

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

## **Kuželosečky a jiné křivky**

Diplomová práce

2022

Karolína Sýkorová

## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Kuželosečky a jiné křivky“ vypracovala samostatně pod dohledem vedoucí diplomové práce, výhradně s použitím uvedené literatury.

V Klatovech dne 17. 5. 2022

.....  
Karolína Sýkorová

## Poděkování

Předně bych chtěla poděkovat RNDr. Světlaně Tomiczkové, Ph.D. za odborné vedení této diplomové práce, za její čas, cenné poznámky a připomínky a také za možnost častých osobních konzultací. V neposlední řadě bych chtěla poděkovat své rodině a partnerovi za psychickou podporu.

### **Abstrakt**

*Tato diplomová práce se zabývá kuželosečkami, které jsou zajímavou součástí výuky matematiky a deskriptivní geometrie na středních školách.*

*Práce obsahuje řešerši rámcových vzdělávacích programů (RVP) a školních vzdělávacích programů (ŠVP), shrnutí definic a základních vlastností kuželoseček a řešené úlohy, ve kterých se kuželosečky vyskytují. Součástí práce je velké množství appletů vytvořených pomocí bezplatného programu GeoGebra, které pomáhají s propojováním pojmů a vlastností kuželoseček.*

### **Klíčová slova**

*kuželosečka, kružnice, elipsa, parabola, hyperbola, excentricita, numerická excentricita*

### **Abstract**

*This diploma thesis deals with conic section topic which takes an interesting part in math tuition as well as constructive geometry at secondary schools within the Czech Republic.*

*This document contains a research of Framework Education Programme (curriculum), School Education Programme, summarizing of definitions and basic properties of conics including dealing with tasks where they appear to be. The part of the research is a high amount of applets created by free software called GeoGebra which helps with connecting terms and properties of conics.*

### **Keywords**

*conic sections, circle, ellipse, parabola, hyperbola, eccentricity, numerical eccentricity*



## Seznam obrazových příloh

1	Malba z roku 310 př. n. l. [12]	5
2	Menaechmovo pokus o vyřešení problému zdvojení krychle	7
3	Pascalova věta	8
4	Příklady rotačních kvadrik	8
5	Quetelet-Dandelinova věta pro elipsu	9
6	Vznik elipsy pomocí provázkové metody	10
7	Excentricita elipsy	11
8	Změna tvaru elipsy v závislosti na hlavní a vedlejší poloose	12
9	Základní charakteristiky elipsy	13
10	Applet: Definice paraboly	18
11	Který obrázek je správně?	19
12	Náčrt situace pro odvození vrcholové rovnice paraboly	21
13	Vrcholové rovnice paraboly	22
14	Parabola a její charakteristiky	22
15	Definice hyperboly	24
16	Excentricita hyperboly	25
17	Charakteristiky hyperboly	26
18	Definice hyperboly	26
19	Asymptoty hyperboly	27
20	Takto si na základě vědeckých dat umělec představoval objekt Oumuamua.	28
21	Asymptoty hyperboly podruhé	30
22	Správné měřítko pro vzdálenosti i velikosti	32
23	Perihélium a afélium	33
24	Sluneční soustava	34
25	Snímek komety Halley [8]	36
26	Náčrt trajektorie Halleyovy komety	37
27	První a druhá kosmická rychlost	41
28	Porovnání dvou křivek šikmého vrhu	42
29	Hod míčkem: zmapování situace	42
30	Kulečnickový stůl ve tvaru elipsy	46
31	Rotační paraboloid	47
32	Schéma parabolického zrcadla s paprsky	47
33	Světlomety	48
34	Parabolická anténa na Ondřejovské hvězdárně	49
35	Řez halou sestavenou ze dvou rotačních paraboloidů	49
36	Řetězovka	50
37	Chování kapek vody na ISS [15]	50
38	Cykloida	51
39	Typy cykloid	51
40	Příklad počátečního zadání úlohy	52
41	Ukázka řešení úlohy zadané Bernoulliem	52
42	Cykloida a brachistochrona	53

## Seznam tabulek

1	Porovnání RVP . . . . .	3
2	Porovnání ŠVP . . . . .	4
3	Hodnoty numerické excentricity pro kružnici a pro elipsu . . . . .	14
4	Příklady vesmírných objektů a numerických excentricit jejich trajektorií [7] . . . . .	14
5	Příklady vesmírných objektů a numerických excentricit jejich trajektorií [16] . . . . .	20
6	Příklady vesmírných objektů a numerických excentricit jejich trajektorií [10] . . . . .	28
7	Planety Sluneční soustavy s jejich střední vzdálenosti od Slunce a oběžnými dobami [11] . . . . .	35

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rešerše RVP a ŠVP</b>	<b>2</b>
2.1	Porovnání výuky křivek na různých typech středních škol . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Vznik kuželoseček: Řez rotační kuželovou plochou rovinou</b>	<b>5</b>
3.1	Historické souvislosti . . . . .	5
3.1.1	Elipsa v umění antického Řecka . . . . .	5
3.1.2	Problém zdvojení krychle: Objev paraboly a hyperboly . . . . .	5
3.1.3	Apollonius z Pergy . . . . .	7
3.1.4	Blaise Pascal . . . . .	8
3.1.5	Germinal Pierre Dandelin . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Elipsa a kružnice</b>	<b>10</b>
4.1	Povídání o elipse a kružnici . . . . .	10
4.2	Středová rovnice elipsy . . . . .	15
4.3	Středová rovnice kružnice . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Parabola</b>	<b>18</b>
5.1	Povídání o parabole . . . . .	18
5.2	Vrcholová rovnice paraboly . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Hyperbola</b>	<b>24</b>
6.1	Povídání o hyperbole . . . . .	24
6.2	Středová rovnice hyperboly . . . . .	28
6.3	Příklad: Poznej kuželosečku . . . . .	31
<b>7</b>	<b>Úlohy ze světa kuželoseček</b>	<b>32</b>
7.1	Dráhy planet . . . . .	32
7.1.1	Příklad: Třetí Keplerův zákon . . . . .	34
7.1.2	Příklad: Halleyova kometa . . . . .	36
7.2	Kosmické rychlosti . . . . .	39
7.2.1	První kosmická rychlost . . . . .	39
7.2.2	Druhá kosmická rychlost . . . . .	40
7.3	Hod míčkem . . . . .	42
7.3.1	Příklad: Hod míčkem . . . . .	42
7.4	Kulečnickový stůl ve tvaru elipsy . . . . .	46
7.5	Rotační paraboloidy . . . . .	47
7.5.1	Světlomet . . . . .	48
7.5.2	Příklad: Světlomet . . . . .	48
7.5.3	Parabolické antény . . . . .	48
7.5.4	Dvě paraboly a dva lidé . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Další křivky</b>	<b>50</b>
8.1	Řetězovka . . . . .	50
8.2	Cykloida . . . . .	51
8.3	Brachistochrona . . . . .	52
<b>9</b>	<b>Závěr</b>	<b>54</b>

# 1 Úvod

Kuželosečky jsou lidstvu známy již od 4. století př. n. l., kdy byly objeveny antickými geometry. Nacházejí uplatnění od vrhů po pohyby vesmírných těles a jsou nedílnou součástí výuky matematiky ve velkém množství středních škol.

Tato práce je psána ve formě doplňkového textu k běžné výuce kuželoseček na středních školách.

První část práce obsahuje základní definice a odvození vlastností kuželoseček za pomoci návodných otázek pro studenty. Celou práci doprovází applety vytvořené v bezplatném programu GeoGebra. Tyto applety pomáhají s pochopením a aplikacemi vyložených pojmů a směřují studenty k odpovědím na zadané otázky. V práci je zaveden poněkud netradiční pojem numerická excentricita, který nachází uplatnění v druhé části práce, která obsahuje řešené příklady.

Druhou a důležitou část této práce tvoří kapitola s řešenými příklady z prostředí fyziky, které ukazují využití kuželoseček a jejich rovnic i v jiných než čistě matematických úlohách a napomáhají tak k pochopení některých mezipředmětových vztahů.

Protože se na základě rešerše v kapitole 2 ukazuje, že dominuje výuka kuželoseček spíše z pohledu analytické geometrie, tak se tato práce příliš nezabývá kuželosečkami z pohledu deskriptivní geometrie. Protože byl výklad tvořen zejména pro potřeby řešených příkladů v druhé části práce, nejsou zde uvedeny pojmy jako jsou například tečna kuželosečky či průsečík přímky s kuželosečkou.

## 2 Rešerše RVP a ŠVP

Škola je zavázána plnit požadavky rámcových vzdělávacích programů (RVP) dané ministerstvem školství. Rámcové vzdělávací plány jsou obsahově různé v závislosti na tom, pro který typ školy je program vypracován. Pro potřeby této diplomové práce byla provedena rešerše, která měla za úkol zjistit, na jakých typech škol jsou kuželosečky vyučovány. Bylo procházeno zhruba 270 RVP určené pro gymnázia, nástavbová studia, konzervatoře, obory E, obory H, obory J a obory L0 a M. Téma kuželosečky je obsaženo v následujících RVP:

- RVP G Gymnázia
- 26-45-L/51 Telekomunikace
- 26-45-M/01 Telekomunikace
- 36-46-M/01 Geodzie a katastr nemovitostí
- 78-42-M/01 Technické lyceum
- 78-42-M/06 Kombinované lyceum

RVP jsou dále zpracovávány na školách a tvoří kostru pro sestavování školních vzdělávacích programů (ŠVP). Tento dokument upřesňuje informace o studovaném programu na konkrétní škole. To mimo jiné znamená, že každá škola může rozšířit povinnou část danou RVP. Může docházet také k tomu, že i mimo výše uvedené RVP se bude téma kuželosečky vyskytovat.

V rámci této rešerše bylo rozšíření o téma kuželosečky zjištěno například na těchto školách a oborech:

- 23-41-M/01 Strojírenství (Střední průmyslová škola, Klatovy)
- 26-41-M/01 Elektrotechnika (Střední průmyslová škola, Klatovy)
- 63-41-M/02 Obchodní akademie (Obchodní akademie a Vyšší odborná škola ekonomická, Svitavy)
- 36-47-M/01 Stavebnictví (Střední průmyslová škola stavební, České Budějovice)

Ze seznamu lze vidět, že zejména technicky orientované školy téma kuželosečky do svých ŠVP zařazují i přesto, že jim to RVP přímo nepřikazují. I z tohoto důvodu se domnívám, že by tato diplomová práce mohla být přínosem. Nutno podotknout, že všechny jmenovitě zmíněné obory jsou zakončeny maturitní zkouškou.

### 2.1 Porovnání výuky křivek na různých typech středních škol

V této kapitole budou rozebrány rozdíly v pojetí výuky kuželoseček na školách, které ho mají součástí buď rámcového vzdělávacího programu nebo školního vzdělávacího programu.

Na gymnáziích je výuka kuželoseček poměrně obsáhlá. Studenti se zde učí využívat charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření, z analytického vyjádření kuželosečky naopak určují základní údaje o kuželosečkách a v neposlední řadě se učí analyticky určit vzájemnou polohu přímky a kuželosečky.

Na studijním oboru 26-45-L/51 Telekomunikace se studenti seznamují s kuželosečkami v základech technického kreslení.

Na studijním oboru 26-45-M/01 Telekomunikace se studenti učí o kuželosečkách v základech technického kreslení, kdy se učí, jak se kuželosečky konstruují.

Na studijním oboru 36-46-M/01 Geodzie a katastr nemovitostí se studenti věnují kuželosečkám v rámci tvorby map - zobrazování těles a ploch, kdy při konstrukčních úlohách studenti využívají dovednosti konstrukce kuželoseček.

Také ve studijním oboru 78-42-M/01 Technické lyceum je téma kuželosečky poměrně hojně zastoupeno. Studenti se zde učí charakteristiky jednotlivých kuželoseček, učí se jejich vlastnosti a jejich analytická vyjádření, zkoumají způsoby konstrukce kuželoseček a využívají jejich vlastnosti k řešení technických problémů. Studenti se s kuželosečkami setkávají také při výuce deskriptivní geometrie.

Studenti oboru 78-42-M/06 Kombinované lyceum se při výuce kuželoseček učí základním vlastnostem kuželoseček v rámci předmětu deskriptivní geometrie.

obor	učivo v RVP	vyučováno v rámci
RVP G Gymnázia	kuželosečky (kružnice, elipsa, parabola a hyperbola)	matematika a její aplikace
26-45-L/51 Telekomunikace	kuželosečky	technické kreslení
26-45-M/01 Telekomunikace	konstrukce kuželoseček, technické křivky	technické kreslení
36-46-M/01 Geodzie a katastr nemovitostí	kuželosečky	katastr nemovitostí a tvorba map
78-42-M/01 Technické lyceum	kuželosečky	aplikovaná matematika
78-42-M/06 Kombinované lyceum	základní vlastnosti a konstrukce kuželoseček (elipsy, hyperboly a paraboly)	deskriptivní geometrie

Tabulka 1: Porovnání RVP

Na klatovské průmyslové škole se na oborech 26-41-M/01 Strojírenství a 26-41-M/01 Elektrotechnika učí o kuželosečkách stejné informace jako studenti gymnázií.

Také v Českých Budějovicích se na Střední průmyslové škole stavební na oboru 36-47-M/01 Stavebnictví učí stejným znalostem, jako studenti gymnázií.

Na svitavské Obchodní akademii se pod studijním oborem 63-41-M/02 Obchodní akademie učí z kuželoseček o kružnici a elipse, konkrétně se učí sestavení rovnic charakterizující danou kuželosečku a určení vzájemné polohy přímky a kuželosečky.

V Českých Budějovicích se na Střední průmyslové škole stavební na oboru 36-47-M/01 Stavebnictví učí stejným znalostem jako studenti gymnázií.

studijní obor a škola	učivo v ŠVP	vyučováno v rámci
23-41-M/01 Strojírenství (Střední průmyslová škola, Klatovy)	analytické vyjádření kuželoseček v rovině; vzájemná poloha přímky a kuželosečky v rovině	matematika
26-41-M/01 Elektrotechnika (Střední průmyslová škola, Klatovy)	analytické vyjádření kuželoseček v rovině; vzájemná poloha přímky a kuželosečky v rovině	matematika
63-41-M/02 Obchodní akademie (Obchodní akademie a Vyšší odborná škola ekonomická, Svitavy)	kuželosečky (kružnice, elipsa); vzájemná poloha přímky a kuželosečky	matematika
36-47-M/01 Stavebnictví (Střední průmyslová škola stavební, České Budějovice)	kuželosečky (kružnice, elipsa, hyperbola, parabola); vzájemná poloha kuželosečky a přímky	matematika

Tabulka 2: Porovnání ŠVP

Z výše uvedeného přehledu lze usoudit, že téma kuželosečky je zastoupeno především na technicky zaměřených studijních oborech, zakončené maturitní zkouškou. Nejvíce je z téma kuželoseček probíráno jejich analytické vyjádření a práce s ním. Méně se vyskytuje téma kuželoseček v souvislosti s deskriptivní geometrií. I proto se tato práce bude zaměřovat na kuželosečky a jejich analytické vyjádření.

### 3 Vznik kuželoseček: Řez rotační kuželovou plochou rovinou

#### Otázka

Proč se elipse, kružnici, parabole a hyperbole říká kuželosečky? Pokuste se odpověď nalézt na appletu <https://www.geogebra.org/m/upkgqxc5>.

Elipsu, kružnici, parabolu a hyperbolu označujeme jako kuželosečky, protože tyto křivky jsou výsledkem řezu rotační kuželové plochy rovinou řezu.

#### Otázka

Co by se stalo, kdyby rovina řezu procházela vrcholem rotační kuželové plochy? Odpověď na tuto otázku najdete na <https://www.geogebra.org/m/dq3uwhtp>.

Pokud rovina řezu prochází vrcholem rotační kuželové plochy, vzniknou tzv. degenerované (singulární) kuželosečky.

#### 3.1 Historické souvislosti

##### 3.1.1 Elipsa v umění antického Řecka

V hrobce makedonského krále Filipa III. Arrhidaia byly objeveny malby z roku 310 př. n. l. Na jedné z nich je nakresleno kolo z bočního úhlu pohledu, kdy se kružnice zobrazuje jako elipsa, jak je vidět na obrázku 1.



Obrázek 1: Malba z roku 310 př. n. l. [12]

##### 3.1.2 Problém zdvojení krychle: Objev paraboly a hyperboly

Mezi nejznámější problémy v historii antické geometrie patří problém zdvojení krychle. Roku 430 př. n. l. chtěli Pythagorejci nalézt euklidovskou konstrukci, pomocí níž bude k libovolné krychli možné zkonstruovat hranu krychle o dvojnásobném objemu. Jinými slovy chtěli umět k zadané krychli zkonstruovat (pouze za pomoci kružítko a pravítka<sup>1</sup>) takovou krychli, která bude mít dvojnásobný objem oproti

<sup>1</sup>Pravítku se tehdy říkalo prostému pravítku bez číselného měřítka. Kružítko bylo používáno pouze na přenášení vzdáleností.



krychli původní.

V pramenech je tento problém zmíněn v dopise Eratosthena z Kyrény (276-194 př. n. l.), který je znám především pro postup nalezení všech prvočísel tzv. Eratosthenovo síto.<sup>2</sup>

Říká se, že Pythagorejci chtěli problém zdvojení krychle rozšířit i mezi ostatní antické občany, aby se našlo řešení tohoto problému rychleji. Shodou okolností byly v té samé době Athény sužovány morem. Říká se, že Pythagorejci věděli, že se zoufalí Athéňané obrátí pro radu k jednomu věštci. Když tak Athéňané učinili, věstec jim na popud Pythagorejců řekl, že pokud dokáží zdvojnásobit krychlový oltář v Apollonově chrámu, morová epidemie skončí. Athéňané neprodleně zkonstruovali větší oltář, ale epidemie moru neustávala. Vydali se proto zpátky za věstcem s otázkou, proč mor stále nabírá na síle. Věstec jim odvětil, že oni nezdvojnásobili objem krychle, nýbrž pouze zdvojnásobili každou hranu krychle a objem se tedy zvětšil 8 krát a ne 2 krát. Athéňané prosili o pomoc nejlepší geometry své doby. Naneštěstí si nikdo nevěděl rady a morová epidemie tak pokračovala dál. I přesto, že se nepodařilo zdvojnásobit oltář v Apollonově chrámu, epidemie nakonec ustala. Athéňané si to vysvětlovali nekonečnou shovívavostí boha Apollona.

Prostým výpočtem lze problém vyřešit jednoduše.

$$V_2 = 2 \cdot V_1,$$

$$x^3 = 2 \cdot a^3,$$

$$x = \sqrt[3]{2} \cdot a,$$

kde  $a$  je hrana původní krychle a  $x$  je hrana krychle o dvojnásobném objemu.

Každou stranu stačí zvětšit  $\sqrt[3]{2}$  krát.

Problém ale je, jak pomocí pravítka a kružítko přesně zkonstruovat tuto hodnotu. Antičtí geometři se nespokojili pouze s přibližným řešením a pokračovali v hledání, jak stranu zvětšit přesně  $\sqrt[3]{2}$  krát.

Dalším, kdo se problémem zdvojení krychle zabýval, byl Hippocrates z Chiu (470 – 410 př. n. l.), který se stejně jako mnozí Athéňané k řešení problému nedostal. Avšak vedlejším produktem jeho snažení bylo objevení rovnice paraboly a hyperboly a to z rovnosti

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}. \quad (1)$$

Antického matematika Menaechma (380 – 320 př. n. l.) poté napadlo přepsat rovnici (1) do tří rovnic (2), (3), (4).

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \quad (2)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{b} \quad (3)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} \quad (4)$$

---

<sup>2</sup>Eratosthenovo síto je postup nalezení všech prvočísel od 2 do čísla  $n$ . Princip spočívá v odstraňování násobků čísel. Pro čísla 2 až 20 by postup vypadal následovně. Vezmeme nejmenší číslo, číslo 2, a začneme vyškrtávat jeho násobky (4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20). Vezmeme další číslo, číslo 3, a začneme opět vyškrtávat jeho násobky (6, 9, 12, 15, 18). Další neškrtnuté číslo je číslo 5. Všechny násobky čísla 5 jsme ale už vyškrtli. To samé platí i pro další neškrtnutá čísla 11, 13, 17 a 19. Pro řadu čísel 2 až 20 jsou prvočísky neškrtnutá čísla 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

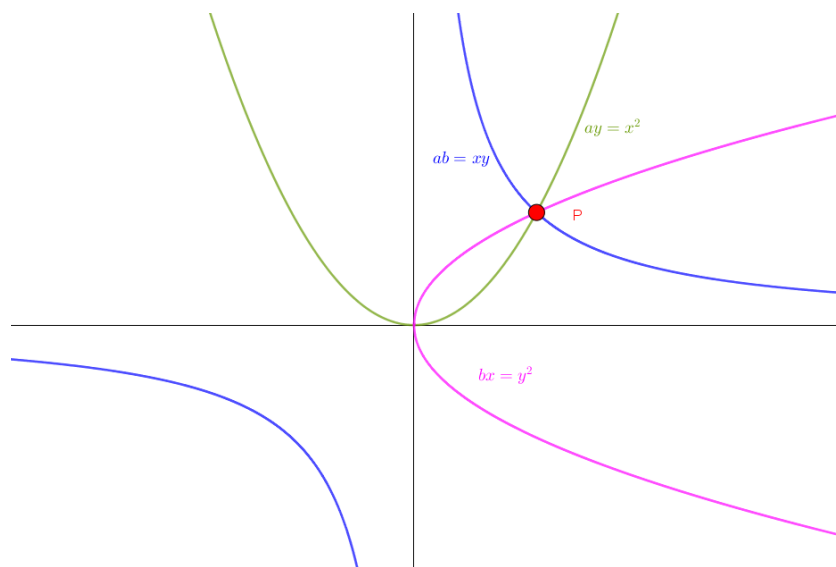
Po odstranění zlomků vzniknou rovnosti (5), (6), (7).

$$x^2 = ay \tag{5}$$

$$y^2 = bx \tag{6}$$

$$xy = 2ab \tag{7}$$

Grafickým řešením soustavy rovnic (5), (6), (7) je průsečík  $P$  křivek (parabol) reprezentovaných v kartézské soustavě souřadnic dvěma rovnicemi parabol (5) a (6) a rovnicí (7), která představuje rovnici hyperboly<sup>3</sup>  $y = \frac{2ab}{x}$ , která také prochází průsečíkem  $P$ . Ukázka výše popsaného řešení je k nalezení na <https://www.geogebra.org/m/k2p2cb26> a na obrázku 2.



Obrázek 2: Menaechmovo pokus o vyřešení problému zdvojení krychle

Bohužel dle publikace [4] není jisté, zda na základě výše uvedeného bylo Meneachmem odvozeno odečítání vlastností kuželoseček od kužele nebo zda tímto pokusem o vyřešení problému zdvojení krychle jeho studium kuželoseček skončilo. Původní text s Meneachmovým řešením byl bohužel ztracen.

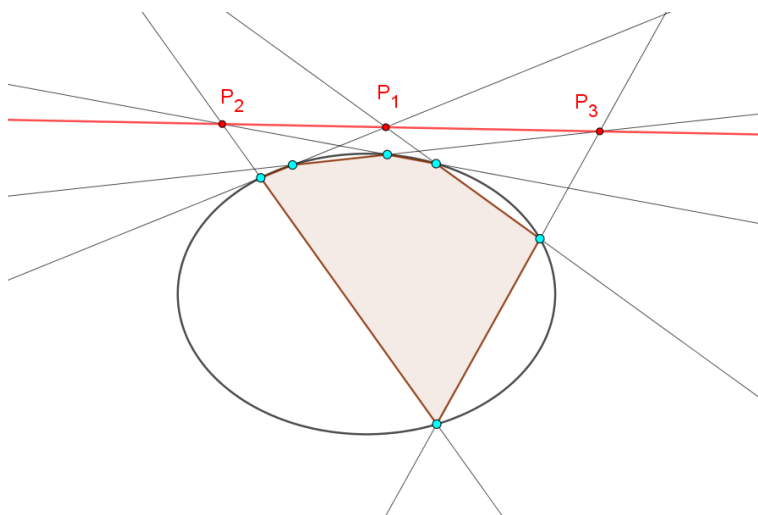
### 3.1.3 Apollonius z Pergy

Mezi významné antické matematiky, kteří se zabývali kuželosečkami, patřil Apollonius z Pergy (262 - 190 př. n. l.), který je označován jako *Velký geometr*. Ve svém osmidílném díle *Kónika - Pojednání o kuželosečkách* mimo již známé kružnice definoval rotační kuželovou plochu a poté definoval i zbylé kuželosečky jako řezy rotační kuželové plochy rovinou. Mimo to také jako první definoval asymptoty hyperboly. Bohužel se v řeckém originálu zachovaly pouze čtyři díly, tři se dochovaly v arabských překladech a osmý díl se ztratil v dějinách času. Kuželosečky se dočkaly uznání zejména po objevu Isaaca Newtona, který objevil, že tělesa ve vakuu v gravitačním poli pohybují po trajektoriích, které odpovídají právě kuželosečkám. [2]

<sup>3</sup>Tato rovnice popisuje graf nepřímé úměrnosti, kterým je právě hyperbola.

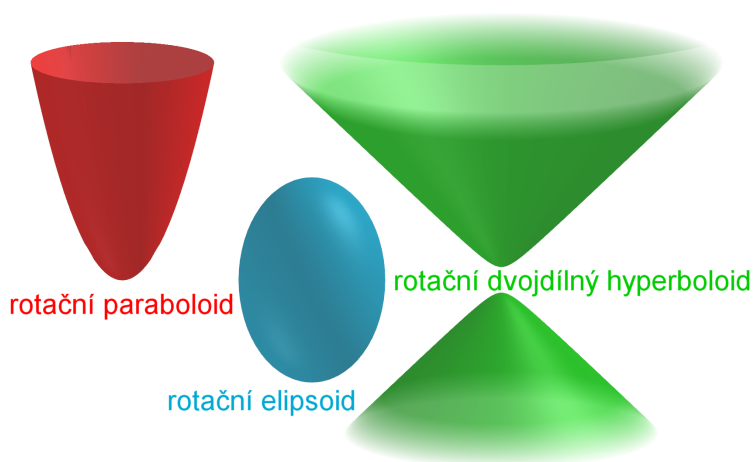
### 3.1.4 Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623 - 1663) je ve souvislosti s kuželosečkami známý především ze spojitosti s Pascalovou větou z roku 1639, která říká, že průsečíky tří dvojic protilehlých stran šestiúhelníka vepsaného kuželosečce leží na jedné přímce (tzv. Pascalova přímka). Grafická podoba této věty spolu s jednou otázkou je na <https://www.geogebra.org/m/w9sn8e7f>. Tato věta neplatí jen pro elipsu, ale i pro ostatní kuželosečky.



Obrázek 3: Pascalova věty

Důsledků Pascalovy věty se hojně využívá v projektivní geometrii, která se vyvinula o 170 let později. Počátek projektivní geometrie znamenal nárůst zájmu o studium kuželoseček a dal tak vzniknout kvadrikám.

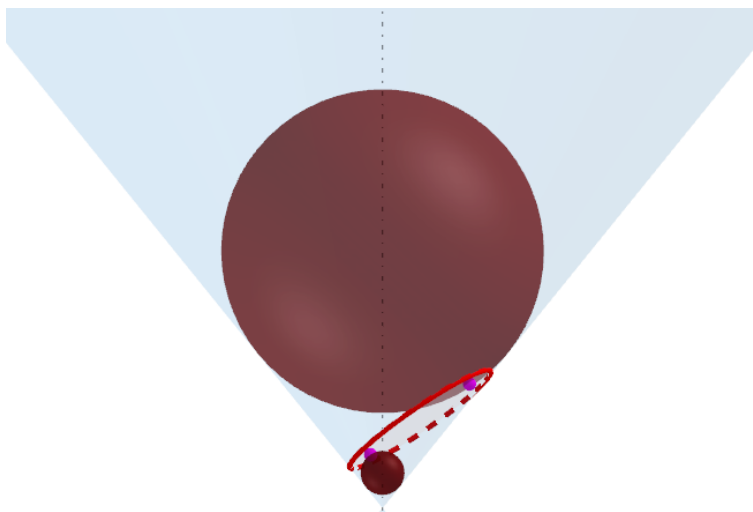


Obrázek 4: Příklady rotačních kvadrik

### 3.1.5 Germinal Pierre Dandelin

Belgický matematik Germinal Pierre Dandelin (1794 - 1847) zjistil, že pro kuželosečky, vzniklé řezem rotační kuželové plochy, platí následující věta, později známá jako Quetelet-Dandelinova věta<sup>4</sup>, která říká, že ohniska eliptického řezu rotační kuželové plochy jsou dotykové body kulových ploch, které jsou vepsány kuželové ploše a dotýkají se roviny řezu.

Na obrázku 5 je ukázka této věty pro elipsu, nicméně tato věta platí pro všechny kuželosečky. Na <https://www.geogebra.org/m/dh9znadc> je grafická demonstrace Quetelet-Dandelinovy věty.



Obrázek 5: Quetelet-Dandelinova věta pro elipsu

---

<sup>4</sup>Lambert Adolphe Jacques Quételet (1794 - 1847) se zabýval stejným problémem, nicméně důkaz této věty provedl roku 1822 G. P. Dandelin.

## 4 Elipsa a kružnice

### 4.1 Povídání o elipse a kružnici

Přestavme si, že máme papír připevněný k desce. Do tohoto papíru zabodneme do libovolného místa špendlík, k němuž připevníme provázek. K druhému konci provázku připevníme tužku a začneme na papír kreslit čáru tak, aby byl provázek stále napnutý. To, co se začne na papíře vykreslovat, je kružnice. Bod, do kterého jsme špendlík zapíchli, budeme označovat jako střed  $S$ .

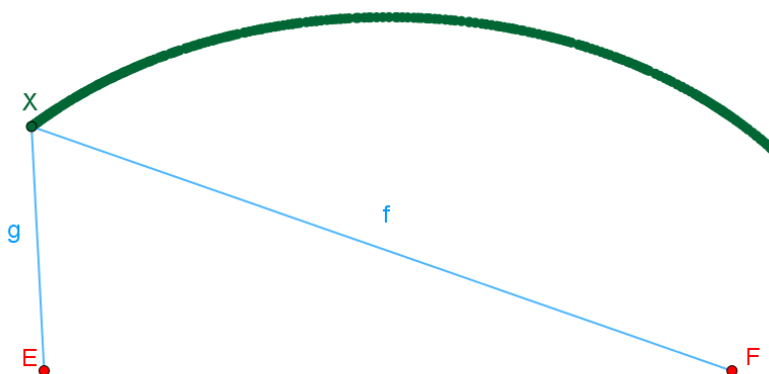
#### Definice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které leží ve stejné vzdálenosti od pevně daného bodu. Tento bod nazveme středem  $S$ . Vzdálenost libovolného bodu kružnice od středu  $S$  kružnice nazveme poloměr  $r$ .

Nyní si představme jinou situaci. Do papíru zapíchneme špendlíky dva a ke každému připevníme konec provázku. Tento provázek napneme pomocí tužky a opět začneme kreslit na papír tak, aby byl provázek stále napnutý.

#### Otázka

Co se bude vykreslovat tentokrát? Bude to kružnice nebo jiná křivka? Vyzkoušejte si tuto situaci na <https://www.geogebra.org/m/u9ggxrh3> a odpovězte pomocí něj na otázku. Na obrázku 6 můžete vidět vznikající křivku.



Obrázek 6: Vznik elipsy pomocí provázkové metody

Vykreslující se křivce říkáme elipsa, body  $E$ ,  $F$  nazveme ohnisky elipsy.

### Otázka

Elipsu můžeme tedy sestavit pomocí dvou bodů (ohnisek  $E$ ,  $F$ ) a ještě jedné informace. Jaká informace to je? Pokud nevíte, podívejte se na <https://www.geogebra.org/m/w2d2c2nb>. Co musí platit pro vzdálenosti bodu  $X$  od bodů  $E$ ,  $F$ ? Odpovědí na otázku je následující definice elipsy.

### Definice

Elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají od dvou různých a pevně daných bodů (ohnisek  $E$ ,  $F$ ) konstantní součet vzdáleností.

### Otázka

V jakém fyzikálním zákonu týkající se nebeské mechaniky jste již slyšeli pojem ohnisko?

Pojem ohnisko známe z Keplerových zákonů. První Keplerův zákon říká: „Planety obíhají kolem Slunce po eliptických trajektoriích, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce.“

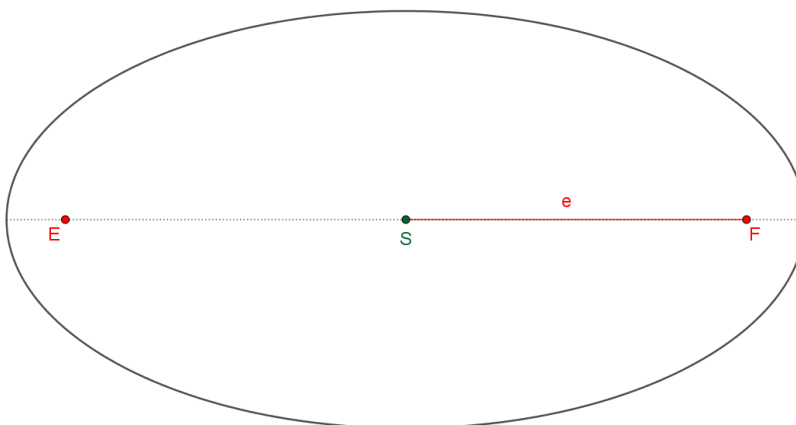
### Definice

Střed  $S$  elipsy je bod, který je středem úsečky  $EF$ , kde  $E$  a  $F$  jsou ohniska elipsy.

Zavedme si nyní nový pojem, který bude označovat polovinu vzdálenosti ohnisek (nebo-li vzdálenost ohniska od středu elipsy). Takové vzdálenosti budeme říkat excentricita (výstřednost) a označíme jí  $e$ .

### Definice

Excentricita (výstřednost)  $e$  je rovna vzdálenosti ohniska od středu  $S$  elipsy. Platí  $|SE| = |SF| = e$ , kde  $E$  a  $F$  jsou ohniska elipsy.



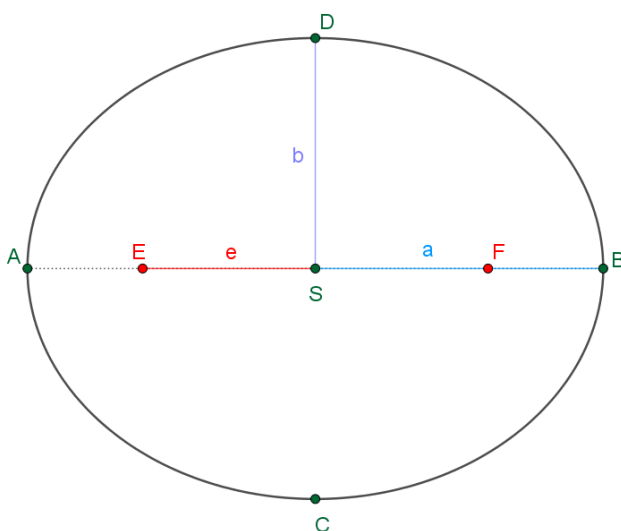
Obrázek 7: Excentricita elipsy

### Otázka

Co se stane, když dvě ohniska splynou? Jak by taková elipsa vypadala? Měňte na odkazu <https://www.geogebra.org/m/dvcgagut> vzdálenost ohnisek pomocí parametru  $e$  a všimněte si, jak se mění podoba elipsy. Ukázka appletu je na obrázku 7.

Zopakujme si, co již o elipse víme. Umíme elipsu definovat a víme, že čím jsou ohniska blíže středu elipsy, tím se více elipsa podobá kružnici. Pokud ohniska splynou (střed  $S$ ), nejedná se již o elipsu, ale o kružnici. Kružnice je tedy speciálním případem elipsy a její excentricita  $e$  je rovna 0.

Na obrázku 8 vidíme základní charakteristiky elipsy. Elipsa má čtyři důležité body. Jedná se o hlavní vrcholy  $A$  a  $B$  a vedlejší vrcholy  $C$  a  $D$ . Hlavní vrcholy  $A$  a  $B$  jsou průsečíky elipsy a přímky určené body  $E, F$ . Vedlejší vrcholy  $C, D$  jsou průsečíky elipsy a přímky kolmé na úsečku  $EF$  procházející středem  $S$ . Vzdálenost  $|SA| = |SB|$  značíme  $a$  a nazýváme ji hlavní poloosa elipsy. Vzdálenost  $|SC| = |SD|$  značíme  $b$  a nazýváme ji vedlejší poloosa elipsy.



Obrázek 8: Změna tvaru elipsy v závislosti na hlavní a vedlejší poloose

### Definice

**Hlavní** poloosa  $a$  je úsečka spojující střed elipsy a hlavní vrchol.

**Vedlejší** poloosa  $b$  je úsečka spojující střed elipsy a vedlejší vrchol.

Podívejme se zpět na definici elipsy. Řekli jsme, že elipsa je množina všech bodů, které mají od dvou pevně daných bodů (ohnisek) konstantní vzdálenost. Nešlo by pomocí pojmů, které jsme si nyní zavedli, určit, čemu se tato konstantní vzdálenost rovná?

### Otázka

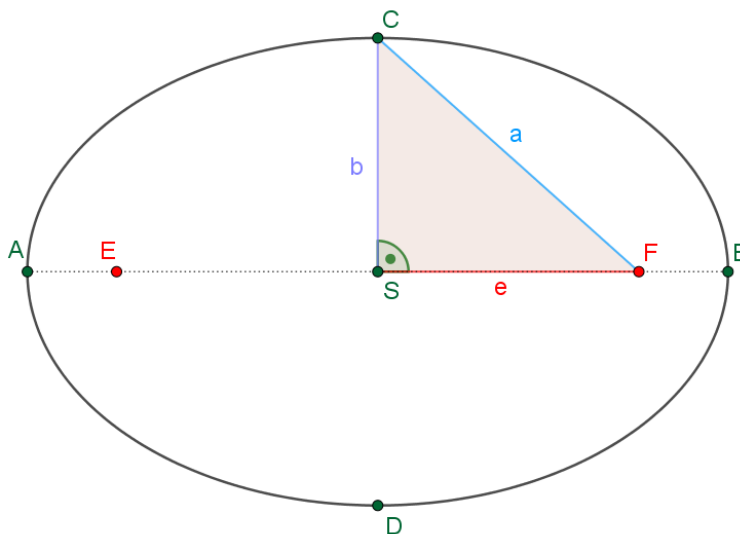
Na <https://www.geogebra.org/m/kqg4krxk> se pokuste vyjádřit, čemu se rovná konstantní vzdálenost z definice elipsy pomocí parametrů, které jsme v této kapitole již definovali.

Elipsu definujeme jako množinu všech bodů, které mají od dvou pevně zvolených bodů (ohnisek) konstantní vzdálenost rovnou  $2a$ .

### Otázka

Pro jaké hodnoty  $a$  a  $b$  se elipsa stane kružnicí? Pro zodpovězení této otázky měňte na odkazu <https://www.geogebra.org/m/dscnpemc> velikost  $a$  a  $b$ .

Jaký je vztah mezi excentricitou a hlavní a vedlejší poloosou? Nápovědu naleznete na obrázku 9.



Obrázek 9: Základní charakteristiky elipsy

Na základě Pythagorovy věty můžeme říci, že platí rovnost  $a^2 = b^2 + e^2$ .

Čím více jsou si hodnoty  $a$  a  $b$  bližší, tím je elipsa svým tvarem více podobná kružnici. Nabízí se otázka, jestli by se nenašla nějaká veličina, která by udávala, jak moc se elipsa svým tvarem blíží kružnici. Čím více se elipsa přibližuje kružnici, tím je její excentricita blíže 0. Zavedeme si proto poměr  $\frac{e}{a}$ , kterému říkáme numerická excentricita  $\epsilon$ .

### Definice

Numerická excentricita  $\epsilon$  se rovná poměru  $\frac{e}{a}$ . Hodnota numerické excentricity pro elipsu vyjadřuje, jak moc je elipsa svým tvarem podobná kružnici.

### Otázka

Jaká bude numerická excentricita pro kružnici? Jakých hodnot bude nabývat numerická excentricita pro elipsu? Zkuste odpověď najít na <https://www.geogebra.org/m/hccfku8t>.

Numerickou excentricitu lze snadno využít k odlišení jednotlivých kuželoseček, jak je vidět v tabulce 3. Pojem numerická excentricita  $\epsilon$  se často používá například v astronomii, kde se jím charakterizuje, jak moc je trajektorie kosmického tělesa podobná kružnici.



kuželosečka	hodnoty numerické excentricity $\epsilon$
kružnice	0
elipsa	(0; 1)

Tabulka 3: Hodnoty numerické excentricity pro kružnici a pro elipsu

V tabulce 4 je výčet numerických excentricit různých vesmírných objektů Sluneční soustavy. Platí, že čím je numerická excentricita blíže k nule, tím je trajektorie dráhy vesmírného objektu více podobná kružnici. Protože se tyto objekty pohybují po elipse (uzavřená křivka), říkáme o nich, že jsou periodické. Na [https://1url.cz/@3D\\_SolarSystem](https://1url.cz/@3D_SolarSystem) jsou tyto objekty zobrazeny, můžeme si tak udělat představu, kde se který objekt nachází. Můžeme také změnit rychlost animace, vlevo je "check box", který spustí animaci. Do animace můžeme přidávat i další objekty Sluneční soustavy, stačí do okna vlevo vepsat anglický název objektu, který chceme zobrazit a stisknout Enter. Křížkem u názvu objektu můžeme naopak objekt smazat.

název objektu	typ objektu	numerická excentricita $\epsilon$
Merkur	planeta	0,207
Venuše	planeta	0,007
Země	planeta	0,017
Mars	planeta	0,094
Ceres	trpasličí planeta	0,079
Jupiter	planeta	0,048
Saturn	planeta	0,052
Uran	planeta	0,047
Neptun	planeta	0,010
Pluto	trpasličí planeta	0,249
Makemake	trpasličí planeta	0,161
29P/Schwassmann–Wachmann	kometa	0,044
1P/Halleyova kometa	kometa	0,967
67P/Churyumov–Gerasimenko	kometa	0,641
110P/Hartley	kometa	0,315
75D/Kohoutek	kometa	0,493

Tabulka 4: Příklady vesmírných objektů a numerických excentricit jejich trajektorií [7]

#### Otázka

Který z objektů v tabulce 4 má trajektorii nejvíce podobnou kružnici? Který nejméně?

Z objektů v tabulce 4 má trajektorii nejvíce podobnou kružnici planeta Venuše, protože má nejmenší hodnotu numerické excentricity  $\epsilon$ . Nejméně podobnou trajektorii kružnici má z tabulky 4 Halleyova

kometa, protože má numerickou excentricitu  $\epsilon$  z tabulky 4 největší.

Pozor, neznamená to, že planety musí numerickou excentricitu  $\epsilon$  vždy menší než komety. Například kometa 29P/Schwassmann–Wachmann má numerickou excentricitu  $\epsilon$  menší než planeta Jupiter.

## 4.2 Středová rovnice elipsy

Už dříve jste se učili analytické vyjádření křivek, vzpomeňme si například na přímku. Známe obecnou rovnici přímky ( $ax + by + c = 0$ ), parametrické vyjádření přímky<sup>5</sup> ( $X = A + t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$ ) a směrnicový tvar přímky ( $y = kx + q$ ). Matematicky umíme popsat i elipsu. V této kapitole jsou zmíněny pouze takové středové rovnice elipsy, které mají jednu z os rovnoběžnou s osou  $x$ .

Nyní si odvodíme středovou rovnici elipsy se středem v počátku ( $S = [0, 0]$ ) a hlavní poloosou  $a$  rovnoběžnou s osou  $x$ . Víme, že platí  $a^2 = b^2 + e^2$ . Dále platí, že libovolný bod elipsy má od ohnisek konstantní součet vzdáleností roven hodnotě  $2a$ . Označme si takový libovolný bod  $X = [x, y]$ . Dále si označme ohniska  $E = [-e, 0]$  a  $F = [e, 0]$ . Na základě znalosti výpočtu vzdálenosti dvou bodů a algebraických úprav můžeme odvodit středovou rovnici elipsy se středem v počátku.

$$|EX| + |FX| = 2a$$

Při matematických úpravách je výhodné převést jednu z odmocnin na druhou stranu.

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \quad / - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Nyní celou rovnici umocníme. Nezapomeňte, že pravou stranu rovnice musíme umocnit podle vzorce  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad / ^2$$

$$(x+e)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$$

Nyní rovnici upravíme tak, že umocníme závorky, co nejsou pod odmocninou, a osamostatníme člen s odmocninou.

$$x^2 + 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2 \quad / - x^2 - e^2 - y^2 + 2ex$$

$$4ex - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad / : (-4)$$

$$a^2 - ex = a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} \quad / ^2$$

$$(a^2 - ex)^2 = a^2(x^2 - 2ex + e^2 + y^2)$$

Na levé straně umocníme závorku dle vzorce  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ , na pravé straně rovnice roznásobíme závorku členem  $a^2$  a upravíme rovnici tak, aby na levé straně rovnice byly pouze členy obsahující  $x^2$  nebo  $y^2$ .

$$a^4 - 2a^2ex + e^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 \quad / + 2a^2ex - a^2e^2 - e^2x^2$$

$$a^4 - a^2e^2 = a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$

<sup>5</sup>I elipsu, stejně jako ostatní kuželosečky, bychom uměli vyjádřit parametricky. Avšak v této práci se tímto druhem vyjádření zabývat nebudeme.

$$x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad (8)$$

Víme, že  $a^2 = b^2 + e^2$ , můžeme výraz upravit do tvaru  $b^2 = a^2 - e^2$  a dosadit do (8).

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad / : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9)$$

Rovnice (9) platí pro elipsu se středem v počátku ( $S = [0, 0]$ ) a hlavní poloosa je rovnoběžná s osou  $x$ . Pokud bychom chtěli odvodit středovou rovnici elipsy se středem v počátku a hlavní poloosou rovnoběžnou s osou  $y$ , stačilo by změnit souřadnice ohnisek tak, že  $E = [0, -e]$  a  $F = [0, e]$ .

Dále se nabízí otázka, jak by vypadala středová rovnice elipsy, pokud by její střed ležel mimo počátek. Střed bude mít obecné souřadnice  $S = [m, n]$ . Nyní by stačilo označit ohniska tak, že pro elipsu s hlavní poloosou rovnoběžnou s osou  $x$  platí  $E = [-e + m, n]$  a  $F = [e + m, n]$ . Pro elipsu s hlavní poloosou rovnoběžnou s osou  $y$  platí  $E = [m, -e + n]$  a  $F = [m, e + n]$ . Odvození by vypadalo obdobně.

Rovnice (10) platí pro elipsu jejíž hlavní poloosa je rovnoběžná s osou  $x$  a má střed o souřadnicích  $S = [m, n]$ .

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1 \quad (10)$$

Rovnice (11) platí pro elipsu jejíž hlavní poloosa je rovnoběžná s osou  $y$  a má střed o souřadnicích  $S = [m, n]$ .

$$\frac{(x - m)^2}{b^2} + \frac{(y - n)^2}{a^2} = 1 \quad (11)$$

Pokud bychom chtěli pomocí středové rovnice popsat elipsu se středem o souřadnicích  $[m, n]$ , která má hlavní poloosu potočenou o úhel  $\alpha$ , museli bychom použít rovnici ve tvaru

$$\frac{(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))^2}{a^2} + \frac{(x \sin(\alpha) - y \cos(\alpha))^2}{b^2} = 1. \quad (12)$$

Na <https://www.geogebra.org/m/cu9sbpe4> je grafická aplikace rovnice (12). Rovnice (12) je zde ilustrativně, v této práci se s ní dále pracovat nebude.

#### Otázka

Na appletu <https://www.geogebra.org/m/rqkdje2k> zkoumejte, jak se mění tvar a poloha elipsy na parametrech  $m, n$  a  $a, b$ . Pro jaké hodnoty parametrů bude elipsa kružnicí? Na jakých parametrech to nezávisí?

Elipsa bude kružnicí pro  $a = b$ , na parametrech  $m$  a  $n$  závisí pouze poloha elipsy.

### 4.3 Středová rovnice kružnice

#### Otázka

Čím se kružnice liší od elipsy?

Kružnice se od elipsy liší tím, že pro kružnici platí  $a = b$ , excentricita je rovna 0. Tyto informace jsme odvodili v předchozí kapitole o elipse.

Pokud bychom chtěli napsat středovou rovnici kružnice, můžeme vycházet z toho, co jsme si odvodili pro elipsu. Pro elipsu, jejíž hlavní poloosa je rovnoběžná s osou  $x$  víme, že platí

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1.$$

Víme, že pro elipsu platí rovnost  $a = b$ . Označme si takovou vzdálenost jako  $r$ . Po dosazení dostáváme

$$\frac{(x - m)^2}{r^2} + \frac{(y - n)^2}{r^2} = 1.$$

Po vynásobení celé rovnice  $r^2$  vznikne

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2. \tag{13}$$

Rovnici (13) označujeme jako středovou rovnici kružnice se středem  $S = [m, n]$  a poloměrem  $r$ .

## 5 Parabola

### 5.1 Povídání o parabole

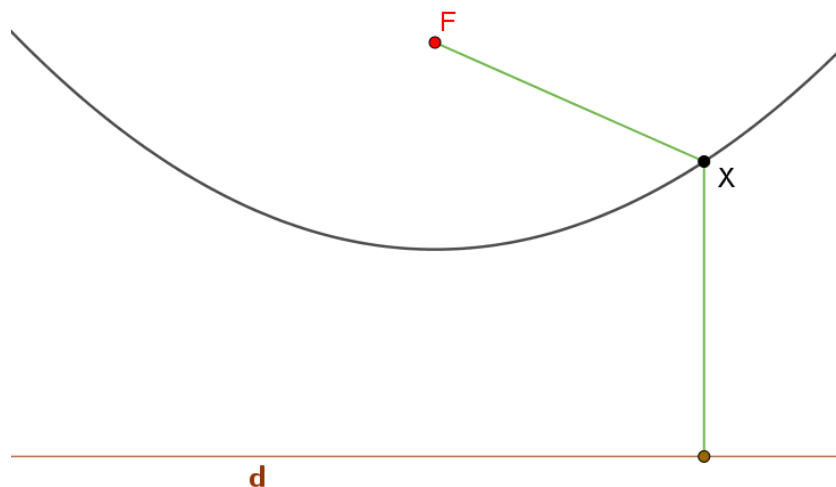
Další kuželosečkou je parabola. Na rozdíl od elipsy má pouze jedno ohnisko  $F$  a tzv. řídicí přímku  $d$ . Na <https://www.geogebra.org/m/qmvjezrf> je vykreslena parabola, její ohnisko  $F$  a řídicí přímka  $d$ . Pohybuje s bodem  $X$  a pokuste se formulovat definici paraboly.

#### Definice

Parabola je množina bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od přímky (řídicí) jako od pevně daného bodu (ohniska), který na přímce neleží.

#### Otázka

Jak musíme změnit polohu ohniska  $F$ , aby se parabola více přibližovala řídicí přímce  $d$ ? Pokud nevíte, pokuste se nalézt odpověď na <https://www.geogebra.org/m/qmvjezrf>.



Obrázek 10: Applet: Definice paraboly

O parabole, jejíž řídicí přímka se nachází pod ohniskem (jako na obrázku 10), se říká, že je otevřena směrem nahoru. Víme, že mění-li se poloha ohniska od řídicí přímky  $d$ , mění se tvar paraboly. Je tedy vhodné zavést parametr, který by charakterizoval vzdálenost ohniska od řídicí přímky. Takový parametr budeme označovat písmenem  $p$ .

#### Otázka

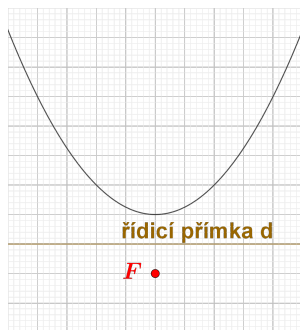
Jaký další významný bod se na parabole nachází? Pokuste se najít odpověď pomocí odkazu <https://www.geogebra.org/m/uhab7xfp>.

## Definice

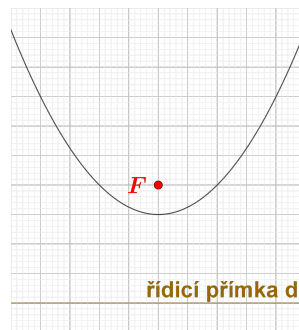
Vzdálenost ohniska  $F$  od řídicí přímky  $d$  nazýváme parametr a označujeme  $p$ ,  $p = |Fd|$ . V polovině vzdálenosti mezi bodem  $F$  a řídicí přímkou  $d$  se nachází vrchol paraboly  $V$ . Platí tedy  $|FV| = \frac{p}{2}$ .

## Otázka

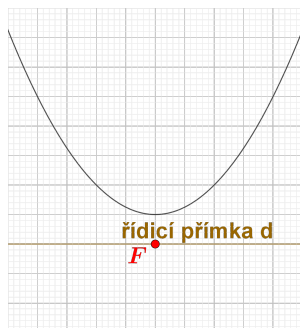
Na kterém obrázku (a) až (f) je vůči vykreslené parabole správně umístěno ohnisko  $F$  i řídicí přímka  $d$ ?



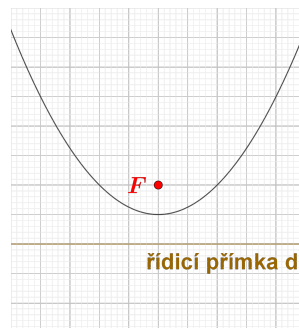
(a)



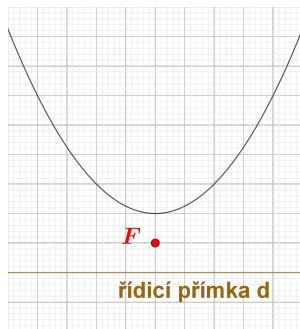
(b)



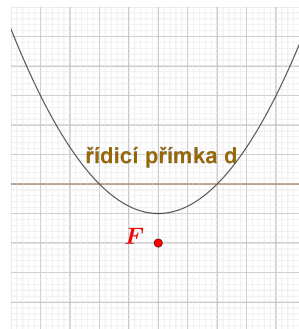
(c)



(d)



(e)



(f)

Obrázek 11: Který obrázek je správně?

Podle definice výše je správně obrázek (d).

U elipsy a kružnice jsme definovali pojem numerická excentricita  $\epsilon = \frac{c}{a}$ . Připomeňme si, že pro kružnici je numerická excentricita rovna 0, u elipsy se pohybuje v intervalu  $(0; 1)$ . Pro parabolu se

numerická excentricita definuje hodnotou 1.

V tabulce 5 naleznete vesmírné objekty, které mají téměř parabolickou trajektorii. To, jaká výsledná trajektorie bude, závisí především na rychlosti daného tělesa. Stává se, že vesmírné objekty mohou svoji rychlost změnit a tím se může změnit i podoba výsledné trajektorie. O níže uvedených kometách můžeme říct, že jsou neperiodické, téměř parabolického tvaru. Je nutné podotknout, že při průletu kolem velkých plynných planet, se komety mohou odchýlit od své původní dráhy a změnit tak i svoji rychlost. Při změně rychlosti může dojít i ke změně numerické excentricity a trajektorie komety přestane být parabolická.

název objektu	typ objektu	numerická excentricita $\epsilon$
C/2019 Y4 (ATLAS)	kometa	0,99924
C/1973 E1 (Kohoutek)	kometa	1,000008
C/1965 S1 (Ikeya-Seki)	kometa	0,999915
C/2006 M4 (SWAN)	kometa	1,000186
C/1957 P1 (Mrkos)	kometa	0,999365
C/2016 U1 (NEOWISE)	kometa	1,0001

Tabulka 5: Příklady vesmírných objektů a numerických excentricit jejich trajektorií [16]

## 5.2 Vrcholová rovnice paraboly

V této kapitole se podíváme na vrcholové rovnice parabol, jejichž řídicí přímka  $d$  je rovnoběžná buď s osou  $x$ , nebo s osou  $y$ .

Odvoďme nyní vrcholovou rovnici paraboly pro případ, kdy je řídicí přímka rovnoběžná s osou  $x$ . Nejprve vezmeme v úvahu případ, kdy parabola bude otevřená směrem nahoru. Víme, že libovolný bod paraboly musí mít stejnou vzdálenost od ohniska jako od řídicí přímky. Označme si libovolný bod paraboly jako  $X = [x, y]$ , vrchol paraboly bude pro jednoduchost v počátku soustavy souřadnic ( $V = [0, 0]$ ), z toho plynou souřadnice ohniska  $F = [0, \frac{p}{2}]$ , kde  $p$  je vzdálenost ohniska  $F$  od řídicí přímky  $d$ .

### Otázka

Pokud víme, že vzdálenost řídicí přímky od ohniska je  $p$ , jakou vzdálenost bude mít bod  $X$  od řídicí přímky  $d$  a jakou od ohniska  $F$  paraboly? Situace je ukázána na obrázku 12.

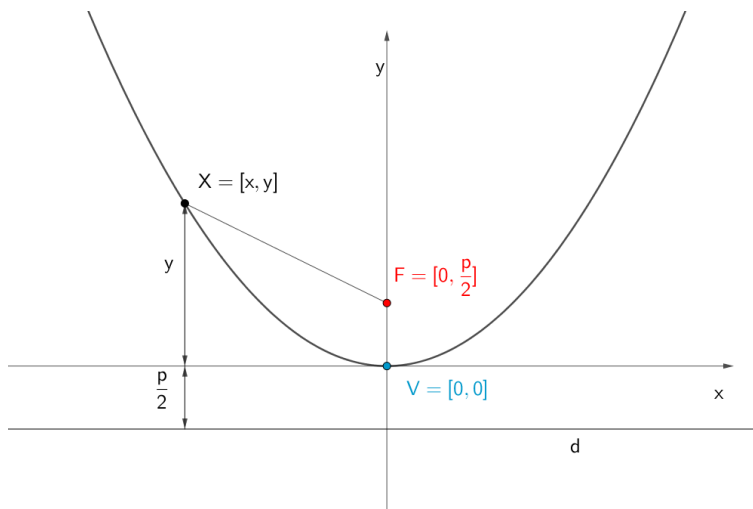
Vzdálenost libovolně zvoleného bodu  $X$  paraboly od řídicí přímky  $d$  je  $|y + \frac{p}{2}|$  a vzdálenost od ohniska  $F$  je  $\sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2}$ .

$$|XF| = |Xd|$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right| \quad /^2$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \quad / - y^2 - \frac{p^2}{4} + py$$

$$x^2 = 2py$$



Obrázek 12: Náčrt situace pro odvození vrcholové rovnice paraboly

Obdobným způsobem můžeme odvodit rovnici paraboly, která je otočena směrem dolů. Označme libovolný bod paraboly jako  $X = [x, y]$ , vrchol paraboly bude v počátku soustavy souřadnic ( $V = [0, 0]$ ), z toho plynou souřadnice ohniska  $F = [0, -\frac{p}{2}]$ .

$$|XF| = |Xd|$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y - \frac{p}{2}\right| \quad /^2$$

$$x^2 + y^2 + py + \frac{p^2}{4} = y^2 - py + \frac{p^2}{4} \quad / -y^2 - \frac{p^2}{4} - py$$

$$x^2 = -2py$$

Dále bychom mohli obdobně odvodit rovnice parabol, jejichž řídicí přímka je rovnoběžná s osou  $y$ . Poté bychom dostali rovnice

$$y^2 = 2px,^6$$

$$y^2 = -2px.^7$$

Pokud bychom chtěli napsat vrcholovou rovnici parabol, kde vrchol  $V$  má obecné souřadnice  $[m, n]$ , dostali bychom rovnice

$$(x - m)^2 = 2p(y - n),$$

$$(x - m)^2 = -2p(y - n),$$

$$(y - n)^2 = 2p(x - m),$$

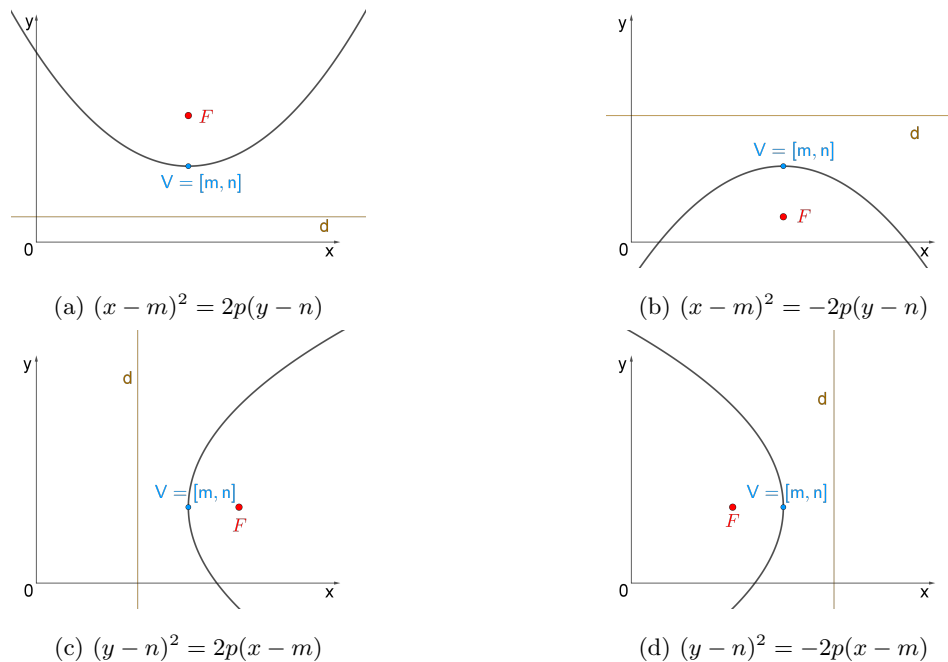
$$(y - n)^2 = -2p(x - m).$$

<sup>6</sup>Pro parabolu otočenou doprava.

<sup>7</sup>Pro parabolu otočenou doleva.



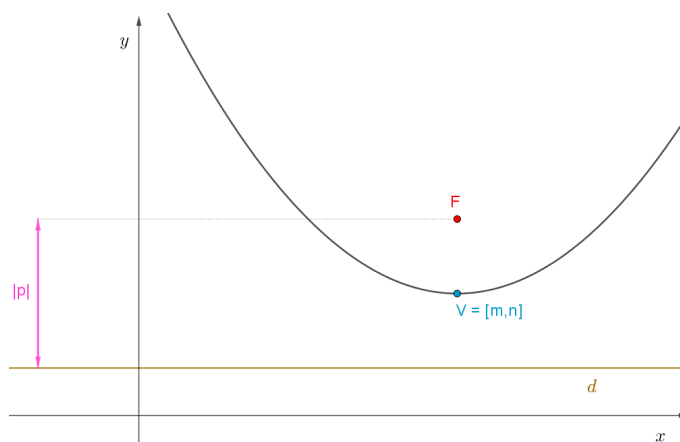
Na obrázku 13 je shrnutí vztahů, které jsme si popsali.



Obrázek 13: Vrcholové rovnice paraboly

#### Otázka

Jaký parametr musíte v appletu na <https://www.geogebra.org/m/ug2buk8z> změnit, abyste dosáhli posunu vrcholu paraboly ve směru osy  $x$  (případně ve směru osy  $y$ )? Co mění parametr  $p$ ?



Obrázek 14: Parabola a její charakteristiky

Posunu ve směru osy  $x$  ( $y$ ) se dosáhne změnou parametru  $m$  ( $n$ ), parametr  $p$  mění vzdálenost mezi ohniskem  $F$  a řídicí přímkou  $d$ .

Pokud bychom chtěli pomocí rovnice popsat parabolu, která má svojí osu pootočenou o úhel  $\alpha$ , museli bychom použít rovnici ve tvaru

$$-x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha) = (x \cdot \cos(\alpha) + y \cdot \sin(\alpha))^2. \quad (14)$$

Na <https://www.geogebra.org/m/kkzuz2rn> je grafická aplikace rovnice (14). Rovnice (14) je zde ilustrativně, v této práci se s ní dále pracovat nebude.

## 6 Hyperbola

### 6.1 Povídání o hyperbole

Poslední kuželosečkou je hyperbola. Vezměme si opět dva libovolné body (ohniska  $E$ ,  $F$ ). Na <https://www.geogebra.org/m/r3hyfrwf> jsou taková dvě ohniska umístěna. Dále je tam i bod  $X$ , který náleží hyperbole. Pohybem bodu  $X$  vyniká hyperbola.

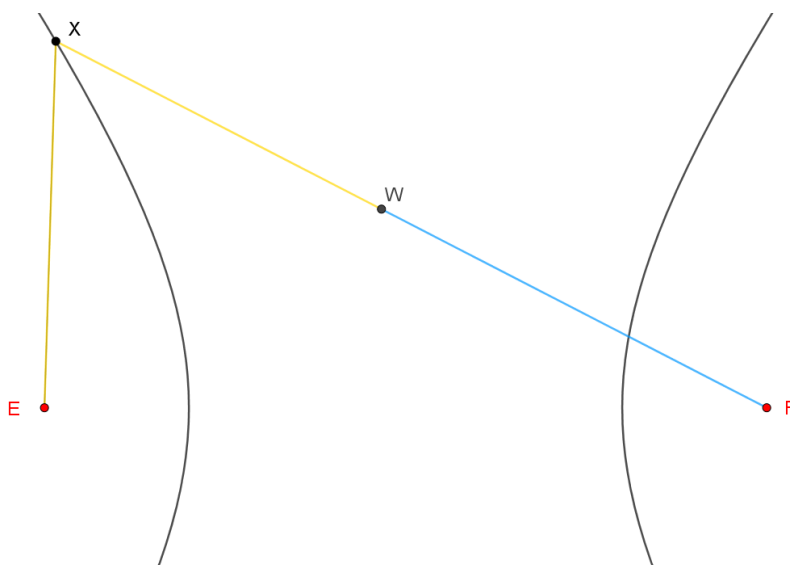
#### Otázka

Jaký je vztah mezi vzdálenostmi  $|EX|$  a  $|FX|$ ? Na <https://www.geogebra.org/m/r3hyfrwf> se pokuste nalézt odpověď na otázku.

#### Definice

Hyperbola je množina bodů v rovině, které mají od dvou různých bodů (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností, který je větší než 0.

Na obrázku 15 je definice hyperboly ukázána graficky, konstantní vzdálenost je zde vyznačena modře.



Obrázek 15: Definice hyperboly

#### Otázka

V čem se liší definice elipsy a hyperboly?

Definice elipsy a hyperboly se liší tím, že v elipse je konstantní **součet** vzdáleností libovolného bodu  $X$  od ohnisek  $E$  a  $F$ , zatímco u hyperboly je konstantní **rozdíl** vzdáleností libovolného bodu  $X$  od ohnisek  $E$  a  $F$ .<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Existují i křivky (**Cassiniho ovály**), jejichž body mají konstantní **součin** vzdáleností od ohnisek  $E$  a  $F$ .

### Otázka

Kde byste našli střed hyperboly?

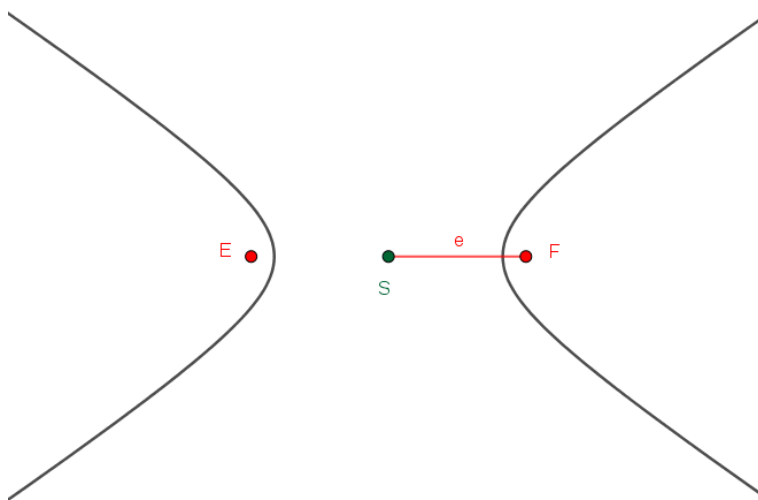
### Definice

Střed  $S$  hyperboly je bod, který je středem úsečky  $EF$ , kde  $E, F$  jsou ohniska hyperboly.

Poznamenejme, že definice středu  $S$  je stejná jak pro hyperbolu, tak pro elipsu. U elipsy jsme zavedli pojem excentricita. Vzpomeňte si, jak byla definována a zkuste definovat excentricitu u hyperboly.

### Definice

Excentricita  $e$  je rovna vzdálenosti ohniska  $E$  ( $F$ ) od středu  $S$  hyperboly. Platí  $|SE| = |SF| = e$ .



Obrázek 16: Excentricita hyperboly

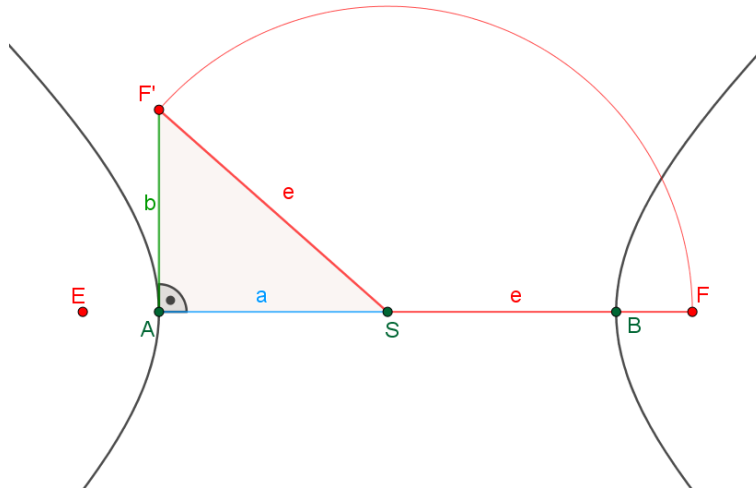
Na <https://www.geogebra.org/m/w3b6cdkb> si vyzkoušejte, jak se mění tvar hyperboly, budeme-li měnit velikost excentricity.

Z definice plyne, že neexistuje žádný bod elipsy  $X$ , pro který by platilo  $|XE| - |XF| = |XF| - |XE|$ . Proto budeme říkat, že se hyperbola skládá ze dvou částí (nemající společný bod), kterým říkáme větve hyperboly.

Hyperbola má dva vrcholy, vrchol  $A$  a vrchol  $B$ . Tyto vrcholy jsou průsečíky hyperboly a přímky určené body  $E$  a  $F$ . Vzdálenost  $|AS| = |BS|$  označíme  $a$  budeme jí nazývat hlavní poloosa hyperboly. Hyperbola má také vedlejší poloosu, kterou označujeme  $b$ . Pro velikost této poloosy platí

$$e^2 = b^2 + a^2. \quad (15)$$

Nyní vyvstává otázka, kde bychom graficky u hyperboly našli vedlejší poloosu  $b$ ? Na základě Pythagorovy věty (15) víme, že vedlejší poloosa  $b$  je odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou  $e$  a druhou odvěsnou  $a$ . Pojdme tento pravoúhlý trojúhelník (a tím i umístění vedlejší poloosy  $b$ ) najít v appletu <https://www.geogebra.org/m/xwekfqp>.

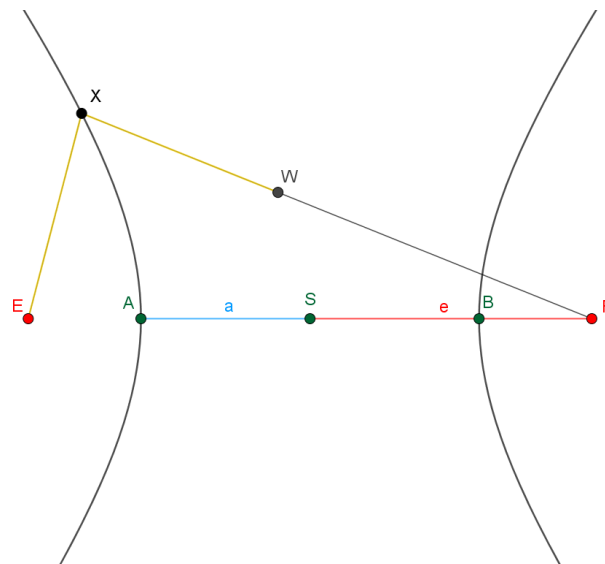


Obrázek 17: Charakteristiky hyperboly

Podívejme se nyní zpátky na definici hyperboly. Definovali jsme, že hyperbola je množina bodů v rovině, které mají od dvou ohnisek  $E, F$  konstantní rozdíl vzdáleností.

Otázka

Čemu se rovná konstantní rozdíl vzdáleností z definice hyperboly? Najděte odpověď pomocí appletu na <https://www.geogebra.org/m/ku2pwsst>. Ukázka appletu je na obrázku 18.



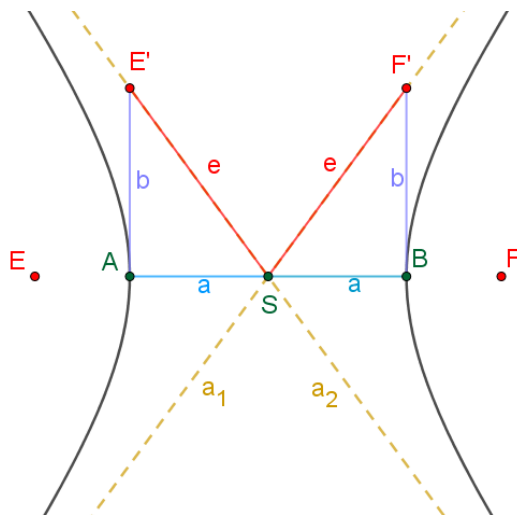
Obrázek 18: Definice hyperboly

Nyní si řekneme něco o asymptotách. Asymptota je přímka, ke které se křivka neustále přibližuje, ale nikdy se jí nedotkne.

Otázka

Kde se v hyperbole nachází asymptota?

Asymptota v hyperbole je přímka  $a_1$  ( $a_2$ ), na nichž se nachází úsečka  $SE'$  ( $SF'$ ). Asymptoty hyperboly jsou vykresleny žlutě na obrázku 19.



Obrázek 19: Asymptoty hyperboly

Otázka

Jakých hodnot nabývá numerická excentricita pro hyperbolu? Jděte na <https://www.geogebra.org/m/tjwmv9pb> a nalezněte tak odpověď.

Numerická excentricita nabývá hodnot  $(1; +\infty)$ .

Otázka

Znáte nějaký vesmírný objekt, který se pohybuje po hyperbolické dráze?

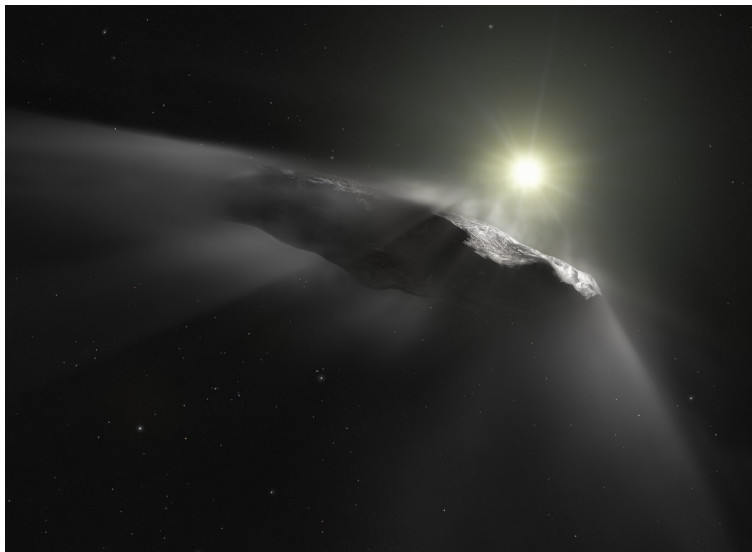
Pomocí teleskopu na Havaii detekoval 19. srpna 2017 astronom jménem Robert Weryk objekt, který dostal později jméno Oumuamua, což v hawaištině znamená „Posel přicházející ze vzdálené minulosti“. Název objektu není samoúčelný. Oumuamua je první mezihvězdný objekt, který jsme ve Sluneční soustavě detekovali. Vůči Slunci má Oumuamua hyperbolickou trajektorii s numerickou excentricitou 1,23 [6], svůj původ tedy nemá ve Sluneční soustavě, ale pravděpodobně v jiné galaxii. Záhadou zůstává, jestli se jedná o asteroid nebo kometu. Oumuamua je malý objekt, o jeho tvaru toho příliš nevíme, odhaduje se, že těleso má tvar doutníku. To astronomové usuzují především kvůli kolísavému jasů objektu, který napovídá, že má těleso nepravidelný tvar a otáčí se kolem svého těžiště. Na <https://www.youtube.com/watch?v=qxTHNiMMPDw> je animace průletu objektu Sluneční soustavou. Ze začátku videa je dobře pozorovatelná kolísavost jasu.

Lidé na Zemi mohli pomocí přístrojů objekt pozorovat jen několik týdnů. Ani o jeho složení toho astronomové příliš nezjistili, indície naznačovaly, že by se mohlo jednat o ledové těleso. Pokud se ledové těleso přiblíží ke Slunci, začne uvolňovat značné množství vodních par a další plyny. Když se ale Oumuamua přiblížila ke Slunci, detektory žádný únik plynů nezaznamenaly. Otázkou zůstává, zda

se uvolnilo tak málo plynů, že je nebylo možné detekovat anebo se jedná o kamenný asteroid. Tuto otázku by mohla zodpovědět sonda, která by byla k objektu vyslána. To by bylo ovšem velmi nákladné, a tak se odpověď na tuto otázku nejspíše nikdy nedozvíme. [5]

Mezi další vesmírné objekty s hyperbolickou trajektorií řadíme kometu Borisov objevenou 30. srpna 2019 krymským astronomem jménem Gennadiy Borisov.

Na odkazu <https://theskylive.com/3dsolarsystem> se po postupném zadání názvu komet (Oumuamua, Borisov) do vyhledávacího okna vlevo (a stisknutí tlačítka Enter) tyto komety ukáží v naší Sluneční soustavě. Vlevo lze nastavit rychlost animace a po zaškrtnutí check boxu se animace spustí.



Obrázek 20: Takto si na základě vědeckých dat umělec představoval objekt Oumuamua.

V tabulce 6 jsou příklady těles, které mají hyperbolickou dráhu.

název objektu	typ objektu	numerická excentricita $\epsilon$
Oumuamua	neurčeno	1,201
2I/Borisov	kometa	3,357

Tabulka 6: Příklady vesmírných objektů a numerických excentricit jejich trajektorií [10]

## 6.2 Středová rovnice hyperboly

Odvození středové rovnice hyperboly je velice podobné odvození středové rovnice elipsy. Vyjdeme z definice pro hyperbolu, která říká, že hyperbola je množina bodů v rovině, které mají od dvou bodů (ohnisek) konstantní rozdíl vzdáleností v absolutní hodnotě roven hodnotě  $2a$ .

$$||EX| - |FX|| = 2a$$

Při matematických úpravách bude nejvýhodnější převést jednu z odmocnin na druhou stranu.

$$\sqrt{(e-x)^2 + y^2} - \sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a \quad / + \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

Nyní celou rovnici umocníme na druhou. Nezapomeňte, že pravou stranu rovnice musíme umocnit podle vzorce  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

$$\sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(e+x)^2 + y^2} \quad /^2$$

$$(e-x)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + (e+x)^2 + y^2$$

Nyní rovnici upravíme tak, že umocníme závorky, co nejsou pod odmocninou, a osamostatníme člen s odmocninou.

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + x^2 + 2ex + e^2 + y^2 \quad / - x^2 - e^2 - y^2 - 2ex - 4a^2$$

$$-4ex - 4a^2 = 4a\sqrt{(e+x)^2 + y^2} \quad / : 4$$

$$-ex - a^2 = a\sqrt{(e+x)^2 + y^2} \quad /^2$$

$$(-ex - a^2)^2 = a^2(x^2 + 2ex + e^2 + y^2)$$

$$e^2x^2 + 2exa^2 + a^4 = a^2x^2 + 2exa^2 + a^2e^2 + a^2y^2 \quad / - 2exa^2 - a^2 - a^2y^2 - a^2x^2$$

Nyní rovnici upravíme tak, že na levé straně rovnice budou jen ty členy, které obsahují  $x^2$  nebo  $y^2$ .

$$e^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = +a^2e^2 - a^4$$

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2)$$

Již víme, že  $e^2 = a^2 + b^2$  z této rovnosti vyjádříme  $b^2 = e^2 - a^2$  a dosadíme do (16).

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad / : a^2b^2 \tag{16}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{17}$$

Rovnice (17) platí pro hyperbolu se středem v počátku ( $S = [0, 0]$ ) a hlavní poloosou rovnoběžnou s osou  $x$ . Pokud bychom chtěli odvodit středovou rovnici hyperboly se středem v počátku a hlavní poloosou rovnoběžnou s osou  $y$ , stačilo by změnit souřadnice ohnisek tak, že  $E = [0, -e]$  a  $F = [0, e]$ .

Dále se nabízí otázka, jak by vypadala středová rovnice hyperboly, pokud by její střed ležel mimo počátek. Střed bude mít obecné souřadnice  $S = [m, n]$ . Nyní by změnit souřadnice ohnisek tak, že pro hyperbolu s hlavní poloosou rovnoběžnou s osou  $x$  platí  $E = [-e + m, n]$  a  $F = [e + m, n]$ . Pro hyperbolu s hlavní poloosou rovnoběžnou s osou  $y$  platí  $E = [m, -e + n]$  a  $F = [m, e + n]$ . Odvození by vypadalo obdobně.

Rovnice (18) platí pro hyperbolu, jejíž hlavní poloosa je rovnoběžná s osou  $x$  a má střed o souřadnicích  $S = [m, n]$ .

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \tag{18}$$

Rovnice (19) platí pro hyperbolu, jejíž hlavní poloosa je rovnoběžná s osou  $y$  a má střed o souřadnicích  $S = [m, n]$ .

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \tag{19}$$



Pokud bychom chtěli pomocí středové rovnice popsat hyperbolu se středem v bodě  $[m, n]$ , která má hlavní poloosu potočenou o úhel  $\alpha$ , museli bychom použít rovnici ve tvaru

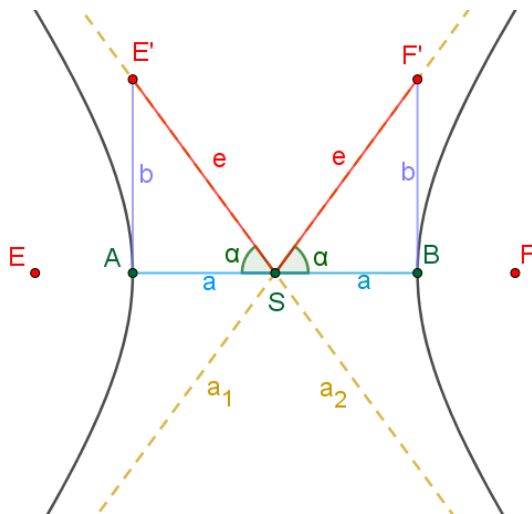
$$\frac{(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))^2 - m^2}{a^2} - \frac{(x \sin(\alpha) - y \cos(\alpha) - n)^2}{b^2} = 1. \quad (20)$$

Na <https://www.geogebra.org/m/njrpsegm> je grafická aplikace rovnice (20). Rovnice (20) je zde ilustrativně, v této práci se s ní dále pracovat nebude.

Hyperbolu znáte již ze základní školy, i když ne přímo pod tímto názvem. Grafem nepřímé úměrnosti<sup>9</sup> je právě hyperbola, jejíž rovnice má speciální tvar

$$y = \frac{k}{x}.$$

Podívejme se znovu na asymptoty. Jakou rovnici bude mít asymptota hyperboly? Směrnice tvaru přímky je  $y = kx + q$ , kde  $q$  určuje průsečík přímky s osou  $y$  a  $k$  je směrnice přímky. Směrnici přímky dostaneme také výpočtem  $\operatorname{tg}(\alpha) = \pm \frac{b}{a}$ , kde  $\alpha$  je úhel, který svírá přímka s osou  $x$ ,  $b$  je velikost vedlejší poloosy a  $a$  je velikost hlavní poloosy.



Obrázek 21: Asymptoty hyperboly podruhé

Nyní stačí určit hodnotu koeficientu  $q$ , který zároveň udává průsečík asymptoty s osou  $y$ .

#### Otázka

Jakou bude mít hodnotu koeficient  $q$  v rovnicích asymptot hyperboly?

Obě asymptoty se protnou ve středu hyperboly  $S$ , který má obecné souřadnice  $[m, n]$ . Pokud by střed měl souřadnice  $[0, 0]$ , pak  $q = 0$ . Rovnice asymptot by pak měly tvar  $a_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a}x$ .

#### Otázka

Jak by vypadala rovnice asymptot, pokud by střed hyperboly  $S$  měl obecné souřadnice  $[m, n]$ ?

Rovnice by měly tvar  $a_{1,2} : y - n = \pm \frac{b}{a}(x - m)$ . Osamostatníme-li  $y$  na levé straně rovnice, dostaneme  $a_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a}(x - m) + n$ .

<sup>9</sup>Nepřímá úměrnost může být například: Čím více lidí bude natírat plot, tím méně času tím stráví.

### 6.3 Příklad: Poznej kuželosečku

Již známe všechny kuželosečky, včetně jejich analytického vyjádření. Pojd'me nyní zkusit, jestli od sebe dokážeme rozeznat jednotlivé kuželosečky pomocí jejich rovnic.

#### Otázka

Na odkazu <https://www.geogebra.org/m/z2knq6py> najdete čtyři rovnice různých typů kuželoseček s náhodně generovanými koeficienty. Přiřaďte jednotlivé rovnice k odpovídajícím kuželosečkám.

## 7 Úlohy ze světa kuželoseček

Na kuželosečky se můžeme podívat i z jiného úhlu pohledu. Vzpomeňme si na definici paraboly. Parabola je definována jako množina bodů, které mají od pevně daného bodu (ohniska) stejnou vzdálenost jako od přímky (řídící). Můžeme i ostatní kuželosečky definovat podobným způsobem?

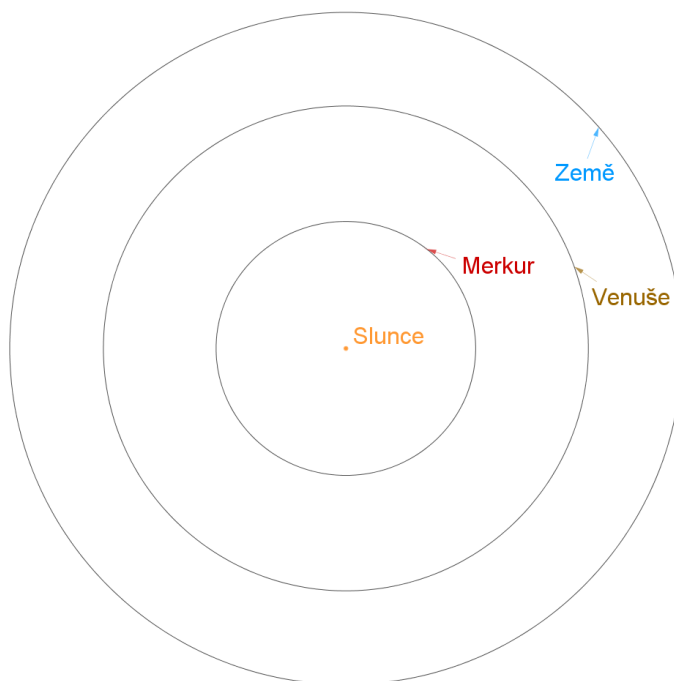
### Otázka

Máme přímku a bod ležící v jedné rovině. Jak by šla definovat elipsa a hyperbola pomocí této přímky a bodu? Inspirujte se definicí paraboly a pokuste se odpověď nalézt pomocí appletu na <https://www.geogebra.org/m/uq5mrahw>.

Pojem numerická excentricita využíváme zejména ve spojení s astronomií, protože se jím velmi snadno charakterizuje tvar trajektorie vesmírných těles.

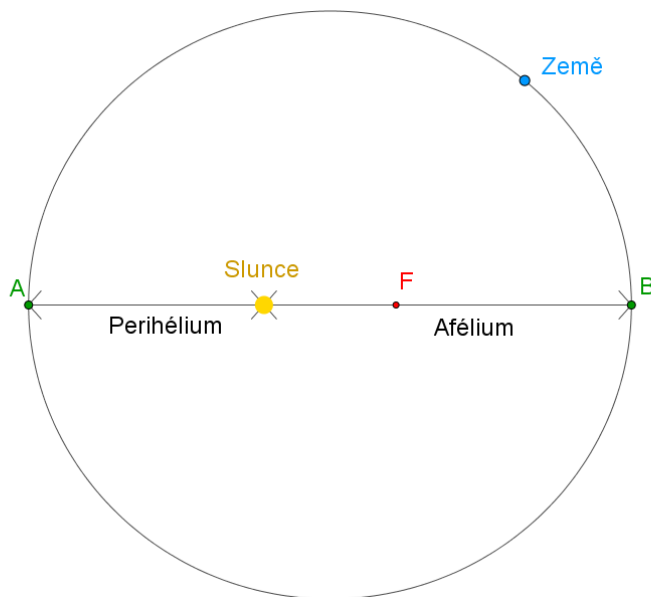
### 7.1 Dráhy planet

Na začátku této kapitoly je nutné říci, že poměry velikostí vesmírných objektů na obrázcích nejsou v měřítku. Je tomu tak z čistě praktických důvodů, například průměr Země je vůči průměru Slunce zhruba 109 krát menší. Pokud bychom zároveň chtěli zachovat stejné měřítko i pro vzdálenosti, neviděli bychom na obrázku téměř nic. Pro ilustraci je zde obrázek 22, na kterém je zachováno jedno měřítko jak pro velikosti planet, tak pro jejich oběžné dráhy. Protože takto zobrazené planety nejsou téměř vůbec vidět, budou v této práci (není-li řečeno jinak) velikosti planet vzhledem k jejich trajektoriím větší, než by měly podle měřítka být.



Obrázek 22: Správné měřítko pro vzdálenosti i velikosti

Planety obíhají kolem Slunce po eliptických trajektoriích jen málo odlišných od kružnic. Pokud není řečeno jinak, budeme trajektorie planet ve Sluneční soustavě považovat za kružnice. Jaký bude mít tato kružnice poloměr? Velikost hlavní a vedlejší poloosy u elipsy se sice liší málo, ale liší se. Je zvykem, že se poloměr kružnice určí jako aritmetický průměr tzv. perihélia a afélia. Perihélium je nejbližší místo ke Slunci, kterým prochází těleso (například Země), které se kolem Slunce pohybuje po elipse. Afélium je naopak nejvzdálenější místo ke Slunci, kterým prochází těleso, které se kolem Slunce pohybuje po elipse. Pojmy jsou ukázány na obrázku 23. Aritmetickému průměru perihélia a afélia říkáme střední vzdálenost.



Obrázek 23: Perihélium a afélium

#### Otázka

Jaké charakteristice elipsy se rovná střední vzdálenost Země od Slunce?

Střední vzdálenost Země od Slunce je rovna hlavní poloose  $a$ .

Střední vzdálenost Země od Slunce je 149 597 870,7 km. Číslo s takto velkým počtem platných číslic se stává nepřehledným. Proto astronomové zavedli novou jednotku s názvem astronomická jednotka, značíme  $AU$ . Zavedlo se, že  $1 AU = 149 597 870,7 \text{ km}$ . Jinými slovy,  $1 AU$  je střední vzdálenost Země od Slunce.

Při pohledu do světa fyziky můžeme kuželosečky nalézt například v Keplerových zákonech. Tyto zákony jsou sice formulovány pro planety, ale platí i pro jiná tělesa jako jsou například komety či trpasličí planetky.

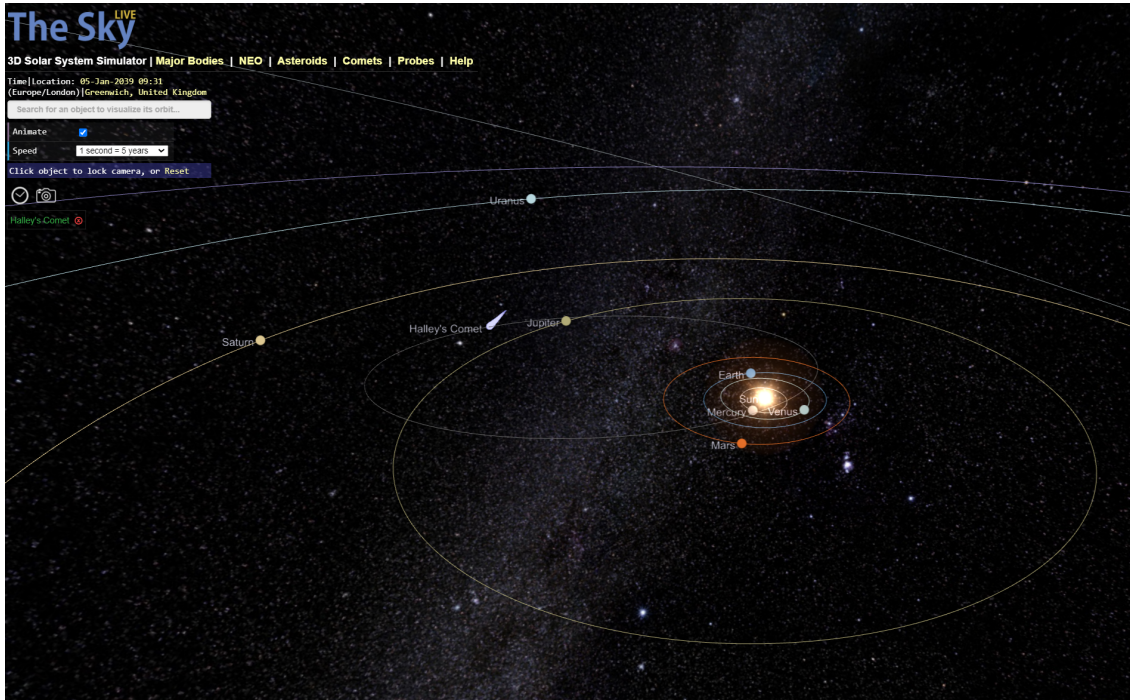
Zaměříme se nyní na **první Keplerův zákon**. Ten říká, že planety obíhají kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Tento zákon vysvětluje, jakým způsobem se planety ve Sluneční soustavě pohybují. Pohybují se po elipsách, nicméně hlavní a vedlejší poloosa mají téměř stejnou velikost. I na obrázku 22 jsou trajektorie elipsy i když na první pohled se tyto elipsy zdají být spíše kružnicemi.

**Druhý Keplerův zákon** říká, že plošné obsahy opsané průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní. Tento zákon říká, že pokud se planeta vyskytuje na své oběžné dráze dále od Slunce, má planetu nižší rychlost, než když je Slunci blíže.

Na odkazu <https://1url.cz/@Halley> je velmi pěkně zpracovaná animace naší Sluneční soustavy. Ukázka této stránky je na obrázku 24. Všimněte si, že je na ní i Halleyova kometa. O této kometě bude

brzy řeč více. Nastavte si vlevo "speed" nebo-li rychlost, s jakou bude animace probíhat. Pro znázornění významu druhého Keplerova zákona doporučuji nastavit "1 second = 5 years" což znamená, 1 vteřina = 5 let. Zaškrtněte políčko u textu "animation" a animace se spustí. Nás bude nyní zajímat "Halley's Comet" nebo-li Halleyova kometa. Na první pohled je vidět, že trajektorie Halleyovy komety je eliptická, ale má větší numerickou excentricitu než mají planety Sluneční soustavy. Po této dráze se nepohybuje konstantní rychlostí, ale čím blíže je Slunci, tím se pohybuje rychleji. U planet se nám rychlost zdá téměř konstantní. To je právě proto, že trajektorie planet mají numerickou excentricitu blízkou 0 a jsou tak velmi podobné kružnicím.



Obrázek 24: Sluneční soustava

**Třetí Keplerův zákon** říká, že poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je stejný jako poměr třetích mocnin délek jejich hlavních poloos. Hlavními poloosami se zde myslí střední vzdálenost těchto planet od Slunce. Díky tomuto zákonu můžeme velice snadno dopočítat informace o době oběhu či délce hlavní poloosy ostatních planet.

### 7.1.1 Příklad: Třetí Keplerův zákon

Víme, že Země se otočí kolem Slunce zhruba jednou za 365 dní, délka hlavní poloosy elipsy (a tím i střední vzdálenost Země od Slunce) je 1 AU. Vyberme nějakou jinou planetu obíhající také okolo Slunce, například Mars. Mars oběhne kolem Slunce jednou za 687 dní. Jaká je délka jeho hlavní poloosy (střední vzdálenost Marsu od Slunce)?

Nejprve si napíšeme, co víme ze zadání a co hledáme.  $T_1 = 365$  dní,  $a_1 = 1$  AU,  $T_2 = 687$  dní,  $a_2 = ?$  [AU]. Nyní dosadíme do rovnice, která matematicky vyjadřuje třetí Keplerův zákon (21).

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad (21)$$

Vyjádříme z rovnice (21) neznámou veličinu  $a_2$  a dostaneme rovnici (22).

$$a_2 = \sqrt[3]{\frac{a_1^3 \cdot T_2^2}{T_1^2}} = a_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{T_1^2}} \quad (22)$$

Dosaďme nyní hodnoty, které známe ze zadání.

$$a_2 = 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{687^2}{365^2}}$$

$$a_2 \doteq 1,524 \text{AU}$$

Délka hlavní poloosy trajektorie Marsu při oběhu kolem Země je 1,524 AU. Výpočet jsme provedli za pomoci třetího Keplerova zákona (21).

#### Otázka

Spočtete střední vzdálenost Marsu od Slunce pomocí planety Neptun. Vyjde stejná vzdálenost, jako v předchozím výpočtu? V tabulce 7 máte hodnoty středních vzdáleností a oběžných dob všech planet Sluneční soustavy.

Pro výpočet střední vzdálenosti Marsu od Slunce jsme nemuseli použít údaje o Zemi jako v řešeném příkladu. Mohli jsme si zvolit libovolnou planetu obíhající kolem Slunce, tedy i planetu Neptun, střední vzdálenost vyjde stejná.

název planety	střední vzdálenost od Slunce [AU]	oběžná doba [pozemský rok]
Merkur	0,4	0,24
Venuše	0,7	0,62
Země	1	1
Mars	1,5	1,88
Jupiter	5,2	11,86
Saturn	9,5	29,45
Uran	19,8	84
Neptun	30,1	164,81

Tabulka 7: Planety Sluneční soustavy s jejich střední vzdálenosti od Slunce a oběžnými dobami [11]

### 7.1.2 Příklad: Halleyova kometa

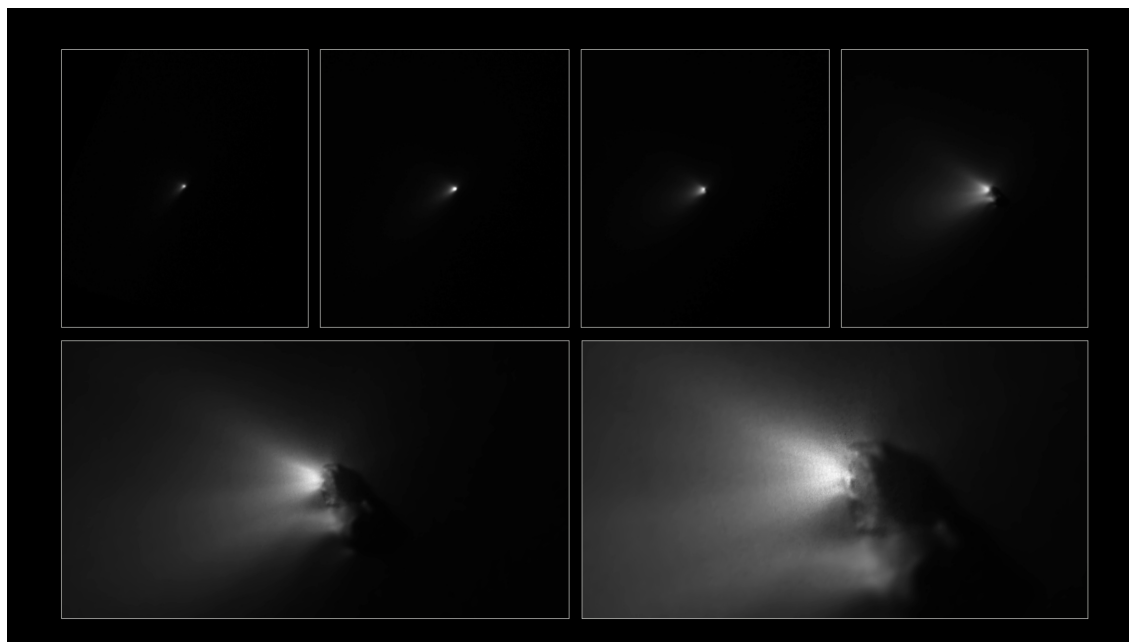
Kometry jsou tělesa tvořená především z ledu, methanu,  $\text{CO}_2$  a z prachových částic. Každá kometa se skládá z kometárního jádra, komy a ohonu. Koma a ohon se vytvoří z jádra komety, pokud se jádro komety dostatečně přiblíží ke Slunci. Tehdy se z kometárního jádra začnou uvolňovat plyny, prach a další látky.

#### Otázka

Víte, jakým směrem míří ohon komety vzhledem ke slunci?

Zajímavostí je, že ohon komety míří vždy směrem od Slunce. Je tomu proto, že částice tvořící koma se srážejí se slunečním větrem. Sluneční vítr je proud nabitých částic, které při srážce s částicemi tvořící koma komety rozloží tyto částice na ionty, které jsou slunečním zářením odtlačeny směrem od Slunce.

Halleyova kometa se řadí mezi nejznámější komety vůbec. Pyšní se velmi excentrickou dráhou, charakterizovanou numerickou excentricitou 0,967 a relativně krátkou dobou oběhu 76 let. Počátkem března 1986 letěla kosmická loď ESA Giotto kolem Halleyovy komety ve vzdálenosti pouhých 596 km. Tehdy byla kometa od Slunce vzdálena pouhých 0,5871 AU. Právě v tuto dobu pořídila sonda Giotto snímek jádra Halleyovy komety, který můžete vidět na obrázku 25. [8]



Obrázek 25: Snímek komety Halley [8]

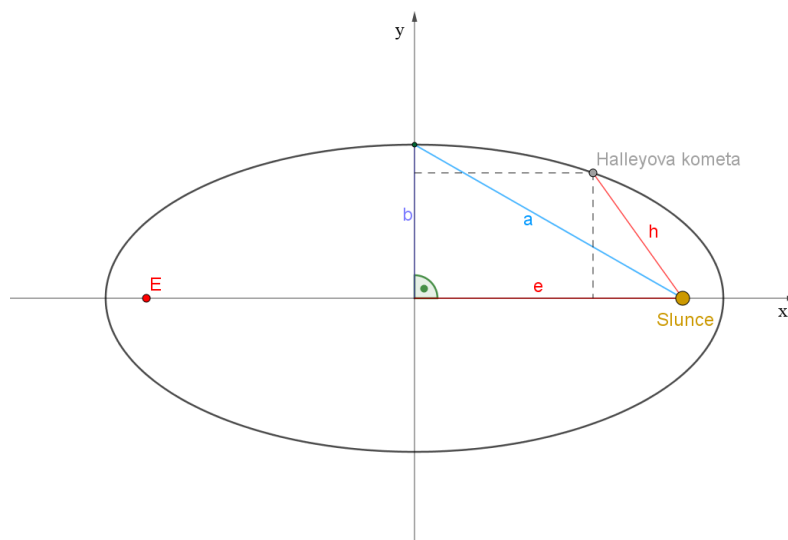
**Zadání:** Hlavní poloosa trajektorie Halleyovy komety je 17,834 AU [9]. Spočítejte a zakreslete souřadnice Halleyovy komety  $[x,y]$  v kartézské soustavě souřadnic Oxy, je-li její vzdálenost od Slunce 10 AU.

Na <https://www.geogebra.org/m/xuh62tat> je 3D model popsané situace.

### Řešení:

První Keplerův zákon říká, že v ohnisku elipsy se nachází Slunce. Halleyova kometa obíhá po eliptické dráze s velkou numerickou excentricitou (viz. tabulka 4). To znamená, že eliptickou trajektorii nemůžeme nahradit kružnicí. Hledáme tedy souřadnice bodu elipsy, který má vzdálenost od ohniska 10 AU.

Na obrázku 26 vidíme již ve 2D nákres situace. Je zde zakreslena elipsa spolu s jejími základními charakteristikami. Vzdálenost komety a Slunce je zde označena písmenem  $h$ .



Obrázek 26: Náčrt trajektorie Halleyovy komety

Máme-li za úkol zjistit souřadnice Halleyovy komety, musíme znát analytické vyjádření její trajektorie. Umístíme-li střed trajektorie do počátku soustavy souřadnic  $Oxy$ , můžeme středový tvar rovnice elipsy popisující trajektorii Halleyovy komety zapsat ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ze zadání je známá jen hlavní poloosa a numerická excentricita. Numerickou excentricitu  $\epsilon$  můžeme vyjádřit pomocí rovnosti  $\epsilon = \frac{e}{a}$ . Vyjádřeme nyní z této rovnosti  $e$  a dopočteme jej:

$$e = a \cdot \epsilon$$

$$e = 17,834 \cdot 0,967143$$

$$e = 17,248 \text{ AU}$$

Nyní je možné dopočítat i velikost vedlejší poloosy  $b$ :

$$a^2 = e^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2}$$



$$b = \sqrt{17,834^2 - 17,248^2}$$

$$b = 4,534 \text{ AU}$$

Po dosazení hodnot hlavní a vedlejší poloosy do středového tvaru rovnice elipsy dostáváme rovnici elipsy neboli rovnici trajektorie Halleyovy komety (23).

$$\frac{x^2}{17,834^2} + \frac{y^2}{4,534^2} = 1 \quad (23)$$

Má-li bod Halleyova kometa souřadnice  $[x,y]$  a vzdálenost komety od Slunce bude označena jako  $h$ , můžeme zapsat vztah (24), která vyjadřuje kružnici se středem v bodě  $[e, 0]$  a  $h$  označuje poloměr, který je v našem příkladě 10 AU.

$$h^2 = y^2 + (e - x)^2$$

Po dosazení za  $h$  a  $e$  dostáváme rovnici 24.

$$10^2 = y^2 + (17,248 - x)^2 \quad (24)$$

Nyní je možné sestavit soustavu dvou rovnic (23) a (24). Geometricky se lze dívat na tuto soustavu rovnic jako na hledání průsečíků elipsy a kružnice.

$$\frac{x^2}{17,834^2} + \frac{y^2}{4,534^2} = 1 \quad (25)$$

$$10^2 = y^2 + (17,248 - x)^2 \quad (26)$$

Soustavu (25), (26) můžeme řešit například pomocí dosazovací metody, kdy si z druhé rovnice vyjádříme  $y^2$ , které poté dosadíme do rovnice první.

Řešením soustavy jsou souřadnice dvou bodů:  $H_1 = [8, 1; 4]$  a  $H_2 = [8, 1; -4]$ . Zjistili jsme tedy, že Halleyova kometa se může nacházet ve dvou různých bodech a to v bodech  $H_1 = [8, 1; 4]$  nebo  $H_2 = [8, 1; -4]$ .

Úlohu je možné řešit i pomocí programu GeoGebra. Zde si stačí vykreslit trajektorii komety a poté od jednoho ohniska vést kružnici o poloměru 10.

#### Otázka

Na odkazu <https://www.geogebra.org/m/yycvfs4m> měňte zadanou vzdálenost od Slunce a pozorujte, jak se mění výsledné řešení.

## 7.2 Kosmické rychlosti

Na úvod této kapitoly si řekneme několik fyzikálních pojmů. V této kapitole budeme uvažovat pouze inerciální vztahnou soustavu<sup>10</sup>, ve které je pouze planeta Země a jiné těleso, které jí obíhá. Pro výpočty budeme používat následující numerické hodnoty:

- hmotnost Země  $M_Z = 5,972 \cdot 10^{24}$  kg
- poloměr Země  $r_Z = 6378$  km
- Newtonova gravitační konstanta  $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$

### 7.2.1 První kosmická rychlost

Když v minulosti chtělo lidstvo dostat družice či rakety mimo zemský povrch do Vesmíru, muselo si položit otázku, jaké rychlosti musí družice či raketa na oběžné dráze kolem Země dosáhnout, aby nespadla zpátky na povrch Země. Položme si nyní podobné otázky.

#### Otázka

Jaká síla přitahuje všechny předměty k zemskému povrchu? Jaká další síla působí na předměty pohybující se kolem Země? Jaký směr mají tyto síly?

Síle, která přitahuje všechny předměty k zemskému povrchu, říkáme gravitační a značíme ji  $F_g$ . Pokud budeme chtít vypočítat gravitační sílu  $F_g$  ve výšce  $h$ , která je zanedbatelná ve srovnání s poloměrem Země  $r_Z$  použijeme vztah

$$F_g = \kappa \frac{m \cdot M_Z}{r_Z^2}, \quad (27)$$

kde  $\kappa$  označuje Newtonovu gravitační konstantu ( $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ),  $M_Z$  je hmotnost Země,  $r_Z$  je poloměr Země a  $m$  označuje hmotnost tělesa, které se chystáme vynést do vesmíru.

Dále víme, že na těleso pohybující se po kružnici, působí dostředivá síla  $F_{DO}$ . Tato dostředivá síla způsobuje zakřivení trajektorie tělesa.

$$F_{DO} = \frac{mv_1^2}{r_Z},$$

kde  $v_1$  je rychlost, kterou se bude vyslané těleso pohybovat okolo Země po kruhové trajektorii. V tomto případě je gravitační síla silou odstředivou, a proto můžeme psát

$$F_g = F_{DO},$$

$$\kappa \frac{m \cdot M_Z}{r_Z^2} = \frac{mv_1^2}{r_Z}. \quad (28)$$

Z rovnice (28) můžeme vyjádřit rychlost  $v_1$ , která odpovídá rychlosti, kterou se musí pohybovat předmět, aby se udržel na oběžné dráze kolem Země.

$$\kappa \frac{m \cdot M_Z}{r_Z^2} = \frac{mv_1^2}{r_Z} \quad / \cdot \frac{r_Z}{m}$$

<sup>10</sup>Inerciální vztahná soustava je taková soustava, v níž platí Newtonovy zákony. Taková soustava se jako celek pohybuje s nulovým zrychlením. Příkladem takové soustavy může být Země a Měsíc. Opakem inerciální soustavy je soustava neinerciální. Taková soustava je například rozjíždějící se tramvaj, ve které stojí lidé spolu s pozorovatelem.

$$\kappa \frac{M_Z}{r_Z} = v_1^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$v_1 = \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{r_Z}} \quad (29)$$

Rychlosti vyjádřené v rovnici (29) se říká **první kosmická rychlost**. Všimněte si, že tato rychlost nezávisí na hmotnosti družice. Nyní do rovnice (29) dosadíme numerické hodnoty a dopočteme číselnou hodnotu první kosmické rychlosti.

$$v_1 = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,972 \cdot 10^{24}}{6,378 \cdot 10^6}}$$

$$v_1 \doteq 7900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pokud se družice pohybuje rychlostí  $7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , bude se pohybovat kolem Země po kruhové trajektorii. Proto se této rychlosti také říká **kruhová rychlost**.

### 7.2.2 Druhá kosmická rychlost

#### Otázka

Jakou rychlostí by se musela pohybovat družice, aby opustila gravitační pole Země? (Ale nikoli gravitační pole Slunce.)

Z gravitační síly lze pouze za pomoci integrálního počtu odvodit, že potenciální energie tělesa, které je ve velmi velké vzdálenosti od Země, je vyjádřena rovnicí (30).

$$E_p = -\kappa \frac{m \cdot M_Z}{r_Z} \quad (30)$$

Družice bude mít nenulovou rychlost, bude mít tedy i kinetickou energii, kterou lze vyjádřit rovnicí (31).

$$E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (31)$$

Jak se družice vzdaluje od Země, zvyšuje se jeho potenciální energie a kinetická energie klesá. Až se družice nebude nacházet v gravitačním poli Země, bude platit, že součet kinetické a potenciální energie bude roven nule.

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \kappa \frac{m \cdot M_Z}{r_Z} = 0$$

Nyní rovnici upravíme a vyjádříme  $v_2$  označující rychlost, kterou musí mít těleso, aby opustilo gravitační pole Země.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_2^2 - \kappa \frac{m \cdot M_Z}{r_Z} &= 0 \quad / \cdot \frac{2}{m} \\ v_2^2 - 2\kappa \frac{M_Z}{r_Z} &= 0 \quad / + 2\kappa \frac{M_Z}{r_Z} \\ v_2^2 &= 2\kappa \frac{M_Z}{r_Z} \quad / \sqrt{\phantom{x}} \\ v_2 &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\kappa \frac{M_Z}{r_Z}} = \sqrt{2} \cdot v_1 \end{aligned} \quad (32)$$

Po dosazení číselných hodnot do 32 dostáváme

$$v_2 = \sqrt{2} \cdot 7,9$$

$$v_2 \doteq 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pokud bychom chtěli, aby těleso opustilo gravitační pole Země, muselo by mít rychlost  $11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Potom by se takové těleso pohybovalo po parabolické dráze. Proto se této rychlosti říká také **parabolická rychlost**.

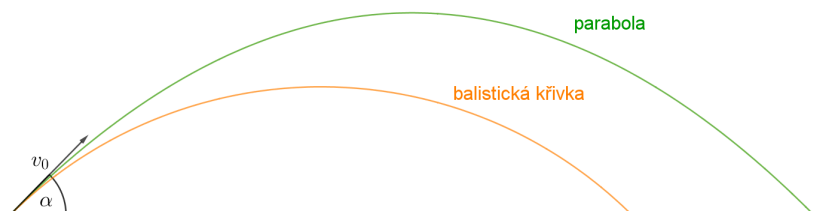
Pokud bychom tělesu udělili rychlost mezi první (kruhovou) a druhou (parabolickou) kosmickou rychlostí, pohybovalo by se po eliptické dráze. Těleso by nemělo dostatečnou rychlost, aby opustilo gravitační pole Země, ale mělo by dostatečnou energii pro pohyb na eliptické dráze. Čím více se bude rychlost tělesa přibližovat druhé kosmické (parabolické) rychlosti, tím více bude mít eliptická trajektorie větší excentricitu.



Obrázek 27: První a druhá kosmická rychlost

### 7.3 Hod míčkem

Hodíme-li míčkem pod počátečním úhlem  $\alpha$  rychlostí  $v_0$  a zanedbáme-li odpor prostředí, bude se míček pohybovat po parabolické trajektorii. Pokud je odpor prostředí nezanedbatelný, míček se pohybuje po tzv. balistické křivce. Porovnání těchto dvou křivek je zobrazeno na obrázku 28, kde zelená křivka reprezentuje trajektorii při zanedbání odporu prostředí, zatímco oranžová křivka ukazuje, jak by mohla vypadat trajektorie při nezanedbatelném odporu prostředí. Balistické křivky se využívají při popisu pohybu střely, ať už se jedná o vnitřní balistiku (pohyb střely v hlavni) či vnější balistiku (pohyb střely mimo hlavěň). My se budeme zabývat ideální případem, kdy zanedbáme odpor prostředí a využijeme tak znalosti o parabole.



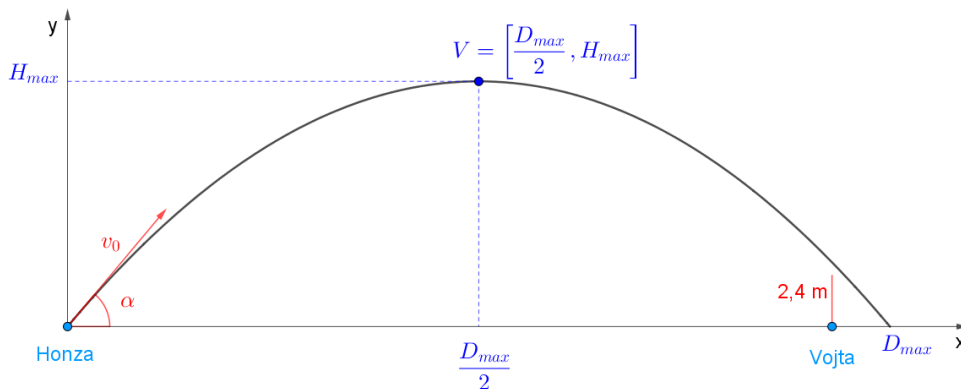
Obrázek 28: Porovnání dvou křivek šikmého vrhu

#### 7.3.1 Příklad: Hod míčkem

**Zadání:** Dva kamarádi Honza a Vojta stojí naproti sobě ve vzdálenosti 15 metrů. Honza hodí míček po úhlem  $\alpha = 45^\circ$  rychlostí  $v_0$ . Míček spadne 4,6 metru za Vojtu. Dokázal by Vojta míček chytit, kdyby vyskočil do vzduchu? Předpokládejte, že Vojta by míček dokázal chytit, kdyby nad ním proletěl ve výšce maximálně 2,4 metru <sup>11</sup>. Odpor prostředí zanedbejte. <sup>12</sup>

#### Řešení:

V obrázku 29 je náčrt situace, kde je Honza umístěn v počátku soustavy souřadnic a osa x je povrchem Země.



Obrázek 29: Hod míčkem: zmapování situace

<sup>11</sup>Hodnota 2,4 metru je experimentálně změřená hodnota, kam dokáže vyskočit člověk měřící 170 cm.

<sup>12</sup>Maximální výška šikmého vrhu je  $H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$ , délka vrhu se rovná  $d_{max} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ , kde  $g \doteq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  je tíhové zrychlení.

Jak můžeme z obrázku 29 vidět, jedná se o vrh šikmý. Z doprovodného textu u zadání tohoto příkladu jsme se dozvěděli, že trajektorií šikmého vrhu je parabola. Abychom zjistili, jestli by Vojta míček při výskoku chytil, musíme vědět, v jaké výšce míček nad Vojtou bude. To můžeme zjistit například z vrcholové rovnice paraboly.

Jak bude vypadat vrcholová rovnice paraboly pro šikmý vrh? Ukažme si to nejdříve obecně, poté dosadíme zadané hodnoty.

Začněme zapsáním tvaru vrcholové rovnice paraboly, kterou hledáme (33). Z povahy příkladu bude parabola v souřadnicovém systému Oxy otočená směrem dolů, proto bude u hodnoty parametru  $p$  záporné znaménko.

$$(x - m)^2 = -2p(y - n) \quad (33)$$

Hledanými neznámými jsou souřadnice vrcholu paraboly  $m, n$  a parametr  $p$  charakterizující vzdálenost řídicí přímky od ohniska paraboly.

Maximální výšku šikmého vrhu, která je rovna  $y$  souřadnici vrcholu paraboly, můžeme obecně vyjádřit pomocí vztahu  $H_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$ . Zbývající  $x$  souřadnici vrcholu paraboly lze jednoduše dopočítat - je rovna polovině maximální délky vrhu. Nejvyšší bod hod  $V$  má souřadnice  $[m, n] = \left[ \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}, \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \right]$ . Po zanesení této informace do rovnice (33) dostáváme rovnici (34).

$$\left( x - \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \right)^2 = -2p \left( y - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \right) \quad (34)$$

Nyní je nutné spočítat hodnotu parametru  $p$ . Na to je nezbytné znát jeden bod, kterým parabola prochází. Zvolme bod  $[0; 0]$ , ale není problém zvolit jakýkoli jiný bod (například bod dopadu), který náleží parabole. Po dosazení bodu  $[0; 0]$  dostaneme rovnici (35).

$$\left( 0 - \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \right)^2 = -2p \left( 0 - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \right) \quad (35)$$

Po úpravě rovnice (35) dostáváme hodnotu parametru  $p$ , která je rovna hodnotě  $\frac{v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g}$ . Po dosazení této hodnoty parametru  $p$  do rovnice (34) dostáváme obecnou rovnici trajektorie hodu míčkem

$$\left( x - \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \right)^2 = -\frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left( y - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \right). \quad (36)$$

Za zadání známe maximální délku vrhu  $d_{max}$  při počátečním úhlu  $\alpha$ . Jedinou chybějící informací je, jakou rychlostí Honza míček hodil. Vyjádřeme si nyní z rovnice (37) počáteční rychlost vrhu  $v_0$ .

$$d_{max} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad (37)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{d_{max} \cdot g}{\sin(2\alpha)}} \quad (38)$$

Dosadíme do rovnice (38) zadané hodnoty a zjistíme, jakou rychlostí Honza míček hodil.

$$v_0 = \sqrt{\frac{(15 + 4,6) \cdot 10}{\sin(2 \cdot 45)}}$$

$$v_0 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Nyní dosadíme hodnoty ze zadání a dopočtenou počáteční rychlost vrhu  $v_0 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .<sup>13</sup>

$$\left(x - \frac{14^2 \cdot \sin(2 \cdot 45)}{2 \cdot 10}\right)^2 = -\frac{2 \cdot 14^2 \cdot \cos^2(45)}{10} \left(y - \frac{14^2 \cdot \sin^2(45)}{2 \cdot 45}\right)$$

Vrcholová rovnice trajektorie šikmého vrhu je

$$(x - 9,8)^2 = -19,6(y - 4,9). \quad (39)$$

Nyní známe rovnici trajektorie, po které míček letěl. Otázka zněla, zda Vojta při výskoku do 2,4 metru nad zem, dokáže míček chytit. Zajímá nás, jak vysoko nad Vojtou míček letěl, hledáme tedy, jaká je  $y$  souřadnice míčku v momentě, kdy jeho  $x$  souřadnice je rovna 15. Dosadíme nyní za  $x$  do rovnice (39) číslo 15. Jaká bude  $y$  souřadnice míčku, když bude přesně nad Vojtou?

$$(15 - 9,8)^2 = -19,6(y - 4,9)$$

$$27,04 = -19,6y + 96,04$$

$$19,6y = 96,04 - 27,04$$

$$y \doteq 3,52 \text{ m}$$

Míček proletí nad Vojtou ve výšce 3,52 m. Vojta tedy nemohl míček chytit.

**Bonusová otázka:** Jakou rychlostí by musel Honza míček vyhodit (pod úhlem  $45^\circ$ ), aby nad Vojtou proletěl ve výšce 2,4 metru a Vojta by ho tak mohl při výskoku chytit?

**Řešení:** Napišme obecnou rovnici paraboly pro vrh šikmý, kterou jsme odvodili dříve.

$$\left(x - \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}\right)^2 = -\frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g} \left(y - \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}\right) \quad (40)$$

Do rovnice (41) dosadíme to, co známe. Víme, že Vojta stojí stále 15 metrů od Honzy a chceme, aby mu míček proletěl ve výšce 2,4 metru nad hlavou. Chceme, aby Honza vyhodil míček pod stejným úhlem  $45^\circ$ .

<sup>13</sup>Položme si také ale otázku, zda je hodnota  $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  reálná. Platí, že  $14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 50,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Vezmeme-li v úvahu, že profesionální baseballisté jsou schopni hodit míčkem rychlostí, která překračuje  $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , jeví se naše vypočtená hodnota jako zcela reálná.

$$\left(x - \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 45)}{2 \cdot 10}\right)^2 = -\frac{2v_0^2 \cos^2(45)}{10} \left(y - \frac{v_0^2 \sin^2(45)}{2 \cdot 10}\right) \quad (41)$$

$$\left(x - \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 45)}{2 \cdot 10}\right)^2 = -\frac{2v_0^2 \cos^2(45)}{10} \left(y - \frac{v_0^2 \sin^2(45)}{2 \cdot 10}\right)$$

Na levé straně rovnice umocníme závorku a zjednodušíme zápis.

$$225 - 1,5v_0^2 + 0,0025v_0^4 = -0,1v_0^2(2,4 - 0,025v_0^2)$$

$$225 - 1,5v_0^2 + 0,0025v_0^4 = -0,24v_0^2 + 0,0025v_0^4 \quad / - 0,0025v_0^4$$

$$225 - 1,5v_0^2 = -0,24v_0^2$$

Nyní vyjádříme počáteční rychlost vrhu  $v_0$ .

$$1,26v_0^2 = 225$$

$$v_0 \doteq 13,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Honza by musel míček vyhodit rychlostí  $13,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pod úhlem  $45^\circ$ , aby ho dokázal Vojta chytit při výskoku ve výšce 2,4 metru nad zemí.

#### Otázka

Při jakém úhlu bude délka vrhu největší při dané rychlosti  $v_0$ ? Řešení naleznete v appletu <https://www.geogebra.org/m/bpsw8bap>.



## 7.4 Kulečnickový stůl ve tvaru elipsy

### Otázka

Jakých fyzikálních principů se využívá při běžném kulečnicku?

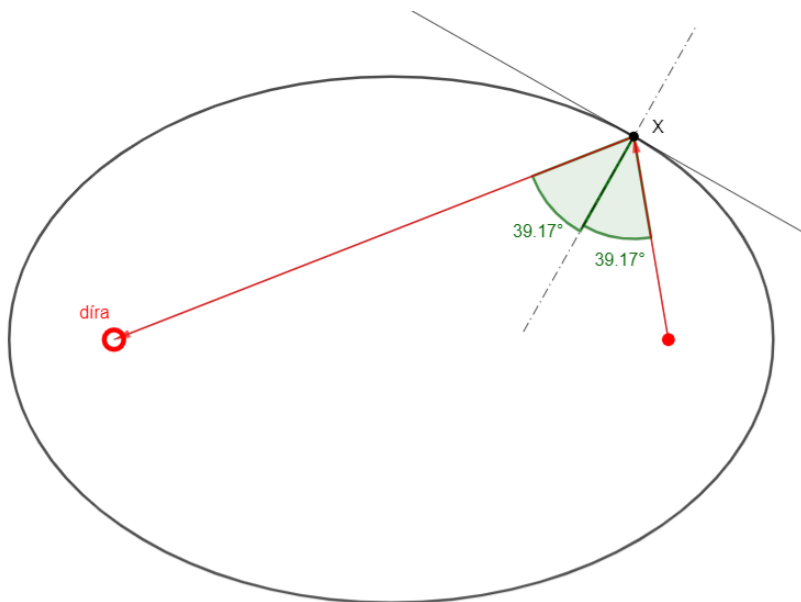
Při kulečnicku, stejně jako při ledním hokeji, se využívá toho, že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu, přičemž odražený předmět (či vlnění) zůstává v rovině dopadu. Rovina dopadu je v našem případě kulečnickový stůl.

Při kulečnicku lze také demonstrovat zákon zachování hybnosti, který říká, že celková hybnost všech těles v izolované soustavě se zachovává. Tento zákon se projeví při vzájemném dotyku dvou kulečnickových koulí. Vezmeme dvě identické koule lišící se pouze barvou. Do bílé koule štouchneme tak, že narazí přímo do modré koule. Při dotyku modré a bílé koule dochází k pružnému přímému rázu.<sup>14 15</sup> Pokud by došlo k jinému typu rázu, situace by byla složitější.

Zaměříme se na první zmíněný fyzikální princip a položíme si následující otázku.

### Otázka

Představme si, že by existoval kulečnickový stůl ve tvaru elipsy, kde díra, do které má koule zapadnout, se nachází v ohnisku. Jakou (ne)výhodu by takový kulečnickový stůl měl? Odpověď naleznete na <https://www.geogebra.org/m/frsftugu>.



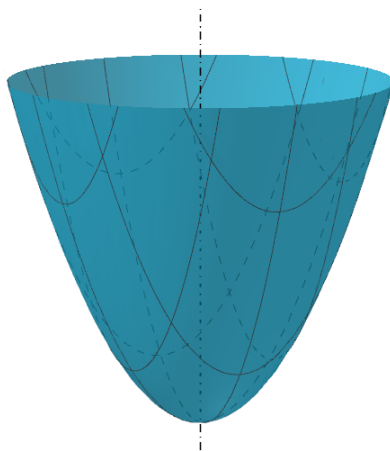
Obrázek 30: Kulečnickový stůl ve tvaru elipsy

<sup>14</sup>Pružný ráz je srážka dvou těles, kdy se v průběhu srážky kinetická energie těles zachovává. Jinými slovy platí, že součet kinetických energií těles před rázem je roven součtu kinetických energií těles po rázu, nespoteřebuje se žádná energie například na deformaci tělesa.

<sup>15</sup>Přímý ráz je srážka dvou těles, kdy se středy obou těles před nárazem i po něm pohybují po téže přímce.

## 7.5 Rotační paraboloidy

Parabolická zrcadla patří mezi speciální druhy zrcadel. Plochu parabolického zrcadla tvoří tzv. rotační paraboloid který vznikne, necháte-li rotovat parabolu kolem její osy. Na obrázku 31 je příklad rotačního paraboloidu.

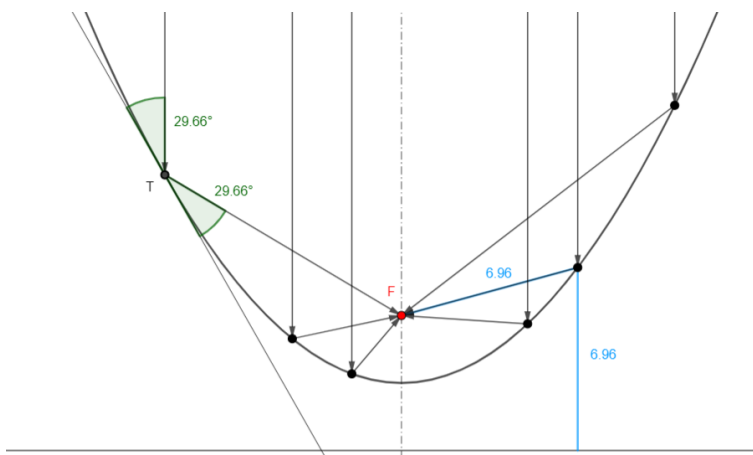


Obrázek 31: Rotační paraboloid

Parabolická zrcadla mají využití u světlometů aut, svítlen, antén, projektorů nebo u zrcadlových astronomických dalekohledů. Zkrátka všude, kde je potřeba, aby se paprsky soustředily do jediného bodu.

### Otázka

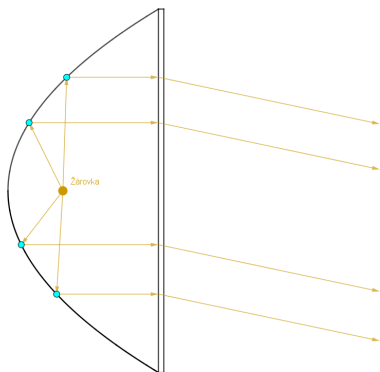
Pokud jsou paprsky rovnoběžné s osou parabolického zrcadla, kam se po dopadu na parabolické zrcadlo odrazí? V appletu <https://www.geogebra.org/m/skrthvpa> se pokuste nalézt odpověď na tuto otázku.



Obrázek 32: Schéma parabolického zrcadla s paprsky

### 7.5.1 Světlo met

Jak už bylo řečeno v kapitole 7.5, parabolická zrcadla nacházejí uplatnění v klasických světlo metech automobilů. Schéma takového světlo metu je na obrázku 33a. Na obrázku 33b je vyfocen světlo met z automobilu Škoda 100.



(a) Schéma světlo metu



(b) Světlo met z automobilu Škoda 100

Obrázek 33: Světlo mety

#### Otázka

Zdrojem světla u parabolického světlo metu bývá halogenová žárovka umístěna ve speciálním bodě. O jaký bod se jedná? Odpověď naleznete na <https://www.geogebra.org/m/rbvpbjax>.

Na odkazu <https://www.geogebra.org/m/njm6nhtz> je 3D model světlo metu.

### 7.5.2 Příklad: Světlo met

Mějme světlo met ve tvaru rotačního paraboloidu. Schéma řezu takového paraboloidu je na obrázku 33a. Jaký poloměr bude mít sklo, kterým je světlo met ukončen? Parabola, tvořící světlo met, má parametr  $p$  roven hodnotě 7,2, hloubka světlo metu je 10 cm.

Řešení tohoto příkladu najdete na <https://www.geogebra.org/m/c4t58ydn>.

### 7.5.3 Parabolické antény

Parabola nachází využití i při konstrukcích antén, které zachycují zpravidla satelitní televizní vysílání. Také se využívají k zachycování internetového signálu či nacházejí využití na hvězdárnách.

#### Otázka

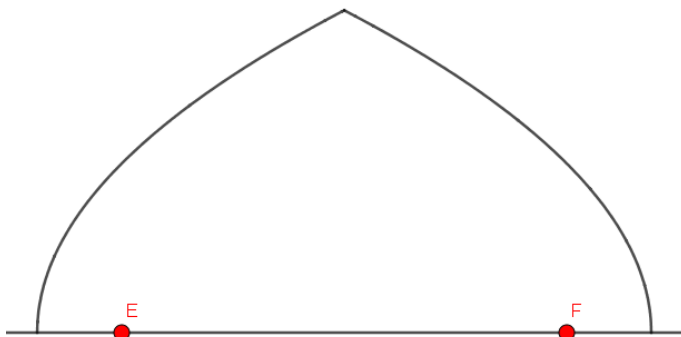
Parabolická anténa má tvar rotačního paraboloidu. Proč je výhodné používat tento typ antén? Odpověď naleznete na <https://www.geogebra.org/m/wjmdcnry>.



Obrázek 34: Parabolická anténa na Ondřejovské hvězdárně

#### 7.5.4 Dvě paraboly a dva lidé

Zajímavá situace nastane, kdybychom postavili halu ve tvaru dvou rotačních paraboloidů se stejnou osou. Řez takovou halou je zobrazen na obrázku 35.



Obrázek 35: Řez halou sestavenou ze dvou rotačních paraboloidů

#### Otázka

Do jakých dvou bodů bychom museli postavit dva lidi, aby se dobře slyšeli i v případě, že by hala byla velmi rozměrná? Odpověď nalezete na <https://www.geogebra.org/m/c87kkxrd>.

Zvuk je vlnění a to se chová podobně jako světlo. Pokud bychom chtěli, aby se v takové hale slyšeli i na velkou vzdálenost, museli bychom je postavit do takových bodů, kde se budou zvukové vlny nejlépe koncentrovat. Již víme, že paprsky (a tedy i zvukové vlny), vycházející z ohniska paraboly se od paraboly odrazí rovnoběžně s její osou. Pokud by jeden z nich stál v ohnisku jedné paraboly, tak kam by se musel postavit druhý člověk, aby se dobře slyšeli?

Druhý člověk by se musel postavit do ohniska druhé paraboly, protože zvukové vlny, které přicházejí rovnoběžně s osou paraboly, se odrazí do jejího ohniska. Pokud by každý z nich stál v jednom ohnisku každé z parabol tvořících halu, slyšeli by se poměrně dobře.

## 8 Další křivky

Z křivek jsou, v rámcových a školních vzdělávacích programech, zařazeny převážně jen kuželosečky, ale bylo by zajímavé při výuce kuželoseček alespoň zmínit, že existují i jiné zajímavé křivky a kde je můžeme najít.

### 8.1 Řetězovka

První zajímavou rovinnou křivkou je řetězovka, kterou zhruba vytvoří řetěz zavěšený za jeho konce (obrázek 36).



Obrázek 36: Řetězovka

Každý předmět se snaží minimalizovat svojí energii, ve které se nachází. Pokud jste viděli nějaké video z mezinárodní kosmické stanice (ISS), určitě jste si všimli, jak se tam chovají kapky vody. Voda tvoří kuličky.



Obrázek 37: Chování kapek vody na ISS [15]

Tento jev nepozorujeme jenom ve vesmíru. Pokud necháte velmi pomalu kapat vodu z kohoutku, uvidíte padat jednotlivé kapičky vody. Proč to jsou zrovna koule a ne krychle či kvádr? Je to proto, že koule má při daném objemu nejmenší povrch a tím i nejmenší povrchové napětí. Stejně jako voda, i zavěšený řetěz se snaží minimalizovat spojí potenciální energii. Rovnici řetězovky tak dostaneme při hledání nejmenší hodnoty potenciální energie pevného a homogenního vlákna <sup>16</sup>. Za pomoci těchto

<sup>16</sup>Homogenní vlákno je takové vlákno, které má ve všech místech stejnou strukturu.

znalostí a integračního a variačního počtu lze odvodit rovnici řetězovky

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

#### Otázka

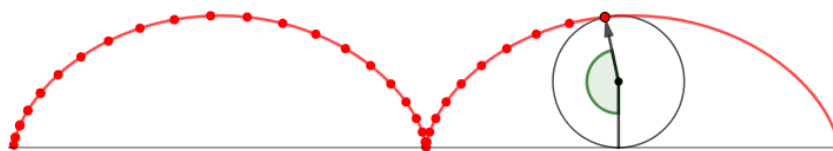
Na první pohled může řetězovka připomínat parabolu.

Na <https://www.geogebra.org/m/yh885hs> se pokuste najít takovou kombinaci parametrů řetězovky a paraboly, aby byly křivky identické, tj. aby se zcela překrývaly.

I přesto, že jsou si tvarem řetězovka a parabola podobné, jedná o dvě různé křivky.

## 8.2 Cykloida

Mezi další zajímavé křivky patří cykloida. Je to rovinná křivka, kterou opisuje zvolený bod, který je pevně spojený s pohybující se kružnicí, která se valí po přímce. Takovou křivku by opisovala například odrazka na rovně jedoucím kole.

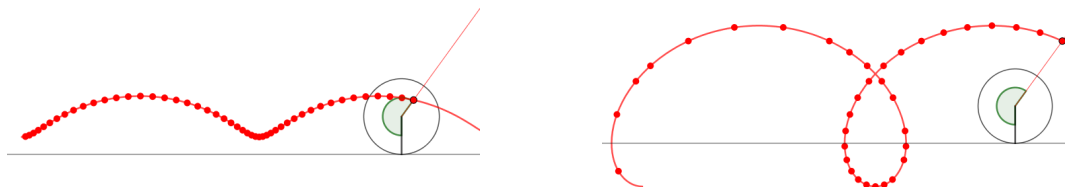


Obrázek 38: Cykloida

#### Otázka

Jak bude cykloida vypadat, kdyby pevně zvolený bod ležel mimo kružnici? Odpověď nejenom na tuto otázku se pokuste nalézt na <https://www.geogebra.org/m/nxsrh9t5>.

Pokud bude zvolený bod ležet uvnitř kružnice, vznikne zkrácená cykloida. Pokud bude opisující bod ležet vně kružnice, bude se jednat a prodlouženou cykloidu.



(a) Zkrácená cykloida

(b) Prodloužená cykloida

Obrázek 39: Typy cykloid

### 8.3 Brachistochrona

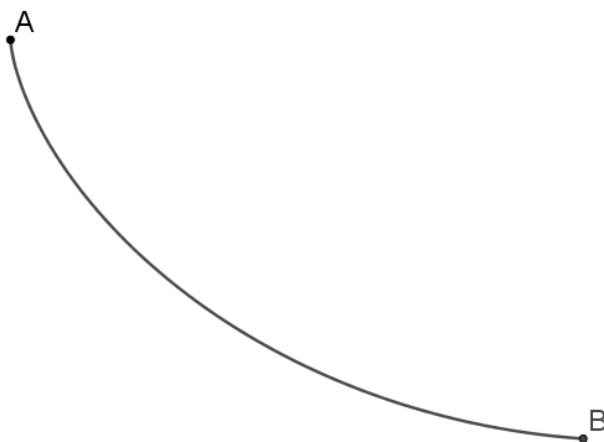
Johann Bernoulli v jednom článku zveřejnil výzvu pro čtenáře, která zněla následovně: Určete trajektorii, po které hmotný bod<sup>17</sup> klouže z jednoho daného bodu do druhého, který není přímo pod ním, v co nejkratším čase.



Obrázek 40: Příklad počátečního zadání úlohy

Řešení mu zaslali Jacob Bernoulli, Gottfried Wilhelm Leibniz, Guillaume de l'Hospital a Isaac Newton. I přesto, že problém není triviální, traduje se, že ho Isaac Newton dokázal vyřešit za jediný den. Křivku pojmenovali brachistochrona. Je to složenina dvou řeckých slov, *brachistos* (nejkratší) a *chronos* (čas). Na <https://www.geogebra.org/m/jcwzmvev> zkuste takovou křivku najít i vy.

Na <https://gfycat.com/biodegradablefloweramericankestrel> je animace ukázky různých řešení problému. [13] [14]



Obrázek 41: Ukázka řešení úlohy zadané Bernoulliem

---

<sup>17</sup>V některých fyzikálních úlohách lze rozměry tělesa zanedbat. Takové těleso lze nahradit tzv. **hmotným bodem**, který nemá rozměry, ale má hmotnost původního tělesa.

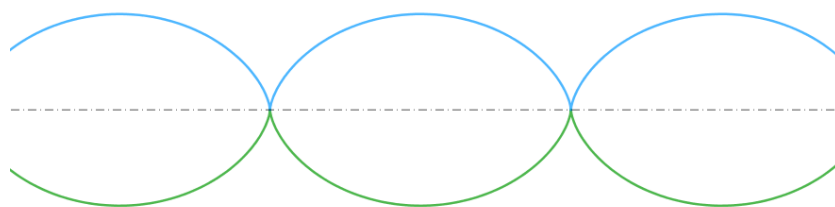
Kvůli fyzikálním vlastnostem brachistochrony se jí také říká křivka nejkratšího spádu.

Otázka

Co mají společného brachistochrona a cykloida?

Pokuste se odpověď nalézt na <https://www.geogebra.org/m/r3jjhten>.

Cykloida a brachistochrona jsou identické křivky. Jsou vůči sobě symetrické podle osy  $x$ , jak je zobrazeno na obrázku 42.



Obrázek 42: Cykloida a brachistochrona



## 9 Závěr

Diplomová práce s názvem "Kuželosečky a jiné křivky" se především zabývala kuželosečkami, které jsou zajímavým tématem probíraným na středních školách. Diplomová práce byla tvořena s cílem sestavit doplňkový text s výkladem, výukovými applety v programu GeoGebra a řešenými příklady vhodnými pro studenty středních škol. V současné době se klade důraz na mezipředmětové vztahy a jedním z cílů této diplomové práce bylo propojit učivo o kuželosečkách se znalostmi z fyziky.

V kapitole 2 byla provedena rešerše, kde bylo na konkrétních rámcových vzdělávacích programech ukázáno, na jakých studijních oborech se kuželosečky vyučují. Zároveň bylo ukázáno, že do školních vzdělávacích programů jsou školami zařazovány i přesto, že v rámcových vzdělávacích programech kuželosečky mnohdy zařazené nejsou. O kuželosečkách se učí studenti gymnázií, telekomunikací, geodzie, technických a kombinovaných lyceí, strojírenství, elektrotechniky, stavebnictví a obchodních akademií. Na těchto školách jsou kuželosečky vyučovány zejména z pohledu analytické geometrie, méně se zde zabývají konstrukcí kuželoseček v rámci deskriptivní geometrie.

V kapitole 4 až 6 byly představeny všechny typy kuželoseček. Protože studenti mívají často problémy s propojováním analytických předpisů kuželoseček s jejich grafickou podobou, je tato část doplněna o výukové applety v programu GeoGebra, které, spolu s návodnými otázkami, studentům pomáhají s odstraňováním těchto problémů. Tyto applety jsou dostupné přes odkazy v této práci a zároveň jsou dohledatelné na stránkách [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).

Kapitola 8 se zabývala především řešenými příklady ze světa kuželoseček. Tyto příklady měly za cíl propojit znalosti nabyté v kapitolách 4 až 6 s praktickým uplatněním ve fyzikálně orientovaných příkladech. Na začátku kapitoly 8 bylo ukázáno zavedení kuželoseček pomocí numerické excentricity, která nachází uplatnění v kapitolách 8.1 a 8.2. Kapitola 8.1 se zabývala dráhami planet a Keplerovými zákony, kde již studenti pojem elipsa znají a dojde tak k mezipředmětovému propojení učiva o kuželosečkách. Kapitola 8.2. se zabývala kosmickými rychlostmi, protože právě při těchto rychlostech se družice či raketa pohybují po trajektorii, kterou je kružnice nebo parabola. Kapitola 8.3 obsahovala řešený příklad na vrh šikmý, kde byl kladen důraz na propojení analytického vyjádření paraboly a uvedených fyzikálních pojmů a vztahů. Kapitola 8.4. se zabývala poněkud netradiční myšlenkou kulečnickového stolu ve tvaru elipsy, na kterém je ukázáno propojení vlastností elipsy a zákona odrazu, který studenti znají z hodin fyziky. Kapitola 8.5 se zabývala rotačními paraboloidy, kde byly vybrány demonstrační příklady, které by mohly být studentům blízké, jako jsou světlomety a parabolické antény.

Kapitola 9 se zabývala křivkami, které nejsou kuželosečkami. Protože se na základě rešerše v kapitole 2 ukázalo, že ostatní křivky nejsou součástí rámcových ani školních vzdělávacích plánů a nedostává se jim tak ve školách příliš prostoru, jsou tyto křivky vyloženy spíše ve formě zajímavých informací a vlastností, které jsou demonstrovány v appletech tvořených v programu GeoGebra.

Diplomová práce by mohla být rozšířena například o tečny ke kuželosečce, vzájemnou polohu přímků a kuželosečky nebo o kapitolu obsahující informace z deskriptivní geometrie.

## Seznam použité literatury

- [1] Borceux, Francis. *An Axiomatic Approach to Geometry: Geometric Trilogy I*. Cambridge: At The University Press, 2014. Springer. ISBN 978-3-319-01729-7
- [2] Colerus, Egmont. *Od Pythagory k Hilbertovi : Dějiny matematiky pro všechny*. 1941. Praha
- [3] Glaeser, Georg; Stachel, Hellmuth; Odehnala, Boris. *The Universe of Conics*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2016. 5-10 s. ISBN 978-3-662-45449-7.
- [4] Heath, Thomas Little. *Apollonius of Perga: Treatise on conic sections*. Cambridge: At The University Press, 1896. Cambridge: University Press.
- [5] Kabátová, Šárka. *Oumuamua jako mimozemská sonda? Pravdu se už nikdy nedozvíme, tvrdí čeští astronomové* [online]. [cit. 11. 4. 2022]. Dostupné z: <https://lurl.cz/4rtoU>
- [6] Spence, Steven. *This interstellar asteroid is accelerating* [online]. [cit. 11. 4. 2022]. Dostupné z: <https://magazine.scienceconnected.org/2018/07/interstellar-asteroid-accelerating/>
- [7] Williams, David R. *Lunad and Planetary Science* [online]. [cit. 6. 4. 2022]. Dostupné z: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/>
- [8] European Space Agency, *Giotto approaching Comet Halley* [online]. [cit. 20. 3. 2022]. Dostupné z: [https://www.esa.int/ESA\\_Multimedia/Images/2016/03/Giotto\\_approaching\\_Comet\\_Halley](https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Images/2016/03/Giotto_approaching_Comet_Halley)
- [9] Palmerová, Marie. *Teoretická dráha Halleyovy komety* [online]. [cit. 20. 2. 2022]. Dostupné z: <http://marie.palmer.sweb.cz/HALLK.html>
- [10] TheSkyLive. *Comet C/2016 U1 (NEOWISE)* [online]. [cit. 11. 5. 2022]. Dostupné z: <https://theskylive.com/c2016u1-info>
- [11] NASA Science. *Solar system exploration* [online]. [cit. 23. 2. 2022]. Dostupné z: <https://solarsystem.nasa.gov/planets/overview/>
- [12] Janáček, Zdeněk. *Vergina - Agai - Královské hrobky* [online]. [cit. 27. 4. 2022]. Dostupné z: <https://cutt.ly/2Hyg1jZ>
- [13] BOUTE, Raymond T. *The Brachistochrone Problem Solved Geometrically: A Very Elementary Approach* [online]. [cit. 29. 4. 2022]. Dostupné z: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.4169/math.mag.85.3.193>
- [14] WordPress. *Brachistochrone GIF* [online]. [cit. 2. 5. 2022]. Dostupné z: <https://gfycat.com/biodegradablefloweryamericankestrel>
- [15] Space Center Houston. *Try this at home Part 2: Cleaning water* [online]. [cit. 4. 5. 2022]. Dostupné z: <https://spacecenter.org/try-this-at-home-part-2-cleaning-water/>
- [16] Wikipedie. *List of near-parabolic comets* [online]. [cit. 20. 4. 2022]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_near-parabolic\\_comets](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_near-parabolic_comets)