

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Řešení odezvy tenkých viskoelastických
heterogenních tyčí s proměnným průřezem na rázové
zatížení**

Autor: Bc. Jakub Šulda

Vedoucí: Ing. Vítězslav Adámek, Ph.D.

Červen 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 31. 5. 2022

Bc. Jakub Šulda

Poděkování

Mé velké poděkování patří Ing. Vítězslavu Adámkovi, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a čas, který mi v průběhu zpracování diplomové práce i při studiu věnoval.

Chtěl bych dále poděkovat i Ing. Vladimíru Lukešovi, Ph.D. za provedení 3D tisku a Ing. Romanu Kroftovi za realizaci experimentu, jehož výsledky napomohly ke splnění cílů této práce.

V Plzni dne 31. 5. 2022

Bc. Jakub Šulda

Abstrakt

Tato diplomová práce je zaměřena na řešení úloh šíření stacionární a nestacionárních vln v tenkých viskoelastických tyčích. V práci jsou odvozeny vztahy pro výpočet odezvy homogenních prizmatických tyčí ve frekvenční oblasti, jejichž materiálové vlastnosti jsou popsány zobecněným modelem standardního viskoelastického tělesa. Dále je zde prezentováno zobecnění řešení na úlohy heterogenních neprizmatických tyčí v Laplaceově oblasti. Výsledky z analytického řešení jsou porovnány s výsledky získanými pomocí metody konečných prvků a s výsledky experimentů. V další části práce je pozornost zaměřena na popis disperzních a tlumicích vlastností viskoelastických materiálů a na metody jejich určování. Tyto poznatky jsou spolu s experimentálními daty získanými z měření provedených na homogenních, vrstevnatých a neprizmatických tyčích využity k identifikaci materiálových vlastností vybraných viskoelastických materiálů.

Abstract

This diploma thesis is focused on solving problems of stationary and non-stationary wave propagation in thin viscoelastic rods. In this work, relations are derived for the calculation of the response of homogeneous prismatic rods in the frequency domain, whose material properties are described by a generalized model of a standard viscoelastic body. Furthermore, the generalization of solution to problems of heterogeneous non-prismatic rods in Laplace domain is presented. The results of the analytical solution are compared with the results obtained using the finite element method and with the response measured on real viscoelastic rods. In the next part of the work, attention is focused on the description of dispersion and damping properties of viscoelastic materials and on the methods of their determination. These findings, together with experimental data obtained from measurements performed on homogeneous, layered and non-prismatic bars, are used to identify the material properties of selected viscoelastic materials.

Obsah

1	Úvod	5
2	Šíření vln v heterogenních a neprizmatických tyčích, metody identifikace materiálových vlastností	6
3	Analytické řešení odezvy tenké viskoelastické tyče	8
3.1	Řešení odezvy homogenní prizmatické tyče v komplexní oblasti	8
3.2	Řešení odezvy homogenní prizmatické tyče ve frekvenční oblasti	10
3.3	Řešení odezvy vrstevnaté prizmatické tyče	13
3.4	Zobecnění řešení pro vrstevnaté neprizmatické tyče	14
4	Vyčíslení analytického řešení a porovnání s výsledky numerických simulací	17
4.1	Vyčíslení odvozeného analytického řešení	17
4.2	Konečnoprvkový model heterogenní a neprizmatické viskoelastické tyče . .	18
5	Frekvenčně závislé vlastnosti viskoelastických materiálů	25
5.1	Disperzní a tlumicí vlastnosti homogenního viskoelastického 1D prostředí .	25
5.2	Určení disperzních a tlumicích vlastností viskoelastických tyčí	28
6	Určování materiálových vlastností z výsledků experimentu	36
6.1	Popis experimentu a naměřených dat	36
6.2	Identifikace materiálových parametrů a porovnání naměřených odezev s analytickým řešením	42
6.3	Identifikace disperzních a tlumicích vlastností	46
7	Závěr	52
	Příloha A Specifikace přístrojů a materiálů	56
A.1	Produktový list akcelerometru	56
A.2	Produktový list rázového kladívka	58
A.3	Materiálový list PET	60
	Příloha B Identifikované parametry ZSVT	61

1 Úvod

Cílem této diplomové práce, která navazuje na autorovu bakalářskou práci, je řešení odezvy tenkých viskoelastických heterogenních tyčí s nekonstantním průřezem na stacionární a nestacionární typ buzení s využitím analytických, numerických a experimentálních postupů. Dále je práce zaměřena na řešení vybraných typů inverzních úloh výše zmíněných 1D viskoelastických prostředí, konkrétně na identifikaci jejich materiálových vlastností.

Struktura práce odpovídá uvedeným cílům. V první části je provedena rešerše prací zabývajících se šířením vln v 1D viskoelastických prostředích v souvislosti s heterogenitou materiálu a neprizmatickostí prostředí. Dále je podán stručný přehled metod používaných k identifikaci materiálových vlastností pomocí experimentálních dat. V další kapitole je formulována úloha šíření vln v tenké homogenní prizmatické viskoelastické tyči a jsou připomenuty vztahy odvozené v bakalářské práci popisující řešení této úlohy v Laplaceově oblasti. Toto řešení je dále využito k nalezení odezvy tenké tyče ve frekvenční oblasti a k řešení úloh vrstevnatých neprizmatických tenkých tyčích v Laplaceově oblasti. Získaná řešení jsou vyčíslena v prostředí systému Matlab a následně porovnána s výsledky numerických simulací provedených v konečnoprvkovém programu MSC.Marc. Další část práce pojednává o disperzních a tlumicích vlastnostech viskoelastických materiálů, o způsobech jejich popisu a diskutuje vybrané metody používané k jejich identifikaci. V poslední kapitole je nejprve uveden popis měření, která byla provedena na homogenních a heterogenních (vrstevnatých) tyčích konstantního a proměnného průřezu. Výsledky experimentů jsou v dalším kroku využity jak pro určení parametrů standardního viskoelastického tělesa, kterým jsou vlastnosti jednotlivých materiálů aproximovány, tak pro identifikaci disperzních a tlumicích vlastností použitých materiálů a tyčí.

Tato diplomová práce byla zpracována v rámci řešení dílčího tématu projektu GA ČR 19-04956S s názvem "Dynamika a nelineární chování pokročilých kompozitních struktur; modelování a optimalizace".

2 Šíření vln v heterogenních a neprizmatických tyčích, metody identifikace materiálových vlastností

K popisu chování lineárního viskoelastického prostředí se s výhodou využívají diskrétní viskoelastické reologické modely, které se skládají z elastických pružin a vazkých tlumičů. Přehled základních typů těchto modelů je podán např. v pracích [39] a [38]. Autor v publikaci [38] popisuje chování jednotlivých modelů při statickém nebo dynamickém namáhání a jejich aplikace v praxi. Důležitou vlastností těchto modelů je relaxace napětí, což odpovídá skutečnému chování reálných viskoelastických materiálů. Diskrétní materiálové modely mají jeden či více relaxačních časů. Skutečný materiál má však toto spektrum spojitě [42], proto se velmi často používá model zobecněného viskoelastického tělesa, jehož relaxační spektrum může teoreticky obsahovat libovolný počet relaxačních časů. Další možností, jak popsat viskoelastické vlastnosti, je pomocí funkce komplexního modulu $E^*(\omega)$, viz [14]. Z jeho reálné a imaginární části lze odvodit disperzní a tlumicí vlastnosti materiálu v závislosti na frekvenci (viz [28]).

Nalezení viskoelastických vlastností reálných materiálů se mezi prvními věnovali Kolsky [25] a Davies [11]. Ti ve svých pokusech používali zejména tzv. Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB), test navržený Hopkinsonem [21]. Tato metoda umožňuje nedestruktivní identifikaci dynamických materiálových parametrů. SHPB se skládá ze vstupní a výstupní tenké tyče, mezi kterými je umístěný zkoumaný vzorek. Tenzometry, které jsou nalepené na obou tyčích, zaznamenávají odezvu těchto tyčí na buzení vstupní tyče rázem projektilu, tj. postupující vlnu, vlnu odraženou a vlnu prošlou vzorkem. Materiálové parametry je pak možné určit pomocí záznamu těchto odezev [25]. Z počátku byly pro SHPB test používány tyče z typicky elastických materiálů a pro identifikaci dynamických vlastností postačovala teorie šíření elastických vln. Postupem času, kdy se začaly zkoumat materiálové parametry vzorků s výrazně nižší charakteristickou impedancí, bylo nutné použít tyče viskoelastické, tj. i jinou teorii pro popis výše zmíněných vlnových jevů (viz [44]). V práci [40] byla např. využita teorie šíření vln ve viskoelastickém prostředí k nalezení parametrů vybraných reologických modelů. Jiné metody jsou založené na určení funkce komplexního modulu. V literatuře je možné nalézt hned několik způsobů určení $E^*(\omega)$ a lze je rozdělit v podstatě do dvou skupin.

První skupinu tvoří metody založené na sledování odezvy tyče buzené harmonickým signálem. Příkladem je metoda použitá v článku [17], ve kterém autoři využívají harmonický oscilátor pro buzení sinusového signálu v polymerizovaném ethylenu a neoprenu. Díky známé frekvenci a amplitudě buzení jsou schopni vypočítat fázovou rychlost vlny a relativní tlumení. V článku [34] je popsán experiment, při kterém je viskoelastická tyč s přidanou vahou na konci buzena harmonickým osovým posuvem ve slyšitelném frekvenčním spektru. Výsledky měření jsou následně využity k určení komplexního modulu. Podobným způsobem, ale v komplexní oblasti, byl v článku [37] zjišťován komplexní modul $E^*(\omega)$ viskoelastických materiálů. V tomto případě byla tyč s přidanou hmotou buzena pomocí shakeru a modul $E^*(\omega)$ byl následně vypočítán z přenosové funkce posuvů stejně tak, jako v článku [29]. Frekvenční omezení těchto metod je dáno maximální frekvencí použitého harmonického budiče. Ve většině zmíněných prací se jednalo o budič

s maximální frekvencí 20 kHz, tj. s frekvencí odpovídající přibližně horní mezi slyšitelného zvuku.

Druhou skupinu tvoří metody využívající měření odezvy tyče buzené rázovým zatížením. Na rozdíl od předchozí skupiny je těmito metodami možné určit materiálové vlastnosti i pro frekvence v řádech stovek kHz s dostatečnou přesností. Přesnost těchto metod pak závisí zejména na frekvenčním spektru vybuzeného pulzu. Při měření materiálových vlastností se většinou s výhodou využívá Fourierův obraz změřené odezvy. Například v článku [7] autor popisuje metodu určování disperzní a tlumicí křivky pomocí měření libovolné odezvy ve Fourierově oblasti ve dvou zvolených bodech tenké tyče. Autor zároveň uvádí postup výpočtu těchto závislostí bez nutnosti použití Fourierovy transformace. Do této skupiny patří i metody, při kterých je nutné znát deformaci v jednom, dvou a nebo více místech tyče. Tyto metody byly vytvořeny za účelem výpočtu disperzních a tlumicích vlastností při SHPB testu. Bacon ve svém článku [3] našel matematické vztahy pro určení disperzních vlastností z měření deformace v jednom bodě. Výpočet v komplexní oblasti probíhal na základě známé přenosové funkce postupné a odražené vlny. Jeho výzkum dále rozvinul Hillström v článku [19], který identifikaci disperzních a tlumicích křivek provedl pomocí měření na dvou a více tenzometrech. Tyto dva způsoby identifikace byly pak porovnány v práci [2], kde autor použil analytické vztahy pro disperzní a tlumicí křivku Zenerova modelu (tj. standardního viskoelastického tělesa) s korekcí pro nenulové Poissonovo číslo a pro libovolný průřez tyče. Pokud je možné získat průběh odezvy tyče v bodech ekvidistantně rozložených podél celé její délky, můžeme s výhodou použít metodu založenou na 2D Fourierově transformaci [20]. V tomto článku byla metoda použita pro stanovení disperzních vlastností jednotlivých módů Lambových vln. Zároveň je zde uveden postup implementace této metody v Matlabu.

Výše zmíněné metody autoři používali pro zjištění disperzních a tlumicích závislostí především na homogenních prizmatických viskoelastických tyčích. Pokud je potřeba identifikovat materiálové vlastnosti heterogenní nebo neprizmatické tyče pomocí její odezvy, je nutné, aby vlna přinejmenším prošla celým zkoumaným prostředím z důvodu odlišné fázové rychlosti a tlumení v každé její homogenní a prizmatické části. Zároveň zde dochází k odrazu vlny vlivem změny impedance prostředí, nebo změnou průřezu a pulz tím ztrácí svoji celistvost. V práci [41] je diskutován způsob výpočtu komplexního modulu pro nízké frekvence a heterogenní materiály pomocí spektrální dekompozice. Vliv heterogenity prostředí na šíření pulzu je diskutován např. v pracích [1] a [6]. Průběh odezvy napětí vybuzené rázovým zatížením ve funkčně gradovaném materiálu je pomocí metody konečných prvků analyzován v práci [24]. O důsledcích šíření vln ve funkčně gradovaných materiálech pojednává i článek [22]. Autoři zde uvádí vliv skladby materiálu na jeho penetraci balistickými střelami. Ve zprávě [10] je řešen pohyb pulzu v tenké tyči s lineární změnou modulu pružnosti. Uvádí se zde, že pro některé případy lze heterogenní materiál s proměnným modulem pružnosti modelovat jako homogenní materiál s proměnným průřezem. O vytvoření matematického modelu šíření vln v tenkých homogenních neprizmatických tyčích pojednává práce [15]. Autoři v této práci komentují i zesílení či utlumení amplitudy pulzu vlivem změny průřezu. Graff ve své knize [16] prezentuje analytické řešení elastické tyče se spojitě proměnným průřezem a diskutuje její disperzní vlastnosti.

3 Analytické řešení odezvy tenké viskoelastické tyče

V této kapitole jsou v první řadě shrnuty výchozí rovnice a vztahy popisující odezvu v Laplaceově oblasti pro libovolnou homogenní viskoelastickou tyč. V následující části je uveden postup odvození analytických vztahů pro výpočet odezvy této tyče ve frekvenční oblasti. Poslední dvě části kapitoly pojednávají o nalezení řešení pro rovnice popisující šíření vln ve vrstevnatých viskoelastických tyčích. Nejprve je uveden postup nalezení odezvy tenké heterogenní prizmatické viskoelastické tyče na libovolné buzení. Následně je pak analogickým postupem provedeno odvození řešení odezvy obecné vrstevnaté heterogenní neprizmatické viskoelastické tyče.

3.1 Řešení odezvy homogenní prizmatické tyče v komplexní oblasti

Tato úloha byla již řešena v práci [40]. V následující části práce proto budou uvedeny jen základní vztahy a principy, které budou využity i v dalších částech této kapitoly.

Podmínka rovnováhy pro vyjmutý element tyče délky l o průřezu A a hustotě ρ , který je i s působícími silami zobrazen na obr. 1, má tvar

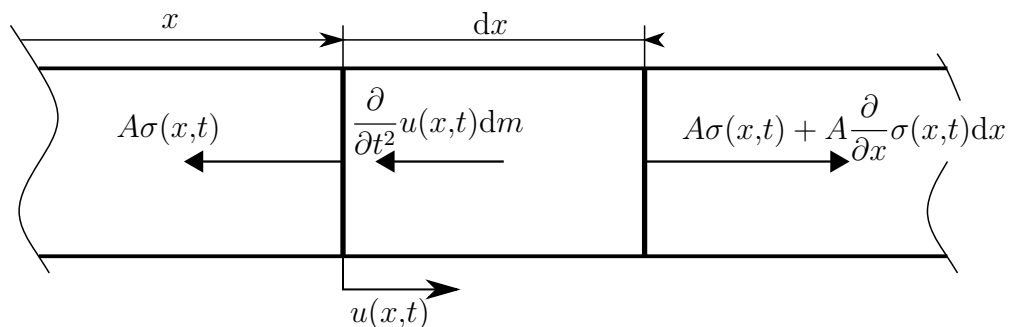
$$\frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

kde funkce $\sigma(x, t)$, $u(x, t)$ značí postupně osově napětí a posuv v závislosti na podélné souřadnici x a čase t . Po dosazení geometricko-deformační rovnice zohledňující teorii malých deformací, tj.

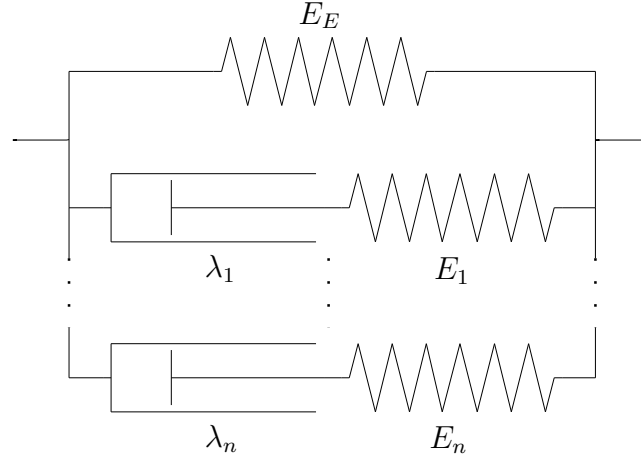
$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \varepsilon(x, t), \quad (3.2)$$

kde $\varepsilon(x, t)$ představuje deformaci tyče, a s využitím fyzikální rovnice charakterizující chování zobecněného viskoelastického tělesa, viz obr. 2, lze získat výslednou pohybovou rovnici, která je obdobou vlnové rovnice v 1D, v podobě

$$\left(c_{0,E}^2 + \sum_{i=1}^n c_{0,i}^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \sum_{i=1}^n c_{0,i}^2 R_i \int_0^t \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, \tau) \right) e^{-R_i(\tau-t)} d\tau = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t). \quad (3.3)$$



Obrázek 1: Síly působící na vyjmutý element homogenní tyče [40]



Obrázek 2: Model zobecněného viskoelastického tělesa [40]

Parametry $c_{0,E} = \sqrt{E_E/\rho}$, $c_{0,i} = \sqrt{E_i/\rho}$ značí postupně rychlost podélné vlny ve větvi zobecněného viskoelastického modelu se samostatnou pružinou s modulem pružnosti E_E a rychlost podélné vlny v i -té Maxwellově větvi charakterizované modulem pružnosti E_i a vazkostí tlumiče λ_i v sériovém zapojení. Koefficient $R_i = E_i/\lambda_i$ pak značí převrácenou hodnotu relaxačního času. Řešení této parciální integro-diferenciální rovnice bylo nalezeno pro nulové počáteční podmínky v komplexní oblasti s využitím Laplaceovy transformace, která je dle definice dána předpisem [36]

$$\mathcal{L}(f(t)) = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (3.4)$$

kde symbol $(\bar{\quad})$ značí Laplaceův obraz libovolné funkce $f(t)$ a $p \in \mathbb{C}$. Toto řešení pro osový posuv a napětí je dáno vztahy [40]

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, p) &= A_1(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)} + A_2(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)}, \\ \bar{\sigma}(x, p) &= \frac{E^c(p)p}{C_0(p)} \left(A_1(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)} + A_2(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Neznámé komplexní funkce $A_1(p)$, $A_2(p)$ lze dopočítat na základě okrajové podmínky definující buzení $\sigma_0(t)$ v osovém směru na pravém konci tyče ($x = l$)

$$\sigma(l, t) = \sigma_0(t) \quad (3.6)$$

a z okrajové podmínky definující volný konec tyče v místě $x = 0$

$$\sigma(0, t) = 0. \quad (3.7)$$

Poté lze napsat řešení pro Laplaceův obraz osového posuvu $\bar{u}(x, p)$ a napětí $\bar{\sigma}(x, p)$ ve tvaru [40]

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{\sigma}_0(p)C_0(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)}}{E^c(p)p \sinh \frac{pl}{C_0(p)}}, \quad \bar{\sigma}(x, p) = \frac{\bar{\sigma}_0(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)}}{\sinh \frac{pl}{C_0(p)}}. \quad (3.8)$$

Pro tyč, která je na levém konci vetknuta, lze formulovat okrajovou podmínku následovně:

$$u(0, t) = 0. \quad (3.9)$$

V tomto případě mají Laplaceovy obrazy hledaných funkcí tvar

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{\sigma}_0(p)C_0(p) \sinh \frac{px}{C_0(p)}}{E^c(p)p \cosh \frac{pl}{C_0(p)}}, \quad \bar{\sigma}(x, p) = \frac{\bar{\sigma}_0(p) \cosh \frac{px}{C_0(p)}}{\cosh \frac{pl}{C_0(p)}}. \quad (3.10)$$

Komplexní funkce $\bar{\sigma}_0(p)$ v (3.8) a (3.10) značí Laplaceův obraz osového buzení $\sigma_0(t)$ a funkce $C_0(p)$ a $E^c(p)$ popisují materiálové vlastnosti viskoelastické tyče. Pro případ zobecněného standardního viskoelastického tělesa jsou definovány jako [40]

$$C_0(p) = \sqrt{c_{0,E}^2 + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{R_i}{p + R_i}\right) c_{0,i}^2}, \quad E^c(p) = E_E + \sum_{i=1}^n \left(E_i - \frac{E_i R_i}{(p + R_i)}\right). \quad (3.11)$$

Obrazy rychlosti a zrychlení se získají z první a druhé časové derivace vztahu (3.8)₁, resp. (3.10)₁, tj.

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, p) &= \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} u(x, t) \right\} = p\bar{u}(x, p), \\ \bar{a}(x, p) &= \mathcal{L} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} u(x, t) \right\} = p^2\bar{u}(x, p). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Obraz deformace $\bar{\varepsilon}(x, p)$ je možné pak získat pomocí rovnice (3.8)₁, resp. (3.10)₁, s využitím Laplaceova obrazu geometricko-deformační rovnice (3.2), tj.

$$\bar{\varepsilon}(x, p) = \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right\} = \frac{\bar{\sigma}(x, p)}{E^c(p)}. \quad (3.13)$$

Pro vyjádření odezvy v časové oblasti je možné použít inverzní Laplaceovu transformaci, která je definována Bromwich-Wagnerovým integrálem [36]

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{f}(p) \} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp, \quad (3.14)$$

kde c v integrační cestě značí vzdálenost přímky rovnoběžné s imaginární osou Gaussovy roviny.

3.2 Řešení odezvy homogenní prizmatické tyče ve frekvenční oblasti

V této kapitole bude řešena odezva homogenní tenké tyče ve frekvenční oblasti s využitím Fourierovy transformace, která je dle definice dána vztahem [36]

$$\mathcal{F} \{ f(t) \} = \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.15)$$

kde $f(t)$ je libovolná funkce, symbol $(\hat{\cdot})$ značí její Fourierový obraz a ω představuje úhlovou frekvenci.

Použitím Fourierovy transformace na podmínku rovnováhy (3.1) získáme

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{\sigma}(x, \omega) = -\rho\omega^2 \hat{u}(x, \omega), \quad (3.16)$$

což dále vede na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Dosazením fyzikální rovnice charakterizující chování lineárního viskoelastického materiálu ve frekvenční oblasti ve tvaru [2]

$$\hat{\sigma}(x, \omega) = E^*(\omega) \hat{\varepsilon}(x, \omega), \quad (3.17)$$

kde $E^*(\omega)$ je komplexní modul, a Fourierova obrazu geometricko-deformační rovnice (3.2)

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{u}(x, \omega) = \hat{\varepsilon}(x, \omega) \quad (3.18)$$

do rovnice (3.16), obdržíme výslednou pohybovou rovnici ve frekvenční oblasti

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{u}(x, \omega) \right) E^*(\omega) = -\rho\omega^2 \hat{u}(x, \omega). \quad (3.19)$$

Obecné řešení obyčejné diferenciální rovnice (3.19) lze nalézt pomocí charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \frac{\rho\omega^2}{E^*(\omega)} = 0. \quad (3.20)$$

Pro odezvu tenké homogenní prizmatické viskoelastické tyče ve frekvenční oblasti je možné potom psát

$$\hat{u}(x, \omega) = B_1(\omega) \sin \left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}} \right) + B_2(\omega) \cos \left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}} \right). \quad (3.21)$$

Pomocí rovnic (3.17) a (3.18) je možné dále zapsat obecné řešení pro obraz napětí jako

$$\hat{\sigma}(x, \omega) = \omega \sqrt{\rho E^*(\omega)} \left(B_1(\omega) \cos \left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}} \right) - B_2(\omega) \sin \left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}} \right) \right). \quad (3.22)$$

Neznáme funkce $B_1(\omega)$ a $B_2(\omega)$ ve vztazích (3.21) a (3.22) se určí na základě transformovaných okrajových podmínek úlohy. V případě volné tyče lze okrajové podmínky (3.6) a (3.7) zapsat po transformaci jako

$$\hat{\sigma}(l, \omega) = \hat{\sigma}_0(\omega), \quad \hat{\sigma}(0, \omega) = 0, \quad (3.23)$$

kde $\hat{\sigma}_0(\omega)$ je Fourierův obraz buzení. Dosazením řešení (3.22) do (3.23) získáme hledané funkce ve tvaru

$$B_1(\omega) = 0, \quad B_2(\omega) = \frac{-\hat{\sigma}_0(\omega)}{\omega \sqrt{\rho E^*(\omega)} \sin \omega l \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}}. \quad (3.24)$$

Dosazením těchto vztahů do rovnic (3.21) a (3.22) obdržíme výsledný předpis osového posuvu a napětí pro volnou tyč ve frekvenční oblasti

$$\hat{u}(x, \omega) = -\frac{\hat{\sigma}_0(\omega) \cos\left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}{\omega \sqrt{\rho E^*(\omega)} \sin\left(\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}, \quad \hat{\sigma}(x, \omega) = \frac{\hat{\sigma}_0(\omega) \sin\left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}{\sin\left(\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}. \quad (3.25)$$

Analogický postup lze uplatnit i při zjišťování neznámých funkcí $B_1(\omega)$ a $B_2(\omega)$ pro vetknutou tyč. Pro tuto úlohu platí okrajové podmínky (3.6) a (3.9), které po transformaci vedou na

$$\hat{\sigma}(l, \omega) = \hat{\sigma}_0(\omega), \quad \hat{u}(0, \omega) = 0. \quad (3.26)$$

Neznámé funkce pak mají v tomto případě tvar

$$B_1(\omega) = \frac{\hat{\sigma}_0(\omega)}{\omega \sqrt{\rho E^*(\omega)} \cos\left(\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}, \quad B_2(\omega) = 0. \quad (3.27)$$

Posuvy, resp. napětí, vetknuté tyče lze po dosazení výše vypočtených funkcí zapsat jako

$$\hat{u}(x, \omega) = -\frac{\hat{\sigma}_0(\omega) \sin\left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}{\omega \sqrt{\rho E^*(\omega)} \cos\left(\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}, \quad \hat{\sigma}(x, \omega) = \frac{\hat{\sigma}_0(\omega) \cos\left(\omega x \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}{\cos\left(\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E^*(\omega)}}\right)}. \quad (3.28)$$

Podobně jako v případě odezev (3.12)-(3.13) v Laplaceově oblasti lze i pro tento případ vyjádřit obrazy rychlosti, zrychlení a deformace pomocí časové a prostorové derivace funkce $\hat{u}(x, \omega)$, tj.

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, \omega) &= \mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt} u(x, t) \right\} = i\omega \bar{u}(x, \omega), \\ \hat{a}(x, \omega) &= \mathcal{F} \left\{ \frac{d^2}{dt^2} u(x, t) \right\} = (i\omega)^2 \hat{u}(x, \omega), \\ \hat{\varepsilon}(x, \omega) &= \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right\} = \frac{\hat{\sigma}(x, \omega)}{E^*(\omega)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Pro získání odezev v časové oblasti je nutné provést zpětnou Fourierovu transformaci, která je pro obecnou funkci $\hat{f}(\omega)$ ve frekvenční oblasti definována vztahem [36]

$$\mathcal{F}^{-1} \{f(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.30)$$

Vyčíslení integrálu (3.30) bylo v této práci provedeno pomocí diskretní zpětné numerické Fourierovy transformace, konkrétně pomocí standardní funkce *ifft* v prostředí Matlab.

3.3 Řešení odezvy vrstevnaté prizmatické tyče

V následující části bude uvažována tenká prizmatická viskoelastická tyč, která je tvořena N homogenními částmi o libovolných délkách l_k ($k = \{1, 2, \dots, N\}$), tj. pro celkovou délku tyče platí $l = \sum_{k=1}^N l_k$, viz obr. 3. Díky tomu, že N a l_k jsou libovolná, lze takovouto tyč považovat za aproximaci obecného 1D heterogenního prostředí, např. i funkčně gradovaného. Řešení odezvy této tyče na obecné osově buzení bude pro jednoduchoost provedeno pro $N = 3$ a získané výsledky následně zobecněny pro N libovolné.

Při řešení vyjdeme z předpokladu, že šíření vln v k -té části heterogenní tyči je popsáno stejnou diferenciální rovnicí (3.3). Odezvu v k -té tyči je možné poté zapsat pomocí (3.5) jako

$$\begin{aligned} \bar{u}_k(x_k, p) &= D_{1,k}(p) \sinh \frac{px_k}{C_{0,k}(p)} + D_{2,k}(p) \cosh \frac{px_k}{C_{0,k}(p)}, \\ \bar{\sigma}_k(x_k, p) &= \frac{pE_k^c(p)}{C_{0,k}(p)} \left(D_{1,k}(p) \cosh \frac{px_k}{C_{0,k}(p)} + D_{2,k}(p) \sinh \frac{px_k}{C_{0,k}(p)} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

přičemž komplexní funkce $C_{0,k}(p)$ a $E_k^c(p)$ jsou pro jednotlivá k dány vztahy (3.11). Neznámé funkce $D_{j,k}$ ($j = 1, 2$) je nutné určit z příslušných okrajových podmínek. Tyč s indexem $k = 1$ je na pravém konci buzena napětím $\sigma_0(t)$. Odpovídající okrajovou podmínku lze po transformaci proto formulovat ve tvaru

$$\bar{\sigma}_1(l_1, p) = \bar{\sigma}_0(p). \quad (3.32)$$

Zleva je tato tyč spojena s prostřední tyčí, tj. s tyčí s indexem $k = 2$. Podobně tomu je i mezi druhou a třetí tyčí. Pro tato rozhraní lze formulovat okrajové podmínky zajišťující spojitost posuvu a napětí jako

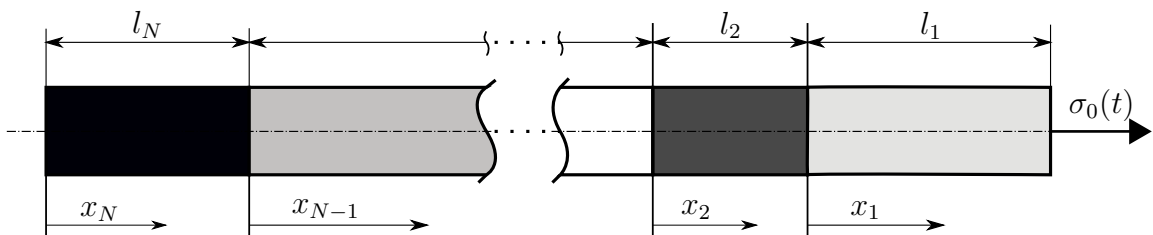
$$\begin{aligned} \bar{u}_1(0, p) &= \bar{u}_2(l_2, p), & \bar{\sigma}_1(0, p) &= \bar{\sigma}_2(l_2, p), \\ \bar{u}_2(0, p) &= \bar{u}_3(l_3, p), & \bar{\sigma}_2(0, p) &= \bar{\sigma}_3(l_3, p). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Třetí tyč je na svém levém konci uvažována volná, tj. okrajová podmínka má tvar

$$\bar{\sigma}_3(0, p) = 0, \quad (3.34)$$

nebo může být tento konec vetknutý, tj.

$$\bar{u}_3(0, p) = 0. \quad (3.35)$$



Obrázek 3: Schéma heterogenní prizmatické viskoelastické tyče

Dosazením předpokládaného řešení (3.31) do okrajových podmínek (3.32)-(3.34), resp. (3.35), dostaneme soustavu šesti algebraických rovnic pro šest neznámých komplexních funkcí $D_{j,k}$. Tuto soustavu můžeme pro volnou tyč zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} z_1 ch_1 & z_1 sh_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -sh_2 & -ch_2 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & -z_2 ch_2 & -z_2 sh_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -sh_3 & -ch_3 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & -z_3 ch_3 & z_3 sh_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1,1} \\ D_{2,1} \\ D_{1,2} \\ D_{2,2} \\ D_{1,3} \\ D_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

kde funkce $f(p)$, sh_k , ch_k a z_k ($k = 1, 2, 3$) byly zavedeny pomocí vztahů

$$sh_k = \sinh \frac{pl_k}{C_{0,k}(p)}, \quad ch_k = \cosh \frac{pl_k}{C_{0,k}(p)}, \quad f(p) = \frac{\bar{\sigma}_0(p)}{p}, \quad z_k = C_{0,k}(p)\rho_k. \quad (3.37)$$

Pro vetknutou tyč bude soustava stejná, až na poslední rovnici, která se změní na $D_{2,3} = 0$. Řešením soustavy (3.36) pro všechna $p \in \mathbb{C}$ získáme funkce $D_{j,k}$ a jejich dosazením do (3.31) obdržíme hledané řešení pro odezvu třívrstvé tyče.

Při sestavování maticové rovnice (3.36) pro více homogenních částí, tj. pro $N > 3$, je možné postupovat analogickým způsobem. Matice takovéto soustavy je tvořena submaticemi, které odpovídají jednotlivým částem tyče a jejich rozhraním. První řádek matice obsahuje submatici dimenze 1×2 , která odpovídá buzení tyče a má tvar

$$\mathbf{M}_{buzeni} = [z_1 ch_1 \quad z_1 sh_1]. \quad (3.38)$$

Pro každé i -té rozhraní mezi $k - 1$ a k -tou vrstvou tyče lze dále zavést submatici \mathbf{M}_i o velikosti 2×4 , která zohledňuje okrajové podmínky (3.33) a má podobu

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -sh_k & -ch_k \\ z_{k-1} & 0 & -z_k ch_k & -z_k sh_k \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

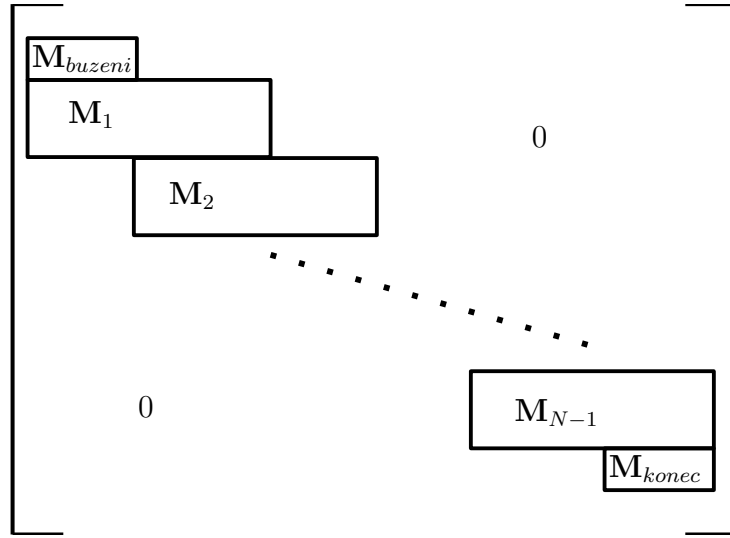
Poslední submatice 1×2 v posledním řádku globální matice soustavy je s ohledem na zvolenou okrajovou podmínku (3.34), resp. (3.35), definována jako

$$\mathbf{M}_{konec} = [1 \quad 0], \text{ resp. } \mathbf{M}_{konec} = [0 \quad 1]. \quad (3.40)$$

Globální matici soustavy odpovídající tyči s obecně N vrstvami lze pak pomocí submatic (3.38)-(3.40) sestavit dle schématu znázorněného na obr. 4.

3.4 Zobecnění řešení pro vrstevnaté neprizmatické tyče

V této části textu bude uvažována neprizmatická heterogenní vrstevnatá viskoelastická tyč délky l , která bude podobně jako v minulé podkapitole rozdělena na N homogenních prizmatických částí délek l_k o velikosti příčného řezu S_k ($k = 1, 2, \dots, N$), jak je znázorněno na obr. 5. Vzhledem k tomu, že je opět uvažováno obecné N , je možné pomocí tohoto přístupu aproximovat chování v podstatě libovolné tenké heterogenní tyče se spojitou


 Obrázek 4: Schéma matice pro vrstevnatou tyč složenou z N homogenních částí

změnou průřezu. Pro větší názornost bude postup řešení opět nejprve uveden pro $N = 3$ stejně tak, jako tomu bylo v předchozí podkapitole.

Odezva k -té tyče je i v tomto případě popsána vztahy (3.31) a pro buzení a uložení platí stejné okrajové podmínky jako v části 3.3, tj. vztahy (3.32), (3.34) nebo (3.35). Jediný rozdíl bude v definici okrajových podmínek na jednotlivých rozhraních. Při přechodu pulzu mezi dvěma segmenty různých průřezů nebude již zachována spojitost osového napětí, ale bude platit podmínka spojitosti vnitřních sil. Tyto podmínky lze společně s podmínkami spojitosti posuvů zapsat jako

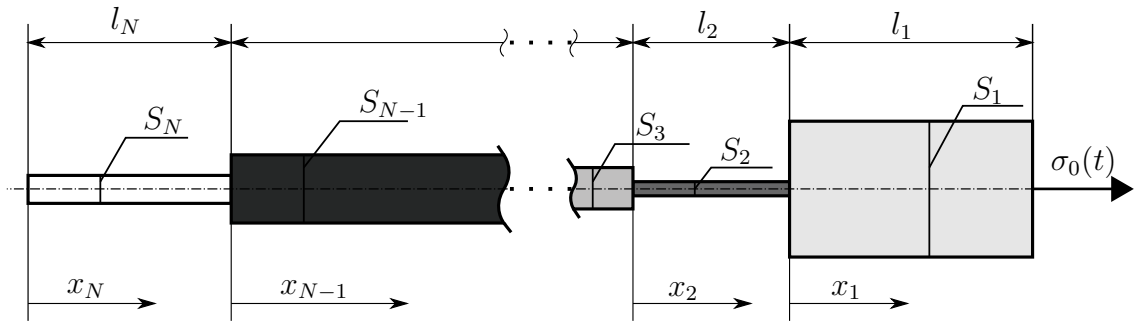
$$\begin{aligned} \bar{u}_1(0, p) &= \bar{u}_2(l_2, p), & \bar{\sigma}_1(0, p)S_1 &= \bar{\sigma}_2(l_2, p)S_2, \\ \bar{u}_2(0, p) &= \bar{u}_3(l_3, p), & \bar{\sigma}_2(0, p)S_2 &= \bar{\sigma}_3(l_3, p)S_3. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pro uvažované řešení (3.31) dosazené do výše uvedených okrajových podmínek dostaneme opět soustavu rovnic, kterou je možné pro volnou tyč zapsat v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} z_1ch_1 & z_1sh_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -sh_2 & -ch_2 & 0 & 0 \\ z_1S_1 & 0 & -z_2ch_2S_2 & -z_2sh_2S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -sh_3 & -ch_3 \\ 0 & 0 & z_2S_2 & 0 & -z_3ch_3S_3 & z_3sh_3S_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1,1} \\ D_{2,1} \\ D_{1,2} \\ D_{2,2} \\ D_{1,3} \\ D_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Význam jednotlivých funkcí ve (3.42) je stejný jako v případě soustavy (3.36). Vyřešením této soustavy rovnic obdržíme hledané funkce $D_{j,k}$, kterými lze následně po dosazení do rovnic (3.31) získat odezvu pro neprizmatickou tyč tvořenou třemi vrstvami.

Princip odvození řešení pro tyč složenou z N částí ($N > 3$) je zcela analogický postupu uvedenému v podkapitole 3.3. V příslušných submaticích dimenze 2×4 pro i -té rozhraní



Obrázek 5: Schéma neprizmatické heterogenní viskoelastické tyče

jen na příčných pozicích přibudou násobky ploch průřezů S_k a S_{k-1} , tj.

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -sh_k & -ch_k \\ z_{k-1}S_{k-1} & 0 & -z_k ch_k S_k & -z_k sh_k S_k \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Systém sestavení příslušné globální matice je pak stejný jako na obr. 4.

Vzhledem k tomu, že řešení prezentovaná v podkapitolách 3.3 a 3.4 byla odvozena pro libovolné materiálové a geometrické vlastnosti jednotlivých částí vrstevnaté viskoelastické tyče a pro obecné N , je zřejmé, že pomocí tohoto přístupu lze aproximovat i řešení odezvy libovolné heterogenní neprizmatické tenké tyče, např. i tyče spojitě proměnného průřezu či materiálu, jak bylo uvedeno výše.

4 Vyčíslení analytického řešení a porovnání s výsledky numerických simulací

V této kapitole je uveden postup vyčíslení nalezených analytických vztahů popisujících úlohu tenkých heterogenních neprizmatických viskoelastických tyčí¹. V další části bude pomocí metody konečných prvků (MKP) modelována úloha šíření vln pro tři vybrané typy tenkých viskoelastických tyčí: (i) pro heterogenní prizmatickou tyč, (ii) pro homogenní neprizmatickou tyč a (iii) heterogenní neprizmatickou tyč se spojitou změnou průřezu a materiálových vlastností. Výsledky z konečnoprvkových modelů budou porovnány se získanými semi-analytickými výsledky.

4.1 Vyčíslení odvozeného analytického řešení

Vztahy (3.31) popisující odezvu volné a vetknuté tenké heterogenní prizmatické, resp. neprizmatické, viskoelastické tyče na libovolné buzení byly vyčísleny v softwaru Matlab. Pro tyto účely byl vytvořen program, který pomocí Simpsonova pravidla nejprve numericky vyčíslil integrál představující Laplaceův obraz $\bar{\sigma}_0(p)$ zvoleného buzení, pokud neexistovalo jeho přesné vyjádření. Geometrie byla definována pomocí vektorů dimenze N a materiálové vlastnosti s využitím matic o N řádcích, kde na každém řádku byl zapsán vektor odpovídající příslušnému počtu viskozit a modulů pružností zvoleného viskoelastického modelu. Následně jsou v cyklu přes každou homogenní prizmatickou část tyče dopočteny komplexní funkce (3.11), které jsou spolu s obrazem buzení využity pro vyčíslení neznámých funkcí figurujících v soustavě (3.36), resp. (3.42). Řešení této soustavy rovnic bylo pro $N \leq 3$ provedeno exaktně analyticky, pro $N > 3$ pak numericky pro všechna $p \in \mathbb{C}$ potřebná k provedení zpětné numerické Laplaceovy transformace.

Zpětná Laplaceova transformace byla stejně jako v práci [40] provedena numericky pomocí maticové formulace algoritmu uvedeného v práci [8].

Vyčíslení řešení odvozeného ve frekvenční oblasti, viz vztahy (3.25) a (3.28), bylo provedeno pomocí zpětné numerické Fourierovy transformace s využitím standardní funkce *ifft* implementované v Matlabu.

Výstupem programu byla v obou případech matice, jejíž řádky představovaly rozložení příslušné veličiny (posuvu, napětí, rychlosti, zrychlení, deformace) podél tyče pro příslušnou časovou hladinu, tj. poslední řádek odpovídal konečnému stavu v čase t_{max} .

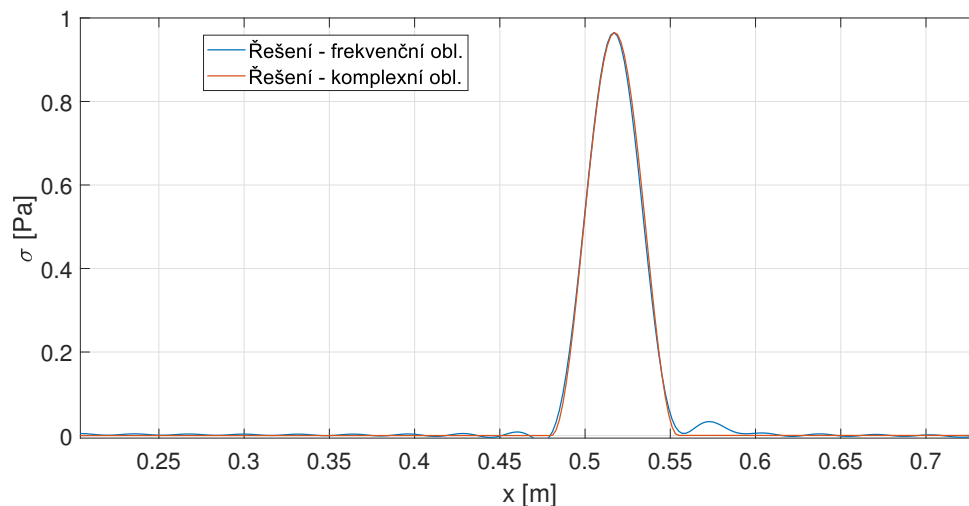
Na obr. 6 je provedeno porovnání odezev napětí volné metrové tyče z acetalového kopolymeru (POM-C) až do času $t_{max} = 350 \mu s$. Vlastnosti tohoto materiálu byly aproximovány Zenerovým modelem² s parametry uvedenými v tab. 1. Tyč byla v tomto případě buzena jednotkovým kosinovým pulzem s předpisem

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{t_0} \right) (H(t) - H(t - t_0)), \quad (4.1)$$

¹Ve skutečnosti se jedná o „semi-analytické“ výsledky z programu, který byl vytvořen za účelem vyčíslení nalezených analytických vztahů ve frekvenční a Laplaceově oblasti.

²Model standardního viskoelastického tělesa v Zenerově konfiguraci je nejjednodušší případ modelu zobecněného standardního viskoelastického tělesa na obr. 2, kdy $n = 1$.

kde je pomocí Heavisideovy funkce $H(t)$ pulz omezen obdélníkovým oknem na délku $t_0 = 50 \mu\text{s}$. Přesnost vyčíslení odezvy dle vztahu (3.25) získaného ve frekvenční oblasti závisí zejména na t_{max} a vzorkování časového vektoru. Výpočty ukázaly, že pro jakékoli nastavení těchto parametrů dochází k oscilacím před i za šířícím se pulzem, viz obr. 6. V případě vyčíslení řešení dle vztahu (3.8)₂ k těmto oscilacím nedocházelo. Proto, pokud nebude uvedeno jinak, budou další výpočty v práci provedeny pomocí řešení odvozeného v Laplaceově oblasti.



Obrázek 6: Porovnání přesnosti vyčíslené odezvy tyče pomocí řešení ve frekvenční (vztah (3.25)₂) a komplexní (vztah (3.8)₂) oblasti

4.2 Konečnoprvkový model heterogenní a neprizmatické viskoelastické tyče

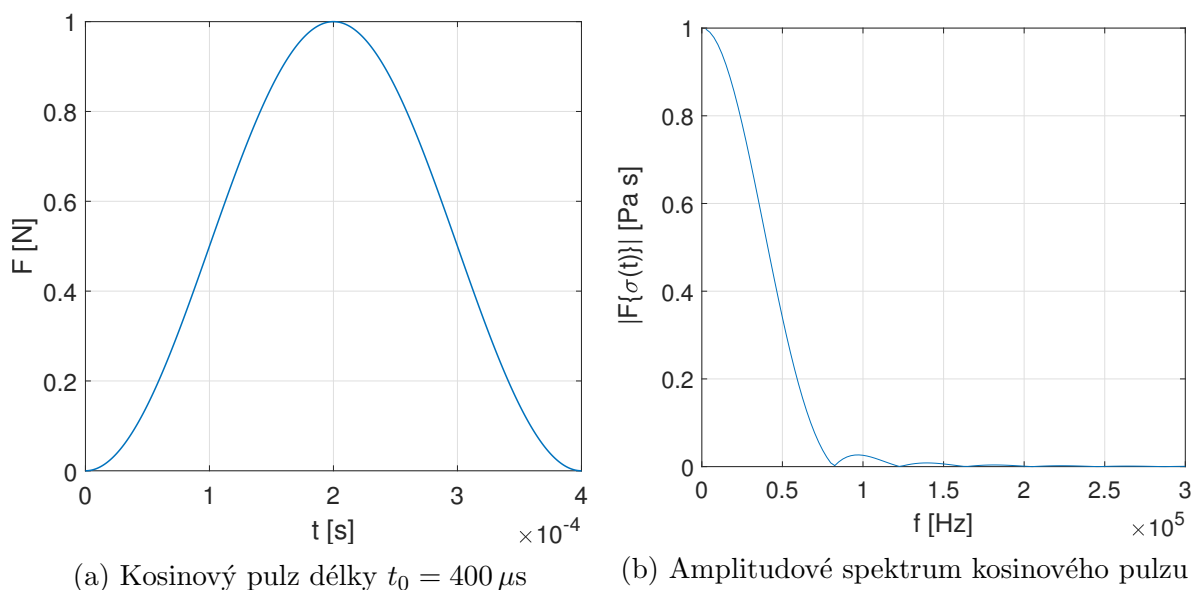
Numerické řešení pomocí MKP bylo provedeno v softwaru MSC.Marc/Mentat. Nejprve byla uvažována volná tenká prizmatická viskoelastická tyč o celkové délce $l = 1 \text{ m}$, která byla střídavě tvořena z tyčí z oceli a z POM-C. Oba tyto materiály byly uvažovány jako viskoelastické. Celkově byla tato tyč složena z deseti 10 cm dlouhých částí a byla buzená na ocelovém konci. Viskoelastické parametry odpovídající Zenerově modelu pro tyto a některé další materiály použité v této práci byly identifikovány v [40] a jsou zapsány v tab. 1. V materiálové kartě použitého programu je však potřeba zadat celkový Youngův modul pružnosti $E = E_E + E_1$ a smykový modul G , který se vypočítá pomocí Poissonova čísla ν a E_1 dle vztahu $G = E_1 / (2(1 + \nu))$. Relaxace objemového modulu tak nebyla uvažována. Zároveň je nutné zadat relaxační čas $t_{R1} = \lambda_1 / E_1$. Pro utlumení oscilací vzniklých numerickými chybami řešení byla na základě zkušenosti zvolena hodnota numerického tlumení 0,2 (viz [33]). Jednotlivé materiály byly přiřazeny odpovídajícím prutovým prvkům s plochou průřezu $S = 2,0106 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, jež odpovídá ploše kruhového průřezu o průměru $d = 16 \text{ mm}$.

Přesnost numerického řešení je významně ovlivněna velikostí použitých prvků. V práci [40] byla provedena podrobná analýza vlivu nejen tohoto faktoru, ale i vlivu velikosti inte-

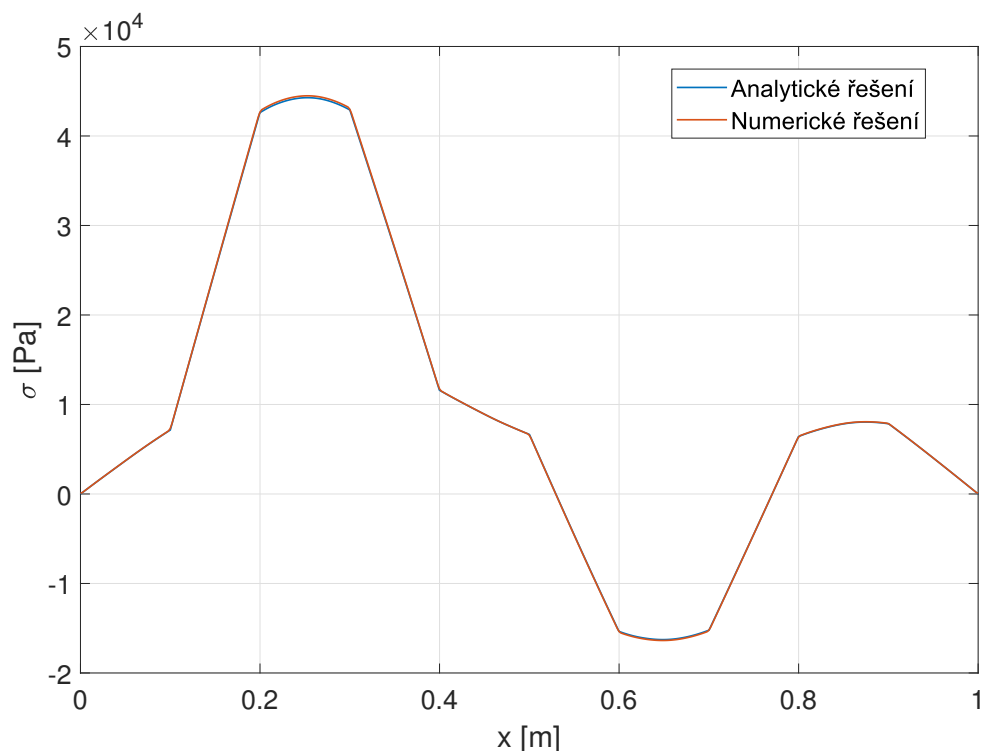
Materiál	E_E [Pa]	E_1 [Pa]	λ_1 [Pa]	ρ [kg/m ³]	ν [-]
Ocel	$2,5313 \cdot 10^{10}$	$1,8328 \cdot 10^{11}$	$2,5960 \cdot 10^9$	7872	0,3
Hliník	$2,3765 \cdot 10^{10}$	$4,1663 \cdot 10^{10}$	$2,2888 \cdot 10^8$	2684	0,3
POM-C	$2,0000 \cdot 10^9$	$1,1427 \cdot 10^9$	$1,9078 \cdot 10^6$	1425	0,4
PC1000	$2,2957 \cdot 10^9$	$6,4369 \cdot 10^7$	$3,3239 \cdot 10^3$	1272	0,4

Tabulka 1: Materiálové parametry odpovídající Zenerově modelu pro vybrané materiály

gračního kroku a použité integrační metody. Z analýzy vyplynulo, že přesnost řešení roste se zmenšováním velikosti prvku až do určité meze, ale za cenu prodloužení výpočetního času. Proto je nutné pomocí frekvenčního spektra budicího pulzu určit vhodnou velikost prvku na základě předpokladu, že prvek má být alespoň desetkrát menší, než je nejkratší vlnová délka obsažená v pulzu, kterou má konečnoprvkový model ještě podchytit bez výraznějšího zkreslení (viz [9]). Na obr. 7a je znázorněn jednotkový kosinový pulz (4.1) délky $t_0 = 400 \mu\text{s}$ použitý k buzení tyče. Amplitudové spektrum tohoto pulzu je pak zřejmé z obr. 7b. Budeme-li požadovat, aby byly při šíření pulzu zahrnuty příspěvky amplitud až do frekvence 100 kHz, což odpovídá maximální chybě 2% (viz obr. 7b), je nutné velikost prvků s ohledem na rychlost šíření pulzu v POM-C ($c_0 \approx 1485 \text{ m/s}$) volit jako $l_e = 1,5 \text{ mm}$. Významnou roli na přesnost řešení má i velikost integračního kroku. Ta byla volena přibližně jako velikost stabilního integračního kroku explicitní metody centrálních diferencí. Úloha pak byla řešena pomocí Newmarkovy integrační metody, protože se ukázalo, že odezva vypočtená pomocí této metody se nejvíce shoduje s odezvou vypočtenou pomocí analytického řešení. Pokud nebude řečeno jinak, budou všechny konečnoprvkové modely použité v následující části práce vytvořeny podle výše uvedených pravidel.



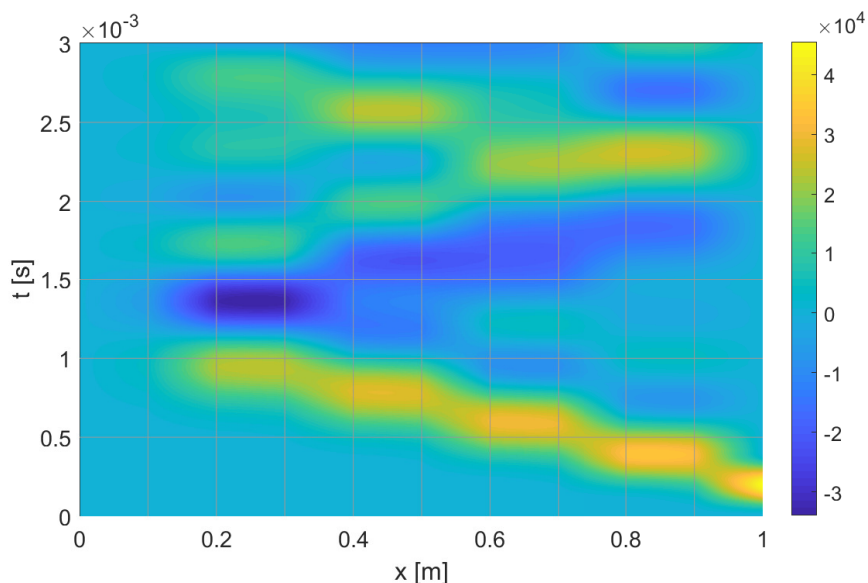
Obrázek 7: Kosinový pulz a jeho amplitudové spektrum



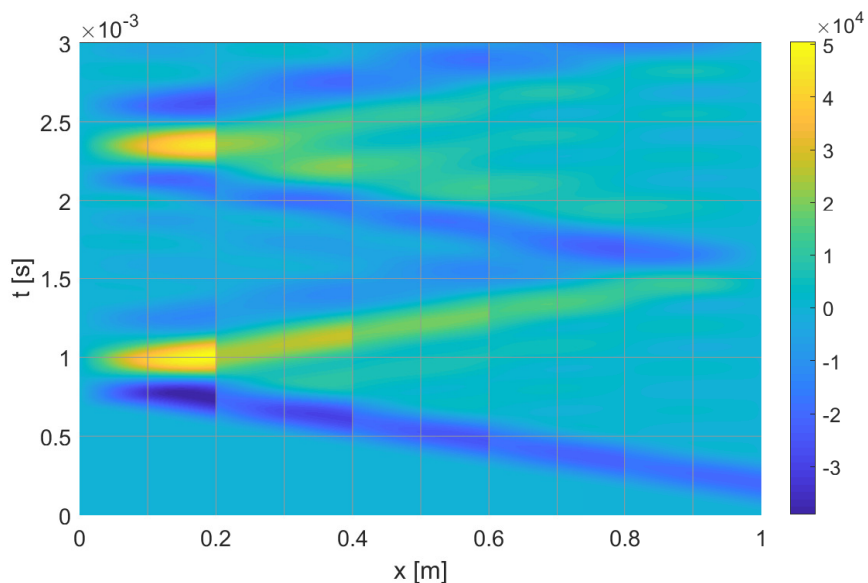
Obrázek 8: Porovnání odezev získaných pomocí konečnoprvkového modelu a analytického řešení pro tenkou heterogenní prizmatickou tyč složenou z pěti ocelových částí a pěti částí z POM-C

Na obr. 8 je vykreslena odezva zmíněné heterogenní tyče v čase 3 ms vypočtená analyticky a pomocí numerického modelu. Ze shody odezev lze usoudit, že jsou analytické vztahy v části 3.3 odvozeny správně a zvolené nastavení parametrů, které ovlivňují přesnost konečnoprvkového modelu, je dostačující. Průběh tohoto pulzu a efekt heterogenního prostředí je pak zřejmý z obr. 9, kde je odezva zobrazena pomocí plochy vykreslené v časoprostoru. Je vidět, že při přechodu pulzu do části s odlišným materiálem se část pulzu odrazí s opačnou amplitudou a postupně tak dochází k jeho tlumení jednak disipačními vlastnostmi jednotlivých materiálů a jednak heterogenitou prostředí. Zároveň je možné pozorovat rozdílnou rychlost šíření pulzu v různých prostředích. V oceli je sklon lineární charakteristiky šířícího se pulzu od horizontálního směru menší než v části z POM-C. Z obrázku je patrný i vliv disperze prostředí.

V případě druhé úlohy se jednalo o řešení odezvy tenké homogenní neprizmatické viskoelastické tyče s kruhovým průřezem vyrobené z materiálu POM-C. Dopočtení konstant potřebných v materiálové kartě proběhlo stejně jako v předchozí úloze pomocí hodnot uvedených v tab. 1. Tyč byla složena z pěti 20 cm dlouhých prizmatických segmentů, které měly směrem od buzeného konce průměry $d = \{10, 8, 6, 4, 2\}$ mm. Tyč je buzena tlakovým kosinovým pulzem s analogickým předpisem jako v předchozím případě s amplitudou 10 kPa. Tento pulz vybudí v nejtěsnější tyči osově napětí o amplitudě $\sigma_0 \doteq -39$ kPa. Prvky jsou s ohledem na frekvenční spektrum buzení a rychlost podélných vln



Obrázek 9: Napětí $\sigma [Pa]$ v heterogenní prizmatické tyči složené z pěti ocelových částí a pěti částí z POM-C v časoprostorové oblasti

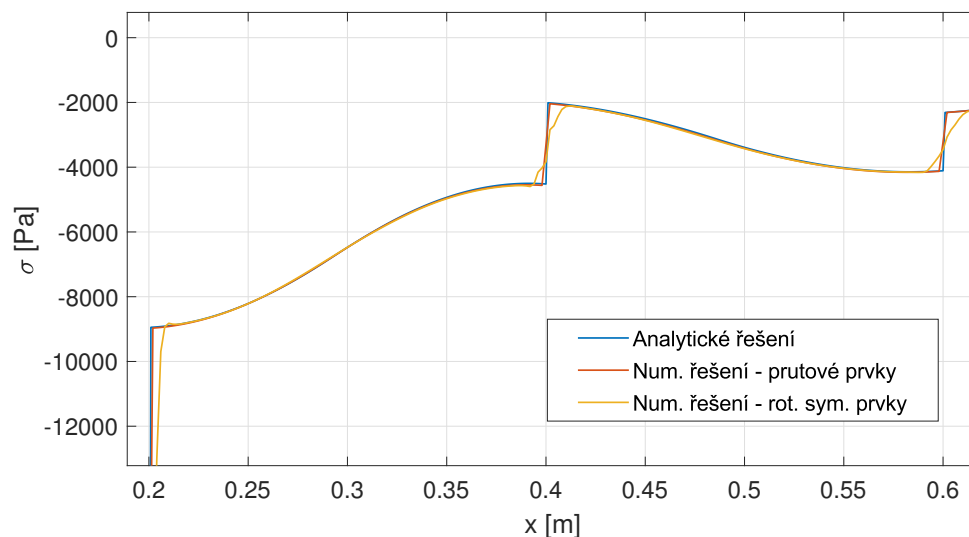


Obrázek 10: Napětí $\sigma [Pa]$ v homogenní neprizmatické tyči v časoprostorové oblasti

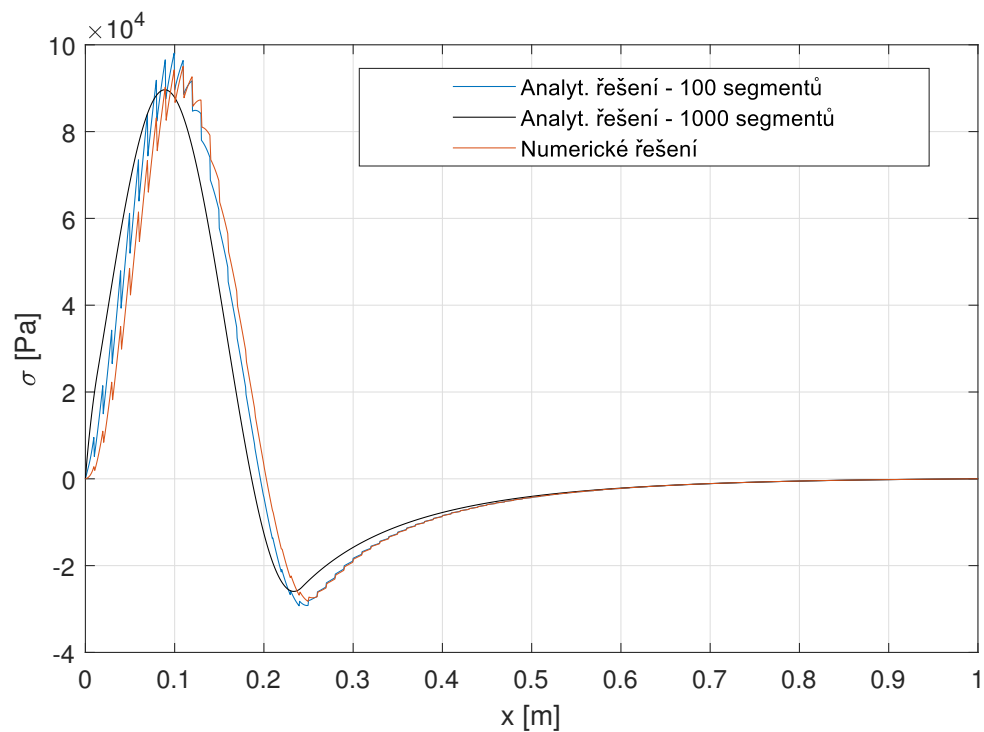
v uvažovaném materiálu voleny opět s délkou $l_e = 1,5$ mm. Průběh odezvy je znázorněn na obr. 10 pomocí plochy vykreslené v časoprostoru. Zde je, na rozdíl od heterogenní tyče, rychlost podélné vlny neměnná. Naopak lze pozorovat, že vlivem zmenšování průřezu se amplituda pulzu zesílila. Z obrázku je patrná i nespojitost napětí, která je způsobena skokovou změnou průřezu tyče.

S ohledem na zvolenou geometrii neprizmatické tyče je tato úloha vodná i pro diskuzi rozdílů při použití prutových a rotačně symetrických prvků. Je zřejmé, že při použití pru-

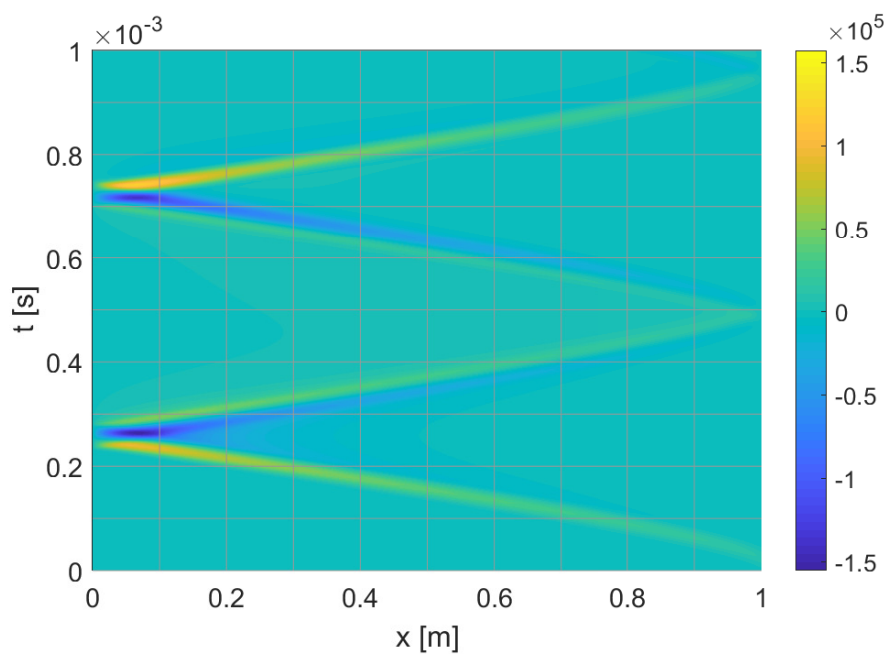
toových prvků je zajištěn menší CPU čas, protože na rozdíl od prvků rotačně symetrických, není nutné dělit tyč v radiálním směru. Pokud je však potřeba vytvořit specifickou změnu průřezu, je vhodné využít rotačně symetrické prvky. Z porovnání odezvy pro popsany model s prutovými a rotačně symetrickými prvky (viz obr. 11) vyplývá, že odezva z modelu s prutovými prvky lépe vystihuje skokovou změnu průřezu. V porovnání s reálnou úlohou je vhodné však použít prvky rotačně symetrické, protože uvažují i vliv příčného rozměru tyče na šířící se pulz.



Obrázek 11: Porovnání odezvy získaných pomocí konečnoprvkového modelu a analytických vztahů pro tenkou homogenní neprizmatickou tyč



Obrázek 12: Porovnání analytického a numerického řešení pro tenkou gradovanou tyč s lineární změnou průřezu a materiálových vlastností



Obrázek 13: Napětí σ [Pa] v gradované tyči s lineární změnou průřezu v časoprostorové oblasti

Dále byla řešena kombinace dvou výše uvedených případů, tj. v konečnoprvkovém softwaru byla namodelována tyč z gradovaného materiálu, jejíž materiálové vlastnosti se měnily lineárně z POM-C na ocel. Parametry těchto dvou materiálů byly voleny na základě hodnot uvedených v tab. 1. Zároveň byla tyč modelována s lineární změnou průřezu od 100 mm^2 do 10 mm^2 . Parametry úlohy byly voleny tak, aby vlivem geometrie docházelo k zesílení signálu. Tzn., že tyč byla buzena jednotkovou kosinovou silou (4.1) o délce $t_0 = 50 \mu\text{s}$ na konci s největším průřezem a materiálem POM-C. Po provedené analýze amplitudového spektra buzení a při zohlednění materiálových vlastností byla velikost prvku zvolena $l_e = 0,5 \text{ mm}$. Aby se urychlil proces vytváření modelu, byl pro tyto účely vytvořen skript na generování tzv. *procedure file*, pomocí kterého software automaticky přiřadil geometrické a materiálové parametry jednotlivým částem tyče. V ideálním případě by každému prvku odpovídala jediná geometrická a materiálová karta, ale výpočetní software umožňuje použít pouze omezený počet těchto karet. Proto se materiálové vlastnosti měnily po 20 prvcích, tj. po 10 cm. Model v Matlabu byl vytvořen analogicky k modelu v Marcu, takže se skládal ze 100 homogenních prizmatických částí, jejichž geometrické a materiálové vlastnosti se měnily lineárně. Zároveň byla v Matlabu vytvořena tyč se spojitou změnou³ geometrických a materiálových vlastností, čehož v Marcu nebylo možné docílit. Rozložení osového napětí podél tyče v čase 2,3 ms je možné vidět na obr. 12. Při porovnání amplitudy s maximální amplitudou napětí v místě buzení lze usoudit, že se vybuzený pulz přibližně desetkrát zesílil. Opačného efektu lze docílit, budíme-li stejnou tyč z druhé strany. Více názorná je odezva na obr. 13, kde je vykreslené napětí z analytického modelu s lineární změnou parametrů na 1000 prvcích opět v časoprostoru. Lze pozorovat, že na konci s menším průřezem, tj. pro $x = 0$, dochází ke značnému zesílení signálu. Postupem času se za postupující vlnou tvoří vlna s opačnou amplitudou. Rychlost šíření pulzu v tomto gradovaném prostředí je přibližně 3 krát větší, než v případě homogenní neprizmatické tyče z POM-C. Z obr. 12 je možné vidět, že se změnou materiálu mění směrnice křivky charakterizující šíření pulzu.

³„Spojité“ změny geometrických a materiálových vlastností bylo dosaženo vytvořením 1000 prvků, kterým byly přiřazeny materiálové parametry tak, aby se v tyči měnily materiálové vlastnosti lineárně. Horní hranice počtu segmentů tyče je v případě analytického modelu omezena pouze velikostí operační paměti počítače.

5 Frekvenčně závislé vlastnosti viskoelastických materiálů

V první podkapitole této části práce budou diskutovány disperzní a tlumicí vlastnosti viskoelastického prostředí. Další část této kapitoly je věnována vybraným metodám určování těchto materiálových charakteristik, jež byly zmíněny v kap. 2.

5.1 Disperzní a tlumicí vlastnosti homogenního viskoelastického 1D prostředí

Nechme propagovat lineárním viskoelastickým 1D prostředím harmonickou vlnu ve tvaru

$$u(x, t) = U_0 e^{i\omega t - \gamma x}, \quad (5.1)$$

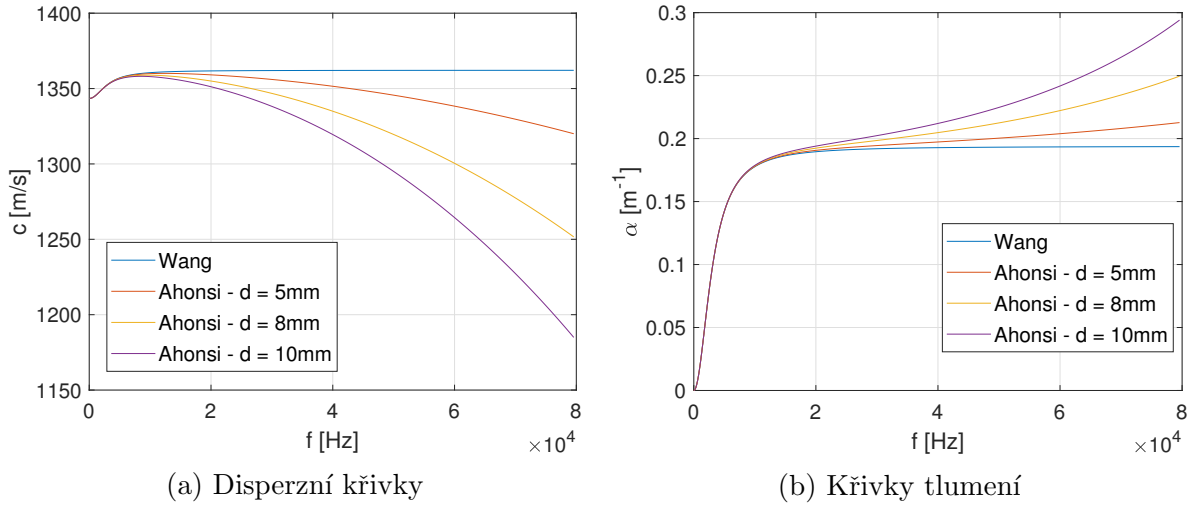
kde U_0 představuje amplitudu vlny, ω značí úhlovou frekvenci a $\gamma(\omega)$ je tzv. koeficient šíření vlny. Tato komplexní funkce se skládá z reálné a imaginární části a lze ji psát jako

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + i\kappa(\omega). \quad (5.2)$$

Reálná část $\alpha(\omega)$ představuje tzv. koeficient útlumu a imaginární část odpovídá vlnovému číslu $\kappa(\omega)$, které souvisí s fázovou rychlostí harmonické vlny prostřednictvím vztahu $c(\omega) = \omega/\kappa(\omega)$. V elastickém prostředí platí $\alpha(\omega) = 0$, takže pro funkci koeficientu šíření vlny potom platí $\gamma(\omega) = i\kappa(\omega)$. V knize [42] je ukázáno, že se harmonická vlna (5.1) může viskoelastickým 1D prostředím popsaným Zenerovým materiálovým modelem šířit pouze za určitých podmínek kladených na reálnou a imaginární část funkce $\gamma(\omega)$. Tyto podmínky lze vyjádřit vztahy

$$\begin{aligned} \kappa^2(\omega) &= \frac{\omega^2}{c^2(\omega)} = \omega^2 \frac{\rho}{2E_E} \left\{ \left[\frac{1 + \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right]^{1/2} + \frac{1 + \left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right) \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right\}, \\ \alpha^2(\omega) &= \omega^2 \frac{\rho}{2E_E} \left\{ \left[\frac{1 + \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right]^{1/2} - \frac{1 + \left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right) \omega^2 t_R^2}{1 + \left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right)^2 \omega^2 t_R^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Vztahy (5.3) tak charakterizují disperzní a tlumicí vlastnosti tenké homogenní viskoelastické tyče, jejíž materiálové vlastnosti jsou popsány modelem standardního viskoelastického tělesa. V literatuře lze najít zobecnění tohoto problému na úlohu tlusté viskoelastické tyče pomocí tzv. Pochhammerovy frekvenční rovnice, viz např. [43]. Praktické využití tohoto přesného vyjádření disperzních a tlumicích vlastností je ale poměrně komplikované, a proto se velmi často používají jeho aproximace, viz např. [5], [2]. Ve druhé



Obrázek 14: Porovnání disperzních a tlumicích křivek (5.3) a (5.4) pro různé průměry tyče

zmíněné práci autor uvádí přibližné vztahy pro $\kappa(\omega)$ a $\alpha(\omega)$ pro Zenerův model při zohlednění příčné kontrakce tyče (nenulového Poissonova čísla ν a nenulové setrvačnosti elementů tyče v radiálním směru). Tyto vztahy lze zapsat ve tvaru [2]

$$\kappa^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2(\omega)} = \frac{\rho\omega^2}{2E_E} (H_1 + H_2), \quad \alpha^2(\omega) = \frac{\rho\omega^2}{2E_E} (H_1 - H_2), \quad (5.4)$$

kde reálné funkce H_1 a H_2 jsou dány vztahy

$$H_1 = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 t_R^2}{\left[\left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right) - \frac{\rho\nu^2 r^2 \omega^2}{E_E} \right]^2 \omega^2 t_R^2 + \left(\frac{\rho\nu^2 r^2 \omega^2}{E_E} - 1\right)^2}},$$

$$H_2 = \frac{\left[\left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right) - \frac{\rho\nu^2 r^2 \omega^2}{E_E} \right] \omega^2 t_R^2 - \left(\frac{\rho\nu^2 r^2 \omega^2}{E_E} - 1\right)}{\left[\left(1 + \frac{E_1}{E_E}\right) - \frac{\rho\nu^2 r^2 \omega^2}{E_E} \right]^2 \omega^2 t_R^2 + \left(\frac{\rho\nu^2 r^2 \omega^2}{E_E} - 1\right)^2} \quad (5.5)$$

a konstanta r představuje poloměr setrvačnosti průřezu tyče.

Disperzní a tlumicí křivky pro tyč kruhového průřezu vyrobenou z materiálu PC1000 (viz tab. 1) jsou pro různé průměry d porovnány na obr. 14a-b. Z uvedených obrázků je zřejmé, že pro rostoucí velikost d fázová rychlost harmonické vlny s narůstající frekvencí ω klesá, zatímco tlumení $\alpha(\omega)$ roste. Podobný efekt nastává i při zvětšování Poissonova čísla ν . Vzhledem k tomu, že při odvozování analytického řešení v kap. 3 nebyla žádná z výše zmíněných korekcí použita, budou nadále využívány vztahy (5.3), nebude-li uvedeno jinak.

Dalším velmi častým způsobem popisu disperzních a tlumicích vlastností lineárního viskoelastického 1D prostředí je vyjádření pomocí reálné a imaginární části dříve zavedeného komplexního modulu $E^*(\omega)$, viz podkap. 3.2. Pro tento modul lze psát

$$E^*(\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega), \quad (5.6)$$

kde kladná sudá funkce $E'(\omega)$ představuje tzv. elastický (soufázový) modul, který charakterizuje tuhost materiálu a určuje jeho elastické chování. Lichá funkce $E''(\omega)$, kladná pro $\omega > 0$, se nazývá ztrátový modul a reprezentuje vazké vlastnosti materiálu a s nimi související disipaci energie. V případě standardního viskoelastického tělesa (Zenerova modelu) lze funkci komplexního modulu $E^*(\omega)$ vyjádřit pomocí dříve uvedených parametrů jako [2]

$$E^*(\omega) = \frac{(E_E + E_1)i\omega + E_ER_i}{R_i + i\omega}. \quad (5.7)$$

Z tohoto vztahu lze pak velmi snadno odvodit příslušné vztahy pro $E'(\omega)$ a $E''(\omega)$ a Zenerův model. Na obr. 15 jsou pro ilustraci v logaritmických souřadnicích vykresleny obě části komplexního modulu (5.7) pro materiály uvedené v tab. 1. Je zřejmé, že elastický modul $E'(\omega)$ i ztrátový modul $E''(\omega)$ nabývá nejvyšších hodnot pro ocel v celém frekvenčním spektru. Nejnížší hodnoty těchto veličin naopak vykazují typicky viskoelastické materiály POM-C a PC1000.

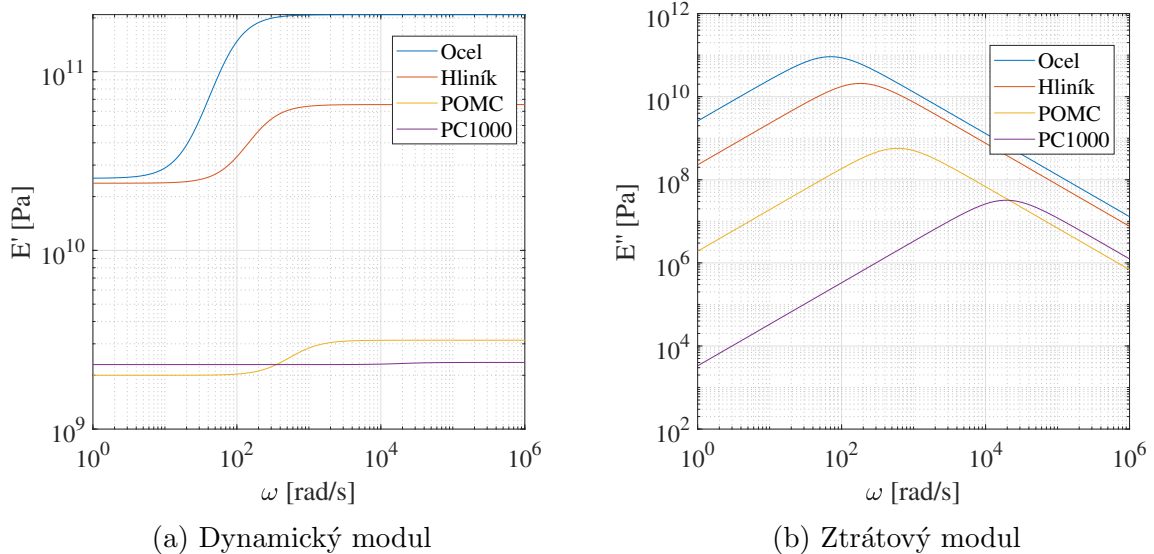
Z výše uvedených dvou způsobů vyjádření disperzních a tlumicích vlastností je zřejmé, že musí existovat jistá závislost mezi funkcemi $E^*(\omega)$ a $\gamma(\omega)$. Dle práce [27] mezi těmito funkcemi platí

$$\gamma^2(\omega) = -\frac{\rho\omega^2}{E^*(\omega)}. \quad (5.8)$$

Dosazením vztahu (5.2) a (5.7) do rovnice (5.8) a po úpravě lze psát

$$E'(\omega) [(\alpha(\omega) + i\kappa(\omega))^2] + iE''(\omega) [(\alpha(\omega) + i\kappa(\omega))^2] = -\rho\omega^2. \quad (5.9)$$

Porovnáním reálné a imaginární části levé a pravé strany rovnice získáme soustavu rovnic,



Obrázek 15: Reálná a imaginární část komplexního modulu (5.7) pro materiály uvedené v tab. 1

ze které lze $E'(\omega)$ a $E''(\omega)$ vyjádřit jako funkce $\alpha(\omega)$ a $\kappa(\omega)$ následovně

$$E'(\omega) = \rho\omega^2 \frac{\kappa^2(\omega) - \alpha^2(\omega)}{[\kappa^2(\omega) + \alpha^2(\omega)]^2}, \quad E''(\omega) = \rho\omega^2 \frac{2\kappa(\omega)\alpha(\omega)}{[\kappa^2(\omega) + \alpha^2(\omega)]^2}. \quad (5.10)$$

Tímto způsobem lze na základě znalosti $\alpha(\omega)$ a $\kappa(\omega)$ určit komplexní modul $E^*(\omega)$, ze kterého je možné následně dopočítat i relaxační a creepové funkce, které představují další možnost popisu chování viskoelastického materiálu (blíže viz [26], či [23]).

Dalším velmi často používaným způsobem vyjádření tlumení viskoelastických materiálů je zavedení tzv. ztrátového faktoru $\tan \delta$ vztahem

$$\tan \delta = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)}, \quad (5.11)$$

kde δ představuje fázový posuv mezi odezvou napětí a deformace při harmonickém buzení, viz [26]. Převrácená hodnota (5.11) je také někdy označována jako tzv. quality factor Q ($Q \approx 1/\tan \delta$), viz [26].

Na základě výše uvedených vztahů budou pro popis tlumících a disperzních vlastností 1D viskoelastického prostředí používány funkce $\alpha(\omega)$ a $\kappa(\omega)$, resp. $c(\omega)$.

5.2 Určení disperzních a tlumících vlastností viskoelastických tyčí

V této části práce jsou vysvětleny vybrané metody zmíněné v kap. 2. Pokud nebude uvedeno jinak, budou jednotlivé metody demonstrovány na volné 1 m dlouhé tyči vyrobené z PC1000, jehož materiálové vlastnosti budou popsány standardním viskoelastickým modelem s parametry uvedenými v tab. 1. Jak už bylo řečeno, základní metody určování disperzních a tlumících vlastností můžeme rozdělit do dvou skupin.

První skupinu tvoří metody založené na měření odezvy viskoelastické tyče na harmonický signál. Pro tuto skupinu je při určování fázové rychlosti vlny využito znalosti, že lze rychlost vyjádřit jako podíl vzdálenosti a času, za který vlna tuto vzdálenost urazila. Budíme-li metrovou tyč harmonickým signálem např. ve tvaru $\sigma_0(t) = \sin \omega_i t$ s různými úhlovými frekvencemi ω_i , je možné ze známé odezvy napětí ve dvou místech tyče $x_m < x_n$ určit pro každé ω_i fázovou rychlost vlny c pomocí vztahu

$$c(\omega_i) = \frac{x_n - x_m}{t_n - t_m}. \quad (5.12)$$

Konstanty t_m a t_n značí postupně časy příchodu vlny do místa x_m a x_n a obvykle se určují sledováním první čtvrtperiody vybuzeného sinusového signálu. Podobný postup určování fázové a grupové rychlosti Lambových vln byl využit např. i v článku [31]. Autoři tohoto článku měřili příchod vybuzeného vlnového balíku pomocí techniky zero-crossing.

Tlumení materiálu lze určit analogickým způsobem. V práci [17] autoři odvodili vztah pro odhad koeficientu tlumení α ze známé amplitudy harmonické vlny ve dvou místech

tyče podobně jako při výpočtu fázové rychlosti vlny. Koeficient tlumení se poté pro konkrétní frekvence ω_i vypočítá jako

$$\alpha(\omega_i) \approx \frac{\ln(\sigma_n/\sigma_m)}{x_n - x_m}, \quad (5.13)$$

kde σ_n je amplituda signálu v místě x_n a σ_m je amplituda signálu v místě x_m . Všechny veličiny jsou opět měřeny na první čtvrtperiodě signálu.

Pro stanovení závislosti $\kappa(\omega)$ a $\alpha(\omega)$ dle výše popsané metody byl v Matlabu vytvořen program, který pro zvolený vektor úhlových frekvencí ω_i vypočítá pomocí analytického řešení odezvy na vetknutém a buzeném konci viskoelastické tyče (viz podkap. 3.1) a podle vztahů (5.12) a (5.13) stanoví disperzní a tlumicí křivku v požadovaném frekvenčním rozsahu. Tyto křivky jsou v porovnání s vyčíslenými analytickými vztahy (5.3) vykresleny na obr. 16. Jak ukázaly provedené výpočty, přesnost této metody závisí zejména na délce tyče a na frekvenci vzorkování odezvy. U malých tyčí dochází k tomu, že se vlna při měření ve čtvrtperiodě již superponuje s odraženou vlnou a dochází tak ke zkreslení výsledků pro nízké frekvence. Při malé vzorkovací frekvenci signálu dochází k nepřesnostem při určování příchodu čtvrtperiody do x_n a amplitudy signálu σ_n . To nastává např. při buzení sinusového signálu s vysokou frekvencí a tato chyba se projevuje ve formě pilovitých schodů na disperzní křivce (viz obr. 16a). Tento nežádoucí efekt lze odstranit nebo alespoň částečně potlačit aplikací např. klouzavého průměru na získaná data (viz funkce *movmean* v Matlabu). Po této úpravě je disperzní křivka již ve velmi dobré shodě s analyticky určenou, viz obr. 16a. V případě tlumicí křivky dochází k větším odlišnostem mezi křivkou získanou dle (5.3) a (5.13), viz obr. 16b. Tato neshoda je způsobena zřejmě tím, že vztah (5.13) popisuje tlumicí vlastnosti pouze přibližně, jak je uvedeno v práci [17].

Druhá skupina metod je založena na určování disperzních a tlumicích křivek ze známé odezvy vybuzevé rázovým pulzem. Využijeme-li rovnici (3.19) a ekvivalentně ji přepíšeme pro obraz deformace $\hat{\varepsilon}(x, \omega)$ pomocí koeficientu šíření $\gamma(\omega)$, viz vztah (5.2), dostáváme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\varepsilon}(x, \omega) = \gamma^2 \hat{\varepsilon}(x, \omega). \quad (5.14)$$

Řešení této obyčejné diferenciální rovnice lze zapsat ve tvaru [3]

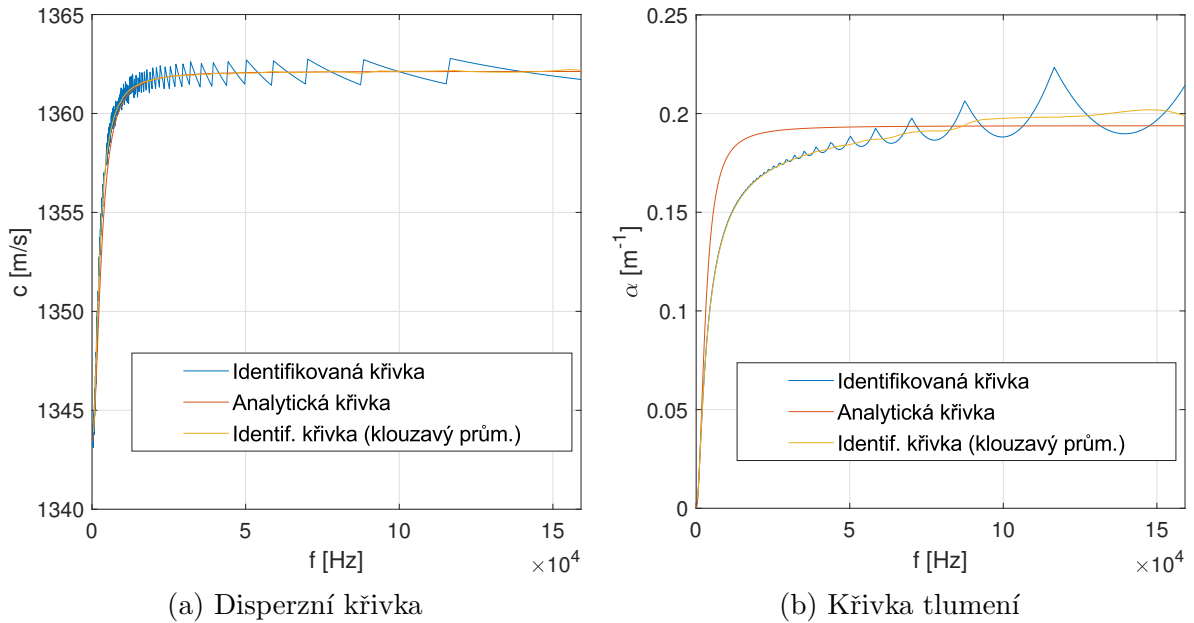
$$\hat{\varepsilon}(x, \omega) = \hat{P}(\omega)e^{-\gamma x} + \hat{O}(\omega)e^{\gamma x}, \quad (5.15)$$

kde komplexní funkce $\hat{P}(\omega)$ a $\hat{O}(\omega)$ mají postupně fyzikální význam Fourierova obrazu deformace způsobené postupnou a odraženou vlnou v místě měření deformace $x = 0$, které se nachází ve vzdálenosti d_0 od volného konce tyče (viz [2]). Pokud je tyč volná, je z okrajové podmínky zřejmé, že je zde nulové napětí a tedy i deformace, tzn. dle (5.15) platí

$$0 = \hat{P}(\omega)e^{-\gamma d_0} + \hat{O}(\omega)e^{\gamma d_0}. \quad (5.16)$$

Potom můžeme přenosovou funkci zapsat jako

$$H^*(\omega) = -\frac{\hat{O}(\omega)}{\hat{P}(\omega)} = e^{-2\gamma d_0}. \quad (5.17)$$



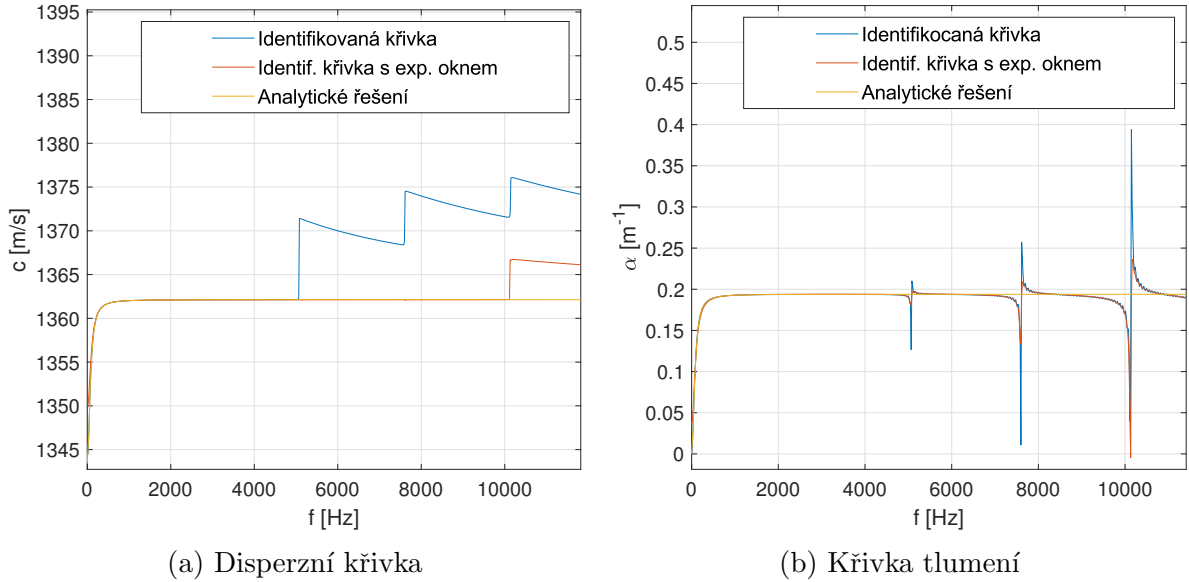
Obrázek 16: Porovnání teoretické disperzní a tlumicí křivky s křivkami identifikovanými pomocí vztahů (5.12) a (5.13) pro materiál PC1000

To znamená, že pokud budeme znát deformaci způsobenou postupnou $\hat{P}(\omega)$ a odraženou $\hat{O}(\omega)$ vlnou v místě $x = 0$, je možné vypočítat i tlumicí a disperzní vlastnosti tyče. Tyto signály se však nesmějí překrývat. Logaritmováním komplexní přenosové funkce $H^*(\omega)$ dané vztahem (5.17) a při zohlednění vztahu (5.2), lze pro závislosti $\kappa(\omega)$ a $\alpha(\omega)$ psát [2]

$$\kappa(\omega) = -\frac{\arg[H^*(\omega)]}{2d_0}, \quad \alpha(\omega) = \frac{\ln|H^*(\omega)|}{2d_0}. \quad (5.18)$$

Vyčíslení vztahů (5.18) proběhlo také ve vytvořeném programu v prostředí Matlab, jehož vstupem byl vyčíslený analytický vztah popisující deformaci v polovině volné metrové tyče (tj. $d_0 = 0,5$ m) z materiálu PC1000 na kosinový pulz délky $t_0 = 10 \mu\text{s}$. Tento signál byl ručně rozdělen na $P(t)$ a $O(t)$ a následně byly tyto funkce převedeny do frekvenční oblasti pomocí standardní funkce *fft*. Při výpočtu fázové rychlosti, tj. vlnového čísla, je nutné na výsledky použít funkci *unwrapping*, která je v manuálu softwaru Matlab [30] doporučována pro vyhodnocování argumentu komplexní funkce. Výsledky z této metody jsou v porovnání s křivkami získanými ze vztahů (5.3) na obr. 17. Křivky jsou zatíženy chybou, která je z větší části způsobena nenulovostí časové odezvy deformace na konci sledovaného pulzu, na kterou se dle (5.17) aplikuje FFT. Díky tomu se disperzní i tlumicí křivka pro tento případ shoduje s teoretickou křivkou pouze do 5 kHz. Z tohoto důvodu je vhodné na signál před provedením transformace aplikovat exponenciální okno ve tvaru $\exp(-2\pi t/(N_t \Delta t))$, kde N_t a Δt jsou počet vzorků a časový krok ve sledované odezvě (viz [2]). Aplikací tohoto okna se průběhy disperzní, resp. tlumicí, křivky vyhladí a získáme tak dobrou shodu s vyčíslenými analytickými vztahy do 10 kHz, resp. 7 kHz, ale za cenu posunutí křivky tlumení, blíže viz [2].

Tato metoda byla dále rozvinuta Hillströmem v článku [19] za účelem eliminace chyb



Obrázek 17: Porovnání teoretické disperzní a tlumicí křivky s křivkami identifikovanými pomocí vztahů (5.18) pro materiál PC1000

vlivem překrývání odezev, tj. aby se signál nemusel rozdělovat na postupnou a odraženou vlnu. Ve zmíněném článku autor ukázal, že lze vyjádřit přenosovou funkci (5.17) pro 3 různá místa měření deformace, která jsou od sebe ekvidistantně vzdálena o hodnotu d_e . Tuto funkci lze potom vyjádřit jako [19]

$$e^{\gamma d_e} = \Psi + \sqrt{\Psi^2 - 1}, \text{ kde } \Psi = \frac{\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_3}{2\hat{\varepsilon}_2}. \quad (5.19)$$

Veličiny $\hat{\varepsilon}_1$, $\hat{\varepsilon}_2$ a $\hat{\varepsilon}_3$ značí Fourierovy obrazy deformací ve 3 po sobě jdoucích bodech. Disperzní a tlumicí závislosti lze pak analogicky získat pomocí vztahů (5.18). Vyčíslení vztahů pro výpočet deformací proběhlo jako v předchozí metodě, s výhodou však byl využit poslední vztah (3.29) popisující deformaci přímo ve frekvenční oblasti.

Posledním diskutovaným způsobem určování tlumících a disperzních vlastností v této skupině bude metoda prezentovaná v článku Blanc [7]. Autor vychází z obecného vyjádření libovolné funkce $f(x, t)$ pomocí Fourierova integrálu ve tvaru

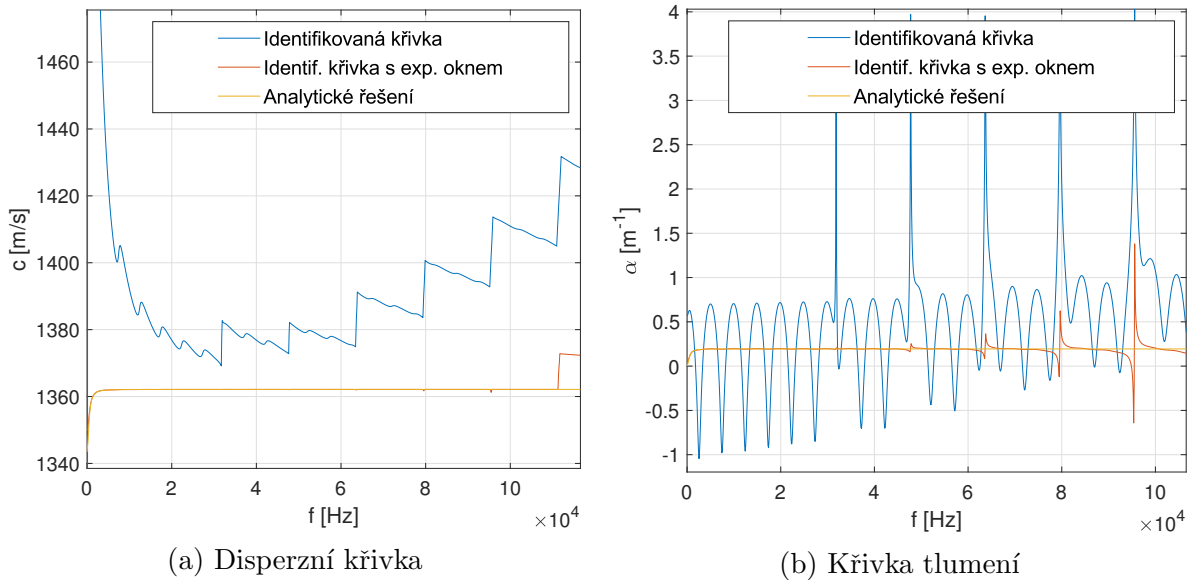
$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(0, \omega) e^{i\omega t - \gamma(\omega)x}, \quad (5.20)$$

kde $\hat{f}(0, x)$ odpovídá Fourierovu obrazu buzení. Pro Fourierův obraz takové funkce lze potom s využitím (5.2) a vztahu $\kappa(\omega) = \omega/c(\omega)$ psát

$$\hat{f}(x, \omega) = \hat{f}(0, \omega) e^{-\alpha(\omega)x - i\omega \frac{x}{c(\omega)}}, \quad (5.21)$$

což lze pomocí Eulerova vztahu ekvivalentně přepsat do tvaru [7]

$$\hat{f}(x, \omega) = \vartheta(x, \omega) e^{i\theta(x, \omega)} = \vartheta(0, \omega) e^{-\alpha(\omega)x + i\theta(0, \omega) - i\frac{\omega x}{c(\omega)}}, \quad (5.22)$$



Obrázek 18: Porovnání teoretické disperzní a tlumicí křivky s křivkami identifikovanými pomocí vztahů (5.24) pro materiál PC1000

kde $\theta(x, \omega)$ je fáze a $\vartheta(x, \omega)$ je modul obrazu libovolné odezvy $\hat{f}(x, \omega)$. Z výše uvedeného lze pro fázi a modul psát

$$\theta(x, \omega) = \theta(0, \omega) - \frac{\omega}{c(\omega)}x, \quad (5.23)$$

$$\vartheta(x, \omega) = \vartheta(0, \omega)e^{-\alpha(\omega)x}.$$

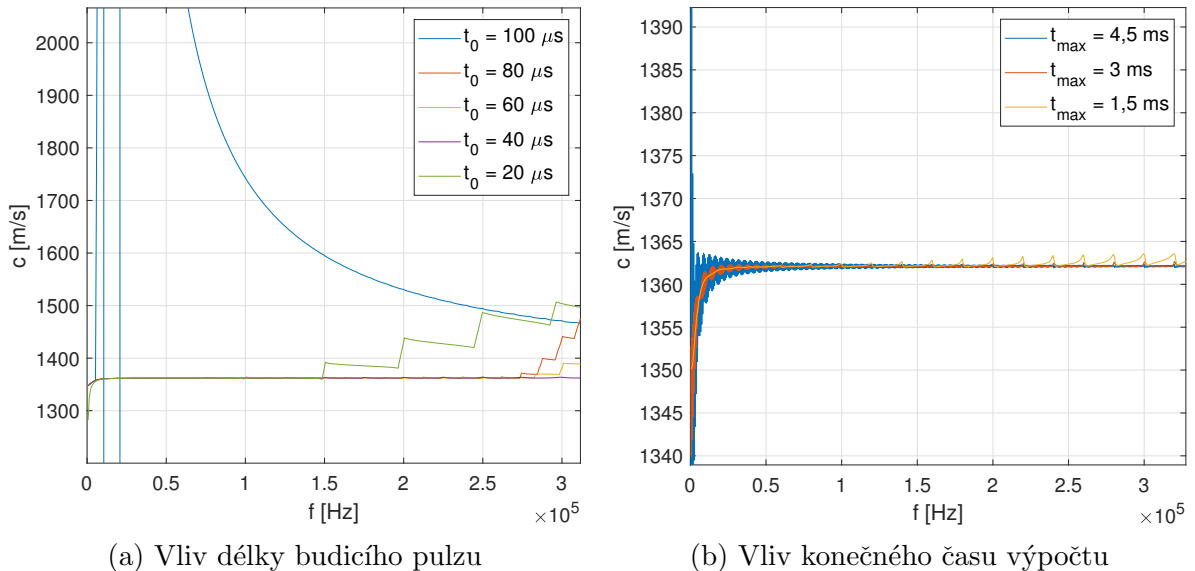
Vyjádřením těchto dvou závislostí (5.23) ve dvou místech tyče $x_1 < x_2$ lze formulovat vztahy pro výpočet fázové rychlosti a koeficientu tlumení jako

$$c(\omega) = -\omega \frac{x_2 - x_1}{\theta(x_2, \omega) - \theta(x_1, \omega)}, \quad (5.24)$$

$$\alpha(\omega) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \ln \frac{\vartheta(x_2, \omega)}{\vartheta(x_1, \omega)}.$$

Vztahy (5.24) byly pro účely identifikace disperzních a tlumicích závislostí vyčísleny v Matlabu pro odezvu zrychlení. V tomto případě byla tyč buzena kosinovým pulzem délky $t_0 = 10 \mu\text{s}$. Na obr. 18a je vidět, že přímým použitím vypočtené odezvy tyče nelze dosáhnout shody s teoretickou křivkou. Proto bylo na odezvu v časové oblasti aplikováno exponenciální okno jako v případě druhé zmíněné metody. Tímto postupem bylo dosaženo shody s teoretickou křivkou až do frekvence 110 kHz. Podobně bylo exponenciální okno použito i v případě určování tlumicí křivky, což zajistilo shodu s analytickou křivkou do 50 kHz (viz obr. 18b).

Při výpočtech bylo zjištěno, že přesnost této metody významně závisí na délce budicího pulzu t_0 a velikosti maximálního času t_{max} , do kterého je sledována odezva tyče. Jako první byl analyzován vliv délky budicího pulzu. Tyč byla buzena vždy kosinovým pulzem o délce $t_0 = \{100, 80, 60, 40, 20\} \mu\text{s}$. Odezvy byly vypočteny při této analýze do času $t_{max} = 1,5 \text{ ms}$

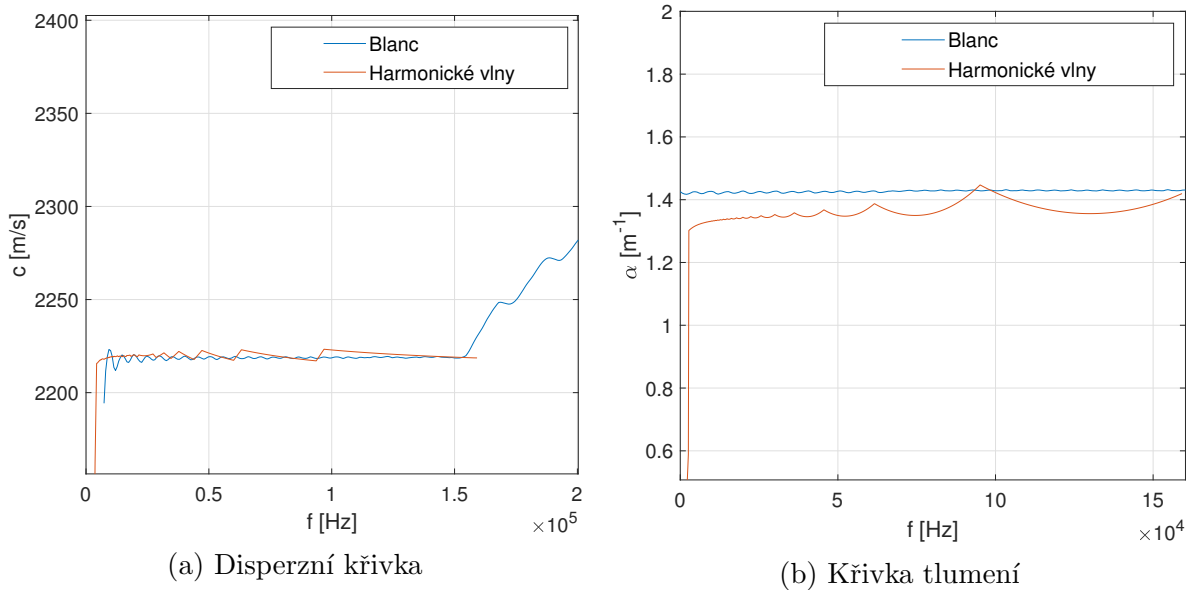


Obrázek 19: Analýza vlivu vybraných parametrů na disperzní křivku materiálu PC1000

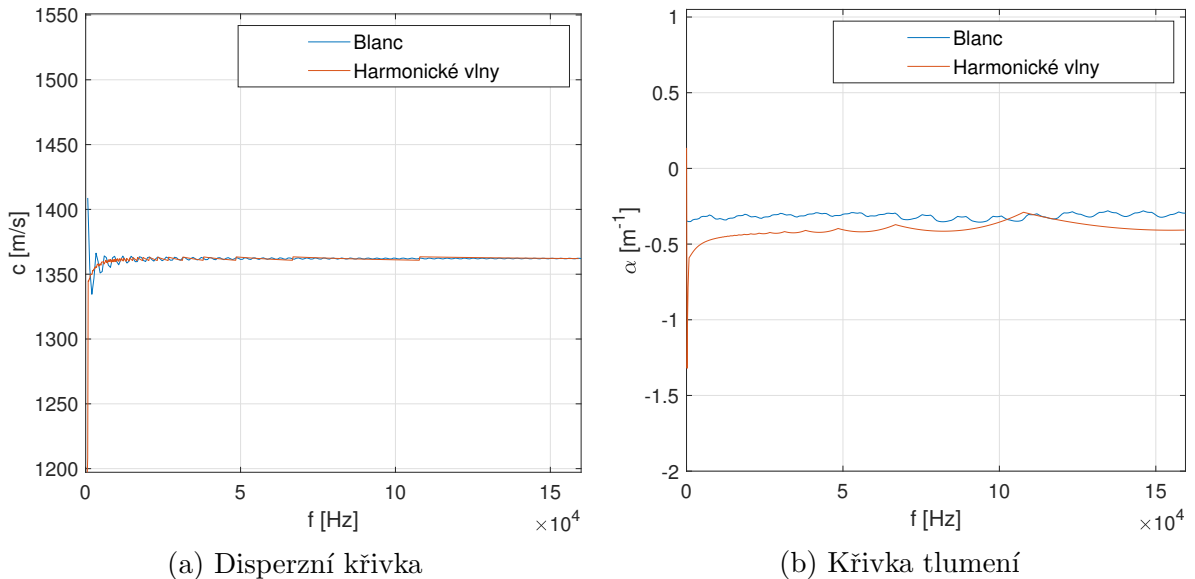
při stejném počtu vzorků signálu (4096 vzorků). Výsledné identifikované disperzní křivky jsou zobrazeny na obr. 19a. Jak je zřejmé, snižováním délky budicího pulzu zaručíme zvýšení přesnosti určení disperzní křivky. Výjimkou je křivka pro $t_0 = 20 \mu\text{s}$. Přesnost této křivky je ovlivněna vzorkováním odezvy, které je pro tento pulz již nedostačující. Na obr. 19b je ukázán vliv konečného času použité odezvy. Lze pozorovat, že se výsledky se zvyšujícím se t_{max} zlepšují pro vyšší frekvence, ale za cenu zašumění křivky pro nízké frekvence. Pro zlepšení výsledků je případně možné na vypočtená data aplikovat funkci klouzavého průměru, jak bylo popsáno dříve.

Na základě porovnání prezentovaných metod lze konstatovat, že se nejméně od teoretických disperzních a tlumicích závislostí liší výsledky získané první metodou, která využívala buzení tyče pomocí harmonických vln. Jelikož pracoviště Katedry mechaniky, FAV, ZČU v Plzni nedisponuje harmonickým budičem, který je schopen vybudit vysoké frekvence, byla při identifikaci disperzních a tlumicích vlastností z experimentálních dat využita poslední popsaná metoda, viz Blanc [7], při které je možné k identifikaci materiálových vlastností využít odezvy tyče na pulzní zatížení naměřené ve dvou vybraných bodech.

Výhodou vybrané metody je i fakt, že lze aplikovat i na odezvy naměřené na opačných koncích tyče, což je nutné využít v případě identifikování disperzních a tlumicích vlastností u heterogenních a neprizmatických tyčí. V těchto případech totiž vlastnosti závisí i na místech měření odezvy. Nejprve bude použití vztahů (5.24) demonstrováno na metrové prizmatické tyči, jejíž materiál se bude měnit vždy po 25 cm v pořadí ocel, PC1000, ocel a PC1000. Tato tyč bude buzena hladkým kosinovým pulzem délky $t_0 = 50 \mu\text{s}$ na ocelové části a odezva bude vypočtena do času $t_{max} = 1,5 \text{ ms}$. Správnost křivky bude zároveň ověřena pomocí křivky získané první zmíněnou metodou založenou na šíření harmonických vln. Na obr. 20 jsou vykresleny disperzní a tlumicí křivky pro zmíněnou tyč. Disperzní křivky identifikované pomocí obou metod jsou v poměrně dobré shodě do 150 kHz. Je



Obrázek 20: Disperzní a tlumicí křivky vrstevnaté prizmatické tyče identifikované dvěma různými metodami



Obrázek 21: Disperzní a tlumicí křivky homogenní tyče s lineární změnou průřezu identifikované dvěma různými metodami

vidět, že se fázová rychlost harmonické vlny ve vrstevnaté tyči s rostoucí frekvencí blíží přibližně k hodnotě 2225 m/s, viz obr. 20a. Shoda křivek tlumení získaných oběma metodami je podstatně horší (viz obr. 20b), což může být mimo jiné způsobeno i tím, že je vztah (5.13) pouze přibližný. Nicméně lze říci, že určité shody obou přístupů bylo dosaženo. Zároveň lze konstatovat, že v případě heterogenní tyče dochází k většímu tlumení než v případě homogenní tyče z PC1000 (viz obr. 18b).

Pro uvedení příkladu disperzních a tlumicích vlastností neprizmatických tyčí bude dále uvažována homogenní metrová tyč z PC1000, ve které se bude po 25 cm skokově měnit průřez od místa buzení v tomto pořadí $\{10; 7,5; 5; 2,5\}$ mm². Na obr. 21a je vidět, že s výjimkou nízkých frekvencí bylo pro disperzní křivku dosaženo shody až do 150 kHz a fázová rychlost pro takto vysoké frekvence nabývá přibližně stejné hodnoty, jako je rychlost zvuku v homogenní tyči z PC1000. Relativně dobrá shoda křivek tlumení je dosažena, stejně jako v případě tyče heterogenní, až pro vyšší frekvence (viz obr. 21b). Hodnoty tlumení jsou v tomto případě záporné, což znamená, že dochází k zesílení amplitudy pulzu. To je dáno tím, že se amplituda pulzu zesiluje se zmenšováním průřezu.

6 Určování materiálových vlastností z výsledků experimentu

V této kapitole je popsán experiment provedený na několika homogenních tyčích, na tyči se spojitě proměnným průřezem a na vrstevnaté neprizmatické heterogenní tyči. Získaná data jsou následně použita k ověření nalezeného analytického řešení a k identifikaci materiálových vlastností.

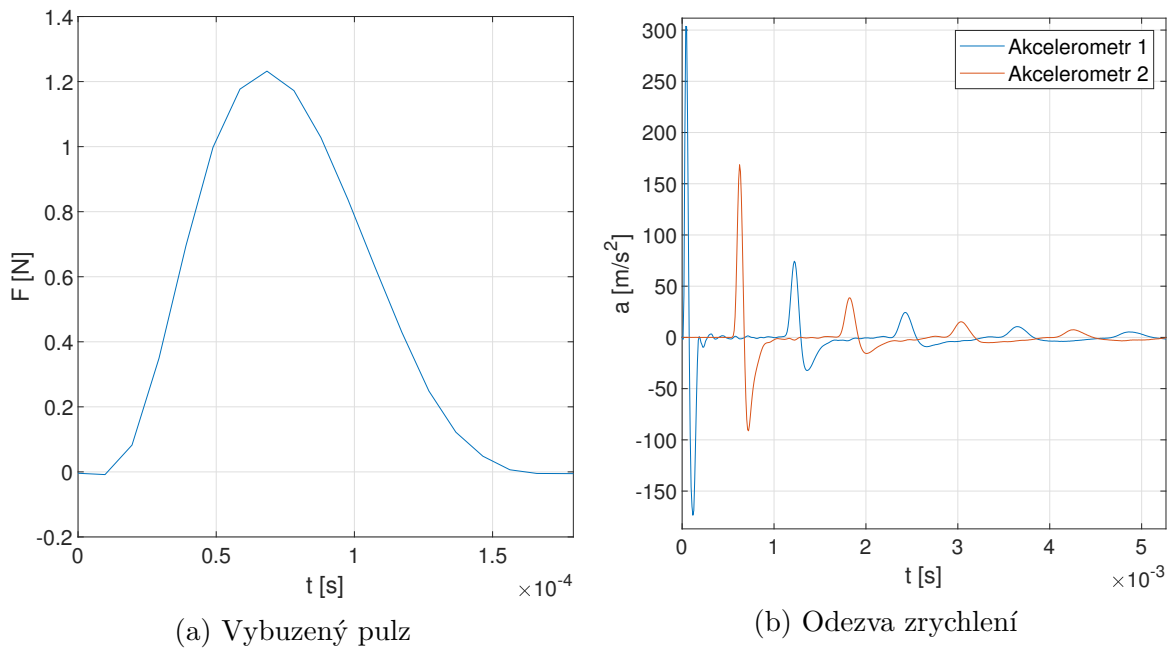
6.1 Popis experimentu a naměřených dat

Jedním z úkolů této práce bylo experimentální stanovení odezvy vybraných typů tenkých tyčí z různých materiálů na rázové zatížení. Nejprve bylo měření odezvy provedeno na homogenních prizmatických tyčích vyrobených z polypropylenu (PP), polyvinylchloridu (PVC), polyethylen tereftalátu (PET) a z polylaktid acidu (PLA). Všechny tyče byly při experimentu podloženy kousky molitanu, aby nedocházelo ke kontaktu tyčí se stolem. Na obou koncích tyčí byly nalepeny akcelerometry *Brüel & Kjær Miniature DeltaTron[®] Accelerometer - Type 4519*, jejichž parametry jsou uvedeny v příloze A.1. Tyče byly postupně buzeny z jednoho i druhého konce rázovým kladívkem *Brüel & Kjær Miniature Impact Hammer - Type 8204* (viz příloha A.2) přes nalepený akcelerometr. Signály z akcelerometrů a z rázového kladívka byly zpracovány osmikanálovým analyzátozem *OROS OR35* se vzorkovací frekvencí 100 kHz.

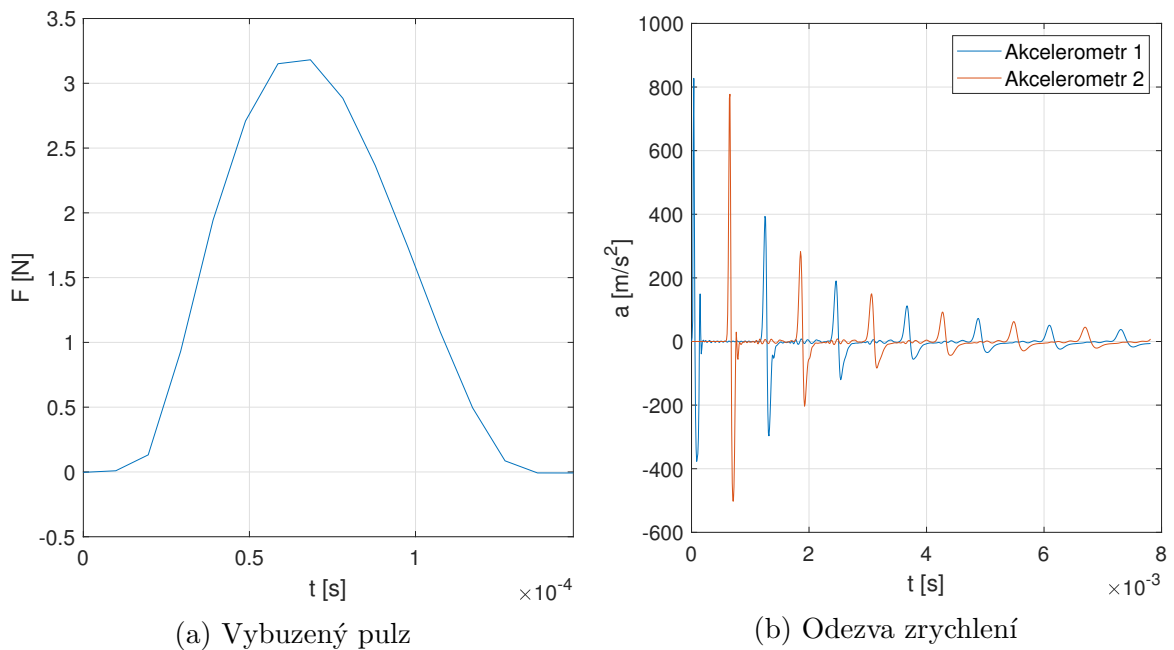
Výrobce tyče z materiálu PP [12] uvádí, že se tento termoplast s vysokou chemickou odolností používá zejména do potrubních systémů a k výrobě těsnění a není náchylný k vnitřnímu pnutí. U této tyče byla naměřena délka $l = 1002$ mm, průměr $d = 10,4$ mm a hmotnost $m = 79$ g. Z těchto hodnot byla dopočítána hustota materiálu $\rho = 928,6$ kg/m³. Na obr. 22 je vykreslen vybuděný pulz a změřená odezva zrychlení na buzeném (*Akcelerometr 1*) a volném (*Akcelerometr 2*) konci. Z obr. 22a je zřejmé, že se podařilo vybudit pulz se strmějším náběhem a celkové délce $t_0 \doteq 150$ μ s. V porovnání s ostatními materiály využitými v práci [40], tj. POM-C, PC1000, je šířící se pulz v materiálu PP mnohem více tlumen (viz obr. 22b).

Materiál PVC je chemicky odolnější než PP a navíc je dobrý elektroizolant. Proto se využívá převážně při výrobě rozvodného potrubí a chemických nádrží (viz [12]). Tyč z tohoto materiálu měla délku $l = 1018,5$ mm a průměr $d = 12,8$ mm. Její hmotnost byla $m = 187,6$ g. Těmto parametrům odpovídá hustota $\rho = 1431,4$ kg/m³. Rázovým kladívkem se podařilo na této tyči vybudit pulz o 10 μ s kratší, tj. $t_0 = 140$ μ s (viz obr. 23a), který měl opět mírně strmější náběh než je jeho pokles. Oproti materiálu PP má PVC menší tlumicí schopnosti, jak je patrné z odezvy zrychlení na obr. 23b. Amplituda vybuděného zrychlení byla v tomto případě utlumena na přibližně 10% své původní hodnoty za 5 ms, kdežto v případě tyče z PP je za stejnou dobu amplituda pulzu utlumena na přibližně 2%. Zároveň je na odezvě možné pozorovat kvalitativní rozdíl mezi vybuděným a odraženým pulzem.

Na rozdíl od předešlých materiálů uvádí výrobce u materiálu PET na svém webu tabulku vlastností (viz příloha A.3). Tento materiál se dobře obrábí a proto je využíván pro

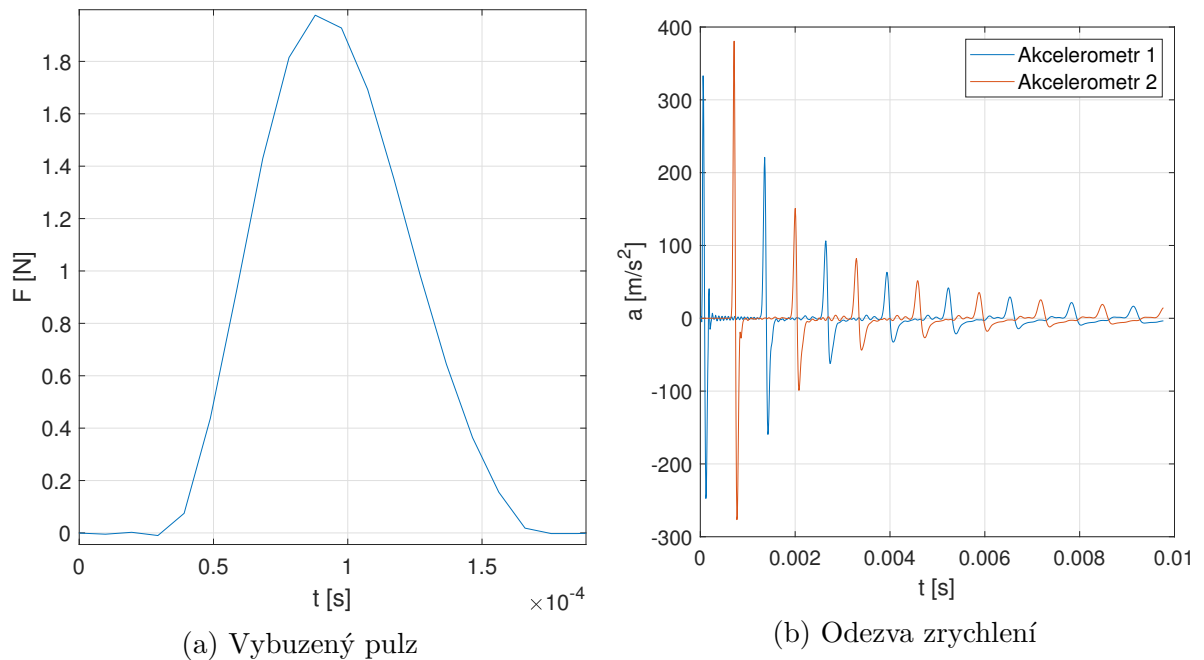


Obrázek 22: Experimentální data použitá pro identifikaci vlastností PP

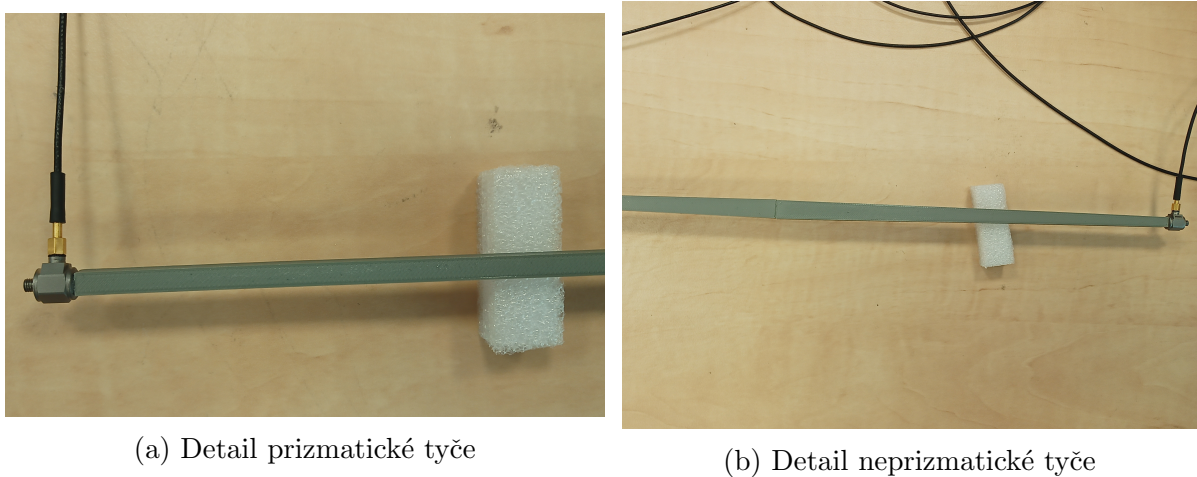


Obrázek 23: Experimentální data použitá pro identifikaci vlastností PVC

výrobu mechanicky přesných částí, např. do ložisek. Zároveň je určen pro velká zatížení, protože má vysokou mechanickou pevnost, tuhost a tvrdost. V tomto případě měla měřená tyč délku $l = 1002,5$ mm, průměr $d = 12,2$ mm a hmotnost $m = 161,7$ g, Těmto parametrům odpovídá hustota $\rho = 1389,8$ kg/m³. Vybuzený v podstatě symetrický pulz, viz obr. 24a, má téměř dvakrát menší amplitudu, ale je stejně dlouhý jako pulz v předchozím



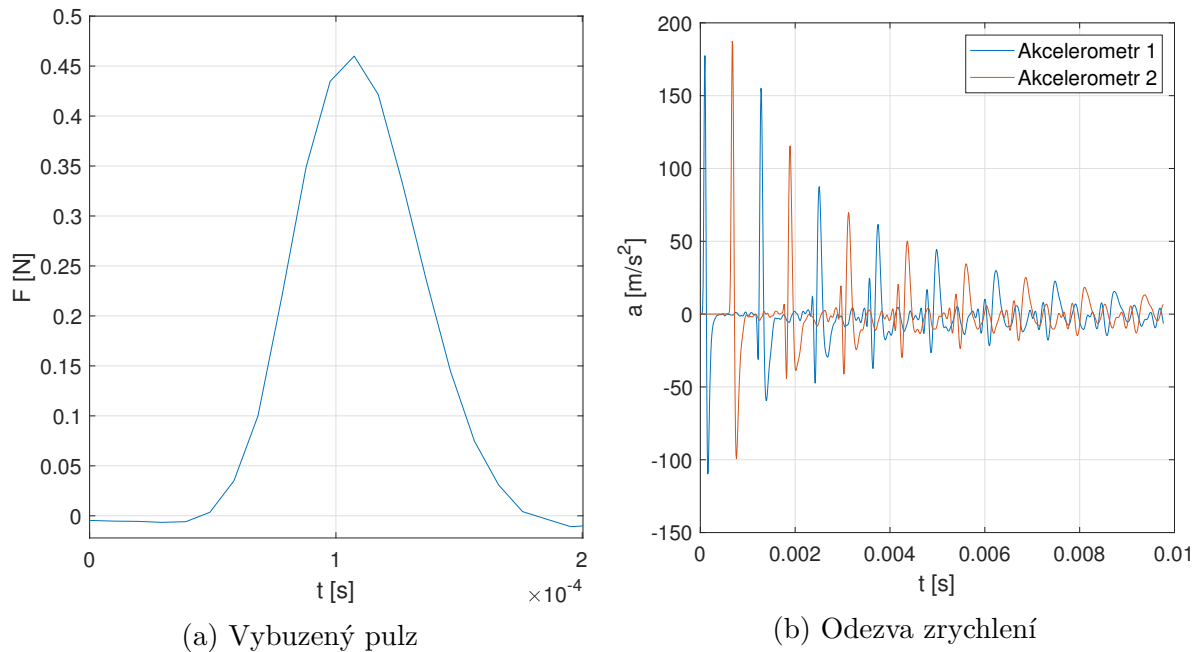
Obrázek 24: Experimentální data použitá pro identifikaci vlastností PET



Obrázek 25: Přilepení akcelerometru na prizmatickou a neprizmatickou tyč z PLA

případě. Odezva na obr. 24b je v porovnání s ostatními zmíněnými materiály tlumena nejméně, tj. její odezva zrychlení se za cca 5 ms zmenšila na 13% ze své původní hodnoty.

Pro potřeby měření na posledním zmíněném materiálu, tj. PLA, byla tyč vytisknuta na 3D tiskárně. S ohledem na omezené rozměry tiskárny a možnosti tisku bylo vytisknuto 5 tyčí čtvercového průřezu 5×5 mm a délky 200 mm. Tyto tyčky byly následně slepeny lepidlem na lepení tenzometrů v jednu tyč délky $l = 997,9$ mm. Slepené tyčky i s detailem na jeden přilepený akcelerometr jsou na obr. 25a. Průměrná hustota PLA byla určena na základě rozměrů a hmotností jednotlivých tyček jako $\rho = 1174.4$ kg/m³. Záznam odezvy této tyče je i s buzením zobrazen na obr. 26. Z této odezvy lze vypočítat

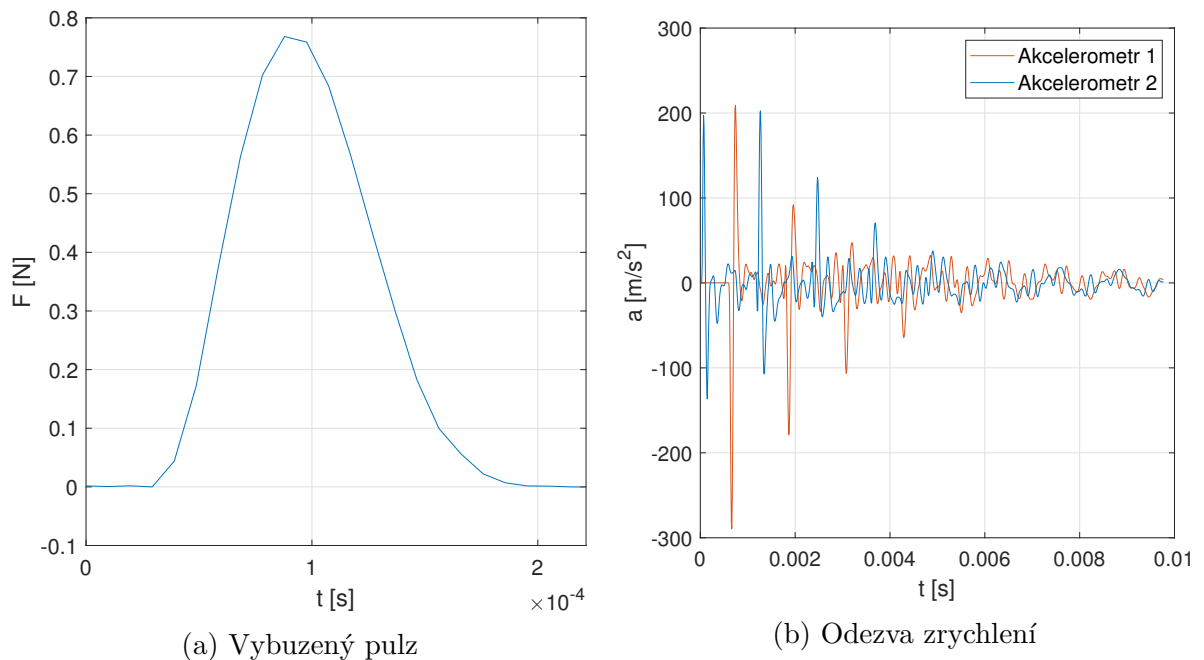


Obrázek 26: Experimentální data použitá pro identifikaci vlastností PLA

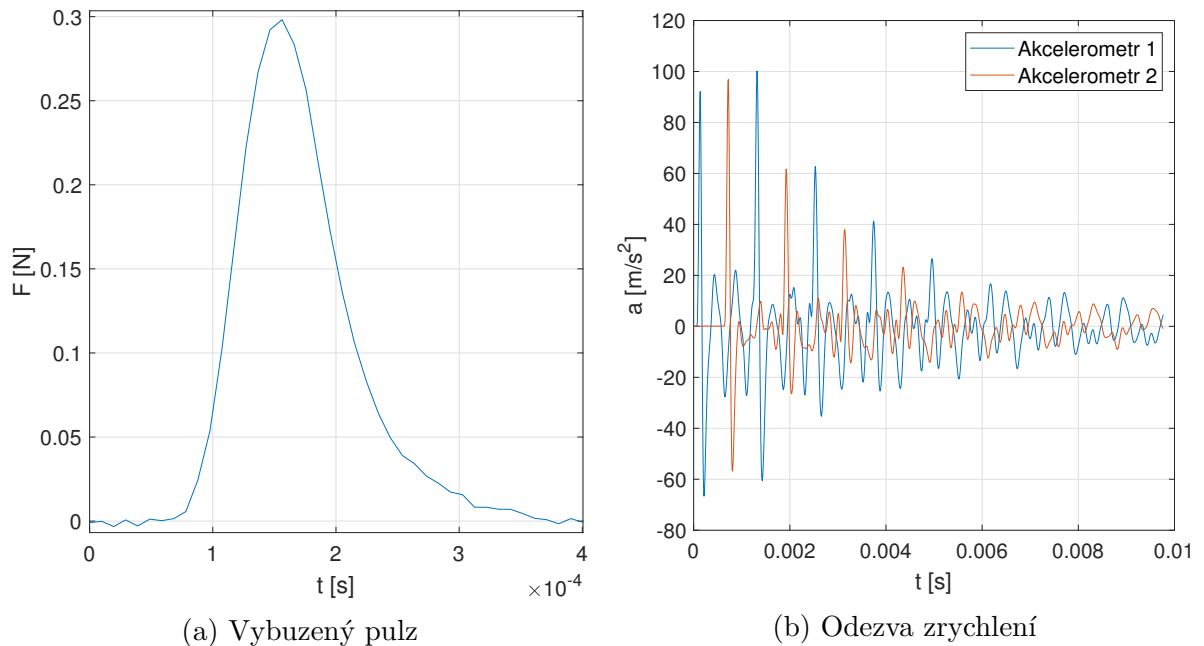
vat utlumení amplitudy na 26% ze své původní hodnoty za 5 ms. Vybuzený pulz je opět téměř symetrický s přibližnou délkou $150 \mu\text{s}$, ale má výrazně menší amplitudu než pulzy predešlé. To je dáno tím, že tato tyč má v porovnání s ostatními malou hmotnost, pouze $m = 30,567 \text{ g}$, a vybudit osamocený pulz se podařilo pouze aplikováním velmi malé síly. Signál naměřený akcelerometry je v delších časech pak silně zatížen šumem, což je pravděpodobně způsobeno i odrazem postupující vlny od nedokonalých lepených spojů, od tenké vrstvy lepidla, případně od dutinek v tyči vzniklých při 3D tisku.

Z materiálu PLA bylo podobným způsobem vytištěno i pět stejných tyček přibližné délky 200 mm se spojitou změnou průřezu. Na jednom konci tyček byl průřez čtvercový $5 \times 5 \text{ mm}$ a na druhé pak obdélníkový $5 \times 10 \text{ mm}$. Tyto tyčky byly slepeny tak, aby na sebe navazovaly konce se stejným průřezem, jak je patrné z obr. 25b. Na této tyči byl na konci s průřezem $5 \times 10 \text{ mm}$ (*Akcelerometr 2*) vybuzen téměř symetrický pulz s amplitudou 0,8 N, viz obr. 27a. Odezva zrychlení tyče na toto buzení, ze které lze pozorovat utlumení amplitudy na cca 20% původní hodnoty, je pak na obr. 27b. Odezva zrychlení na buzení z druhého konce této tyče je zobrazena na obr. 28. Vybuzený pulz na druhém konci s průřezem $5 \times 5 \text{ mm}$ (*Akcelerometr 1*) má zatím nejmenší amplitudu 0,3 N a délku přes $200 \mu\text{s}$, viz 28a. Na obr. 28b je odezva tyče na tento pulz. Je zřejmé, že by odezva změřená na menším průřezu měla být vyšší než na druhém konci tyče. Vlivem disperze a tlumení prostředí je však šířící se pulz utlumen. I přesto lze na obr. 28b nalézt dva po sobě jdoucí pulzy, které si jsou amplitudově podobné. V signálu je značný šum ze stejných důvodů jako v předchozím případě. Pro další výpočty bude proto použita odezva, která je i s buzením zobrazena na obr. 27.

Poslední měření bylo provedeno na heterogenní neprizmatické tyči, která byla slepena ze čtyř homogenních prizmatických válcových tyčí vyrobených z jiných materiálů.



Obrázek 27: Experimentální data použitá pro identifikaci vlastností neprizmatické tyče z PLA buzené na konci s průřezem 5×10 mm



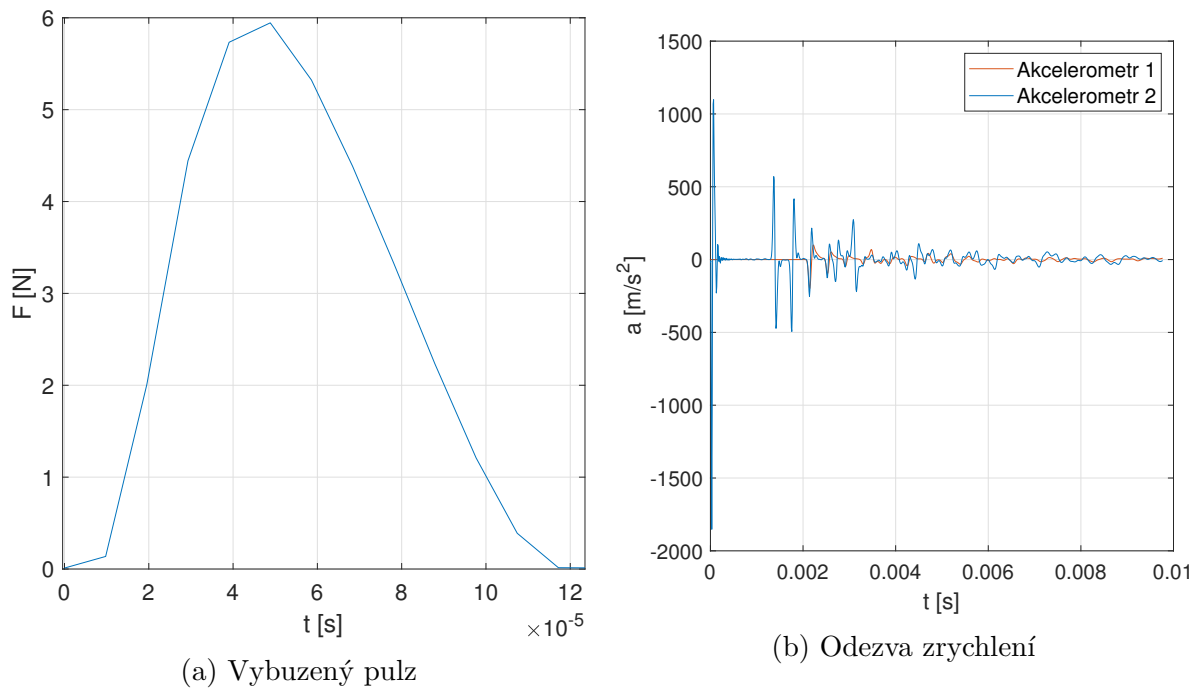
Obrázek 28: Experimentální data pro neprizmatickou tyč z PLA buzenou na konci 5×5 mm

Tyč je složena postupně z materiálu POM-C, hliníku, PC1000 a PP. Naměřené rozměry a hmotnosti jednotlivých homogenních částí a z nich vypočtené hustoty jsou uvedeny v tab. 2. Celková délka této vrstevnaté tyče je 3960 mm a její hmotnost $m = 514,70$ g.

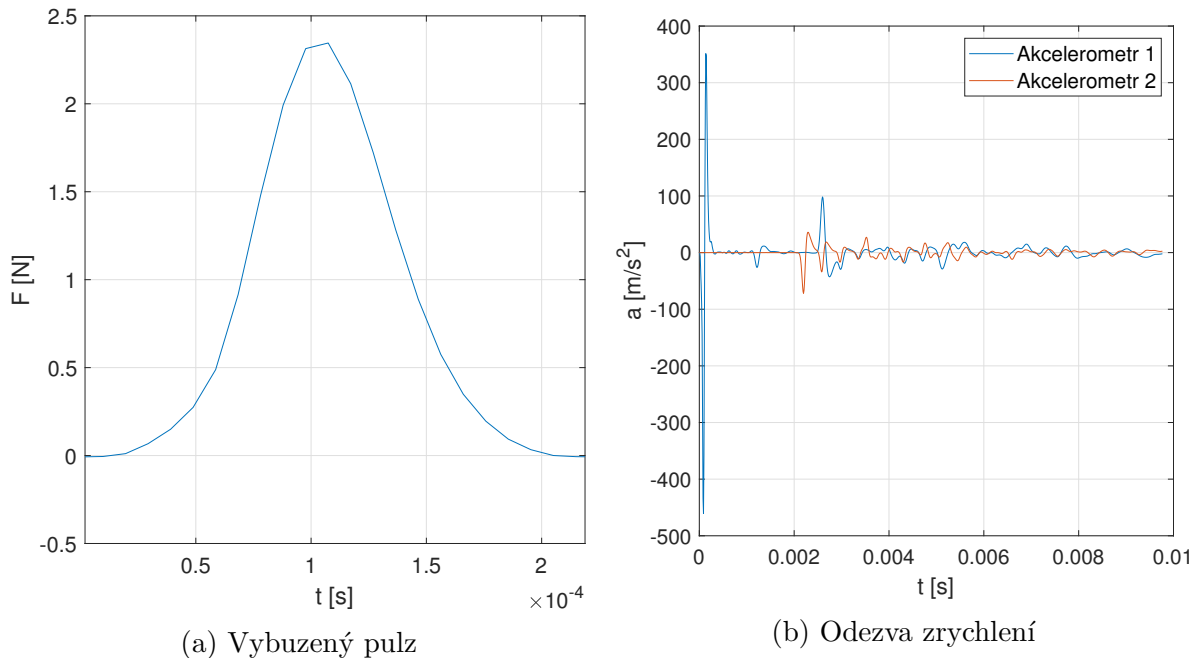
Materiál	Hmotnost [g]	Průměr [mm]	Délka [mm]	Hustota [kg/m ³]
POM-C	170,4	12,4	1006,0	1402,6
Hliník	200,0	10,0	953,0	2672,1
PC1000	65,5	8,4	1001,5	1180,2
PP	78,8	10,4	999,5	928,1

Tabulka 2: Parametry homogenních tyčí tvořících heterogenní neprizmatickou tyč

Díky podstatně vyšší hmotnosti než v případě jednotlivých homogenních tyčí se podařilo vybudit pulzy s amplitudou přibližně 6 N (viz obr. 29a), resp. 2,3 N (viz obr. 30a). Také u tohoto případu jsou uvedeny odezvy odpovídající buzení z jednoho i z druhého konce, obr. 29b a obr. 30b. Je možné vidět, že se pulz po průchodu celou tyčí utlumí díky tlumícím vlastnostem viskoelastických materiálů i díky částečnému odrazu pulzu od rozhraní na méně než sedminu své původní hodnoty. Při porovnání odezev na obr. 29b a 30b lze zároveň pozorovat rozdílný čas příchodu pulzu po odrazu do místa buzení. Tyto pulzy však nejsou odražené od volného konce tyče. Tomu svědčí i fakt, že je časový úsek mezi buzením a tímto pulzem kratší než příchod pulzu na druhý konec tyče. Takovéto pulzy jsou vzniklé částečným odrazem od rozhraní prostředí se značným rozdílem impedance materiálu, resp. skokovou změnou průřezu. Můžeme tak pozorovat odraz od hliníkové tyče, která má největší impedanci v porovnání s použitými plasty. Pro další výpočty bude použita odezva, která je uvedena na obr. 29



Obrázek 29: Experimentální data použitá pro identifikaci vlastností heterogenní tyče buzené z POM-C



Obrázek 30: Experimentální data naměřená pro heterogenní tyč buzenou z PP

6.2 Identifikace materiálových parametrů a porovnání naměřených odezev s analytickým řešením

Odezvy zrychlení získané z experimentu jsou v této části práce využity pro identifikaci parametrů modelu standardního viskoelastického tělesa (SVT), popřípadě zobecněného standardního viskoelastického tělesa (ZSVT), kterým bylo chování jednotlivých materiálů aproximováno. Následně jsou získané parametry využity k výpočtu odezev tyčí pomocí analytického řešení odvozeného v podkap. 3.1 a 3.4 a k jejich porovnání s výsledky měření.

Identifikace parametrů Zenerova viskoelastického modelu proběhla v Matlabu s využitím již vytvořeného softwaru, který byl popsán v práci [40]. Ten v první řadě vypočítá Laplaceův obraz naměřeného signálu z rázového kladívka a následně optimalizačním procesem hledá takové materiálové parametry, pro které nabývá cílová funkce

$$f_c = \left| \frac{(\mathbf{a}_E - \mathbf{a}_A)\mathbf{W}(\mathbf{a}_E - \mathbf{a}_A)^T}{\mathbf{a}_E\mathbf{W}\mathbf{a}_A^T} \right| \quad (6.1)$$

svého minima. Vektor \mathbf{a}_E v (6.1) značí naměřené zrychlení a \mathbf{a}_A zrychlení vyčíslené pomocí vztahu (3.12)₂. Váhová matice \mathbf{W} je v tomto případě jednotková, tj. hodnotám zrychlení byly ve všech časech přiřazeny stejné váhy. Optimalizační proces byl na základě proběhlé analýzy provedené v [40] rozdělen do tří fází. V první fázi je nalezena přibližná poloha globálního minima cílové funkce (6.1) při změně E_E a E_1 . To je provedeno pomocí veštvavené optimalizační funkce *fmincon*, která je rozšířena o objekt *GlobalSearch*. Ve druhé fázi je nalezena přibližná poloha globálního minima cílové funkce při změně parametru λ podobným způsobem, jako v první fázi. Ve třetí fázi se poloha globálního minima cílové funkce zpřesňuje spuštěním funkce *fmincon* pro E_E , E_1 a λ se startovacími parametry,

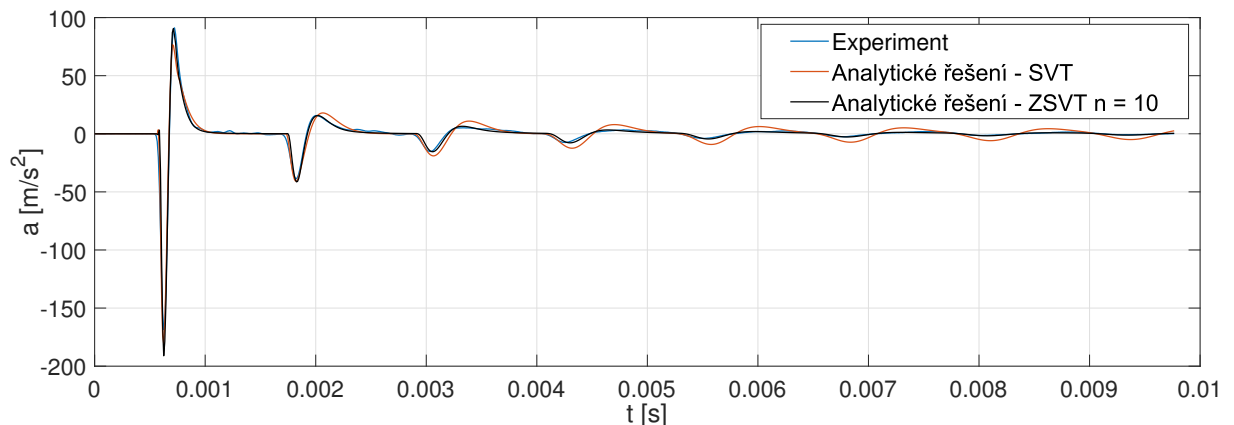
Materiál	E_E [GPa]	E_1 [GPa]	λ [kPa s]
PP	2,3535	0,5484	14,2427
PET	3,0272	0,2767	20,8165
PVC	2,9953	1,0184	214,8129
PLA	2,9997	0,1644	3,6245

Tabulka 3: Identifikované materiálové parametry Zenerova modelu

které jsou voleny jako dosud nalezené parametry z první a druhé fáze.

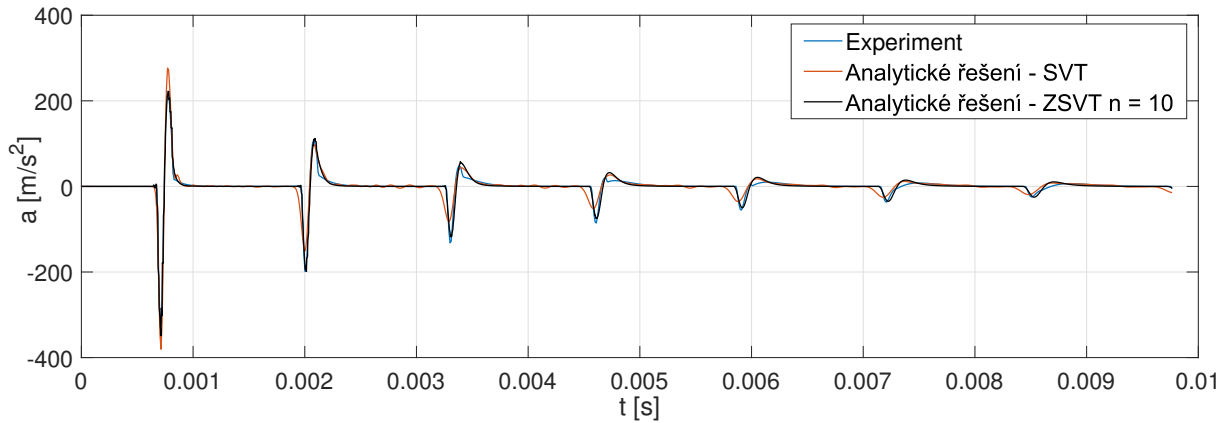
Výše uvedeným postupem byly nalezeny optimální materiálové parametry jak pro model SVT (viz tab. 3), tak pro model ZSVT pro 10 paralelních Maxwellových větví, tj. pro $n = 10$. Parametry identifikované pro tento model ZSVT a všechny zmíněné materiály jsou uvedeny v příloze B v tab. 4. Porovnání naměřeného zrychlení a zrychlení vypočteného pomocí odvozeného vztahu (3.12)₂ v místě $x = l$ (tj. na volném konci tyče) a parametrů uvedených ve zmíněných tabulkách je pro všechny homogenní prizmatické tyče provedeno na obr. 31 - 34. Např. na obr. 31, na kterém jsou porovnány výsledky pro tyč z PP, je zřejmé, že Zenerův model není dostatečný pro popis chování tohoto materiálu. Kdežto při použití modelu ZSVT, který má více relaxačních časů, vypočtená odezva lépe odpovídá výsledkům z měření. Lepší shody odezev bylo dosaženo při použití ZSVT i pro materiál PET (viz obr. 32). Je vidět, že odezva získaná pomocí tohoto identifikovaného modelu je ve velmi dobré shodě s naměřenými daty i v čase 9 ms. Pomocí experimentálně naměřeného zrychlení na PVC tyči se podařilo dostatečně identifikovat parametry obou modelů. Naměřené odezvy a odezvy z těchto modelů (obr. 33) nabývají podobných amplitud až do 4,5 ms. Při použití ZSVT nebylo dosaženo výrazného zlepšení shody s naměřenou odezvou. Pro případ materiálu PLA se odezvy porovnané na obr. 34 lišily nejvíce. To je způsobeno tím, že je naměřený signál zatížen šumem více, než u ostatních materiálů. Avšak odezva tyče získaná pomocí analytického řešení při použití SVT a ZSVT se i v tomto případě poměrně dobře shoduje s výraznými pulzy z měření až do přibližně 4 ms.

Z naměřené odezvy PLA na obr. 34 je mimo jiné patrný malý nárůst zrychlení do klad-

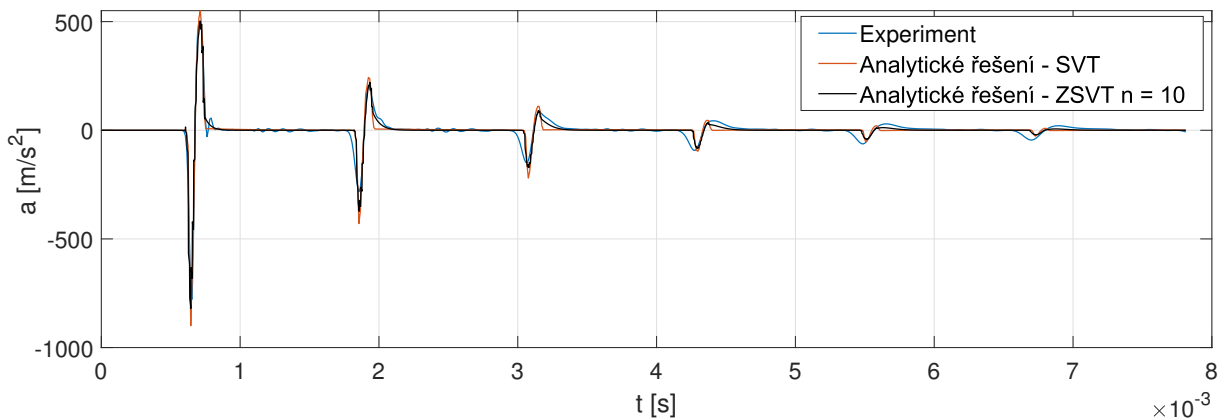


Obrázek 31: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy tyče z PP

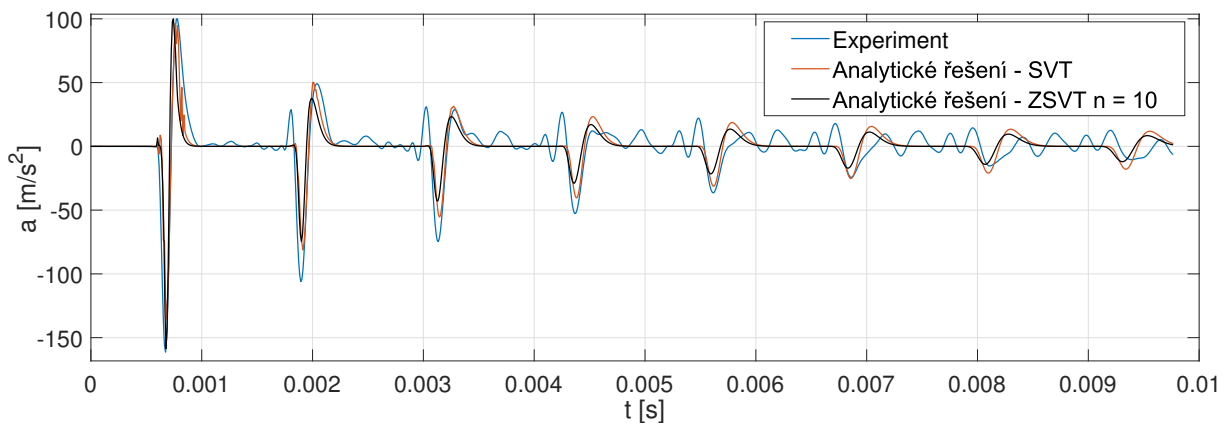
ných hodnot před dominantním poklesem zrychlení v důsledku příchodu pulzu. Z provedené analýzy vyplynulo, že tento nárůst není přímo vyvolán buzením, ale přidanými hmotami obou akcelerometrů. Zmínku o tomto faktoru lze nalézt např. v práci [4]. Hmot-



Obrázek 32: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy tyče z PET



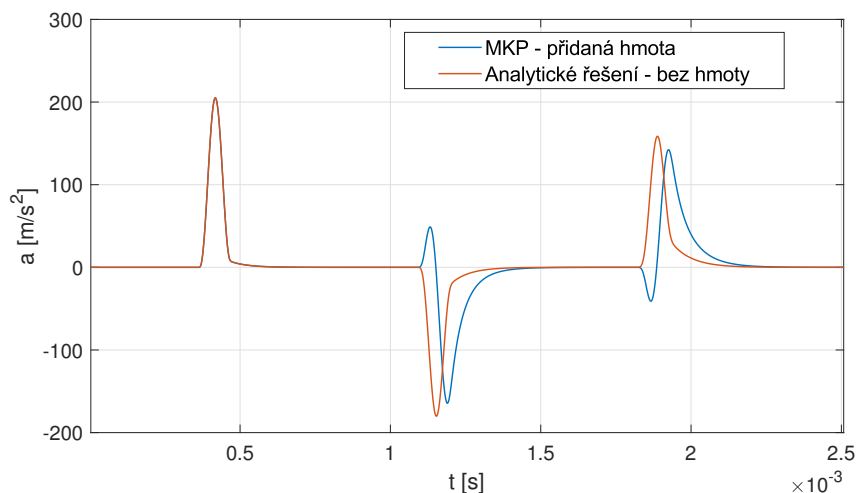
Obrázek 33: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy tyče z PVC



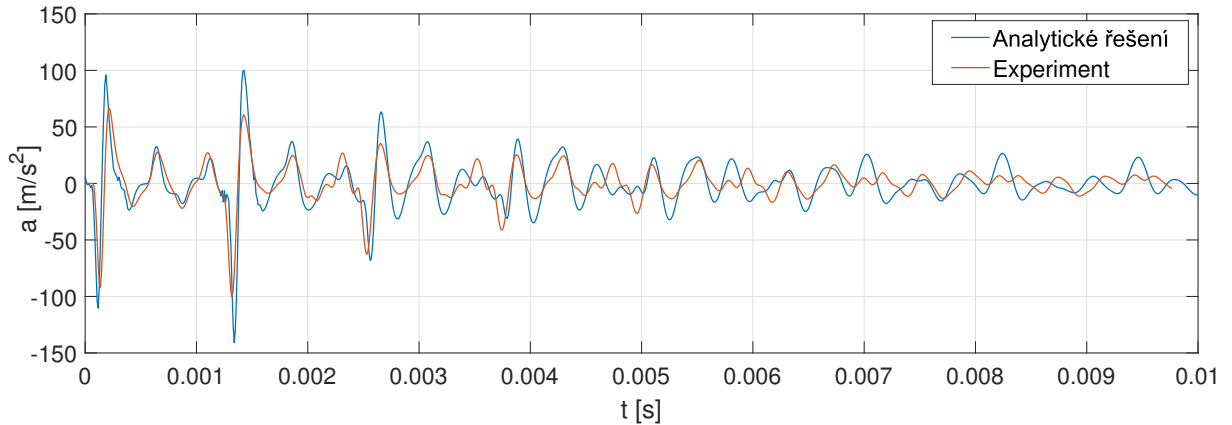
Obrázek 34: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy homogenní tyče z PLA

nost tyče z PLA se po nalepení obou akcelerometrů zvýšila celkem o 3,2 g, tj. o více než 10%. Tento nárůst hmotnosti již nezanedbatelným způsobem ovlivní odezvu tyče. Za účelem potvrzení této domněnky byla pomocí MKP řešena odezva tyče s přidanou diskretní hmotou pouze na nebuženém konci. Je to z toho důvodu, aby bylo zřejmé, jaký efekt má přidaná hmota na průběh zrychlení. Byla tedy uvažována metrová tyč z PC1000 kruhového průřezu o průměru $d = 6$ mm. Na jednom konci byla přidána diskretní hmota o hmotnosti 1,6 g, což odpovídá hmotnosti akcelerometru (viz příloha A.1). Tyč byla buzena jednotkovou kosinovou silou na opačném konci. Z porovnání odezev v místě $x = 0,5$ m (viz obr. 35) je zřejmé, že přidáním hmoty docílíme náběhu před příchodem pulzu s opačnou amplitudou tak, jako tomu je na obr. 34.

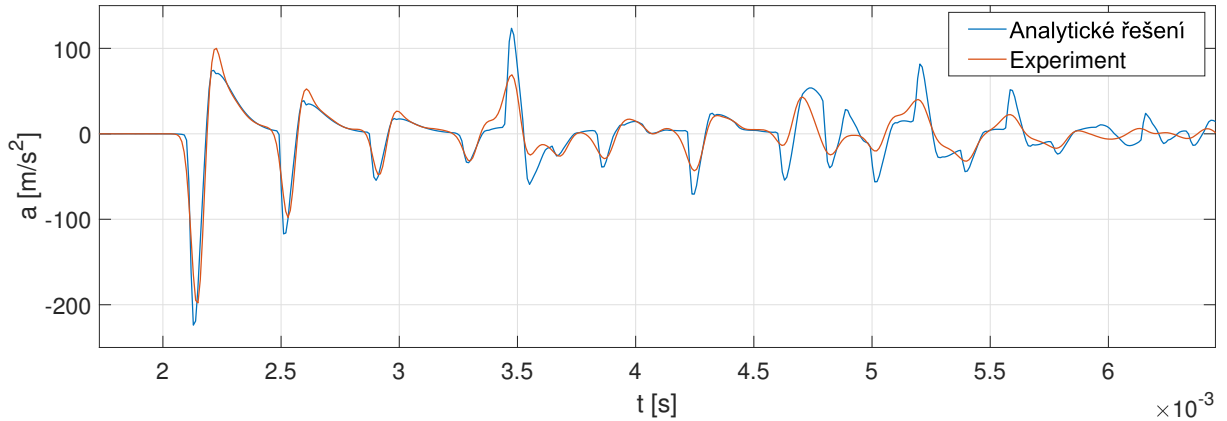
Na základě parametrů modelu SVT identifikovaných pro všechny dosud zmíněné materiály (viz tab. 1 a 3), lze nyní řešit i úlohu neprizmatické tyče z PLA (viz obr. 25b) a úlohu vrstevnaté neprizmatické tyče se skokovou změnou průřezu, které byly zmíněny a popsány v podkap. 6.1, a porovnat výsledky analytického řešení s naměřenými odezvami. Z porovnání odezev získaných na volném konci tyče z PLA se spojitou změnou průřezu (viz obr. 36), je vidět poměrně dobrá shoda analytických výsledků s výsledky experimentu až do času přibližně 2,5 ms. S rostoucím časem se rozdíly mezi oběma odezvami zvětšují, což je pravděpodobně způsobeno stejnými faktory, které byly zmíněny v souvislosti s prizmatickou tyčí z PLA, tj. nedokonalost lepených spojů, odrazy vln od tenké vrstvy lepidla, nehomogenita materiálu po 3D tisku a neuvážování vlivu nalepených akcelerometrů. Další nepřesnost do výsledků může vnášet i fakt, že tyč byla slepena z částí, na kterých nebyla provedena identifikace. V úloze heterogenní tyče slepené ze 4 tyčí různých materiálů a průměrů (viz tab. 2) je shoda výpočtu a měření lepší, jak je patrné z obr. 37. V tomto případě se analytické výsledky získané pomocí modelu SVT poměrně dobře shodují s experimentálními daty přibližně do času 4,5 ms. Míra shody je v tomto případě negativně ovlivněna zejména lepenými spoji. Naopak pozitivně by mohla být tato shoda ovlivněna použitím modelu ZSVT při aproximaci materiálových vlastností jednotlivých částí téměř 4 m dlouhé tyče.



Obrázek 35: Vliv přidané hmoty na odezvu metrové tyče z PC1000 v místě $x = 0,5$ m



Obrázek 36: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy neprizmatické tyče z PLA v místě $x = l$, která byla buzena na průřezu o velikosti 5×5 mm



Obrázek 37: Porovnání naměřené a vypočtené odezvy vrstevnaté tyče v místě $x = l$, která byla buzena na části z POM-C

6.3 Identifikace disperzních a tlumicích vlastností

Vyšetření disperzních a tlumicích vlastností PP, PET, PVC, PLA, neprizmatické tyče z PLA a vrstevnaté tyče spleené ze 4 tyčí různých materiálů bude v této části práce provedeno pomocí vztahů (5.24), tj. dle metody prezentované v Blanc [7]. Pokud to typ úlohy dovolí, bude dále použita metoda harmonických vln diskutovaná jako první z metod v podkap. 5.2. Z důvodu absence měření odezvy tyčí na harmonické buzení bude tato metoda aplikována na odezvu tyče vypočtenou pomocí analytického řešení s modelem ZSVT. Identifikace disperzních a tlumicích vlastností přitom proběhne na základě naměřených odezví zrychlení prezentovaných v podkap. 6.1.

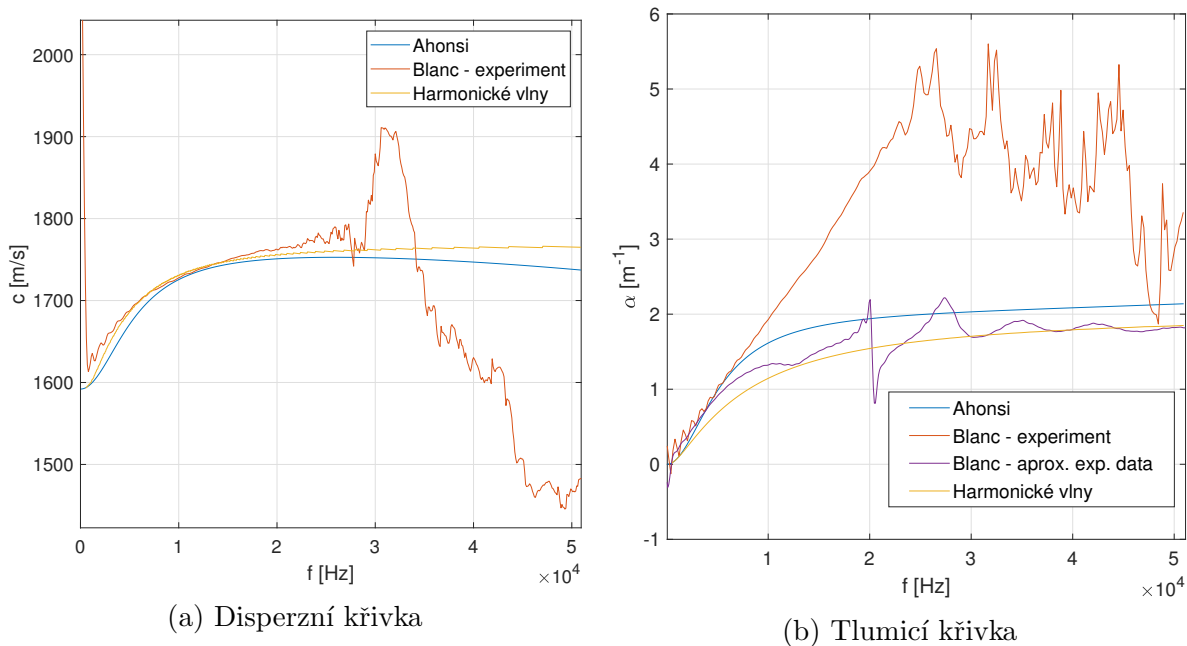
Při zpracování naměřených signálů představujících zrychlení na volném konci tyčí je nutné si uvědomit, že díky odrazu od volného konce dochází v místě měření k superpozici amplitud šířících se vln. To má samozřejmě vliv na následně identifikovanou křivku tlumení, a proto je nutné pro zachování informace o tlumení materiálu vždy první pulz naměřený v místě buzení škálovat na dvojnásobek své původní hodnoty. Zároveň je před

výpočtem materiálových vlastností signál v časové oblasti vždy vynásoben exponenciálním oknem uvedeným v podkap. 5.2. Tyto odezvy jsou následně převedeny do frekvenční oblasti pomocí *FFT*. Z těchto funkcí jsou pak získány křivky fázové rychlosti a tlumení, na které je vždy použita funkce *movmean*, která potlačí nechtěné oscilace na identifikovaných křivkách. Přesnost těchto výsledků závisí zejména na použité vzorkovací frekvenci, která je dle aparatury *OROS* nastavena na 100 kHz. Z proběhlé analýzy přesnosti identifikační metody v podkap. 5.2 je dále zřejmé, že přesnost použitého algoritmu je v nízkých frekvencích závislá také na délce pulzu a jeho frekvenčním spektru. Díky tomu, že mají vybuzené pulzy v tomto případě délku okolo $t_0 = 150 \mu\text{s}$ a jsou nedostatečně navzorkovány, liší se jednotlivé identifikované křivky na okrajích sledovaných frekvenčních pásem.

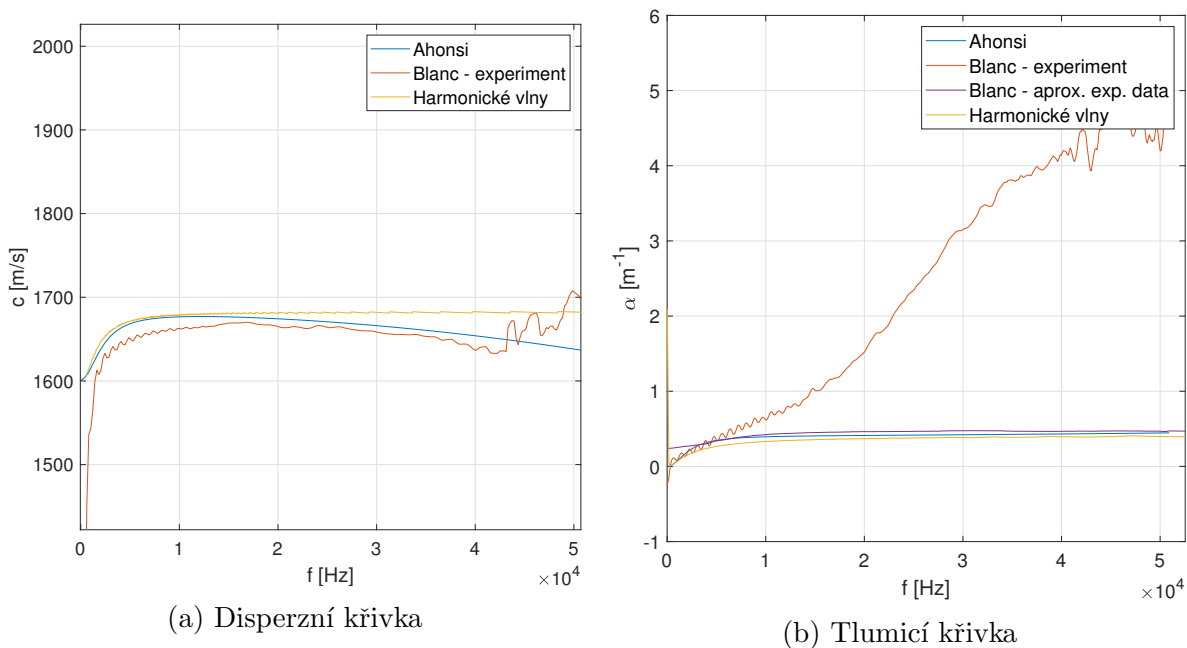
Nalezené disperzní a tlumicí křivky pro tyč vyrobenou z materiálu PP jsou v porovnání s křivkou vypočtenou pomocí analytických vztahů (5.4) s korekcí na příčnou kontrakci vykresleny na obr. 38. Na základě těchto výsledků lze říci, že se touto metodou podařilo z experimentálních dat určit frekvenční závislost fázové rychlosti vln přibližně do 20 kHz, viz obr. 38a. V případě porovnání tlumicích křivek nabývá křivka identifikovaná z naměřených dat (křivka *Blanc - experiment* na obr. 38b) mnohem vyšších hodnot, než křivky obdržené analytickými vztahy s korekcí a pomocí metody harmonických vln. S podobným charakterem křivek tlumení se lze setkat i u ostatních tyčí vyrobených z PVC, PET a PLA (viz obr. 39b - 41b), ale také např. u tyčí vyrobených z PMMA, viz práce [7]. Křivka tlumení identifikovaná z naměřených dat se tak dá v případě PP aproximovat křivkami získanými s využitím modelu SVT přibližně do 8 kHz, viz obr. 38b. Vyhazení naměřeného signálu (např. klouzavým průměrem) v tomto případě nelze použít, neboť by došlo ke změně šířky i výšky jednotlivých pulzů a výsledky tlumení by byly zkreslené. Z tohoto důvodu bude u všech studovaných materiálů místo vyhlazené experimentální odezvy zrychlení vstupovat do procesu identifikace tlumicích vlastností odezva vypočtená analyticky pro model SVT, nebo ZSVT, která nejlépe vystihuje charakter skutečně naměřené odezvy tyče (viz křivka *Blanc - aprox. exp. data* v obr. 38b). Takto určená tlumicí křivka má již podobný průběh jako křivka získaná pomocí harmonických vln, a to až do frekvence 50 kHz.

Identifikovaná disperzní křivka (*Blanc - experiment*) pro materiál PVC, která je na obr. 39a, se shoduje s výsledky metody harmonických vln do 40 kHz. Na této křivce je také možné vidět významný vliv velikosti průměru tyče ($d = 12,8 \text{ mm}$), neboť jsou výsledky z identifikace v poměrně dobré shodě s výsledky z analytického vztahu (5.4), viz křivka *Ahonsi*. Křivka tlumení získaná pomocí experimentálních dat se pro tento materiál shoduje do 5 kHz, kdežto křivka *Blanc - aprox. exp. data* se odlišuje s křivkou označenou jako *Ahonsi* pro nízké frekvence, ale ve vyšších frekvencích se hodnoty tlumení ustalují na přibližně stejné hodnotě $0,49 \text{ m}^{-1}$, viz obr. 39b.

V případě tyče z PET také hraje velikost průřezu významnou roli při identifikaci disperzní křivky. To lze vidět na obr. 40a, kde křivka *Blanc - experiment* je v poměrně dobré shodě s výsledky z analytického vztahu (5.4) do frekvence 45 kHz. Identifikovaná tlumicí křivka s označením *Blanc - experiment*. data je i v tomto případě relativně shodná s ostatními do frekvence 5 kHz, viz obr. 40b. Výrazně lepší shodu opět dostaneme pro křivku *Blanc - aprox. exp. data*, která však nabývá vyšších hodnot tlumení než křivka s označením *Ahonsi*. To je způsobené tím, že je Zenerův model nedostačující pro popis



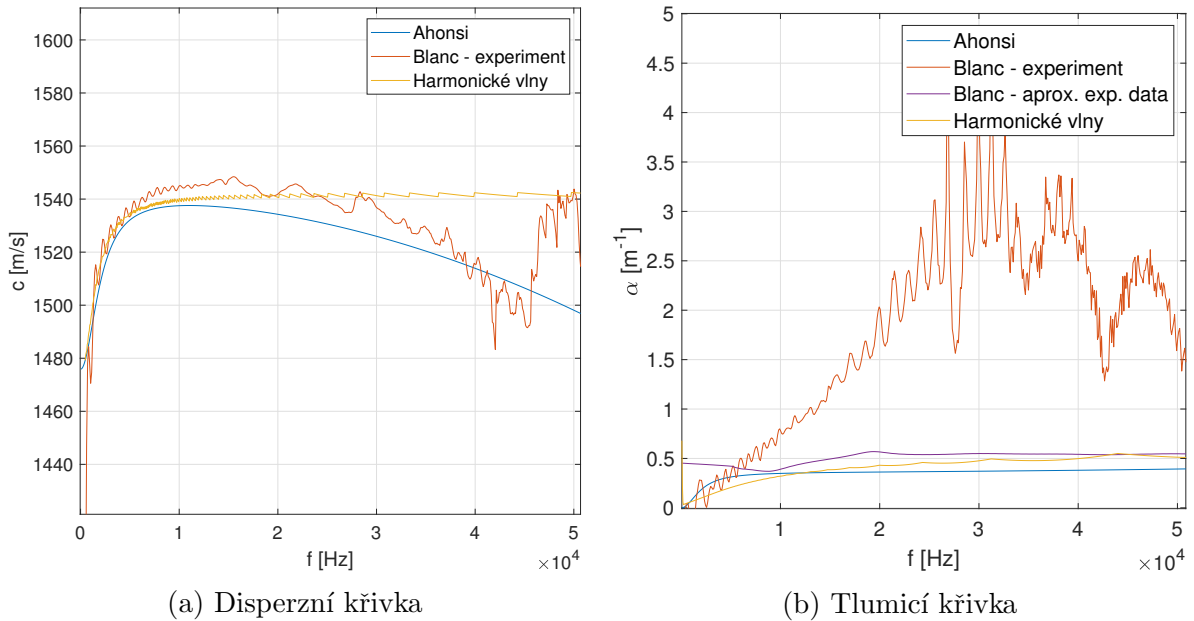
Obrázek 38: Disperzní a tlumičí křivka homogenní tyče z PP



Obrázek 39: Disperzní a tlumičí křivka homogenní tyče z PVC

tlumících vlastností tohoto materiálu. Křivka tlumení získaná metodou harmonických vln se pak shoduje s křivkou *Blanc - aprox. exp. data* ve vyšších frekvencích.

K největším odlišnostem při určování disperzních a tlumících vlastností docházelo v případě tyčí z PLA. Identifikovaná disperzní křivka na obr. 41a nabývá vyšších hodnot a ani pomocí metody harmonických vln s uvažovaným ZSVT a $n = 10$ se nepodařilo

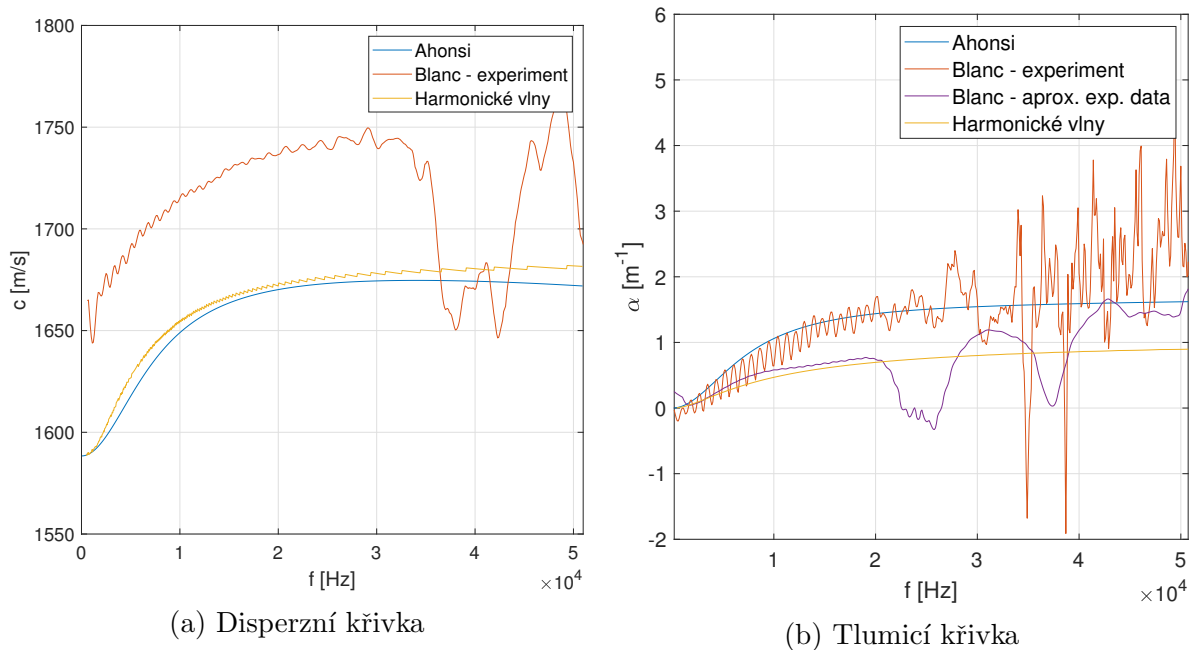


Obrázek 40: Disperzní a tlumicí křivka homogenní tyče z PET

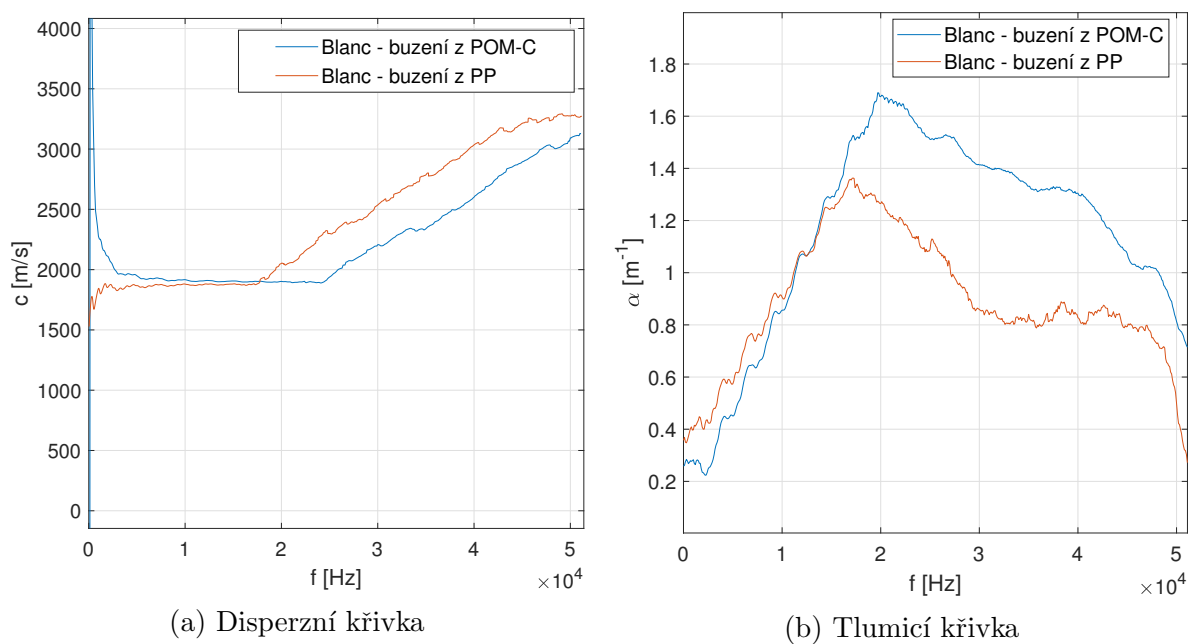
dosáhnout lepší shody. Je to způsobeno zřejmě tím, že je naměřený signál ovlivněn významnou hmotou přilepených akcelerometrů. Křivky s označeními *Ahonsi* a *Blanc - experiment* jsou v relativně dobré shodě až do frekvence 25 kHz. Na druhé straně, při použití odezvy tyče s odpovídajícím modelem ZSVT v metodě harmonických vln a v metodě využívající vztah (5.24) nabývají odpovídající křivky jiných hodnot a jsou shodné přibližně do frekvence 20 kHz (viz obr. 41b).

Na základě výše uvedených výsledků lze říci, že se pomocí experimentálních dat podařilo identifikovat disperzní a tlumicí vlastnosti pro všechny studované materiály a tyče. Dále se ukázalo, že lze disperzní vlastnosti většiny tyčí aproximovat pomocí materiálového modelu SVT, v některých případech až do frekvence 50 kHz. V případě tlumicích vlastností je tato frekvence podstatně menší a k aproximaci těchto vlastností bylo nutné použít jiný materiálový model.

Při určování disperzních a tlumicích vlastností heterogenní (vrstevnaté) tyče a neprizmatické tyče z PLA, není vhodné použít pro ověření metodu harmonických vln využívající aproximaci odezvy pomocí analytického řešení a vybraných modelů SVT z toho důvodu, že se takto získané odezvy liší od naměřených již v relativně krátkém čase (viz obr. 36 a 37). Proto budou v následující části uvedeny a diskutovány pouze výsledky získané z identifikace provedené na základě naměřených odezev zrychlení při postupném buzení z obou konců tyčí. Výsledky jsou pro vrstevnatou tyč uvedeny na obr. 42. Z identifikovaných disperzních a tlumicích křivek pro zmíněnou tyč lze konstatovat, že bylo dosaženo oběma přístupy relativní shody výsledků do frekvence 18 kHz. U tyče z PLA se spojitou změnou průřezu jsou fázové rychlosti identifikované pro oba typy buzení formálně shodné do přibližně 40 kHz (viz obr. 43a). Ty se ustálily přibližně na hodnotě 1725 m/s, což odpovídá i identifikovaným disperzním vlastnostem prizmatické tyče z PLA, viz obr. 41a. Oproti tomu křivky tlumení, které jsou vykresleny na obr. 43b, se svými

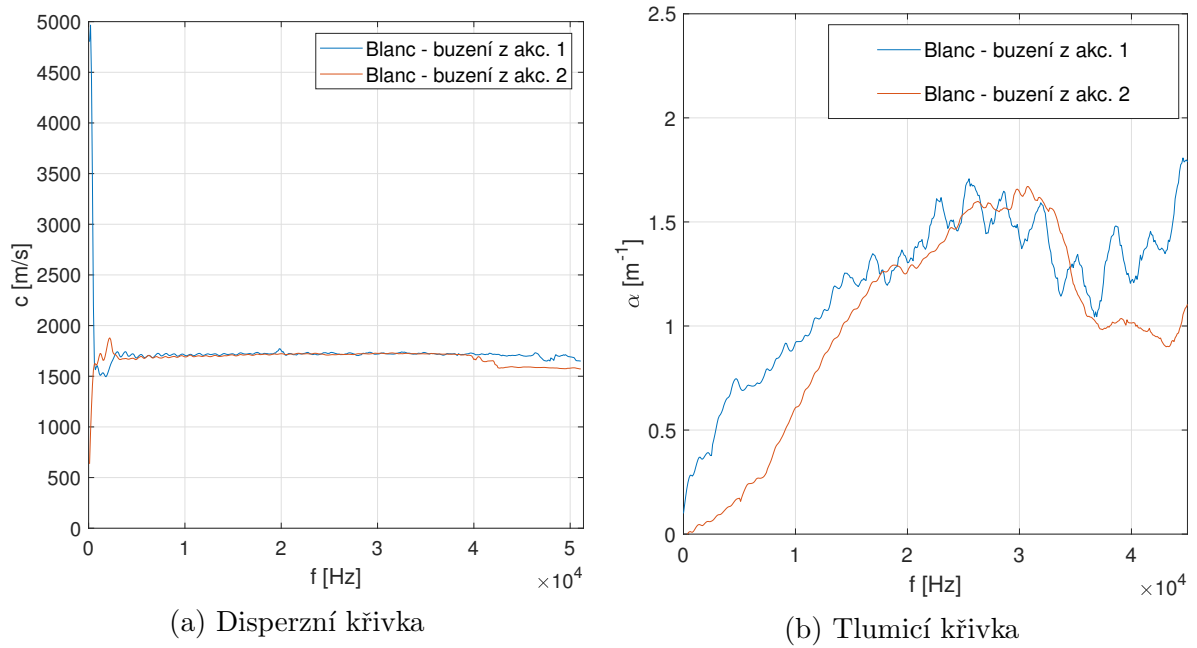


Obrázek 41: Disperzní a tlumicí křivka homogenní tyče z PLA



Obrázek 42: Disperzní a tlumicí křivky heterogenní tyče

průběhy odlišují. To je způsobené vlivem nezanedbatelné hmotnosti akcelerometrů, která ovlivňuje amplitudy v naměřené odezvě, a také faktem, že identifikace byla provedena z odezvy měřených na rozdílných průřezích.



Obrázek 43: Disperzní a tlumičí křivky homogenní neprizmatické tyče z PLA

7 Závěr

V první části práce byla nejprve provedena podrobná rešerše prací zaměřených do oblasti šíření stacionárních a nestacionárních vln v 1D lineárních viskoelastických prostředích. Konkrétně byla pozornost zaměřena na šíření vln v homogenních i heterogenních tenkých tyčích a v tyčích neprizmatických. Byla zmíněna řada prací zabývajících se disperzními a tlumicími vlastnostmi takovéhoto prostředí a metodami jejich identifikace.

V další části práce se podařilo odvodit vztahy pro Laplaceovy obrazy základních mechanických veličin popisujících odezvu tenké heterogenní neprizmatické viskoelastické tyče na libovolný typ buzení. Uvažovaná tyč byla v osovém směru složena z libovolného počtu částí odlišných materiálových vlastností a libovolných velikostí průřezů. Toto řešení lze tak použít i pro aproximaci odezvy tenké tyče se spojitě měnícím se průřezem a se spojitou změnou materiálových vlastností.

Vyčíslení zmíněného řešení v časové oblasti bylo provedeno pomocí kódu vytvořeného v prostředí Matlab, přičemž bylo využito numerické zpětné Laplaceovy transformace. Získané výsledky pak byly porovnány pro 3 vybrané typy úloh s výsledky numerických simulací provedených v konečnoprvkovém softwaru MSC.Marc/Mentat. Na základě shody obou typů výsledků tak byla ověřena správnost odvození a vyčíslení analytického řešení a správnost volby parametrů použitých numerických modelů. Výsledky analytického řešení byly navíc porovnány i s výsledky experimentů provedených na homogenní neprizmatické tyči se spojitou změnou průřezu a na heterogenní vrstevnaté tyči s nespojitou změnou průřezu. V obou těchto případech bylo dosaženo velmi dobré shody.

V práci byly dále prezentovány různé způsoby popisu disperzních a tlumicích vlastností viskoelastického 1D prostředí a popsány vybrané metody používané k identifikaci těchto vlastností. Jednalo se o metody vyžívající odezvu viskoelastických tyčí na harmonické, nebo rázové zatížení. Pomocí zvolené metody pak byly identifikovány disperzní a tlumicí křivky pro homogenní prizmatické tyče vyrobené z PP, PVC, PET a PLA, homogenní neprizmatickou tyč z PLA se spojitou změnou průřezu a pro vrstevnatou tyč s nespojitou změnou průřezu. Dále byly s využitím odvozeného analytického řešení nalezeny parametry modelu zobecněného standardního viskoelastického tělesa s jednou a s deseti Maxwellovými větvemi pro všechny čtyři použité materiály. Při identifikaci materiálových vlastností přitom byly využity výsledky měření provedených na zmíněných tyčích, které bylo nutné v případě PLA vyrobit technikou 3D tisku. Získané disperzní a tlumicí křivky, které se v některých případech podařilo identifikovat až do desítek kHz, pak byly porovnány a diskutovány v souvislosti s teoretickými a experimentálními závislostmi získanými z dostupné literatury.

V budoucnu by další práce mohla být zaměřena na zlepšení identifikace tlumicích vlastností. Z provedené analýzy zároveň vyplynulo, že použití zobecněného viskoelastického tělesa není vždy dostačující pro popis chování reálného viskoelastického materiálu, proto by bylo vhodné zobecnit odvozené analytické řešení pro viskoelastické modely se spojitým spektrem relaxačních časů.

Reference

- [1] Agrawal, V., Bhattacharya, K., Shock wave propagation through a model one dimensional heterogeneous medium, *Internal Journal of Solids and Structures*, vol. 51, 3604-3618, 2014.
- [2] Ahonsi, B., Harrigan, J.J., Aleyaasin, M., On the propagation coefficient of longitudinal stress waves in viscoelastic bars, *International Journal of Impact Engineering*, vol. 45, 39-51, 2012.
- [3] Bacon, C., An Experimental method for considering dispersion and attenuation in a viscoelastic Hopkinson bar, *Experimental Mechanics*, vol. 38(4), 242-249, 1998.
- [4] Bacon, C., Hosten, B., Bernard, P.A., Acoustic wave generation in viscoelastic rods by time-gated microwaves, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 106(1), 195-201, 1999.
- [5] Benatar, A., Rittel, D., Yarin, A.L., Theoretical and experimental analysis of longitudinal wave propagation in cylindrical viscoelastic rods, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 53, 1413-1431, 2003.
- [6] Berezovski, A., Kolman, R., Berezovski, M., Gabriel, D., Adámek, V., Full field computing for elastic pulse dispersion in inhomogeneous bars, *Composite Structures*, vol. 204, 388-394, 2018.
- [7] Blanc, R.H., Transient wave propagation methods for determining the viscoelastic properties of solids, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, 763-768, 1993.
- [8] Brančík L., Programs for fast numerical inversion of Laplace transforms in Matlab language environment. In: *Proceedings of 7th MATLAB Conference*, 1999, 27-39.
- [9] Brepta R., Okrouhlík M., Valeš F., *Vlnové a rázové děje v pevných tělesech a metody jejich řešení*, Studie ČSAV, Academia, Praha, 1985.
- [10] Brepta, R., Huněk, I., Pohyb pulzu v tenké tyči s proměnlivým modulem pružnosti, ČSAV, Ústav termomechaniky, Z 1032/87, 1987.
- [11] Davies, R.M., Stress waves in solids, *British Journal of Applied Physics*, vol. 7(6), 206, 1953.
- [12] EPP Plasty, EPP Plasty a. s., 20.5.2022. URL: <https://www.eppplasty.cz>
- [13] ERTALYTE Polyetylen tereftalát (PET), EPP Plasty, 20. 5. 2022. URL: <https://www.eppplasty.cz/pdf/PET.pdf>
- [14] Ferry, J.D., *Viscoelastic properties of polymers*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1980.

- [15] Gan, C., Wei, Y., Yang, S., Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, 434-445, 2014.
- [16] Graff K. F., *Wave motion in elastic solids*, Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [17] Hillier, K.W., Kolsky, H., An Investigation of the dynamic elastic properties of some high polymers, *Proceedings of the Physical Society*, vol. 62, 111-121, 1948.
- [18] Hillier, K.W., A Method of measuring some dynamic elastic constants and its application to the study of high polymers, *Proceedings of the Physical Society*, vol. 62, 701-713, 1949.
- [19] Hillström, L., Mossberg, M., Lundberg, B., Identification of complex modulus from measured strains on an axially impacted bar using least squares, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 230(3), 689-707, 2000.
- [20] Hora, P., Červená, O., Determination of Lamb wave dispersion curves by means of Fourier transform, *Applied and Computational Mechanics*, vol. 6, 5-16, 2012.
- [21] Hopkinson, B., A Method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosive or by the impact of bullets, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, a 213, 1914.
- [22] Hui, D., Dutta, P.K., A new concept of shock mitigation by impedance-graded materials, *Composites: Part B*, vol. 42, 2181-2184, 2011.
- [23] Humen, V., Potesil, A., Pulse method used to identify material properties in linear viscoelastic media, *International Journal of Impact Engineering*, vol. 13(1), 85-98, 1993.
- [24] Kolman, R., Cho, S.S., Gonzalez, J.G., Park, K.C., An Explicit time scheme with local time stepping for one-dimensional wave and impact problems in layered and functionally graded materials, In: *Proceedings of COMPDYN*, 2017.
- [25] Kolsky, H., *Stress waves in solids*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [26] Lakes, R., *Viscoelastic solids*, CRC Press, Wisconsin, 1999.
- [27] Lundberg, B., Blanc, R.H., Determination of mechanical material properties from the two-point response of an impacted linearly viscoelastic rod specimen, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 126(1), 97-108, 1988.
- [28] Macioce, P., Viscoelastic damping 101, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 37, 8-10, 2003
- [29] Madigosky, W.M., Lee, G.F., Improved resonance technique for materials characterization, *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 73(4), 1374-1377, 1983.

-
- [30] Matlab, version 9.7.0.1190202 (R2019b), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc, 2018.
- [31] Mažeika, L., Draudvilienė, L., Žukauskas, E., Influence of the dispersion on measurement of phase and group velocities of Lamb waves, *Ultrasound*, vol. 64(4), 18-21, 2009.
- [32] Miniature Impact Hammer - Type 8204 product data, Brüel & Kjær, 20. 5. 2022.
URL: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2077.ashx>
- [33] MSC.Marc: User's guide volume B, MSC Software HmbH, Mnichov, 2016.
- [34] Norris, D.M., Young, W.C., Complex-modulus measurement by longitudinal vibration testing, *Experimental Mechanics*, vol. 10, 93–96, 1970.
- [35] Piezoelectric Accelerometer Miniature DeltaTron® Accelerometers - Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003 product data, Brüel & Kjær, 20. 5. 2022.
URL: <https://www.bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2071.ashx>
- [36] Pírko Z., Veit J., Laplaceova transformace, SNTL/ALFA, Bratislava, 1972.
- [37] Pritz, T., Transfer function method for investigating the complex modulus of acoustic materials: rod-like specimen, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 81(3), 359-376, 1982.
- [38] Roylance, D., Engineering viscoelasticity, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA 02139, 2001.
- [39] Sobotka, Z., Reologie hmot a konstrukcí, Studie ČSAV, Academia, Praha, 1981.
- [40] Šulda, J., Šíření napěťových vln v tenkých viskoelastických tyčích, Bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2020.
- [41] Vatul'yan, A.O., Yurlov, V.O., On the dispersion relations for an inhomogeneous waveguide with attenuation, *Mechanics of Solids*, vol. 51(5), 576-582, 2016.
- [42] Wang, L.L., Foundations of stress waves, Elsevier, Kidlington, 2007.
- [43] Zhao, H., Gary, G., A three dimensional analytical solution of the longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar. Application to experimental techniques, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 43(8), 1335-1348, 1995.
- [44] Zhao, H., Gary, G., Klepaczko, J.R., On the use of a viscoelastic split Hopkinson pressure bar, *International Journal of Impact Engineering*, vol. 19(4), 319-330, 1997.

A Specifikace přístrojů a materiálů

A.1 Produktový list akcelerometru [35]

Piezoelectric Accelerometer Miniature DeltaTron[®] Accelerometers — Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003

FEATURES AND USES

- Hermetically sealed
- Low weight
- Low-impedance output
- Measurements in confined spaces
- Measurements on delicate structures
- 360° orientation (Types 4519-002 and 4519-003)
- High frequency range (> 20 kHz)

Description

Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003 are piezoelectric Shear accelerometers with integral electronics. The transducers feature an M3 side connector and are hermetically sealed for high resistance to harsh environments. The transducers have a high resolution, giving an excellent signal-to-noise ratio.

Two types have been designed for mounting on the object by means of an integrated M3 threaded stud and two types for adhesive mounting with 360° freedom of orientation.

Characteristics

The piezoelectric accelerometers feature built-in preamplifiers. The sensitivity is expressed in terms of voltage per unit acceleration (mV/g).

In the Shear design, the piezoelectric element undergoes shear deformation as in the DeltaShear[®] design. Two rectangular slices of piezoelectric material are arranged on each side of a rectangular centre post. This design gives a high degree of linearity, and excellent immunity to base bending and temperature fluctuations. The signal is collected and amplified in the built-in amplifier. The housing material is titanium.

Calibration

The transducers are individually calibrated using state-of-the-art random FFT technology, providing an 800-point high-resolution calibration (magnitude and phase), ultimately

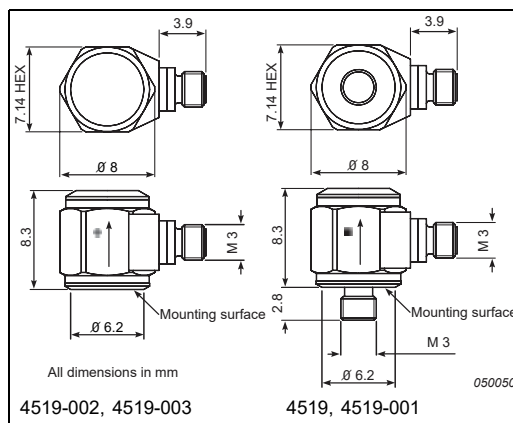


giving a unique characterisation and securing the integrity of the vibration measurement.

The sensitivity given on the calibration chart has been measured at 159.2 Hz with a 95% confidence level, using a coverage factor $k = 2$.

Recommended Mounting

Due to the small size, careful mounting is required to ensure correct operation over the full frequency range of the accelerometer.

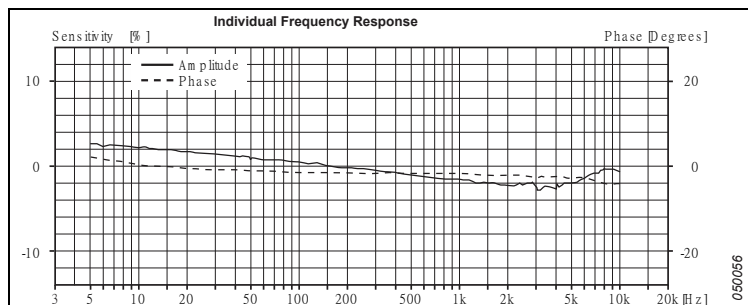


Specifications – Miniature DeltaTron Accelerometers Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003

	Units	4519	4519-001	4519-002	4519-003
Dynamic Characteristics					
Voltage Sensitivity (@ 160Hz)	mV/g	10 ±10%	100 ±10%	10 ±10%	100 ±10%
Measuring Range	g	±500	±50	±500	±50
Frequency Response		See typical amplitude response			
Mounted Resonance Frequency	kHz	45			
Amplitude Response ±10% (typical) ^a	Hz	0.5 to 20000			
Residual Noise	mg	2.0	0.9	2.0	0.9
Transverse Sensitivity	%	<5			
Electrical Characteristics					
Output Impedance	Ω	<100			
DC Output At room temperature	V	12 ±1			
Bias Voltage In specified temp. range	V	8 to 16			
Power Supply	mA	2 to 20			
Start-up Time	s	<1			
Grounding		Case grounded			
Environmental Characteristics					
Temperature Range	°C	-51 to +121	-51 to +100	-51 to +121	-51 to +100
	°F	-60 to +250	-60 to +212	-60 to +250	-60 to +212
Humidity		Hermetically sealed			
Max. Operational Shock (peak)	g pk	5000			
Base Strain Sensitivity	Equiv. g/μ strain	0.007			
Thermal Sensitivity	Equiv. %/°C (%/°F)	0.2 (0.1)			
Physical Characteristics					
Dimensions		See outline drawing			
Weight	gram (oz.)	1.6 (0.06)		1.5 (0.05)	
Case Material		Titanium			
Connector		M3			
Mounting		M3 Stud		Adhesive	
Max. Mounting Torque	Nm (lb. in.)	1.7 (15)		-	

a. Individual frequency response calibration up to 10 kHz

All values are typical at 25°C (77°F) unless measurement uncertainty is specified



COMPLIANCE WITH STANDARDS

CE Compliance with EMC Directive and Low Voltage Directive of the EU

Compliance with the EMC requirements of Australia and New Zealand

TRADEMARKS

Teflon is a registered trademark of E.I. du Pont de Nemours and Company.

Brüel & Kjær reserves the right to change specifications and accessories without notice

HEADQUARTERS: DK-2850 Nærum · Denmark · Telephone: +45 4580 0500
Fax: +45 4580 1405 · www.bksv.com · info@bksv.com

Australia (+61) 2 9889-8888 · Austria (+43) 1 865 74 00 · Brazil (+55) 11 5188-8161
Canada (+1) 514 695-8225 · China (+86) 10 680 29006 · Czech Republic (+420) 2 6702 1100
Finland (+358) 9-755 950 · France (+33) 1 69 90 71 00 · Germany (+49) 421 17 87 0
Hong Kong (+852) 2548 7486 · Hungary (+36) 1 215 83 05 · Ireland (+353) 1 807 4083
Italy (+39) 0257 68061 · Japan (+81) 3 5715 1612 · Republic of Korea (+82) 2 3473 0605
Netherlands (+31) 318 55 9290 · Norway (+47) 66 77 11 55 · Poland (+48) 22 816 75 56
Portugal (+351) 21 4169 040 · Singapore (+65) 377 4512 · Slovak Republic (+421) 25 443 0701
Spain (+34) 91 659 0820 · Sweden (+46) 33 225 622 · Switzerland (+41) 44 8807 035
Taiwan (+886) 2 2502 7255 · United Kingdom (+44) 14 38 739 000 · USA (+1) 800 332 2040

Local representatives and service organisations worldwide

Ordering Information

All versions of Type 4519 include the following accessories:

- Carrying box
- Calibration chart

OPTIONAL ACCESSORIES*

- AO-0641: PVC insulated flexible cable, M3 to BNC, 5 m (16.4 ft), -5 to +70°C (+23 to +158°F)
- AO-0283: 260°C Teflon® low-noise cable, 10-32 UNF/M3, length 1.2 m (4 ft)
- AO-0339: Flexible low-noise cable, 10-32 UNF/M3, 1.2 m (4 ft)
- UA-0186: Extension connector for 10-32 UNF cables, set of 25
- JP-0145: 10-32 UNF to BNC connector adaptor
- QA-0041: Tap for M3 thread
- QS-0007: Tube of cyanoacrylate adhesive
- YJ-0216: Beeswax for mounting
- DB-1425: Adaptor 10-32 UNF to M3 hole
- YO-0073: 25 · adhesive mounting disc; length 5 mm

SERVICE

- 4519-CAF: Miniature IEPE Accelerometer, Accredited Calibration
- 4519-CAI: Miniature IEPE Accelerometer, Accredited Calibration Performed as initial
- 4519-CTF: Miniature IEPE Accelerometer, Traceable Calibration
- 4519-CTI: Miniature IEPE Accelerometer, Traceable Calibration Performed as initial
- 4519-EW1: Miniature IEPE Accelerometer, Extended Warranty, one year extension

* Additional accessories and cables are available (see www.bksv.com)

Brüel & Kjær

A.2 Produktový list rázového kladívka [32]

Miniature Impact Hammer — Type 8204

USES

- Impact-force measurements on small structures
- Measurement of frequency response functions using impact excitation techniques
- As part of a dynamic structural testing system for modal analysis and the prediction of structural response

FEATURES

- Compact size and low weight
- Negligible changes to dynamic properties of test structure
- Aluminium shaft to reduce occurrence of double impacts
- DeltaTron® (low-impedance) output

Description

The piezoelectric force transducer is designed to excite and measure impact forces on small structures such as disc-drive heads, circuit boards, turbine blades and similar small structures. An accelerometer (or laser velocity transducer) is used to measure the response of the structure. By using a multichannel FFT analyzer, such as the PULSE™ system, the frequency response function and mode shapes of the test structure can be derived.

Characteristics

Type 8204 has built-in electronics. The sensitivity is expressed in terms of voltage per unit force (mV/N or mV/lbf).



The integral impact tip is made of stainless steel, which combined with the very low mass gives a high resonance frequency. The frequency response of the impact and decay of the impulse can be adjusted by applying tape to the impact area or using the supplied head extender.

The handle has been designed for optimal control of impact and thus reduces the risk of “double hits”.

Calibration

The transducer is supplied with an individual calibration of its sensitivity.

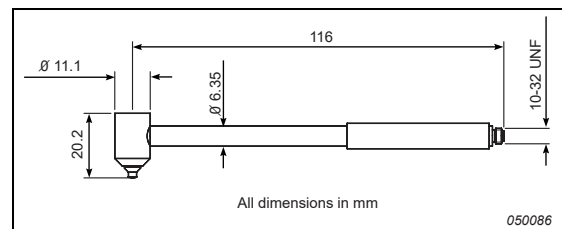
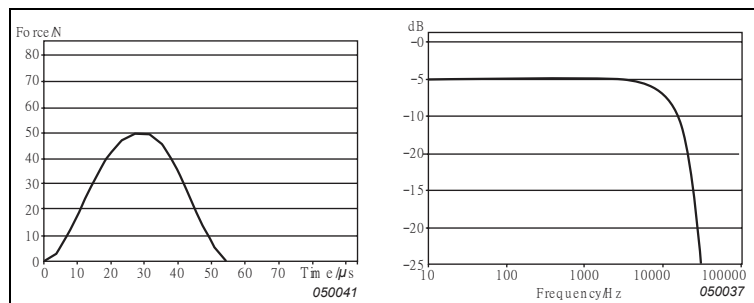


Fig. 1

Impulse shapes for the hammer tip as a function of time showing the pulse decay and peak value (left); force spectrum of an impact on an aluminium plate (right)



Specifications – Miniature Impact Hammer Type 8204

	Units	8204
Dynamic Characteristics		
Voltage Sensitivity (typical)	mV/N (mV/lbf)	22.7 (100)
Full Scale Force Range Compression	N (lbf)	220 (50)
Linear Error at Full Scale	% full scale	<±2
Electrical Characteristics		
Full Scale Output Voltage	V	±5
DC Output Bias Voltage	V	+7 to +12
Output Impedance	Ω	<100
Power Supply	mA	2 to 20
Voltage Range	V DC	+18 to +30
Environmental Characteristics		
Temperature Range	°C (°F)	-73 to +60 (-100 to +140)
Max. Force Compression	N (lbf)	890 (200)
Physical Characteristics		
Dimensions		See outline drawing
Overall Length	mm (in.)	122 (4.8)
Effective Seismic Mass without Head Extender	gram (oz.)	2 (0.07)
Effective Seismic Mass with Head Extender	gram (oz.)	5.5 (0.2)
Impact Tip Material		17-4 PH stainless steel
Connector		10-32 UNF

All values typical at 25°C (77°F) unless measurement uncertainty is specified

COMPLIANCE WITH STANDARDS

 Compliance with EMC Directive and Low Voltage Directive of the EU

Compliance with the EMC requirements of Australia and New Zealand

Ordering Information

Type 8204 includes the following accessories:

- Carrying Box
- Calibration Chart
- Head Extender, 3.5 gram (0.123 oz.)
- PVC Insulated Cable, 10-32 UNF to BNC Connector, 5 m (16.4 ft)

OPTIONAL ACCESSORIES*

- AO 0406: Double-screened Low-noise Cable, 10-32 UNF to BNC Connector via JP 0145, 5 m (16.4 ft)
- AO 0531: PVC Insulated Cable, 10-32 UNF to BNC Connector, 5 m (16.4 ft)

- AO 0463G: 70°C, Single Screen Cable, 10-32 UNF to 10-32 UNF, length 5 m (16.4 ft.)
- JP 0145: Plug Adaptor, BNC/10-32 UNF
- JJ 0032: Extension Connector 10-32 UNF
- ZZ 0245: In-line TEDS Adaptor 10-32 UNF to 10-32 UNF

* Additional accessories, cables and services are available (see www.bksv.com)

Brüel & Kjær reserves the right to change specifications and accessories without notice

HEADQUARTERS: DK-2850 Nærum · Denmark · Telephone: +45 4580 0500 · Fax: +45 4580 1405
www.bksv.com · info@bksv.com

Australia (+61) 2 9889-8888 · Austria (+43) 1 865 74 00 · Brazil (+55) 11 5188-8166 · Canada (+1) 514 695-8225
 China (+86) 10 680 29906 · Czech Republic (+420) 2 6702 1100 · Finland (+358) 9-521 300 · France (+33) 1 69 90 71 00
 Germany (+49) 421 17 87 0 · Hong Kong (+852) 2548 7486 · Hungary (+36) 1 215 83 05 · Ireland (+353) 1 807 4083
 Italy (+39) 0257 68061 · Japan (+81) 3 57 15 16 12 · Korea (+82) 2 3473 0605 · Netherlands (+31) 318 55 9290
 Norway (+47) 66 77 11 55 · Poland (+48) 22 816 75 56 · Portugal (+351) 21 47 11 4 53 · Singapore (+65) 377 4512
 Slovak Republic (+421) 25 443 0701 · Spain (+34) 91 659 0820 · Sweden (+46) 8 449 8600
 Switzerland (+41) 44 880 7035 · Taiwan (+886) 2 2502 7255 · United Kingdom (+44) 14 38 739 000
 USA (+1) 800 332 2040 · Local representatives and service organisations worldwide

Brüel & Kjær 

A.3 Materiálový list PET [13]

ERTALYTE

POLYETYLEN TEREFALÁT (PET)

EPP Plasty a.s.

Vídeňská 99, Brno 639 00

tel.: 702 166 076

www.eppplasty.cz

Díky svým specifickým vlastnostem je čistý PET velmi vhodný pro výrobu mechanicky přesných částí, které jsou určeny pro velké zatížení a jsou vystaveny opotřebení.

ISO 9001

Fyzikální vlastnosti (indikativní hodnoty ▶)

VLASTNOSTI	Zkoušeno: ISO / IEC	Jednotky	Hodnoty
Barva	—	—	bílá černá
Hustota	1183	g/cm ³	1,39
Nasákavost vodou:			
- po 24/96 hod, ponoření ve vodě 23°C (1)	62	mg	6 / 13
	62	%	0,07 / 0,16
- na vzduchu při 23°C a 50% relativní vlhkosti	—	%	0,25
- při ponoření ve vodě 23°C	—	%	0,50
Teplotné vlastnosti (2)			
Teplota tání	—	°C	255
Teplota zesklenní (3)	—	°C	—
Teplotná vodivost při 23°C	—	W / (K.m)	0,29
Koeficient lineární teplotné roztažnosti:			
- průměrná hodnota mezi 23 - 60°C	—	m/(m.K)	60.10 ⁻⁶
- průměrná hodnota mezi 23 - 100°C	—	m/(m.K)	80.10 ⁻⁶
Teplota deformace při zatížení:			
- metoda A: 1,8 MPa	+	75	°C
Maximální provozní teplota na vzduchu:			
- krátkodobá (4)	—	°C	160
- trvalá: po dobu 5000 / 20000 h (5)	—	°C	115 / 100
Minimální provozní teplota (6)	—	°C	-20
Hoflavost (7)			
- "kyslíkový index"	4589	%	25
- UL 94 (tloušťka vzorku 1,6 mm)	—	—	HB / HB
Mechanické vlastnosti při 23°C (8)			
Zkouška tahem (9):			
- mez kluzu / napětí při přetržení (10)	+	527	MPa
	++	527	MPa
		527	%
- deformace při přetržení (10)	+	527	%
	++	527	%
- modul pružnosti (11)	+	527	MPa
	++	527	MPa
Zkouška tlakem (12):			
- tlak, jenž způsobí 1/ 2 / 5 % deformaci (11)	+	604	MPa
Zkouška odolnosti proti tečení v tlaku (9):			
- tlak, jenž způsobí 1% deformaci za 1000 hod, ($\sigma_{1/1000}$)	+	899	MPa
	++	899	MPa
Rázová houževnatost - Charpy (13)	+	179/1eU	kJ/m ²
Vrubová houževnatost - Charpy	+	179/1eA	kJ/m ²
Vrubová houževnatost - Izod	+	180/2A	kJ/m ²
	++	180/2A	kJ/m ²
Tvrdost (metoda kuličkou) (14)		2039-1	N/mm ²
Tvrdost podle Rockwella (14)		2039-2	—
Elektrické vlastnosti při 23°C			
Elektrická pevnost (15)	+	(60243)	kV/mm
	++	(60243)	kV/mm
Vnitřní odpor	+	(60093)	$\Omega \cdot \text{cm}$
	++	(60093)	$\Omega \cdot \text{cm}$
Povrchový odpor	+	(60093)	Ω
	++	(60093)	Ω
Relativní permitivita ϵ_r - při 100 Hz	+	(60250)	—
	++	(60250)	—
Relativní permitivita ϵ_r - při 1 Hz	+	(60250)	—
	++	(60250)	—
Disipační činitel tan δ : - při 100 Hz	+	(60250)	—
	++	(60250)	—
Disipační činitel tan δ : - při 1 Hz	+	(60250)	—
	++	(60250)	—
Odolnost proti plazivým proudům (CTI)	+	(60112)	—
	++	(60112)	—

Výrobní program:

Tyče: Ø 10 - 210 mm - Fólie/Desky: tloušťka 2 - 100 mm - Trubky: Ø 20 - 200 mm

Poznámky:

- + : měřeno na suchých vzorcích
 ++: měřeno na vzorcích v rovnováze se standardní atmosférou: 23°C, rel. vlhkost 50% (většinou odvozeno z literatury)
 (1) Podle metody 1 normy ISO 62 a provedeno na discích Ø 50 x 3 mm.
 (2) Uvedené hodnoty pro tyto vlastnosti jsou většinou odvozeny z údajů uváděných výrobcí surovin nebo jiné literatury.
 (3) Hodnoty pro tuto vlastnost jsou uváděny pouze u amorfních materiálů. Nejsou uváděny u materiálů semikrystalických.
 (4) Pouze pro krátkodobé zatížení (několik hodin) v situacích, kdy materiál je zatížen jen velmi málo nebo vůbec.
 (5) Po uplynutí této doby dochází ke snížení tahové pevnosti asi na 50% původní hodnoty. Uvedené teploty vycházejí z probíhající teplotné oxidační degradace, která způsobuje změnu vlastností. Stejně jako u všech ostatních termoplastů závisí maximální přípustná provozní teplota v mnoha případech zejména na době trvání a rozsahu hodnot mechanických napětí (hlavně rázů), jímž je materiál vystaven.
 (6) Rázová houževnatost klesá se snižující se provozní teplotou. Minimální přípustná provozní teplota je určena prakticky rozsahem, v němž je materiál vystaven rázům. Uvedené hodnoty vycházejí z nepříznivých rázových podmínek a v důsledku toho nemusí být pokládány za absolutní použitelné limity.
 (7) Tyto odhadované hodnoty jsou většinou odvozeny z údajů uváděných dodavateli surovin. Nemají vyjadřovat rizika, která hrozí ve skutečných podmínkách požárního ohrožení. Pro tyto materiály neexistují "žluté karty" dle specifikace UL 94.
 (8) Hodnoty uvedené pro tyto vlastnosti suchých materiálů (+) jsou většinou průměrné hodnoty odvozené ze zkoušek provedených na vzorcích obrobeků z tyčí o Ø 40 - 60 mm. U materiálů ERTACETAL, ERTALYTE a PC 1000 můžeme vzhledem k jejich velmi nízké absorpci vody uvažovat, že hodnoty pro suché materiály (+) jsou stejné jako pro nasycené materiály (++)
 (9) Zkušební rychlost: Typ 1 B.
 (10) Zkušební rychlost: 20 mm/min. (5mm/min pro ERTALON 66-GF30, ERTACETAL H-TF a ERTALYTE TX).
 (11) Zkušební rychlost: 1 mm/min.
 (12) Zkušební vzorky: válečky Ø 12 x 30 mm.
 (13) Použité kyvadlo : 15 J.
 (14) Zkušební vzorky tloušťky 10 mm.
 (15) Elektrody : 25/75 koaxiální válečkové, v transformátorovém oleji podle IEC 60296, zkušební vzorky o síle 1 mm, přírodní (bílé) materiál. Je důležité si uvědomit, že dielektrická pevnost černých materiálů (ERTALON 6SA, ERTALON 66 SA, ERTACETAL a ERTALYTE) může dosahovat pouze 50% hodnoty naměřené u přírodních (bílých) materiálů.
 (16) Uvedené hodnoty neplatí pro fólie ERTALYTE.

▶ Hodnoty uvedené v tabulce slouží jako pomůcka pro volbu materiálu, popisují běžný rozsah vlastností materiálů, nejsou garantovány a neměly by být použity ke stanovení limitů materiálů nebo použity samostatně jako základ konstruktérského návrhu. ERTALON 66-GF30 je anizotropní materiál, a proto se jeho vlastnosti liší ve směru rovnoběžném se skelnými vlákny od směru kolmého na vlákna.

B Identifikované parametry ZSVT

	i	E_i [Pa]	λ_i [Pas]	E_E [Pa]
PP	1	$3,0573 \cdot 10^7$	$1,7735 \cdot 10^8$	$7,1668 \cdot 10^7$
	2	$5,8914 \cdot 10^7$	$8,2840 \cdot 10^8$	
	3	$3,9229 \cdot 10^7$	$4,4313 \cdot 10^8$	
	4	$1,9757 \cdot 10^8$	$3,9096 \cdot 10^4$	
	5	$4,0584 \cdot 10^7$	$1,8401 \cdot 10^8$	
	6	$4,3613 \cdot 10^7$	$1,9347 \cdot 10^8$	
	7	$3,4422 \cdot 10^7$	$9,6667 \cdot 10^8$	
	8	$4,0534 \cdot 10^8$	$1,1514 \cdot 10^4$	
	9	$4,7144 \cdot 10^7$	$3,1512 \cdot 10^8$	
	10	$1,7943 \cdot 10^9$	$7,2747 \cdot 10^6$	
PVC	1	$9,1924 \cdot 10^7$	$3,5866 \cdot 10^8$	$5,1371 \cdot 10^7$
	2	$1,4743 \cdot 10^7$	$4,2116 \cdot 10^8$	
	3	$3,3444 \cdot 10^9$	$4,2409 \cdot 10^6$	
	4	$8,1684 \cdot 10^7$	$3,7949 \cdot 10^8$	
	5	$4,6740 \cdot 10^7$	$2,4100 \cdot 10^8$	
	6	$1,2410 \cdot 10^8$	$3,9841 \cdot 10^3$	
	7	$4,0372 \cdot 10^7$	$1,5539 \cdot 10^8$	
	8	$1,2219 \cdot 10^8$	$5,3071 \cdot 10^8$	
	9	$4,3844 \cdot 10^7$	$1,4972 \cdot 10^8$	
	10	$7,4930 \cdot 10^7$	$5,1123 \cdot 10^8$	
PET	1	$9,5147 \cdot 10^7$	$1,6418 \cdot 10^5$	$2,2074 \cdot 10^7$
	2	$6,1186 \cdot 10^7$	$7,9129 \cdot 10^3$	
	3	$1,6501 \cdot 10^8$	$5,9572 \cdot 10^5$	
	4	$7,3337 \cdot 10^7$	$1,1126 \cdot 10^5$	
	5	$1,1043 \cdot 10^8$	$2,4100 \cdot 10^3$	
	6	$1,3867 \cdot 10^8$	$4,4784 \cdot 10^5$	
	7	$1,2402 \cdot 10^8$	$3,4120 \cdot 10^5$	
	8	$1,0345 \cdot 10^8$	$2,2373 \cdot 10^5$	
	9	$1,6218 \cdot 10^8$	$5,7811 \cdot 10^5$	
	10	$1,0765 \cdot 10^8$	$2,3607 \cdot 10^5$	
PLA	1	$3,0141 \cdot 10^8$	$5,0994 \cdot 10^8$	$3,0384 \cdot 10^8$
	2	$2,9972 \cdot 10^8$	$5,1639 \cdot 10^8$	
	3	$2,9799 \cdot 10^8$	$5,3951 \cdot 10^8$	
	4	$2,9897 \cdot 10^8$	$5,3793 \cdot 10^8$	
	5	$3,0351 \cdot 10^8$	$5,1273 \cdot 10^8$	
	6	$3,0110 \cdot 10^8$	$4,9453 \cdot 10^8$	
	7	$3,0009 \cdot 10^8$	$5,0554 \cdot 10^8$	
	8	$3,0198 \cdot 10^8$	$4,9634 \cdot 10^8$	
	9	$3,0232 \cdot 10^8$	$5,1272 \cdot 10^8$	
	10	$2,1424 \cdot 10^8$	$4,0774 \cdot 10^3$	

Tabulka 4: Identifikované parametry vybraných materiálů pro ZSVT a $n = 10$