pokud by ani zeleně znázorněná hrana spojující vrcholy u_1 a u_n , ani modře znázorněná hrana spojující vrcholy $u_{\frac{n}{2}}$ a $u_{\frac{n}{2}+1}$ neexistovaly, dostali bychom graf $P_2 \square P_n$. Pokud by zelená hrana spojovala namísto vrcholů u_1 a u_n vrcholy u_n a $u_{\frac{n}{2}+1}$ a pokud by modrá hrana spojovala namísto vrcholů $u_{\frac{n}{2}}$ a $u_{\frac{n}{2}+1}$ vrcholy $u_{\frac{n}{2}}$ a u_1 , dostali bychom graf $P_2 \square C_n$.



Obrázek 20: Graf G' je rovněž cirkulant.

Díky této poznámce můžeme nalézt dolní odhad rozpětí každého cirkulantu s $|S| = 3$.

Věta 4.25. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n(\{1, \frac{n}{2}, n - 1\})$, kde $n \geq 4$ je sudé. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 9$.*

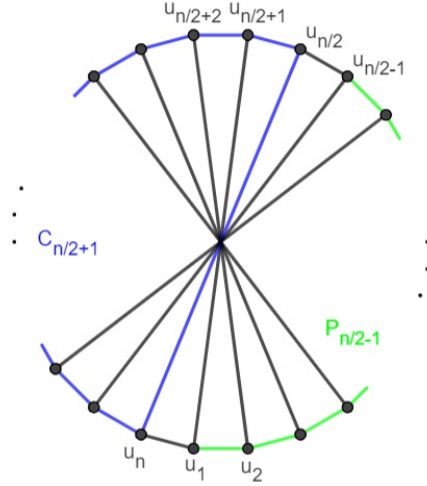
Důkaz. Pro $n = 4, 6, 8, 10, 12$ jsme v tvrzeních 4.18 až 4.22 ověřili, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 9$. Graf $H = P_2 \square P_n$ je podgrafem grafu G' , a tedy i grafu G . Z věty 4.6 vyplývá, že pro $n \geq 5$ je $\lambda_{(3,2,1)}(H) = 9$, a tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 9$. \square

Nyní se podíváme na horní odhad rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}$ u cirkulantů s $|S| = 3$.

Věta 4.26. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n(\{1, \frac{n}{2}, n-1\})$, kde $n \geq 16$ je sudé. Pak*

$$\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq \begin{cases} 17, & \text{pokud } n = 16 \text{ nebo } n = 4k + 2, \text{ kde } k \geq 4, k \in \mathbb{N}; \\ 18, & \text{pokud } n = 4k, \text{ kde } k \geq 5, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Důkaz. Každý takový cirkulant lze rozdělit na cestu o $\frac{n}{2}-1$ vrcholech a kružnici na $\frac{n}{2}+1$ vrcholech, které jsou vzájemně disjunktí. Na obrázku 21 je znázorněn cirkulant $C_n(\{1, \frac{n}{2}, n-1\})$ se zeleně vyznačenou cestou $P_{\frac{n}{2}-1}$ a modře vyznačenou kružnicí $C_{\frac{n}{2}+1}$.



Obrázek 21: Cirkulant $C_n(\{1, \frac{n}{2}, n-1\})$ s vyznačenou cestou $P_{\frac{n}{2}-1}$ (zeleně) a kružnicí $C_{\frac{n}{2}+1}$ (modře).

Pokud $n = 16$, ohodnotíme vrcholy cesty P_7 dle věty 4.3 hodnotami $0 \div 6$ a vrcholy kružnice C_9 dle věty 4.4 hodnotami $9 \div 17$. Pokud $n = 4k+2$, kde $k \geq 4, k \in \mathbb{N}$, ohodnotíme vrcholy cesty $P_{\frac{n}{2}-1}$ (cesta má aspoň 8 vrcholů) dle věty 4.3 hodnotami $0 \div 7$ a vrcholy kružnice $C_{\frac{n}{2}+1}$ (kružnice má sudý počet vrcholů) dle věty 4.4 hodnotami $10 \div 17$. Pokud $n = 4k$, kde $k \geq 5, k \in \mathbb{N}$, ohodnotíme vrcholy cesty $P_{\frac{n}{2}-1}$ (cesta má aspoň 9 vrcholů) dle věty 4.3 hodnotami $0 \div 7$ a vrcholy kružnice $C_{\frac{n}{2}+1}$ (kružnice má lichý počet vrcholů) dle věty 4.4 hodnotami $10 \div 18$.

Ve všech třech případech je hodnota vrcholu na kružnici aspoň o 3 odlišná od libovolného vrcholu na cestě, zbývá tedy ověřit, zda je ohodnocení cesty přípustné (ohodnocení kružnice je přípustné vždy). Ohodnocení cesty je přípustné, pokud je hodnota přiřazená vrcholům u_1 a $u_{\frac{n}{2}-1}$ odlišná, v cirkulantu G se totiž jedná o vrcholy ve vzdálenosti 4. Pokud $n = 16$, ohodnotíme vrcholy cesty u_1, \dots, u_7 postupně hodnotami 2, 5, 0, 3, 6, 1, 4. Protože hodnoty přiřazené vrcholům u_1 a u_7 jsou odlišné, dostáváme přípustné ohodnocení cirkulantu $C_{16}(\{1, 8, 15\})$.

Pokud $n \geq 18$ má cesta $P_{\frac{n}{2}-1}$ aspoň 8 vrcholů. Pokud $\frac{n}{2}-1 \neq 8l+1$ (tedy $n \neq 16l+4$), kde $l \in \mathbb{N}$, ohodnotíme vrchol u_i , kde $i = \{1, \dots, 8\}$, hodnotou $3i-3 \pmod{8}$. A dále pro $j = 9, \dots, \frac{n}{2}-1$ je hodnota $f(u_j) = f(u_i)$, pokud $i \equiv j \pmod{8}$. Při tomto ohodnocení jsou hodnoty přiřazené vrcholům u_1 a $u_{\frac{n}{2}-1}$ odlišné, a tedy dostáváme přípustné ohodnocení cirkulantu $C_n(\{1, \frac{n}{2}, n-1\})$, kde $n \neq 16l+4, l \in \mathbb{N}$. Ohodnocení vrcholů, pokud $n = 16l+4, l \in \mathbb{N}$, musíme trochu upravit, a to tak, že změním (oproti výše popsanému ohodnocení) hodnotu přiřazenou třem vrcholům cesty; konkrétně $f(u_{\frac{n}{2}-3}) = 0$ (namísto

$f(u_{\frac{n}{2}-3}) = 2$), $f(u_{\frac{n}{2}-2}) = 3$ (namísto $f(u_{\frac{n}{2}-2}) = 5$) a $f(u_{\frac{n}{2}-1}) = 6$ (namísto $f(u_{\frac{n}{2}-1}) = 0$). A tedy i v tomto případě dostáváme přípustné ohodnocení cirkulantu $C_n(\{1, \frac{n}{2}, n-1\})$, kde $n = 16l + 4, l \in \mathbb{N}$. \square

Využijeme-li ale ohodnocení cirkulantů z motivačních tvrzení 4.18 až 4.23, zjistíme, že tento horní odhad lze u některých speciálních případů snadno vylepšit.

Poznámka 4.27. V důkazu následující věty a v dalším textu budeme pracovat s pojmem *vzor*, resp. *kopírování vzoru*. Nechť je dán graf $C_n(S)$. Vzorem budeme rozumět konečnou posloupnost m hodnot h_1, \dots, h_m příslušnou vrcholům u_1, \dots, u_m . Kopírováním tohoto vzoru budeme rozumět ohodnocení vrcholu u_{i+km} hodnotou h_i , kde $i = 1, \dots, m$ a $k = 0, \dots$, přičemž $\max\{i + km\} = n$.

Věta 4.28. *Nechť je dán cirkulant $G' = C_n(\{1, \frac{n}{2}, n-1\})$, kde $n \geq 4$ je sudé. Pak*

$$\lambda_{(3,2,1)}(G') \leq \begin{cases} 14, & \text{pokud } n = 8k, k \in \mathbb{N}; \\ 11, & \text{pokud } n = (2k-1)6 \text{ nebo } n = (2k-1)12; \\ 10, & \text{pokud } n = (2k-1)14, k \in \mathbb{N}; \\ 9, & \text{pokud } n = (2k-1)10, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Důkaz. Vyjdeme z ohodnocení cirkulantů $G_1 = C_6(\{1, 3, 5\})$, $G_2 = C_8(\{1, 4, 7\})$, $G_3 = C_{10}(\{1, 5, 9\})$, $G_4 = C_{12}(\{1, 6, 11\})$ a $G_5 = C_{14}(\{1, 7, 13\})$. Pokud tento vzor v každém z pěti případů nakopírujeme za sebe $(2k-1)$ -krát, kde k je liché číslo, dostaneme přípustné ohodnocení příslušného cirkulantu G'_i ($i = 1, \dots, 5$). Níže jsou pro dané cirkulanty uvedeny hodnoty příslušné vrcholům těchto cirkulantů, tučně je zvýrazněn onen vzor.

$$G'_1: \dots 9 \quad 4 \quad 11 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{9} \quad 4 \quad 11 \quad 0 \quad 7 \quad 2 \quad \dots$$

$$G'_2: \dots 12 \quad 6 \quad 14 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{8} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{10} \quad 4 \quad \mathbf{12} \quad 6 \quad \mathbf{14} \quad 0 \quad 8 \quad 2 \quad \dots$$

$$G'_3: \dots 1 \quad 4 \quad 7 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{9} \quad 2 \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{8} \quad 1 \quad 4 \quad \mathbf{7} \quad 0 \quad 3 \quad 6 \quad \dots$$

$$G'_4: \dots 4 \quad 7 \quad 10 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{9} \quad 2 \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{8} \quad 11 \quad 1 \quad 4 \quad \mathbf{7} \quad 10 \quad 0 \quad 3 \quad 6 \quad \dots$$

$$G'_5: \dots 3 \quad 10 \quad 5 \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{10} \quad \mathbf{5} \quad 0 \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{9} \quad 6 \quad 1 \quad \mathbf{8} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{10} \quad 5 \quad 0 \quad 3 \quad 10 \dots$$

Formálněji důkaz provedeme pro cirkulant G'_3 . Vrchol u_i je hranou mj. spojen s vrcholem $u_{i+\frac{n}{2}}$ (bráno (mod n), této hraně budeme říkat *úhlopříčná hrana*, resp. budeme hovořit o *úhlopříčném* spojení vrcholů). Vrchol ohodnocený hodnotou 0 je tak rovněž sousední s vrcholem ohodnoceným hodnotou 5 a naopak. Dále jsou úhlopříčně spojeny vrcholy ohodnocené hodnotami 3 a 8, 1 a 6, 4 a 9 a také vrcholy 2 a 7. Vrcholy ohodnocené stejnými hodnotami jsou ve vzdálenosti aspoň 6 (a tedy i 4), vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s+1$ jsou ve vzdálenosti aspoň 3 a vrcholy ohodnocené hodnotami lišícími se o 2 jsou ve vzdálenosti aspoň 2. V grafu G'_3 tak hodnoty přiřazené vrcholům ve vzdálenosti t , kde $t = 1, 2, 3$, jsou tak stejné jako hodnoty přiřazené vrcholům ve vzdálenosti t , kde $t = 1, 2, 3$, v grafu $C_{10}(\{1, 5, 9\})$. Ukázali jsme, že v případě cirkulantu G'_3 , je námi popsané ohodnocení přípustné – obdobně lze provést i pro ostatní cirkulanty G'_1 , G'_2 , G'_4 a G'_5 .

Zbývá ukázat, že $\lambda_{(3,2,1)}(G') \leq 14$, pokud $n = 8k$, kde k je sudé (tedy $n = 16l$). Zde vzor ohodnocení vypadá takto: nejprve za sebe $2l$ -krát nakopírujeme vzor $0, 8, 2, 10$, za něj pak $2l$ -krát nakopírujeme vzor $4, 12, 6, 14$. Vrcholy ohodnocené stejnými hodnotami jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 4 a vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 2$ jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 2. I zde jsme dostali přípustné ohodnocení příslušného cirkulantu. \square

Důsledek 4.29. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n(\{1, \frac{n}{2}, n-1\})$, kde $n = (2k-1)10$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 9$.*

Důkaz. Vyplývá přímo z vět 4.25 a 4.28. \square

A nyní už přejdeme k cirkulantům s $|S| = 4$.

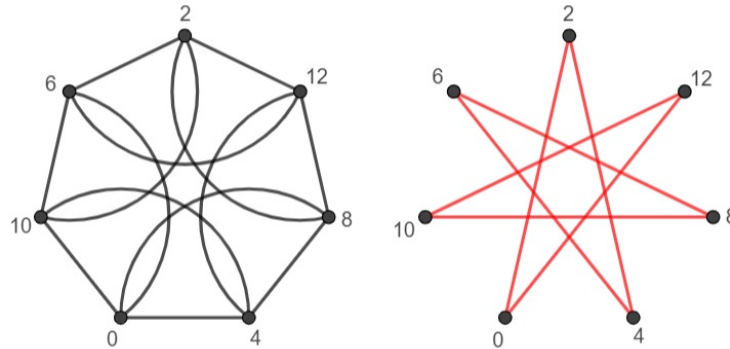
Tvrzení 4.30. *Nechť je dán cirkulant $G = C_5(1, 2, 3, 4)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$.*

Důkaz. Platí, že $G \cong K_5$, a proto dle věty 4.5 je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$. \square

Tvrzení 4.31. *Nechť je dán cirkulant $G = C_6(1, 2, 4, 5)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$.*

Důkaz. Platí, že $G \cong C_6([5] \setminus \{3\})$, a proto dle tvrzení 4.11 je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$. \square

Tvrzení 4.32. *Nechť je dán cirkulant $G = C_7(1, 2, 5, 6)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$.*



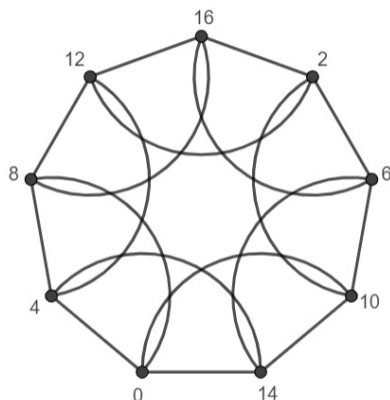
Obrázek 22: Vlevo cirkulant $G = C_7(1, 2, 5, 6)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 12$, vpravo pak jeho komplement.

Důkaz. Graf G je znázorněn na obrázku 22 vlevo (vpravo je pak jeho komplement). Platí, že $G \cong C_7([6] \setminus \{3, 4\})$, a proto dle tvrzení 4.16 je $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$. \square

Tvrzení 4.33. *Nechť je dán cirkulant $G = C_8(1, 2, 6, 7)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 14$.*

Důkaz. Vrcholy grafu G označíme postupně symboly u_1, \dots, u_8 a v tomto pořadí je ohodnotíme hodnotami $0, 4, 8, 12, 2, 6, 10, 14$. Dostaneme přípustné ohodnocení grafu G , a protože $\text{diam}(G) = 2$, nemůžeme ohodnotit dva různé vrcholy grafu G stejnými hodnotami nebo hodnotami lišícími se o 1, a tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 14$. \square

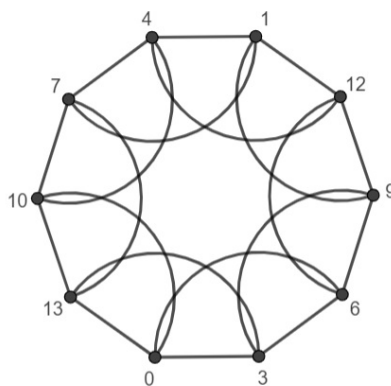
Tvrzení 4.34. *Nechť je dán cirkulant $G = C_9(1, 2, 7, 8)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 16$.*



Obrázek 23: Cirkulant $G = C_9(1, 2, 7, 8)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 16$.

Důkaz. Důkaz provedeme analogicky jako u předchozího tvrzení. Vrcholy grafu G označíme postupně symboly u_1, \dots, u_9 a v tomto uvedeném pořadí je postupně ohodnotíme hodnotami $0, 14, 10, 6, 2, 16, 12, 8, 4$, čímž dostaneme přípustné ohodnocení grafu G . Graf s tímto ohodnocením je zachycen na obrázku 23. Protože $\text{diam}(G) = 2$, nemůžeme ohodnotit dva různé vrcholy grafu G stejnými hodnotami nebo hodnotami lišícími se o 1, a tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 16$. \square

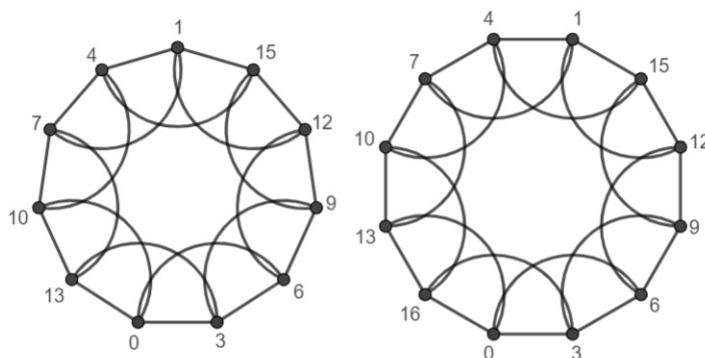
Tvrzení 4.35. *Nechť je dán cirkulant $G = C_{10}(1, 2, 8, 9)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 13$.*



Obrázek 24: Cirkulant $G = C_{10}(1, 2, 8, 9)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 13$.

Důkaz. Ohodnotíme-li vrcholy u_1, \dots, u_{10} postupně hodnotami $0, 3, 6, 9, 12, 1, 4, 7, 10, 13$, dostaneme přípustné ohodnocení grafu G , protože vrcholy s přiřazenými hodnotami lišícími se o 1 jsou ve vzdálenosti 3, vrcholy s přiřazenými hodnotami lišícími se o 2 jsou ve vzdálenosti 2 a sousední vrcholy mají přiřazeny hodnoty lišící se aspoň o 3. Graf s tímto ohodnocením je zachycen na obrázku 24. Abychom graf G ohodnotili s menším rozsahem hodnot, museli bychom nějakou hodnotu použít vícekrát nebo bychom museli použít tři po sobě jdoucí hodnoty $s, s + 1$ a $s + 2$. Průměr grafu je 3, a tedy stejné hodnoty použít nemůžeme. Navíc v grafu G existuje právě pět dvojic vrcholů, jež mohou být ohodnoceny hodnotami s rozdílem 1 (jsou to vrcholy u_1 a u_6 , u_2 a u_7 , u_3 a u_8 , u_4 a u_9 , u_5 a u_{10}), ale žádná taková trojice vrcholů, a tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 13$. \square

Toto schéma důkazu použijeme i v následujících dvou tvrzeních týkající se cirkulantů $C_{11}(1, 2, 9, 10)$ a $C_{12}(1, 2, 10, 11)$: v žádném z těchto grafů nelze ohodnotit dva vrcholy stejnými hodnotami a neexistuje trojice vrcholů taková, že bychom ji mohli ohodnotit třemi po sobě jdoucími hodnotami. Vrcholy tedy ohodnotíme hodnotami $0, 1, 3, 4, 6, 7, \dots$ dle počtu vrcholů. Dostaneme tedy následující dvě tvrzení. Příslušný obrázek 25 pak dokazuje, že ohodnocení těchto grafů výše uvedenými hodnotami, skutečně existuje.



Obrázek 25: Cirkulant $G = C_{11}(1, 2, 9, 10)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 15$ a cirkulant $G = C_{12}(1, 2, 10, 11)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 16$.

Tvrzení 4.36. *Nechť je dán cirkulant $G = C_{11}(1, 2, 9, 10)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 15$.*

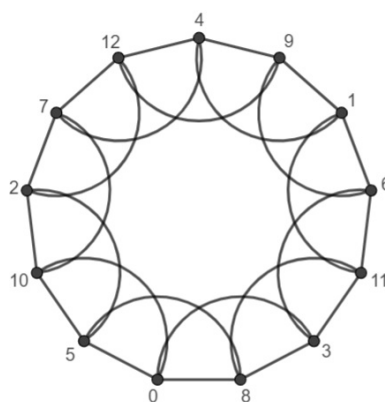
Důkaz. Tvrzení bylo dokázáno v předchozím komentáři. □

Tvrzení 4.37. *Nechť je dán cirkulant $G = C_{12}(1, 2, 10, 11)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 16$.*

Důkaz. Tvrzení bylo dokázáno v předchozím komentáři. □

Než přejdeme k patřičným zobecněním, podíváme na poslední motivující tvrzení, které se nám bude později hodit.

Tvrzení 4.38. *Nechť je dán cirkulant $G = C_{13}(1, 2, 11, 12)$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$.*



Obrázek 26: Cirkulant $G = C_{13}(1, 2, 11, 12)$ ohodnocený hodnotami $0 \div 12$.

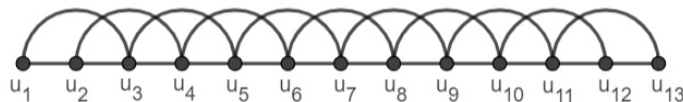
Důkaz. Obrázek 26 znázorňuje graf G ohodnocený hodnotami $0, 1, \dots, 12$. Toto ohodnocení vrcholů je přípustné, protože vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 1$ jsou vždy ve vzdálenosti 3, vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 2$ jsou vždy ve vzdálenosti 2 a sousední vrcholy jsou ohodnoceny hodnotami lišícími se aspoň o 3. Abychom graf G ohodnotili s menším rozsahem hodnot, musíme dva vrcholy ohodnotit stejnou hodnotou. Jelikož je ale průměr grafu G roven 3, toto ohodnocení dvou různých vrcholů neexistuje. A tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$. \square

Nyní následuje stěžejní část – věta o dolním odhadu čísla $\lambda_{(3,2,1)}$ cirkulantu $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$.

Věta 4.39. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n \geq 5$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 12$.*

Důkaz. Z předchozích tvrzení 4.30 až 4.38 vyplývá, že věta platí pro $5 \leq n \leq 13$. Pro spor předpokládejme, že existuje cirkulant G s vnější kružnicí C a nějakým ohodnocením vrcholů pomocí hodnot $0 \div 11$. Takový cirkulant musí mít nutně aspoň 14 vrcholů. Vzhledem k tomu, že máme k dispozici maximálně 12 hodnot ($0 \div 11$), musí se aspoň jedna hodnota zopakovat. V grafu G nalezneme dva vrcholy x a y ohodnocené stejnou hodnotou s minimalizující $\text{dist}_C(x, y)$. Platí, že $7 \leq \text{dist}_C(x, y) \leq 12$. Menší než 7 být z definice $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení nemůže a pro $\text{dist}_C(x, y) > 12$, bychom dostali spor s minimalitou. Položme $m = \text{dist}_C(x, y) + 1$.

Označme vrcholy u_1, \dots, u_n grafu G postupně, jako jsme byli dosud zvyklí (proti směru hodinových ručiček) tak, že vrchol x odpovídá vrcholu u_1 . Pokud by $y \neq u_m$, prohodíme označení vrcholů x a y a znovu přeznačíme vrcholy u_1, \dots, u_n tak, že $u_1 = x$. Může nastat 6 možností, a to $y = u_m$, kde $m = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. Uvažujme graf G_m jako podgraf grafu G indukovaný množinou vrcholů u_1, \dots, u_m . Nejprve ukážeme, že graf G_m , jehož vrcholy u_1 a u_m jsou ohodnoceny stejnou hodnotou s ($s \in \{0, 1, \dots, 11\}$), nelze pro $m = 9, \dots, 13$ ohodnotit s rozsahem hodnot $0 \div 11$. Na obrázku 27 je zachycen graf G_{13} s vyznačenými vrcholy u_1, \dots, u_{13} .



Obrázek 27: Graf G_{13} s vrcholy u_1, \dots, u_{13} .

Nechť je dán graf G_{13} a necht' jsou vrcholy u_1 a u_{13} ohodnoceny hodnotou s . Každý z 11 dosud neohodnocených vrcholů u_2, \dots, u_{12} musí být ohodnocen jinou hodnotou (stejnou hodnotu t k ohodnocení dvou vrcholů nemůžeme použít, jinak bychom dostali spor s minimalitou výběru vrcholů x a y), musíme použít každou hodnotu. Jen vrcholy u_6, u_7 a u_8 mohou být ohodnoceny hodnotou $s + 1$. Za předpokladu, že s nabývá jedné z hodnot $0, \dots, 9$, ohodnotíme-li jakýkoliv z těchto tří vrcholů hodnotou $s + 1$, nelze ohodnotit žádný vrchol grafu G_{13} hodnotou $s + 2$, protože neexistuje žádný vrchol v G_{13} , jež by byl ve vzdálenosti aspoň tři od vrcholu ohodnoceného hodnotou $s + 1$ a zároveň byl ve vzdálenosti aspoň dva od obou vrcholů u_1 a u_{13} . V případě, že $s = 10$ nebo $s = 11$ stejnou argumentací nebudeme moci zároveň použít obě hodnoty $s - 1$ a $s - 2$. A tedy

graf G_{13} nelze za předpokladu, že jsou vrcholy u_1 a u_{13} ohodnoceny stejnou hodnotou, ohodnotit v rozsahu $0 \div 11$.

Nechť je dán graf G_{12} a nechť jsou vrcholy u_1 a u_{12} ohodnoceny hodnotou s . Z 11 hodnot ($0 \div 11$ kromě s), které můžeme použít pro ohodnocení deseti dosud neohodnocených vrcholů u_2, \dots, u_{11} , musíme vynechat právě jednu hodnotu. Hodnotu $s + 1$, resp. $s - 1$ nyní můžeme přiřadit jen vrcholům u_6 a u_7 , a tedy z hodnot $s + 1$ a $s - 1$ musíme použít právě jednu hodnotu. Předpokládejme, že s nabývá jedné z hodnot $2, \dots, 9$. Ohodnotíme-li ale jeden z vrcholů u_6 nebo u_7 hodnotou $s + 1$ (nebo $s - 1$), nebudeme nyní moci použít hodnotu $s + 2$ (nebo $s - 2$), protože v grafu G_{12} neexistuje vrchol, který by byl ve vzdálenosti aspoň 3 od vrcholu ohodnoceného hodnotou $s + 1$ (nebo $s - 1$) a zároveň by byl ve vzdálenosti aspoň 2 od obou vrcholů u_1 a u_{12} . To znamená, že musíme vynechat dvě hodnoty, a tedy dostáváme spor. Nechť tedy $s = 0$ nebo $s = 1$ (a analogicky $s = 11$ nebo $s = 10$). Zřejmě jednu z hodnot $0, 1, 2$ (a analogicky $9, 10, 11$) nemůžeme použít. Nechť je dále vrchol u_4 ohodnocen hodnotou t , kde $t \in \{2, \dots, 11\}$ a $t \neq s + 1$ (analogicky $t = \{0, \dots, 9\}$ a $t \neq s - 1$). Hodnotou $t + 1$ nebo $t - 1$ (obě zároveň použít nemůžeme) mohou být ohodnoceny pouze vrcholy u_{10} a u_{11} . Hodnotu $t + 2$ nebo $t - 2$ však opět nemůžeme použít (neexistuje žádný vrchol, jež by byl ve vzdálenosti aspoň 2 od vrcholu u_4 a aspoň ve vzdálenosti 3 od vrcholu ohodnoceného hodnotou $t + 1$ nebo $t - 1$), a dostáváme tedy spor s počtem nepoužitých hodnot. Proto graf G_{12} nelze za předpokladu, že jsou vrcholy u_1 a u_{12} ohodnoceny stejnou hodnotou, ohodnotit v rozsahu $0 \div 11$.

Nechť je dán graf G_{11} a nechť jsou vrcholy u_1 a u_{11} ohodnoceny hodnotou s . Z 11 hodnot ($0 \div 11$ kromě s), které můžeme použít pro ohodnocení devíti dosud neohodnocených vrcholů u_2, \dots, u_{10} , musíme vynechat právě dvě hodnoty. To znamená, že v grafu G_{11} existují aspoň čtyři vrcholy ohodnocené po sobě jdoucími hodnotami z rozsahu $0 \div 11$. V grafu G_{11} ale existuje právě jedna taková čtveřice vrcholů (konkrétně jde o vrcholy u_2, u_5, u_7 a u_{10}), jež může být ohodnocena čtyřmi po sobě jdoucími hodnotami, a neexistuje žádná pětice vrcholů, kterou bychom mohli ohodnotit pěti po sobě jdoucími hodnotami. Abychom ohodnotili graf G_{11} s rozsahem hodnot $0 \div 11$, musí kromě zmíněné čtveřice vrcholů ohodnocených po sobě jdoucími hodnotami existovat i dvě takové trojice vrcholů T_1 a T_2 (trojice $T_i, i = 1, 2$, musí obsahovat vrcholy ohodnocené třemi po sobě jdoucími hodnotami). Musí tedy platit, že vrchol $u_1 \in T_1$ (nebo T_2). Pak hodnotu $s + 1$ (resp. $s - 1$) musíme přiřadit vrcholu u_6 . Pak ale žádnému vrcholu nemůžeme přiřadit hodnotu $s + 2$, (resp. $s - 2$) ani $s - 1$, (resp. $s + 1$). A tedy graf G_{11} nelze za předpokladu, že jsou vrcholy u_1 a u_{11} ohodnoceny stejnou hodnotou, ohodnotit v rozsahu $0 \div 11$.

Nechť je dán graf G_{10} a nechť jsou vrcholy u_1 a u_{10} ohodnoceny hodnotou s . Z 12 hodnot musíme vynechat právě tři hodnoty. V G_{10} neexistuje žádná trojice vrcholů, kterou bychom mohli ohodnotit třemi po sobě jdoucími hodnotami. To znamená, že z dvanácti hodnot $0 \div 11$, nelze pro ohodnocení grafu G_{10} použít aspoň čtyři hodnoty. A tedy graf G_{10} nelze za předpokladu, že jsou vrcholy u_1 a u_{10} ohodnoceny stejnou hodnotou, ohodnotit v rozsahu $0 \div 11$.

Nechť je dán graf G_9 a nechť jsou vrcholy u_1 a u_9 ohodnoceny hodnotou s . Z 11 hodnot ($0 \div 11$ kromě s), které můžeme použít pro ohodnocení sedmi dosud neohodnocených vrcholů u_2, \dots, u_8 , musíme vynechat právě čtyři hodnoty. V G_9 neexistuje žádná trojice vrcholů, kterou bychom mohli ohodnotit třemi po sobě jdoucími hodnotami. Ohodnotíme-li vrchol u_k , kde $k = \{4, 5, 6\}$ hodnotou t ($t = 1, \dots, 10$), nelze použít hodnoty $t - 1$ ani $t + 1$ k ohodnocení žádného dalšího vrcholu. Pokud $t = 0$, nemůžeme použít hodnotu 1, a pokud

$t = 11$, nemůžeme použít hodnotu 10. Dále víme, že hodnoty přiřazené vrcholům u_4, u_5 a u_6 se musejí po dvou lišit vždy alespoň o 3. Kdyby aspoň dva z těchto vrcholů u_4, u_5, u_6 byly ohodnoceny nějakou hodnotou 1 až 10, nemohli bychom k ohodnocení dalších vrcholů použít aspoň 5 hodnot, čímž bychom dostali spor. Nechť tedy dva z vrcholů u_4, u_5, u_6 jsou ohodnoceny hodnotami 0 a 11 a zbývající třetí vrchol je ohodnocen hodnotou p , kde $p = 3, \dots, 8$. Z toho ale vyplývá, že na ohodnocení neohodnocených vrcholů u_2, u_3, u_7 a u_8 máme k dispozici hodnoty $2, \dots, 9$ kromě tří po sobě jdoucích hodnot $p - 1, p$ a $p + 1$. Ať už p nabývá jakékoliv z možných hodnot, museli bychom na ohodnocení tří vrcholů použít tři po sobě jdoucí hodnoty, což je ale spor. A tedy graf G_9 nelze za předpokladu, že jsou vrcholy u_1 a u_9 ohodnoceny stejnou hodnotou, ohodnotit v rozsahu $0 \div 11$.

Víme, že pro $m = \{9, \dots, 13\}$ nelze graf G_m (s vrcholy u_1 a u_m ohodnocenými stejnou hodnotou s) ohodnotit pomocí hodnot $0 \div 11$. Nyní budeme uvažovat graf G_8 . Nechť jsou jeho vrcholy u_1 a u_8 ohodnoceny hodnotou s . Nechť dále existuje nějaké jeho $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení pomocí hodnot $0 \div 11$ (jedno takové je zachyceno na obrázku 28). Z 11 hodnot ($0 \div 11$ kromě s), které můžeme použít pro ohodnocení šesti dosud neohodnocených vrcholů u_2, \dots, u_7 , musíme vynechat právě pět hodnot. Mezi vrcholy u_2, \dots, u_7 existuje pouze jedna dvojice vrcholů (u_2 a u_7) taková, jež může být ohodnocena po sobě jdoucími hodnotami, žádný vrchol nelze ohodnotit hodnotou $s + 1$, ani $s - 1$. To znamená, že abychom graf G_8 ohodnotili s rozsahem hodnot $0 \div 11$, musíme vrcholy u_2 a u_7 ohodnotit pomocí hodnot t a $t + 1$ (pokud bychom dvě po sobě jdoucí hodnoty nepoužili, nesměli bychom použít aspoň šest hodnot, což by byl spor). Abychom graf G_8 ohodnotili v rozsahu $0 \div 11$, z každé dvojice hodnot $i, i + 1$ ($i = 0, \dots, 10$) musíme vždy použít aspoň jednu hodnotu.



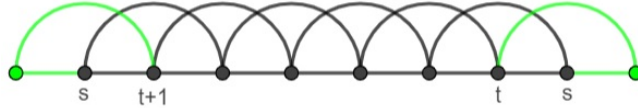
Obrázek 28: Graf G_8 ohodnocený hodnotami $0 \div 11$.

Předpokládejme, že $s = 0$. Hodnotu 1 nelze použít a hodnotu 2 lze použít pouze na ohodnocení vrcholu u_4 (nebo symetricky na ohodnocení vrcholu u_5). Hodnotu 3 pak nemůžeme použít a hodnota 4 pak musí být přiřazena vrcholu u_7 . To znamená, že vrchol u_2 musí být ohodnocen hodnotou 5. Vrcholy u_3, u_5 a u_6 však již nemůžeme ohodnotit hodnotami 7 až 11. Proto $s \neq 0$. Analogicky musí platit $s \neq 11$.

Oba vrcholy u_2 a u_7 musejí být ohodnoceny po sobě jdoucími hodnotami, a tak díky symetrii předpokládejme, že vrchol u_2 je ohodnocen hodnotou $t + 1$ a vrchol u_7 je ohodnocen hodnotou t . Pokud $t = 1$, nemohli bychom k ohodnocení žádného z vrcholů použít hodnotu 0, a tedy bychom zmenšili ohodnocení každého vrcholu o 1. Hodnota t nemůže být ani 11, protože pak $t + 1 = 12$. Předpokládejme, že $t = 0$ (analogicky bychom pracovali s předpokladem, že $t = 10$) a samozřejmě oba vrcholy u_1 a u_8 musejí být ohodnoceny stejnou hodnotou s . Hodnotou 1 je tedy ohodnocen vrchol u_2 , hodnotu 2 nelze použít. Hodnotu 3 lze přiřadit pouze jednomu z vrcholů u_5 a u_6 . Pokud bychom přiřadili hodnotu 3 vrcholu u_6 , nelze použít hodnotu 4 a hodnota 5 musí být přiřazena vrcholu u_3 . Nyní již ale nelze použít hodnotu 6, ani 7, dostáváme tedy spor. Pokud bychom přiřadili hodnotu 3 vrcholu u_5 (namísto vrcholu u_6), nelze použít hodnotu 4 a nutně $s = 5$. Nyní

nelze použít hodnotu 6 a hodnotu 7 musíme přiřadit vrcholu u_4 . K ohodnocení žádného ze zbývajících vrcholů u_3 a u_6 již nelze použít hodnoty 8 a 9, a opět tedy dostáváme spor. Proto $t \neq 0, 1, 10, 11$.

Nyní ke grafu G_8 (jehož vrcholy u_1 a u_8 jsou ohodnoceny hodnotou $s \neq 0, 11$ a vrcholy u_2 a u_7 jsou postupně ohodnoceny hodnotami $t + 1$ a t , kde $t \neq 0, 1, 10, 11$) přidejme vrcholy u_0 a u_9 a hrany u_0u_1, u_0u_2, u_7u_9 a u_8u_9 , čímž vznikne graf H , jež je izomorfní s grafem G_{10} , a je tedy podgrafem grafu G . Tento graf je zachycen na obrázku 29, zeleně jsou zvýrazněny vrcholy u_0 a u_9 a hrany u_0u_1, u_0u_2, u_7u_9 a u_8u_9 . Ukážeme, že oba vrcholy u_0 a u_9 již nelze ohodnotit žádnou z hodnot $0 \div 11$.



Obrázek 29: Graf G_8 znázorněný černě s ohodnocenými vrcholy u_1, u_2, u_7 a u_8 , přidáním zelených hran a vrcholů vznikne graf H .

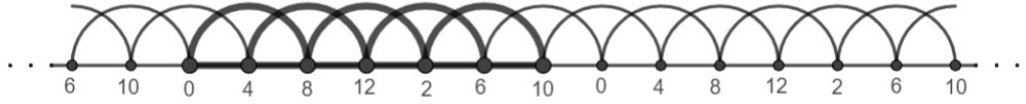
Na ohodnocení vrcholů u_0 a u_9 nelze použít žádnou hodnotu, kterou jsme již ohodnotili nějaký z vrcholů u_1, \dots, u_8 , a to proto, že od vrcholu u_9 (resp. u_0) jsou vrcholy u_3, \dots, u_8 (resp. vrcholy u_1, \dots, u_6) ve vzdálenosti menší než 4 a hodnoty s, t a $t + 1$ nelze použít, protože oba vrcholy u_0 a u_9 sousedí s vrcholem, jež je ohodnocený hodnotou s a jednou z hodnot t nebo $t + 1$. Rovněž ani jeden z vrcholů u_0 a u_9 nelze ohodnotit hodnotou $s \pm 1$, hodnotou $t - 1$ a hodnotou $t + 2$, což jsou hodnoty které nebyly dosud použity. Všechny tyto hodnoty jsou přípustné (jsou $0 \div 11$), a to proto, že t nabývá jedné z hodnot $2, \dots, 9$ a s nabývá jedné z hodnot $1, \dots, 10$. Protože $|s - t| \geq 3$, jsou hodnoty $s - 1, s + 1$ a $t - 1$ navzájem různé. Ukážeme rovněž, že $t + 2 \neq s - 1$. Pokud by platila rovnost, je $s = t + 3$, což je ale spor s tím, že vrcholy u_0 a u_1 ohodnocené hodnotami s a $t + 1$ jsou sousední. To znamená, že oba vrcholy u_0 a u_9 nemohou být ohodnoceny žádnou ze sedmi již použitých hodnot a ani žádnou ze čtyř dosud nepoužitých hodnot $s - 1, s + 1, t - 1$ a $t + 2$. Oba vrcholy tedy musejí být ohodnoceny poslední zbývající hodnotou r , kterou jsme dosud nepoužili. To ale není možné, protože neexistuje žádný vrchol v grafu H , jež by byl od obou vrcholů u_0 a u_9 ve vzdálenosti aspoň tři (hodnotu $r + 1$, resp. $r - 1$ jsme museli při ohodnocování grafu G_8 použít). A tedy graf H nelze ohodnotit v rozsahu $0 \div 11$.

Ukázali jsme tedy, že v žádném z uvedených případů nelze graf G ohodnotit pomocí hodnot $0 \div 11$. A tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 12$. \square

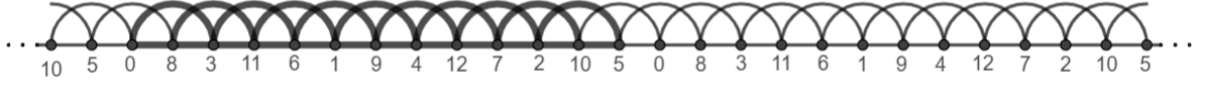
Následuje speciální třída grafů, pro niž je dolní odhad přímo příslušným rozpětím.

Věta 4.40. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 7k$ nebo $n = 13k$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $\lambda_{(3,2,1)}(G) = 12$.*

Důkaz. Vyjdeme z ohodnocení vrcholů cirkulantů $C_7(1, 2, 5, 6)$ a $C_{13}(1, 2, 11, 12)$ (tedy grafů G s $k = 1$ pro tento obecný případ) a toto ohodnocení vrcholů za sebe *nakopírujeme* k -krát, podobně jako na obrázcích 30 a 31, příslušná jedna kopie je zvýrazněna. V případě $n = 7k$ budou vrcholy u_{7i+1} ohodnoceny 0, vrcholy u_{7i+2} budou ohodnoceny 4 atd. až vrcholy u_{7i+7} budou ohodnoceny hodnotou 10 ($i = 0, 1, \dots, k - 1$). Toto ohodnocení je přípustné, protože vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 2$ jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 2 a vrcholy ohodnocené stejnou hodnotou jsou ve vzdálenosti aspoň 4.



Obrázek 30: Cirkulant $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 7k$, $k \in \mathbb{N}$, ohodnocený hodnotami $0 \div 12$.



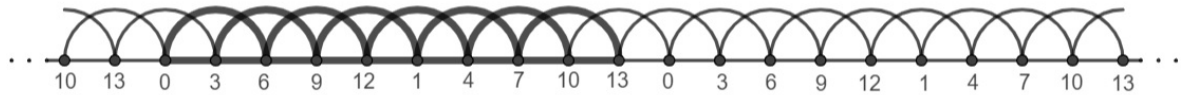
Obrázek 31: Cirkulant $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 13k$, $k \in \mathbb{N}$, ohodnocený hodnotami $0 \div 12$.

V případě $n = 13k$ budou vrcholy u_{13i+1} ohodnoceny 0, vrcholy u_{13i+2} budou ohodnoceny 8 atd. až vrcholy u_{13i+13} budou ohodnoceny hodnotou 5 ($i = 0, 1, \dots, k - 1$). Toto ohodnocení je přípustné, protože vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 1$ jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 3, vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 2$ jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 2 a vrcholy ohodnocené stejnou hodnotou jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 7, tedy v aspoň požadované vzdálenosti 4.

A tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G)$, kde G je $C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$ s $n = 7k$ nebo $n = 13k$ ($k \in \mathbb{N}$), je nejvýše 12. Jelikož ale dle věty 4.39 je $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 12$, dostáváme hledanou rovnost. \square

Právě přejdeme k horním odhadům rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}$ u cirkulantů. Začneme cirkulantom $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 10k$, $k \in \mathbb{N}$.

Věta 4.41. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 10k$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $12 \leq \lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 13$.*



Obrázek 32: Cirkulant $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 10k$, $k \in \mathbb{N}$ ohodnocený hodnotami $0 \div 13$.

Důkaz. Podle věty 4.39 je $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 12$. Použijeme ohodnocení vrcholů cirkulantu $C_{10}(1, 2, 8, 9)$ (tedy grafu G s $k = 1$) a toto ohodnocení vrcholů za sebe *nakopírujeme* k -krát, podobně jako na obrázku 32. Vrcholy u_{10i+1} budou ohodnoceny 0, vrcholy u_{10i+2} budou ohodnoceny 3 atd. až vrcholy u_{10i+10} budou ohodnoceny hodnotou 13 ($i = 0, 1, \dots, k - 1$). Toto ohodnocení je přípustné, protože vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 1$ jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 3, vrcholy ohodnocené hodnotami s a $s + 2$ jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 2 a vrcholy ohodnocené stejnou hodnotou jsou vždy ve vzdálenosti aspoň 5, tedy v aspoň požadované vzdálenosti 4. A tedy $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 13$. \square

Následující věta hovoří o horním odhadu čísla $\lambda_{(3,2,1)}$ cirkulantu $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 7k + 8l$ a $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, přičemž aspoň jedno z čísel k, l je nenulové.

Věta 4.42. *Nechť je dán cirkulant $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 7k + 8l$ a $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, přičemž alespoň jedno z čísel k a l je nenulové. Pak $12 \leq \lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 14$.*

Důkaz. Vyjdeme ze vzorů pro grafy $G_1 = C_7(1, 2, 5, 6)$ a $G_2 = C_8(1, 2, 6, 7)$. Vrcholy prvního grafu jsme ohodnotili postupně hodnotami 0, 4, 8, 12, 2, 6 a 10 (tj. vzor grafu G_1), vrcholy druhého grafu jsme pak ohodnotili postupně hodnotami 0, 4, 8, 12, 2, 6, 10 a 14 (tj. vzor grafu G_2). Z důkazu věty 4.40 již víme, že vzor grafu G_1 lze k -krát nakopírovat za sebe a získat přípustné ohodnocení. Nyní ukážeme, že lze za sebe navázat i dva vzory pro G_2 (a tedy i l vzorů), vzor pro G_1 za vzor pro G_2 a naopak.

... 0 4 8 12 2 6 10 14 0 4 8 12 2 6 10 14 ...
 ... 0 4 8 12 2 6 10 0 4 8 12 2 6 10 14 ...
 ... 0 4 8 12 2 6 10 14 0 4 8 12 2 6 10 ...

V řádcích výše jsou vidět příslušná ohodnocení vrcholů a napojení odpovídajících vzorů. Jedná se o schéma ohodnocení vrcholů části nějakého grafu, sousední jsou tak ty vrcholy, jejichž hodnoty jsou vedle sebe nebo ob jednu hodnotu. Navíc se vyskytují jen sudé hodnoty. Ve všech třech případech je vzdálenost stejných hodnot rovna aspoň 4, vrcholy s rozdílem hodnot 2, jsou pak ve vzdálenosti aspoň 2. Z toho vyplývá, že libovolné takovéto napojení vzorů je přípustným ohodnocením části grafu. Z toho již vyplývá, že je-li G cirkulant $C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$, kde $n = 7k + 8l$ a $k, l \in \mathbb{N}$, je $\lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 14$. O tom, že $\lambda_{(3,2,1)}(G) \geq 12$ pak hovoří věta 4.39. \square

Na tomto místě zmíníme Sylvesterovu větu 4.43. Na ni navazující důsledek pak říká, že odhad na rozpětí $\lambda_{(3,2,1)}$ uvedený ve větě 4.42 platí pro všechny cirkulanty s $n \geq 42$ (a $|S| = 4, a = 1$ a $b = 2$).

Věta 4.43 [109]. *Nechť a, b jsou dvě přirozená čísla taková, že $\gcd(a, b) = 1$, a nechť n je rovněž přirozené číslo. Pak rovnice $ax + by = n$, kde x a y jsou nezáporná celá čísla, má řešení (x, y) kdykoliv $n \geq (a - 1)(b - 1)$.*

Důsledek 4.44. *Nechť $G = C_n(1, 2, n - 2, n - 1)$ je cirkulant s $|S| = 4$ na n vrcholech, kde $n \geq 42$. Potom $12 \leq \lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 14$.*

Důkaz. Čísla 7, 8 jsou nesoudělná, ze Sylvesterovy věty 4.43 dostáváme, že odhad $12 \leq \lambda_{(3,2,1)}(G) \leq 14$ z věty 4.42 platí pro všechna přirozená $n \geq (a - 1)(b - 1) = (8 - 1)(7 - 1) = 42$. \square

5 Závěr

V kapitole 3 shrnujeme dosud známé výsledky v oblasti $L(p, q)$ -ohodnocení grafů. Tato část je rozdělena do čtyř podkapitol, a to dle parametrů p, q . Podkapitoly 3.1 a 3.2 shrnují ne tak obvyklé $L(0, 1)$ -ohodnocení a $L(1, 1)$ -ohodnocení. Největší důraz je pak kladen na $L(2, 1)$ -ohodnocení (viz podkapitola 3.3) a na obecné $L(p, q)$ -ohodnocení (viz podkapitola 3.4). Ve všech těchto podkapitolách uvádíme dolní a horní odhady příslušného rozpětí $\lambda_{(p,q)}$ – zde stojí za zmínku dvě hypotézy: v případě $L(1, 1)$ -ohodnocení jde o Wegnerovu hypotézu 3.21 a v případě $L(2, 1)$ -ohodnocení máme na mysli Griggsovu a Yehovu hypotézu 3.29. Velký úsek této části textu zabírají přesné hodnoty ohodnocovacího čísla pro speciální třídy grafů.

V úvodu kapitoly 4 se přesouváme do oblasti $L(p, q, r)$ -ohodnocení a uvádíme několik známých výsledků, které pak využíváme ve vlastním výzkumu dále. Detailnější přehled o $L(p, q, r)$ -ohodnocení s důrazem na $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení nabízí bakalářská práce [80].

Podkapitola 4.2 se již věnuje vlastnímu výzkumu, totiž $L(3, 2, 1)$ -ohodnocení cirkulantů, a je rozdělena dle typu cirkulantu na dvě části. V první z nich (viz odstavec 4.2.1) jsme se věnovali hustým cirkulantům, tedy cirkulantům s $|S| = n - 2$ nebo $|S| = n - 3$, a našli jsme příslušná ohodnocovací čísla těchto grafů. V části 4.2.2 jsme pak ohodnocovali řídké cirkulanty, tedy cirkulanty s $|S| = 3$ nebo $|S| = 4$. Pro $|S| = 3$ jsme v úvodních příkladech našli příslušné rozpětí několika konkrétních cirkulantů a dále jsme našli dolní odhad (viz věta 4.25) a horní odhad (viz věta 4.26) příslušného rozpětí pro tyto řídké cirkulanty. V případě $|S| = 4$ jsme postupovali obdobně: na úvodních motivačních příkladech jsme našli rozpětí několika konkrétních cirkulantů, ve stěžejní větě 4.39 jsme dokázali, že ohodnocovací číslo každého řídkého cirkulantu s $|S| = 4$ je aspoň 12. Pomocí kopírování na sebe napojitelných vzorů a Sylvesterovy věty 4.43 jsme pak našli i horní odhad rozpětí pro všechny cirkulanty s alespoň 42 vrcholy.

Literatura

- [1] S. S. Adams, P. Booth, H. Jaffe, D. Sakai Troxell, S. L. Zinnen: Exact λ -numbers of generalized Petersen graphs of certain higher-orders and on Möbius strips. *Discrete Applied Mathematics* 160 (2012), 436-447.
- [2] S. S. Adams, J. Cass, D. Sakai Troxell: An extension of the channel-assignment problem: $L(2, 1)$ -labelings of generalized Petersen graphs. *IEEE Transaction on Circuits and Systems I* 53 (2006), 1101-1107.
- [3] S. S. Adams, J. Cass, M. Tesch, D. Sakai Troxell, C. Wheeland: The minimum span of $L(2, 1)$ -Labelings of Certain Generalized Petersen Graphs. *Discrete Applied Mathematics* 155 (2007), 1314-1325.
- [4] S. S. Adams, N. Howell, N. Karst, D. S. Troxell, J. Zhu: On the $L(2, 1)$ -labelings of amalgamations of graphs. *Discrete Applied Mathematics* 161 (2013), 881-888.
- [5] G. Agnarsson, M. M. Halldórsson: Coloring Powers of planar graphs. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics* 16(4) (2003), 654-662.
- [6] G. Agnarsson, M. M. Halldórsson: On Colorings of Squares of Outerplanar Graphs. *arXiv: 0706.1526v1*. An earlier version appeared in *Proceedings of 15th annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, New Orleans, LA (11.-13. ledna, 2004), 242-253.
- [7] G. Agnarsson, M. M. Halldórsson: Vertex Coloring the Square of Outerplanar Graphs of Low Degree. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 30 (2004), 619-636.
- [8] T. Araki: Labeling bipartite permutation graphs with a condition at distance two. *Discrete Applied Mathematics* 157 (2009), 1677-1686.
- [9] H. Balakrishnan, N. Deo: Parallel Algorithm for Radiocoloring a Graph. *Congressus Numerantium* 160 (2003), 193-204.
- [10] R. Battiti, A. A. Bertossi, M. A. Bonuccelli: Assigning Codes in Wireless Networks: Bounds and Scaling Properties. *Wireless Networks* 5 (1999), 195-209.
- [11] P. Bella, D. Král', B. Mohar, K. Quittnerová: Labeling planar graphs with a condition at distance two. *European Journal on Combinatorics* 28 (2007), 2201-2239.
- [12] A. A. Bertossi, M. A. Bonuccelli: Code Assignment for Hidden Terminal Interference Avoidance in Multihop Packet Radio Networks. *IEEE ACM Transactions on Networking* 3(4) (1995), 441-449.
- [13] H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan, J. van Leeuwen: Approximations for λ -Colorings of Graphs. *The Computer Journal*, Vol. 47, No. 2 (2004), 193-204.
- [14] O. V. Borodin, A. N. Glebow, A. O. Ivanova, T. K. Neustroeva, V. A. Taskinov: Sufficient conditions for planar graphs to be 2-distance $(\Delta + 1)$ -colorable. *Sibirskie Èlektronnyye Matematicheskie Izvestiya* 1 (2004), 129-141.

- [15] O. V. Borodin, A. O. Ivanova, T. K. Neustroeva: 2-distance coloring of sparse planar graphs. *Sibirskie Èlektronnye Matematicheskie Izvestiya* 1 (2004), 76-90.
- [16] R. L. Brooks: On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 37 (1941), 194-197.
- [17] R. Byczek: Wegner's conjecture Colouring the square of a planar graph. *Theoretical Computer Science of the Jagiellonian University* (2019).
- [18] F. Calamoneri: The $L(h, k)$ -Labelling Problem: An Updated Survey and Annotated Bibliography (2014).
<http://wwwusers.di.uniroma1.it/~calamo/PDF-FILES/survey.pdf>
- [19] T. Calamoneri, A. Pelc, R. Petreschi: Labeling trees with a condition at distance two. *Discrete Mathematics* 306 (2006), 1534-1539.
- [20] T. Calamoneri, R. Petreschi: $L(h, 1)$ -Labeling Subclasses of Planar Graphs. *Journal on Parallel and Distributed Computing* 64(3) (2004), 414-426.
- [21] M. R. Cerioli, D. F. D. Posner: On $L(2, 1)$ -coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics* 160 (2012), 2655-2661.
- [22] J. Clipperton, J. Gehrtz, Z. Szaniszló, D. Torkornoo: $L(3, 2, 1)$ -Labeling of Simple Graphs. *Valparaiso Experience in Research by Undergraduate Mathematicians, Valparaiso University* (2005).
- [23] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček: Diskrétní matematika. *Plzeň: Západočeská univerzita*, 170s. ISBN: 80-7082-939-7 (2004).
- [24] S. K. Das, I. Finocchi, R. Petreschi: Conflict-Free Star-Access in Parallel Memory Systems. *Journal on Parallel and Distributed Systems* 66(11) (2006), 1431-1441.
- [25] Z. Duan, P. Lv, L. Miao, Z. Miao, C. Wang: The Δ^2 -conjecture for $L(2, 1)$ -labelings is true for total graphs. *Applied Mathematics Letters* 24 (2011), 1491-1494.
- [26] P. Erdős, S. Fajtlowicz, A. J. Hoffman: Maximum degree in graphs of diameter 2. *Networks* 10 (1980), 87-90.
- [27] D. J. Erwin, J. P. Georges, D. W. Mauro: On labeling the vertices of products of complete graphs with distance constraints. *Naval Research Logistics* 52 (2005), 138-141.
- [28] T. Fangyun, G. Guohua, X. Kexiang: On $L(2, 1)$ -labellings of distance graphs. *Journal of Southeast University* 21(2) (2005), 244-248.
- [29] J. Fiala, P. A. Golovach, J. Kratochvíl: Computational Complexity of the Distance Constrained Labeling Problem for Trees. *35th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP '08)*, Reykjavik, Iceland, 6.-13. července, Lectures Notes in Computer Science 5125, Springer Verlag, Berlin (2008), 294-305.

- [30] J. Fiala, J. Kratochvíl: On the computational complexity of the $L(2,1)$ -labeling problem for regular graphs. *Proceedings of 11th Italian Conference on Theoretical Computer Science (ICTCS '05), Siena, Italy, 12–14 October, Lectures Notes in Computer Science 3701, Springer Verlag, Berlin 10* (2005), 228-236.
- [31] J. P. Georges, D. W. Mauro: Generalized vertex labeling with a condition at distance two. *Congressus Numerantium* 109 (1995), 141-159.
- [32] J. P. Georges, D. W. Mauro: Labeling trees with a condition at distance two. *Discrete Mathematics* 269 (2003), 127-148.
- [33] J. P. Georges, D. W. Mauro: On generalized Petersen graphs labeled with a condition at distance two. *Discrete Mathematics* 259 (2002), 311-318.
- [34] J. P. Georges, D. W. Mauro: Some results on λ_k^j -numbers of the products of complete graphs. *Congressus Numerantium* 140 (1999), 141-160.
- [35] J. P. Georges, D. W. Mauro, M. I. Stein: Labeling products of complete graphs with a condition at distance two. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Discrete Mathematics* 14 (2000), 28-35.
- [36] J. P. Georges, D. W. Mauro, M. A. Whittlesey: Relating path coverings to vertex labellings with a condition at distance two. *Discrete Mathematics* 135 (1994), 103-111.
- [37] S. Ghosh, S. Paul, A. Pal: $L(2,1)$ -Labeling of Cartesian Product of Complete Bipartite Graph and Path. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences, Vol. 9, No. 3* (2017), 685-698.
- [38] D. Gonçalves: On the $L(p,1)$ -labelling of graphs. 2005 *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05), Berlín, Německo*. (2005), 81-86.
- [39] D. Gonçalves: On the $L(p,1)$ -labelling of graphs. *Discrete Mathematics* 308 (2008), 1405-1414.
- [40] S. Gravier, S. Klavžar, M. Mollard: Codes and $L(2,1)$ -labelings in Sierpiński graphs. *Taiwanese Journal on Mathematics* 9(4) (2005), 671-681.
- [41] J. R. Griggs, X. T. Jin: Real number labellings for paths and cycles. *Internet Math* 4 (2007), 65-86.
- [42] J. R. Griggs, X. T. Jin: Recent Progress in Mathematics and Engineering on Optimal Graph Labellings with Distance Conditions. *Journal of Combinatorial Optimization* 14 (2007), 249-257.
- [43] J. R. Griggs, R. K. Yeh: Labelling graphs with a condition at distance 2. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics* 5/4 (1992), 586-595.

- [44] Z. Haiyang, Z. Junlei, L. Ying, W. Shuling, H. Danjun, M. Lianying: The List $L(2, 1)$ -Labeling of Planar Graphs with Large Girth. *Algorithmic Aspects in Information and Management* (2020), 501-512.
- [45] W. K. Hale: Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE* 68/12 (1980), 1497-1514.
- [46] T. Hasunama, T. Ishii, H. Ono, Y. Uno: A linear time algorithm for $L(2, 1)$ -labeling of trees. *Proceeding 17th Annual European Symposium on Algorithms, Copenhagen, Denmark, Lecture Notes in Computer Science 5757, SpringerVerlag, Berlin* (2009), 35-46.
- [47] F. Havet, J. van den Heuvel, C. McDiarmid, B. Reed: List Colouring Squares of Planar Graphs. *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*(2008).
- [48] F. Havet, B. Reed, J.-S. Sereni: $L(2, 1)$ -Labeling of graphs. *Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithm (SODA '08), San Francisco, California, (20-22 January, 2008)*, 621-630.
- [49] F. Havet, B. Reed, J.-S. Sereni: Griggs and Yeh's Conjecture and $L(p, 1)$ -Labelings. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Discrete Mathematics*, 26 (2008), 145-168.
- [50] F. Havet, M.-L. Yu: $(p, 1)$ -total labelling of graphs. *Technical Report 4650, INRIA* (2002).
- [51] F. Havet, M.-L. Yu: $(p, 1)$ -Total labelling of Graphs. *Discrete Math* 308 (2008), 496-513.
- [52] J. van den Heuvel, S. McGuinness: Colouring the square of a planar graphs. *Journal of Graph Theory* 42 (2003), 110-124.
- [53] https://en.wikipedia.org/wiki/Hoffman%E2%80%93Singleton_graph
- [54] L.-H. Huang, G. J. Chang: $L(h, k)$ -labelings of Hamming graphs. *Discrete Mathematics* 309 (2009), 2197-2201.
- [55] F.-H. Chang, M.-L. Chia, S.-A. Jiang, D. Kuo, S.-Ch. Liaw: $L(p, q)$ -labelings of subdivisions of graphs. *Discrete Applied Mathematics* 291 (2021), 264–270.
- [56] F.-H. Chang, M.-L. Chia, D. Kuo, S.-Ch. Liaw, M.-H. Tsai: $L(2, 1)$ -labelings of subdivision of graphs. *Discrete Mathematics* 338 (2015), 248-255.
- [57] G. J. Chang, W.-T. Ke, D. Kuo, D. D.-F. Liu, R. K. Yeh: On $L(d, 1)$ -labelings of graphs. *Discrete Mathematics* 220(1-3) (2000), 57-66.
- [58] G. J. Chang, D. Kuo: The $L(2, 1)$ -Labeling Problem on Graphs. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Discrete Mathematics* 9/2 (1996), 309-316.

- [59] G. J. Chang, C. Lu: Distance-two labelings of Graphs. *European Journal of Combinatorics* 24(1) (2003), 53-58.
- [60] G. Chartrand, F. Harary: Planar Permutation graphs. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, section B(N.S.)* 3 (1967), 433-438.
- [61] M. Chia, D. Kuo, H. Liao, C. Yang, R. K. Yeh: $L(3, 2, 1)$ -Labeling of graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics* 15/6 (2011), 2439-2457.
- [62] K. Chudá, M. Škoviera: $L(2, 1)$ -labelling of generalized prisms. *Discrete Applied Mathematics* 160 (2012), 755-763.
- [63] P.K. Jha: Optimal $L(2, 1)$ -labeling of Cartesian products of cycles with an application to independent domination. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* 47 (2000), 1531–1534.
- [64] P. K. Jha, S. Klavžar, A. Vesel: $L(2, 1)$ -labeling of direct product of paths and cycles. *Discrete Applied Mathematics* 145 (2005), 317-325.
- [65] P. K. Jha, S. Klavžar, A. Vesel: Optimal $L(d, 1)$ -labelings of certain direct products of cycles and Cartesian products of cycles. *Discrete Applied Mathematics* 152 (2005), 257-265.
- [66] P.K. Jha, A. Narayanan, P. Sood, K. Sundaram, V. Sunder: On $L(2; 1)$ -labeling of the Cartesian product of a cycle and a path. *Ars Combinatoria* 55 (2000), 81-89.
- [67] X. T. Jin, R. K. Yeh: Graph distance-dependent labeling related to code assignment in computer networks. *Naval Research Logistics* 51 (2004), 159-164.
- [68] K. Jonas: Graph Coloring Analogues With a Condition at Distance Two: $L(2, 1)$ -Labelings and List δ -Labelings. *Ph.D. Thesis, University of South Carolina, Columbia* (1993).
- [69] T. Kaiser: Selected Topics in Discrete Mathematics. *Skripta předmětu Vybrané partie z diskrétní matematiky* (2020).
- [70] J.-H. Kang: $L(2, 1)$ -labelling for Hamiltonian graphs of maximum degree 3. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics* 22(1) (2008), 213-230.
- [71] J.-H. Kang: $L(2, 1)$ -labelling for Kneser graphs. *Manuscript* (2005).
- [72] N. Karst, J. Oehrlein, D. S. Troxell, J. Zhu: $L(d, 1)$ -labelings of the edge-path-replacement by factorization of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization* 30 (2015), 34-41.
- [73] N. Karst, J. Oehrlein, D. S. Troxell, J. Zhu: Labeling amalgamations of Cartesian products of complete graphs with a condition at distance two. *Discrete Applied Mathematics* 178 (2014), 101-108.

- [74] N. Khan, M. Pal, A. Pal: $L(0, 1)$ -Labelling of cactus graphs. *Communications and Network* 4 (2012), 18-29.
- [75] N. Khan, M. Pal, A. Pal: $L(2, 1)$ -Labelling of Cactus Graphs. *Mapana Journal of Sciences* 11 (2012), 15-42.
- [76] B. M. Kim, B. C. Song, Y. Rho: $L(2, 1)$ -labellings for direct products of a triangle and a cycle. *International Journal of Computer Mathematics* 90(3) (2014), 475-482.
- [77] S. Klavžar, S. Špacapan: The Δ^2 -Conjecture for $L(2, 1)$ -Labelings is True for Direct and Strong Products of Graphs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II* 53 (2006), 274-277.
- [78] S. Klavžar, A. Vesel: Computing graph invariants on rotagraphs using dynamic algorithm approach: the case of $(2, 1)$ -colorings and independence numbers *Discrete Applied Mathematics* 129 (2003), 449-460.
- [79] A. Kohl: Bounds for the $L(d, 1)$ -number of diameter 2 graphs, trees and cacti. *International Journal of Mobile Network Design and Innovation* 1(2) (2006), 124-135.
- [80] M. Kopřiva: $L(i, j, k)$ -ohodnocení grafů. *Bakalářská práce, Západočeská univerzita, fakulta Aplikovaných věd, katedra matematiky, Plzeň* (2019).
- [81] D. Korže, A. Vesel: $L(2, 1)$ -labeling of strong products of cycles. *Information Processing Letters* 94 (2005), 183-190.
- [82] P. Kovář: Teorie grafů. *Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni*, reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332 (2012).
https://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/skriptum_teorie_grafu_rozsirene_interaktivne.pdf
- [83] P. Kovář: Úvod do teorie grafů. *Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni*, reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332 (2012).
http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/uvod_do_teorie_grafu.pdf
- [84] D. Král', P. Nejedlý: Distance Constrained Labelings of K_4 -minor free graphs. *Discrete Mathematics* 309 (2009), 5745-5756.
- [85] D. Král', D. Škrekovski: A Theorem about the Channel Assignment Problem. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Discrete Mathematics*, 16/3 (2003), 426-437.
- [86] D. Kuo, J.-H. Yan: On $L(2, 1)$ -labelings of Cartesian products of paths and cycles. *Discrete Mathematics* 283 (2004), 137-144.
- [87] P. C. B. Lam, G. Gu, P.-T. Chung, W. Lin: Bounds on the labelling numbers of chordal graphs. *Proceedings of the 2006 International Conference on Foundations of Computer Science, Las Vegas, Nevada, USA*, (26.-29.6.2006).

- [88] P. C. B. Lam, G. Gu, W. Ch. Shiu, T.-M. Wang: On Distance Two Labelling of Unit Interval Graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics* 13 (2009), 1167-1179.
- [89] X. Li, S. Zhou: Labeling outer planar graphs with maximum degree three. *Discrete Applied Mathematics* 161 (2013), 200-211.
- [90] K.-W. Lih, W.-F. Wang, X. Zhu: Coloring the square of K_4 -minor Free Graph. *Discrete Mathematics* 269 (2003), 303-309.
- [91] J. Liu, Z. Shao: The $L(3, 2, 1)$ -labeling problem on graphs. *Mathematica Applicata* 17/4 (2004), 596-602.
- [92] D. Lú: $L(2, 1)$ -labelings of the edge-path-replacement of graph. *Journal of Combinatorial Optimization* 26 (2013), 385-392.
- [93] D. Lú, N. Lin: $L(d, 1)$ -labelings of the edge-path-replacement of graph. *Journal of Combinatorial Optimization* 26 (2013), 819-831.
- [94] T. Makansi: Transmitter-Oriented Code Assignment for Multihop Packet Radio. *IEEE Transaction on Communication* 35(12) (1987), 1379-1382.
- [95] S. Mitra, S. Bhoumik: $L(2, 1)$ -labeling of circulant graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 39 (2019), 143-155.
- [96] M. Molloy, M. R. Salavatipour: A Bound on the Chromatic Number of the Square of a Planar Graph. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)* 94(2) (2005), 289-213.
- [97] B. S. Panda, P. Goel: $L(2, 1)$ -labeling of perfect elimination bipartite graphs. *Discrete Applied Mathematics* 159(16) (2011), 1878-1888.
- [98] S. Paul, M. Pal, A. Pal: $L(2, 1)$ -labeling of interval graphs. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 49(1-2) (2015), 1419-1432.
- [99] S. Paul, M. Pal, A. Pal: $L(2, 1)$ -Labeling of Permutation and Bipartite Permutation Graphs. *Mathematics in Computer Science* 9 (2015), 113-123.
- [100] F. S. Roberts: From Garbage to Rainbows: Generalizations of Graph Coloring and their Applications. In Alavi, Y., Chartrand, G., Oellermann, O.R. a Schwenk, A.J. (eds.) *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*. Wiley, New York, (1991).
- [101] D. Sakai: Labeling Chordal Graphs: Distance Two Condition. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics* 7 (1994), 133-140.
- [102] Z. Shao, I. Averbakh, R. Solis-Oba: $L(2, 1)$ -Labeling of Kneser graphs and coloring squares of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics* 221 (2017), 106-114.
- [103] Z. Shao, R. Solis-Oba, G. Lin: $L(2, 1)$ -Labelings of Kneser Graphs. *Manuscript* (2014).
- [104] Z. Shao, R. K. Yeh: The $L(2, 1)$ -labeling and operations of graphs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II* 55(7) (2005), 685-689.

- [105] Z. Shao, R. K. Yeh: The $L(2, 1)$ -labeling on planar graphs. *Applied Mathematics Letters* 20 (2007), 222-226.
- [106] Z. Shao, R. K. Yeh, K. K. Poon, W. Ch. Shiu: The $L(2, 1)$ -Labeling of $K_{1,n}$ -free graphs and its applications. *Applied Mathematics Letters* 21 (2008), 1188-1193.
- [107] Z. Shao, R. K. Yeh, D. Zhang, R. Solis-Oba: The $L(2, 1)$ -labeling on graphs and the frequency assignment problem. *Applied Mathematics Letters* 21 (2008), 37-41.
- [108] Ch. Schwarz, D. S. Troxell: $L(2, 1)$ -labelings of Cartesian products of two cycles. *Discrete Applied Mathematics* 154 (2006), 1522-1540.
- [109] J. J. Sylvester: On subinvariants, i. e. semi-invariants to binary quantics of an unlimited order. *American Journal of Mathematics* 5 (1882), 79-136.
- [110] F. Y. Tao, G. H. Gu: $L(2, 1)$ -labelling problem on distance graphs. *Journal of Southeast University* 20(1) (2004), 122-125.
- [111] S. K. Vaidya, D. D. Bantva: Labeling cacti with a condition at distance two. *Le Matematiche* 66/1 (2011), 29-36.
- [112] P. J. Wan: Near-Optimal Conflict-Free Channel Set Assignments for an Optical Cluster-Based Hypercube Network. *Journal of Combinatorial Optimization, Vol. 1* (1997), 179-186.
- [113] W.-F. Wang: The $L(2, 1)$ -Labelling of trees. *Discrete Applied Mathematics* 154 (2007), 598-603.
- [114] W.-F. Wang, L. Cai: Labelling planar graphs without 4-cycles with a condition at distance two. *Discrete Applied Mathematics* 156 (2008), 2241-2249.
- [115] W.-F. Wang, K.-W. Lih: Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics* 17(2) (2003), 264-275.
- [116] W.-F. Wang, X.-F. Luo: Some Results on Distance Two Labellings of Outerplanar Graphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series* 25(1) (2009), 21-32.
- [117] W.-F. Wang, Y. Wang: $L(p, q)$ -Labelling of K_4 -minor free graphs. *Information Processing Letters* 98 (2006), 169-173.
- [118] G. Wegner: Graphs with given diameter and a coloring problem. *Technical Report, University of Dortmund* (1977).
- [119] M. A. Whittlesey, J. P. Georges, D. W. Mauro: On the λ -number of Q_n and related graphs. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics* 8 (1995), 499-506.
- [120] S. Zhang, Q. Ma: Labelling of Some Planar Graphs with a Condition at Distance Two. *Journal on Applied Mathematics and Computing* 24 (2007), 421-426.

- [121] S. Zhou: Labelling Cayley Graphs on Abelian Groups. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Discrete Mathematics* 19(4) (2006), 985-1003.
- [122] H. Zhou, W. C. Shiu, P. C. B. Lam: Notes on $L(1,1)$ and $L(2,1)$ labelings for n -cubes. *Journal of Combinatorial Optimization* 28 (2014), 1626-1638.