ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

KATEDRA MECHANIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

STANOVENÍ POČÁTEČNÍ PLOCHY PLASTICITY PRO MATERIÁL DP1000

Adam Hybler

31. května 2022

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Adam HYBLER**
Osobní číslo:	**A19B0642P**
Studijní program:	**B3947 Počítačové modelování v technice**
Studijní obor:	**Počítačové modelování**
Téma práce:	**Stanovení počáteční plochy plasticity pro materiál DP1000**
Zadávající katedra:	**Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

1. Analyzovat současný stav problematiky.
2. Zpracovat experimentálně získaná data biaxiálních tahových testů realizovaných pro materiál DP1000 a na základě nich stanovit napětí na mezi kluzu a křivky napětí-deformace. Vyhodnocené křivky napětí-deformace následně použít ke stanovení počáteční plochy plasticity materiálu.
3. Provést numerické simulace biaxiálních tahových testů pro materiál DP1000.
4. Stanovit počáteční plochu plasticity materiálu DP1000 na základě numerických simulací s využitím Misesovy podmínky plasticity a porovnat výsledky s experimentálně stanovenou plochou plasticity.

Rozsah bakalářské práce: **20 – 40 stran A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. Banabic, D., Sheet metal forming processes – Constitutive modelling and numerical simulation, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
2. Plánička, F., Kuliš, Z., Základy teorie plasticity. ČVUT, Praha, 2004.
3. Servít, R., Doležalová, E., Crha, M., Teorie pružnosti a plasticity I. SNTL, Praha, 1981.
4. Servít, R., Drahonovský, Z., Šejnoha, J., Fufner, V., Teorie pružnosti a plasticity II. SNTL, Praha, 1984.
5. ČSN ISO 16842, Kovové materiály – Plechy a pásy – Metoda zkoušení dvouosým tahem využívající zkušební těleso ve tvaru kříže. Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2015.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Zajíček, Ph.D.**
Katedra mechaniky

Datum zadání bakalářské práce: **18. října 2021**
Termín odevzdání bakalářské práce: **31. května 2022**

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
L.S.

Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan

Doc. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 18. října 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl použitou literaturu a všechny prameny, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 31. 5. 2022 Adam Hybler

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu práce Ing. Martinu Zajíčkovi, Ph.D. za ochotu věnovat mi čas při tvorbě této práce, za trpělivost projevenou v těžkých chvílích a za mnoho užitečných rad a postřehů, díky kterým vedla tato práce k úspěšnému konci. Dále bych rád poděkoval firmě COMTES FHT a.s. za umožnění provedení veškerých experimentů a nabídky brigády úzce spjaté s touto prací. Jmenovitě pak pánům Ing. Miroslavu Urbánkovi, Ph.D. a Ing. Antonínu Prantlovi, CSc. za podmětné rady a připomínky a panu Václavu Brunátovi za pomoc při experimentech. Také bych rád poděkoval rodině za podporu při mém dosavadním studiu.

Abstrakt

V rámci této práce bylo cílem určení meze kluzu a počáteční plochy plasticity dvoufázové vysokopevnostní ocele DP1000 pro firmu COMTES FHT a.s. Byla určena mez kluzu materiálu DP1000 za pomoci jednoosých tahových zkoušek. To bylo učiněno za využití metody lineární regrese v oblasti navržené třemi různými přístupy, závislostí oblasti na mezi pevnosti materiálu, závislostí na mezi kluzu a pomocí dvou různých způsobů výpočtu měrné práce. Tyto přístupy byly navzájem porovnány a energetický přístup byl vyhodnocen jako nejvíce vhodný pro tuto práci. Druhým hlavním cílem této práce pak bylo určit plochu plasticity za využití numerických simulací a experimentálních dat biaxiálních tahových zkoušek provedených dle normy ČSN ISO 16842. Pro numerické simulace byl vytvořen MKP model s předpokladem isotropie materiálu a s uvažováním von Misesovi plochy plasticity. Dosažené výsledky byly následně porovnány s experimentálně získanými daty a byl učiněn závěr, že materiál nevykazuje isotropní chování a plocha plasticity se neshoduje s von Misesovým kritériem. U experimentálních dat byla zjištěna značná závislost plochy plasticity na šarži materiálu a citlivost na určování horní hranice elastické oblasti materiálu. Při průběhu zkoušek byla deformace vyhodnocována za využití optického systému a kvůli skutečnosti, že materiál dosahoval pouze malých deformací, bylo nutno data v bodech daných normou aproximovat. Tyto aproximace však byly časově značně náročné z důvodu individuálního nastavení parametru aproximace a byla proto navržena alternativní varianta měření deformací, která tuto potřebu eliminovala.

Abstract

The aim of this work was determination of yield strength and yield surface of dual-phase high strength steel DP1000 for company COMTES FHT a.s. The tensile yield strength of the material DP1000 was determined by uniaxial tensile tests. This was done by using linear regression in an region suggested by three different approaches, by dependence of the region on tensile strength of the material, its yield strength and by two different ways of calculation of deformation work. These approaches were compared and approach using deformation work was evaluated as the most suitable for this thesis. The second main aim of this work was to determine the yield surface with the means of numerical modeling and experimental data from biaxial tensile tests, carried out according to the standard ČSN ISO 16842. For the numerical simulations, a FEM model was created with the assumption of isotrophy of the material and with the assumption of von Mises yield criterion. The results were compared to experimental data and a conclusion was made, that the material does not show isotropic behaviour and the yield surface does not meet von Mises yield criterion. A strong dependence of the yield surface on a batch of the material and sensitivity to determination of the upper bound of linear elastic area of the material was discovered. During the tests, an optical metric system was used and because of the small deformations of the material, it was necessary to approximate the data measured by the method required in the standard. However these approximations were very time consuming because of the need of individual setting of parameter of approximation and therefore a new alternative variant of measuring deformation, which eliminated this need, was proposed.

Obsah

Seznam použitých symbolů **1**

1 Úvod **3**

2 Současný stav problematiky **4**

3 Teoretické pozadí **6**
3.1 Napjatost 6
3.2 Deformace 8
3.2.1 Malé deformace 9
3.2.2 Velké deformace 10
3.3 Základy plasticity při jednoosém namáhání 10
3.4 Měrná deformační energie 12
3.5 Plocha plasticity, von Misesova podmínka plasticity 13

4 Stanovení meze kluzu **16**
4.1 Smluvní mez kluzu materiálu DP1000 16

5 Určení plochy plasticity pomocí biaxiálního namáhání zkušebního tělesa ve tvaru kříže **20**
5.1 Průběh biaxiálních tahových zkoušek 20
5.2 Určení isočáry plastické práce 21
5.3 Zjištění plochy plasticity pomocí numerických simulací 23
5.3.1 Výpočtový model 23
5.3.2 Interpretace výsledků 24
5.4 Experimentální zjištění plochy plasticity 27
5.5 Vliv šarže materiálu 30
5.6 Navrhované úpravy měření 33

6 Závěr **38**

Příloha A - Aproximace křivek $\varepsilon(t)$ získaných v bodech **39**

Seznam použitých symbolů		
Použitý symbol	Jednotka	Název
$\vec{F}$	[N]	Síla
$\vec{p}$	[N/mm]	Spojité zatížení
A	[mm^2]	Velikost plochy průřezu
$\sigma_{x,y,z}$	[MPa]	Normálové napětí
$\tau_{x,y,z}$	[MPa]	Smykové napětí
$\boldsymbol{\sigma}$	[MPa]	Cauchyho tenzor napětí
$\boldsymbol{I}$	[-]	Jednotková matice
$I_{\sigma 1}$	[MPa]	První invariant tenzoru napětí
$I_{\sigma 2}$	[MPa^2]	Druhý invariant tenzoru napětí
$I_{\sigma 3}$	[MPa^3]	Třetí invariant tenzoru napětí
$\sigma_j \quad (j = 1, 2, 3)$	[MPa]	Hlavní napětí
$\boldsymbol{K_\sigma}$	[MPa]	Kulový tenzor napětí
σ_s	[MPa]	Střední (hydrostatické) napětí
$\boldsymbol{D_\sigma}$	[MPa]	Deviátor napětí
$J_{\sigma 1}$	[MPa]	První invariant deviátoru napětí
$J_{\sigma 2}$	[MPa^2]	Druhý invariant deviátoru napětí
σ_i	[MPa]	Efektivní napětí
$\vec{u}$	[-]	Posuv bodu
$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$	[-]	Jednotkové vektory kartézského souřadnicového systému
$\boldsymbol{u_{i,j}}$	[-]	Tenzor posuvů
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	[-]	Cauchyho tenzor deformace
$\boldsymbol{\omega}$	[-]	Tenzor rotace
$\varepsilon_{x,y,z}$	[-]	Normálová deformace
$\gamma_{x,y,z}$	[-]	Zkos
$J_{\varepsilon 2}$	[-]	Druhý invariant deviátoru deformace
ε_i	[-]	Intenzita deformace
ν	[-]	Poissonovo číslo
ε_{ij}	[-]	Složky Greenova tenzoru deformace
A_0	[mm^2]	Velikost počátečního průřezu
l	[mm]	Délka
l_0	[mm]	Počáteční délka
Δl	[mm]	Prodloužení
$\hat{\sigma}$	[MPa]	Smluvní napětí
$\hat{\varepsilon}$	[-]	Poměrné prodloužení (jmenovitá deformace)
V_0	[mm^3]	Počáteční objem
ΔV	[mm^3]	Změna objemu
σ	[MPa]	Skutečné napětí
ε	[-]	Přirozená deformace
ε_e	[-]	Elastická deformace
ε_p	[-]	Plastická deformace
E	[MPa]	Youngův modul (modul pružnosti v tahu)
σ_k	[MPa]	Mez kluzu

$R_{p0,2}$	[MPa]	Smluvní mez kluzu
λ	[MPa]	Měrná deformační energie
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$	[-]	Vektor deformace
$\{\boldsymbol{\sigma}\}$	[MPa]	Vektor napětí
λ_0	[MPa]	Měrná deformační energie na změnu objemu
$\lambda_t v$	[MPa]	Měrná deformační energie na změnu tvaru
$f(\boldsymbol{\sigma})$	[-]	Funkce plasticity
t	[s]	Čas
ε_j	[-]	Přirozená deformace v daném časovém okamžiku
σ_j	[MPa]	Skutečné napětí v daném časovém okamžiku
$\overline{\varepsilon_j}$	[-]	Průměrná hodnota přirozené deformace
$\overline{\sigma_j}$	[-]	Průměrná hodnota skutečného napětí
k	[-]	Počet zkoumaných bodů na křivce
σ_{min}, σ_{max}	[MPa]	Minimální a maximální hodnota napětí lineární elastické oblasti
W_{tw}	[MPa]	"Trojúhelníková" práce
W_{iw}	[MPa]	Inkrementální práce
ξ	[-]	Pracovní poměr
ξ_{limit}	[-]	Hodnota pracovního poměru pro horní mez lineární elastické oblasti
ε_{max}	[-]	Hraniční hodnota deformace lineární elastické oblasti
B	[mm]	Šířka ramene zkušebního tělesa ve tvaru kříže
ε_{p0}	[-]	Zvolená hodnota plastické deformace v jednoosém tahu pro vykreslení isočáry plastické práce
W_0	[MPa]	Plastická práce
W_x, W_y	[MPa]	Složky plastické práce pro směry x a y
C_x, C_y	[MPa]	Sklony elastické části křivek, které jsou dané vztahy $\sigma_x(\varepsilon_x)$ a $\sigma_y(\varepsilon_y)$, měřené při zkoušce biaxiálním tahem
LE	[-]	Přirozená deformace elementu v prostředí Abaqus
S	[MPa]	Skutečné napětí elementu v prostředí Abaqus
PE	[-]	Přirozená plastická deformace elementu v prostředí Abaqus
EPDDEN	[MPa]	Energie disipovaná na jednotku objemu plastickou deformací v prostředí Abaqus
Total time	[s]	Celkový čas v prostředí Abaqus
s	[-]	Parametr vyhlazení funkce UnivariateSpline v prostředí Python 2

1 Úvod

Cílem této bakalářské práce je provést stanovení počáteční meze kluzu a počáteční plochy plasticity pro materiál DP1000. Tento materiál je vysokopevnostní dvoufázová za studena válcovaná feriticko-martenzitická ocel s relativně vysokou tažností. Tato kombinace vlastností umožňuje široké využití v oblasti automobilového průmyslu kvůli možnosti tváření jednotlivých dílů a zároveň vysoké pevnosti. V posledních letech se především v automobilovém průmyslu začal objevovat trend stále častějšího využívání podobných vysokopevnostních ocelí. Využívání tohoto druhu ocelí umožňuje nejen podstatné odlehčení konstrukcí pomocí poddimenzovávání stávajících konstrukčních prvků, ale také výrazné zvýšení bezpečnosti díky odolnosti materiálu při dynamickém namáhání automobilů.

I přes tažnost materiálu DP1000, která je na poměry vysokopevnostních ocelí poměrně vysoká, s hodnotou okolo 13%, se však vyskytují problémy při tváření materiálu kvůli přílišnému odpružení. Tento problém řeší i firma COMTES FHT a.s., kde na experimentální a výpočtové úrovni analyzují uvedený materiál a jeho vlastnosti. Jedním z dílčích výzkumných úkolů je i zjištění plochy plasticity tohoto materiálu. Tato práce se věnuje právě této části výzkumu, který probíhal v úzké součinnosti s firmou COMTES FHT a.s.

Bakalářská práce je rozdělena do šesti hlavních kapitol, přičemž klíčovými jsou kapitoly 4, 5 a 6, kde v kapitole 4 je řešena problematika stanovení meze kluzu materiálu a v kapitole 5 stanovení plochy plasticity. Souhrnné hodnocení dosažených výsledků je potom popsáno v závěru práce v kapitole 6. Kromě toho je v kapitole 2 shrnutí současného stavu problematiky a v kapitole 3 je potom uveden stručný přehled teoretického základu této práce.

2 Současný stav problematiky

S rostoucím množstvím výrobků na trhu a zvyšujícími se nároky na přesnost výroby se stává metoda vývoje pokus-omyl stále méně efektivní a dražší. Z tohoto důvodu byl vytvořen koncept virtuální výroby, který je jedním z nejvíce účinných způsobů zkrácení výrobního času a zvýšení kvality výrobků. Numerické simulace tvářecích procesů, především metodou konečných prvků, se tak stávají jedním z hlavních nástrojů optimalizace těchto procesů. Více informací o modelování těchto procesů lze nalézt v [1].

Při tváření materiálů jako jsou vysokopevnostní oceli se však často objevuje problém odpružení, který detailně popsal R. H. Wagoner ve své práci [34]. Jedná se o změnu tvaru po tváření konstrukční součásti danou elastickými silami. Tento efekt není většinou žádoucím a i přes jeho zdánlivou jednoduchost je velice komplexním a po dlouhou dobu neřešeným problémem. Jeho komplexita spočívá v nutnosti vystihnout anisotropní vlastnosti jak z hlediska napětí, tak z hlediska deformací a vyžadoval nové, přesnější, vystižení Bauschingerova efektu. I přes skutečnost, že přibližně do roku 2005 nebyl efekt odpružení aktuálním tématem, se v posledním desetiletí začal zájem o redukci tohoto fenoménu rozvíjet. Byl totiž jedním z hlavních problémů při využívání vysokopevnostních ocelí, které se stávaly čím dál více populárními. Efekt byl tak i lépe popsán, jak je uvedeno v práci [35] a byl tedy i různými způsoby modelován, jak je přehledově ukázáno např. v [20]. V [27] byl zaveden i nový druh deformace, speciálně navržený právě pro lepší simulaci odpružení. I přes tuto snahu však stále problém odpružení představuje výzvu pro moderní automobilový průmysl. Například nedávná studie [33] uvádí i problém redukce Youngova modulu, která může u dvoufázových ocelí s mezí pevnosti kolem 600 [MPa] dosahovat až hodnoty 25% při vysokých hodnotách plastických deformací, což je vysoce relevantní právě v oblasti tváření. Většina komerčních softwarů, jako jsou např. Autoform, nebo Ansys, již mají kompenzační mechanismy spojené i s tímto problémem, nicméně tyto programy nejsou schopny tyto efekty pochytit dostatečně přesně a to hlavně z důvodu nutnosti zadání vstupních materiálových parametrů.

Jedním z těchto parametrů je i plocha plasticity materiálu, kterou lze určovat pomocí biaxiálních tahových zkoušek. Při těchto zkouškách je nejčastěji využíváno zkušební těleso ve tvaru kříže a bylo analyzováno v několika publikacích. T. Kuwabara v článku [18] navrhl tvar tohoto tělesa pro plechy válcované za studena a dochází k závěru, že expanze tělesa byla výrazná v rovině vnějšího namáhání a deformace kolmo na rovinu namáhání byla minimální, proto je toto těleso vhodné pro určování mimo jiné i isočar plastické práce, které pak nejlépe odpovídají především bikvadratické ploše plasticity, kterou popisuje Gotoh ve své práci [11]. Následně bylo navrženo několik metod určování plochy plasticity, např. za pomoci náhlé změny směru deformace, viz M. Kuroda [17]. Tato metoda byla následně experimentálně ověřena i při využití ocelových plechů válcovaných za studena, jak je uvedeno v [19]. Stále však nebyla zavedena jednotná forma biaxiálních tahových zkoušek, a to i přesto, že se v odborné literatuře můžeme setkat s názorem, že výsledky jednoosé tahové zkoušky pro určení anisotropie materiálů, namáhaných v praxi biaxiálně, nestačí. Proběhly návrhy tělesa pro dosažení vyšších hodnot plastických deformací za pomoci ztenčení měřené oblasti, případně přidání štěrbin na ramena vzorků kvůli lepší distribuci napětí v měřené oblasti a redukci rozložení zatížení mezi jednotlivými rameny, jak je popsáno např. v článku [13].

Pro ověření různých designů bylo využito simulací za pomoci metody konečných prvků. V práci [12] byla provedena analýza nevhodnějšího postupu měření deformací na tělese a na základě porovnání téměř isotropního materiálu s von Misesovou plochou plasticity byl vyhodnocen rozdíl napětí méně než 2%.

Důležitým pramenem, který je pro danou oblast technické praxe zároveň závazným, je norma ČSN ISO 16842 [6], dle které se řídí i podstatná část této práce. Tato norma specifikuje jak geometrii zkušebního tělesa, tak místa vyhodnocení deformace. Umožňuje však i využití alternativních těles, často složených z již existujících prvků, jako např. v článku [8], případně optimalizovaných např. pro únavové namáhání, jak uvádí práce [2]. Studie [32] se pak i dále zaobírala porovnáním tvaru těles pro různé účely a následně navrhuje i nový tvar zkušebního tělesa tak, aby se snížil nelineární průběh napětí, ale zároveň vznikala plastická deformace v měřené oblasti těles. Standardní využívaná ISO geometrie zajišťuje velmi dobré výsledky z hlediska průběhu napětí v tělese, nicméně se ukazuje, že při požadavku vyšších hodnot plastických deformací by již nebyla vhodná.

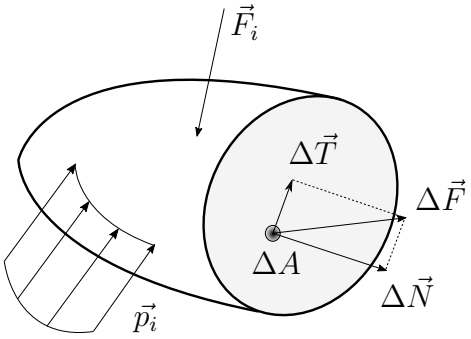
V rámci této práce byla zjištěná plocha plasticity srovnávána s von Misesovým popisem, viz [22]. Kromě tohoto popisu existuje samozřejmě velké množství dalších hypotéz, zabývajících se tvarem plochy plasticity. Dalším modelem je např. Trescova hypotéza [31], zakládající se na maximální hodnotě smykového napětí. Obě tyto plochy nepředpokládají vznik plastických deformací za vysokého hydrostatického napětí. Postupně však docházelo i k vývoji dalších hypotéz, které již s tímto jevem uvažují, např. Mohr-Coulomb [5], nebo Drucker-Prager [10]. Tyto plochy vycházejí právě z von Misesovi a Trescovi podmínky plasticity a i přes jejich stáří se všechna tato kritéria využívají v technické praxi dodnes díky jejich jednoduchosti. Dalším kritériem, které se taktéž hojně využívá je Hillovo kritérium, viz [14]. Toto kritérium je opět zobecněním von Misesova kritéria, ale bere v potaz i anisotropii materiálu. Toto kritérium bylo dále zobecněno v [15] a různé variace tohoto kritéria, uvedené např. v pracích [3], [4] a [9], se využívají zvláště v případech anisotropních materiálů.

3 Teoretické pozadí

3.1 Napjatost

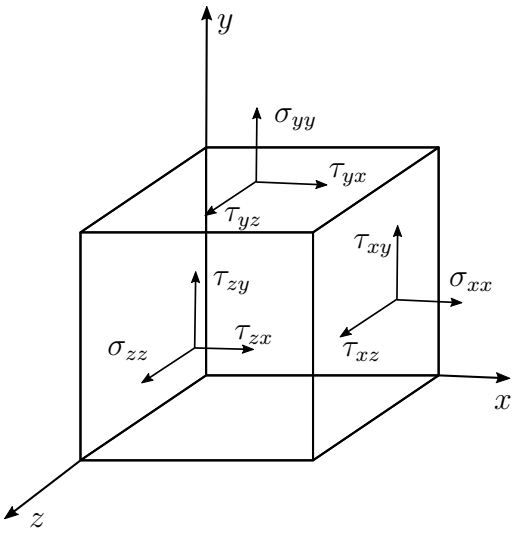
Uvažujme těleso podrobené účinku vnějších sil. Toto namáhání může být reprezentováno soustavou diskrétních povrchových sil $\vec{F}_i$ nebo spojitých povrchových zatížení $\vec{p}_i$, popř. objemovými silami (např. vlivem vlastní tíhy či setrvačnými účinky). Napětí v tělese je způsobeno vznikem sil vyvozených v tělese, tzv. vnitřních sil, které jsou důsledkem působení sil vnějších. Pokud povedeme libovolný myšlený řez tělesem, pak lze vnitřní síly popsat jako síly akce a reakce mezi dvěma částmi tělesa v daném řezu. Pro definici napětí pak lze zavést v malé ploše ΔA dílčí výslednici vnitřní síly $\Delta\vec{F}$ a rozložit ji do směru normály (normálová síla $\Delta\vec{N}$) a do roviny řezu (posouvající síla $\Delta\vec{T}$), jak je vidět na obr. 1 [16, 30]. Pro napětí $\vec{\sigma}$ a $\vec{\tau}$ pak platí limitní vztahy

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta A} \qquad \text{a} \qquad \vec{\tau} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta A}. \tag{1}$$



Obr. 1: Zatížená část tělesa s naznačeným myšleným řezem

Stav napjatosti diferenciálně malého elementu tělesa, viz obr. 2, lze obecně popsat složkami napjatosti působícími na šesti plochách.



Obr. 2: Element tělesa a obecný stav napjatosti

Složky napjatosti ležící v rovinách elementu se nazývají smyková napětí a průměty do směrů normál jednotlivých ploch se nazývají normálová napětí. Z momentových podmínek rovnováhy vyplývá zákon sdružených smykových napětí, stav napjatosti lze tedy popsat 6 složkami napětí. Stav napjatosti v bodě lze pak zapsat do tzv. Cauchyho tenzoru napětí, který je symetrický a má tvar

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{bmatrix}, \tag{2}$$

kde σ_x, σ_y a σ_z jsou normálová napětí a $\tau_x = \tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_y = \tau_{xz} = \tau_{zx}$ a $\tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx}$ jsou napětí smyková. Při výpočtu vlastních čísel tohoto tenzoru pak docházíme k rovnici

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_j \boldsymbol{I}) = \sigma_j^3 - \sigma_j^2 I_{\sigma 1} + \sigma_j I_{\sigma 2} - I_{\sigma 3} = 0, \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice a σ_j (j = 1, 2, 3) jsou vlastní čísla tenzoru $\boldsymbol{\sigma}$ a nazývají se hlavní napětí. Tato napětí jsou vždy reálná a značí se obvykle v pořadí daném nerovností $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. $I_{\sigma 1}$, $I_{\sigma 2}$ a $I_{\sigma 3}$ jsou tzv. invarianty tenzoru napětí. V každém bodě tělesa pak existují právě tři navzájem kolmé směry, kde působí tato hlavní normálová napětí a tečné složky napětí jsou nulové. Lze dokázat, že směr těchto napětí také nezávisí na volbě systému souřadnic a že hlavní napětí nabývají extrémních hodnot ($\sigma_1 = \sigma_{max}$, $\sigma_3 = \sigma_{min}$), viz [24]. Tenzor napětí lze rozložit na tenzor kulový a deviátor napětí.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{K_\sigma} + \boldsymbol{D_\sigma}. \tag{4}$$

Kulový tenzor má vliv na změnu objemu a deviátor napětí na změnu tvaru tělesa.

V kulovém tenzoru jsou všechna hlavní napětí stejně velká a tečná napětí jsou nulová

$$\boldsymbol{K_\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{bmatrix}, \tag{5}$$

kde σ_s je střední napětí

$$\sigma_s = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_{\sigma 1}}{3}. \tag{6}$$

Typický příklad tohoto typu namáhání je hydrostatický tlak, proto se tomuto napětí říká také někdy hydrostatické.

Deviátor napětí pak lze pomocí vztahů (4) a (5) snadno vyjádřit jako

$$\boldsymbol{D_\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - \sigma_s & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - \sigma_s \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Deviátor napětí je symetrický a lze pro něj obdobně jako pro tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ najít invarianty. Velký význam pro praxi má druhý invariant, který lze psát ve tvaru:

$$J_{\sigma 2} = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)]. \tag{8}$$

Pomocí tohoto invariantu může být definováno tzv. efektivní napětí

$$\sigma_i = \sqrt{3 J_{\sigma 2}}. \tag{9}$$

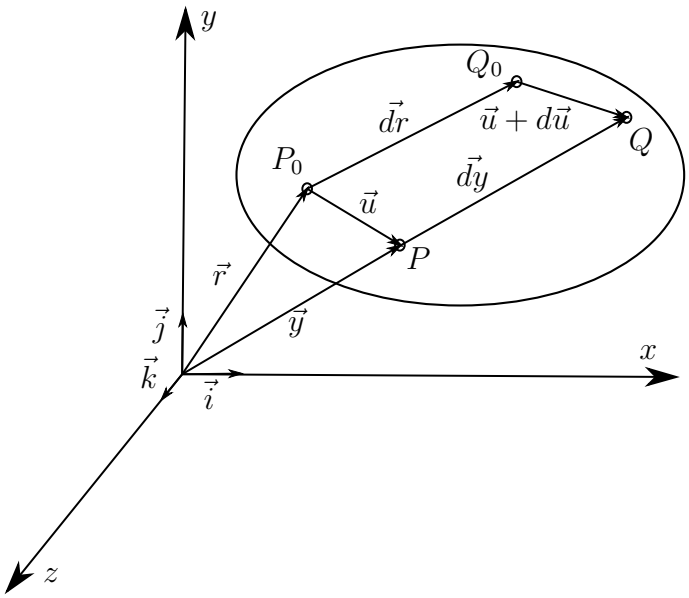
V případě jednoosé napjatosti, kde $\sigma_x = \sigma_1 \neq 0$ a $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$, je efektivní napětí $\sigma_i = \sigma_1 = \sigma_x$, jak lze nalézt např. v [23].

3.2 Deformace

Předpokládejme těleso na obr. 3, které podrobíme deformaci. V důsledku deformace se libovolné body tělesa P_0 a Q_0 posunou do nové zdeformované polohy P a Q. Posuv bodu P_0 do pozice P pak lze vyjádřit jako

$$\vec{u} = \vec{i}u_x + \vec{j}u_y + \vec{k}u_z, \tag{10}$$

kde vektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou jednotkové vektory kartézského souřadnicového systému. Složky vektoru posuvu jsou obecně závislé na poloze bodu.



Obr. 3: Těleso podrobené deformaci

Při dostatečné blízkosti bodů P a Q a za předpokladu spojitosti a hladkosti funkcí u_x, u_y a u_z lze pak s dostatečnou přesností vyjádřit polohu bodu Q pomocí polohy bodu P. Po úpravě obdržíme

$$\begin{aligned} du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial y}dy + \frac{\partial u_x}{\partial z}dz, \\ du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x}dx + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy + \frac{\partial u_y}{\partial z}dz, \\ du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x}dx + \frac{\partial u_z}{\partial y}dy + \frac{\partial u_z}{\partial z}dz. \end{aligned} \tag{11}$$

Ve zdeformované konfiguraci lze vzdálenost bodů P a Q vyjádřit jako

$$\begin{aligned} ds^2 = \vec{dy} \cdot \vec{dy} = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + (dz + du_z)^2 = \\ = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dxdu_x + dydu_y + dzdu_z) + du_x^2 + du_y^2 + du_z^2. \end{aligned} \tag{12}$$

3.2.1 Malé deformace

Při malých deformacích lze členy druhého řádu ($du_x^2 + du_y^2 + du_z^2$) zanedbat. Při předpokladu tuhého tělesa bude mezi body konstantní vzdálenost $ds_0 = ds = \sqrt{(}dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Proto musí z (12) platit

$$dxdu_x + dydu_y + dzdu_z = 0. \tag{13}$$

Dosazením z (11) a položením $ds_0 \neq 0$ získáme vztahy

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{gathered} \tag{14}$$

Při předpokladu poddajného tělesa je vzdálenost bodů před a po deformaci různá ($ds_0 \neq ds$). Z rovnic (11) pak definujme dále tenzor derivací posuvů jako

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x,x} & u_{x,y} & u_{x,z} \\ u_{y,x} & u_{y,y} & u_{y,z} \\ u_{z,x} & u_{z,y} & u_{z,z} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

kde $i, j = x, y, z$. Pomocí vztahů (14), platných pro tuhé těleso, pak tenzor rozložme na symetrickou a antisymetrickou část

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}, \tag{16}$$

kde symetrická část $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ značí Cauchyho tenzor deformace podílející se na změně tvaru tělesa a antisymetrická část $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ značí tenzor rotace popisující pootočení tělesa jako tuhého celku.

Tenzor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ je běžně zapisován také pomocí symbolů

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{xx} & \hat{\varepsilon}_{xy} & \hat{\varepsilon}_{xz} \\ \hat{\varepsilon}_{yx} & \hat{\varepsilon}_{yy} & \hat{\varepsilon}_{yz} \\ \hat{\varepsilon}_{zx} & \hat{\varepsilon}_{zy} & \hat{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

přičemž v inženýrské praxi je běžně užívána následující symbolika pro značení:

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{xx} &= \hat{\varepsilon}_x, \\ \hat{\varepsilon}_{yy} &= \hat{\varepsilon}_y, \\ \hat{\varepsilon}_{zz} &= \hat{\varepsilon}_z, \\ \gamma_z &= 2\hat{\varepsilon}_{xy} = 2\hat{\varepsilon}_{yx}, \\ \gamma_y &= 2\hat{\varepsilon}_{zx} = 2\hat{\varepsilon}_{xz}, \\ \gamma_x &= 2\hat{\varepsilon}_{yz} = 2\hat{\varepsilon}_{zy}. \end{aligned} \tag{18}$$

Obdobně jako tenzor napětí lze i Cauchyho tenzor deformace rozložit na tenzor kulový a deviátor, u něhož lze následně identifikovat invarianty deformace. Stejně jako u napětí má velký význam druhý invariant deviátoru, pro který platí:

$$J_{\varepsilon 2} = \frac{1}{6}[(\hat{\varepsilon}_x - \hat{\varepsilon}_y)^2 + (\hat{\varepsilon}_y - \hat{\varepsilon}_z)^2 + (\hat{\varepsilon}_x - \hat{\varepsilon}_z)^2 + 6(\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2)]. \tag{19}$$

Pomocí 2. invariantu deviátoru deformace lze definovat intenzitu deformace, pro kterou potom můžeme psát

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}\sqrt{3J_{\varepsilon 2}}. \tag{20}$$

Pro stav jednoosé napjatosti, kde pro isotropní materiál platí $\varepsilon_x \neq 0, \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ a $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0$, ν je Poissonovo číslo, získáme vztah

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3}(1+\nu)\hat{\varepsilon}_x. \tag{21}$$

Poznamenejme, že při rozvinutém pružně plastickém stavu je Poissonovo číslo $\nu \doteq 0.5$, viz [23], a intenzita deformace je

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x. \tag{22}$$

3.2.2 Velké deformace

Při velkých deformacích již členy $(du_x^2 + du_y^2 + du_z^2)$ ve vztahu (12) není možné zanedbat. S využitím (11) pak lze psát

$$ds^2 - ds_0^2 = 2[\varepsilon_{xx}dx^2 + \varepsilon_{yy}dy^2 + \varepsilon_{zz}dz^2 + \varepsilon_{xy}dxdy + \varepsilon_{yz}dydz + \varepsilon_{xz}dxdz], \tag{23}$$

kde ε_{ij} jsou složky Greenova tenzoru deformace

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,i}u_{i,j} + u_{j,i}u_{j,j} + u_{k,i}u_{k,j}), \tag{24}$$

pro $i, j, k = x, y, z$. Jde o takzvaný Lagrangeův popis, kde je souřadnicový systém vztažený k počáteční konfiguraci tělesa. Podrobnější popis lze nalézt např. v [29].

3.3 Základy plasticity při jednoosém namáhání

Ke studiu jednoosého tahu se běžně používá tzv. pracovní diagram, který popisuje závislost síly F na prodloužení zkušebního tělesa Δl. Častěji se však využívá pracovního diagramu ve formě závislosti smluvního napětí

$$\hat{\sigma} = \frac{F}{A_0}, \tag{25}$$

kde A_0 je velikost plochy počátečního průřezu tělesa, na poměrném prodloužení (jmenovité deformaci)

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{26}$$

kde l_0 je počáteční délka zkušebního tělesa. Pro malé deformace, kde se velikost plochy průřezu A příliš neliší od počáteční hodnoty $A \approx A_0$, lze smluvní napětí užívat jako ekvivalent Cauchyho napětí. Pro velké deformace se však musí počítat se změnou hodnot jak ve velikosti plochy průřezu, tak postupných inkrementů deformace. Z těchto důvodů pracujeme s veličinami skutečné (Cauchyho) napětí a přirozená deformace, které s těmito jevy počítají. Vyjádření veličin provedeme pro případ konstantního objemu tělesa, což je běžný předpoklad pro elasto-plastické materiály při rozvinuté plasticitě (potvrzeno experimentálně). Potom tedy platí:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = (1+\hat{\varepsilon}_x)(1+\hat{\varepsilon}_y)(1+\hat{\varepsilon}_z) - 1 \approx 0. \tag{27}$$

Skutečné napětí pak lze definovat jako

$$\sigma = \frac{F}{A} = \hat{\sigma}(1 + \hat{\varepsilon}), \tag{28}$$

a přirozenou deformaci zapíšeme jako

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{1}{l} dl = \ln(\frac{l}{l_0}) = \ln(1 + \hat{\varepsilon}). \tag{29}$$

Z předpokladu (27) lze pak po logaritmizaci rovnice a dosazení z (29) za přirozenou deformaci dojít ke vztahu

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0. \tag{30}$$

Zkouška tahem probíhá většinou při zatěžování konstantním přírůstkem prodloužení nebo při lineárním růstu napětí (síly) a následným odlehčením. Pokud po úplném odlehčení má těleso nulovou deformaci, mluvíme o elastické části křivky zatížení, pokud je však křivka odlehčení rozdílná od křivky zatížení, pak je deformace po úplném odlehčení tělesa nazývána plastická deformace ε_p. Celková deformace je tedy součtem těchto dvou složek

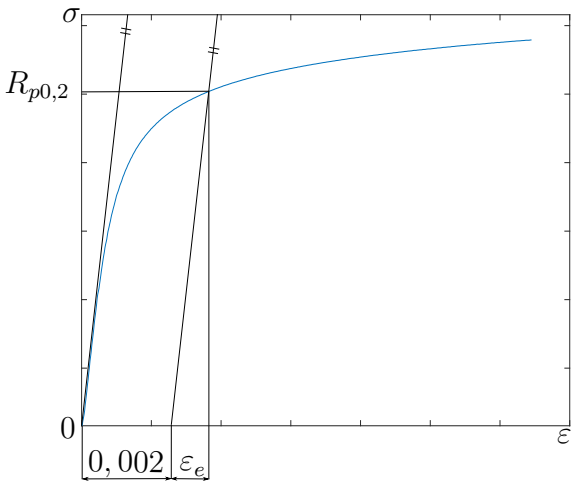
$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p. \tag{31}$$

V elastické oblasti obecně předpokládáme lineární závislost napětí na deformaci ve tvaru

$$\sigma = E\varepsilon_e, \tag{32}$$

kde E je směrnice přímky nazývána Youngův modul (nebo také modul pružnosti v tahu). Tato směrnice je také tangentou úhlu svíraného s deformační osou.

U materiálů s výraznou mezí kluzu lze přechod mezi elastickou a elasticko-plastickou oblastí snadno určit. Hodnota napětí při této změně je obecně označována za mez kluzu σ_k. Po překročení této hodnoty napětí v daném místě tělesa dále předpokládáme, že materiál se odlehčuje po přímce rovnoběžné s přímkou v lineárně elastické oblasti zatěžování. Pomocí tohoto principu lze u materiálů s nevýraznou mezí kluzu určit tzv. smluvní mez kluzu $R_{p0,2}$. Pro stav, kdy je napětí rovné této mezi kluzu platí, že je hodnota plastické deformace $\varepsilon_p = 0,002$ (tj. 0,2%), viz obr. 4.



Obr. 4: Smluvní pracovní diagram pro materiál bez výrazné meze kluzu při jednoosém namáhání

Závislost napětí na deformaci je obecně v plastické části nelineární a je závislá na teplotě i rychlosti zatížení, viz [23, 24, 25]. Aby bylo možné hledat řešení takové úlohy, je vhodné tuto závislost aproximovat. Příklady takových aproximací lze nalézt např. v [24].

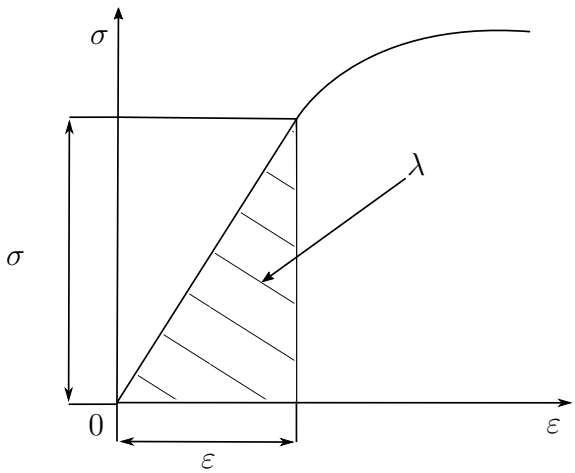
3.4 Měrná deformační energie

Měrná deformační energie λ je při jednoosém namáhání tahem vyjádřená jako plocha pod křivkou závislosti $\sigma(\varepsilon)$, viz obr. 5. V lineární oblasti lze tuto plochu vyjádřit za pomoci vztahu

$$\lambda = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon. \tag{33}$$

Pro případ nelineární závislosti $\sigma(\varepsilon)$ pak lze tuto plochu vyjádřit jako

$$\lambda = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon. \tag{34}$$



Obr. 5: Měrná deformační energie

Pro případ prostorového namáhání může být vztah (33) dále rozšířen

$$\lambda = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T\{\boldsymbol{\sigma}\}, \tag{35}$$

kde $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ je tzv. vektor deformace $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z]^T$ a $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ je vektor napětí $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\sigma_x, \sigma_y\sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$. Měrná deformační energie je tedy zároveň i plochou pod křivkou závislosti intezity napětí na intenzitě deformace $\sigma_i(\varepsilon_i)$, které při jednoosém namáhání odpovídají přímo napětí a deformaci.

Celkovou měrnou deformační energii isotropního tělesa je možno rozložit na energii na změnu objemu λ_0 a tvaru λ_{tv} a platí:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_{tv}. \tag{36}$$

Při změně objemu působí hydrostatická napětí σ_s, viz (6), ve všech směrech a způsobují v isotropním materiálu stejné deformace v těchto směrech ε_s. Pro tyto deformace bude platit Hookeův zákon

$$\varepsilon_s = \frac{1}{E}[\sigma_s - \nu(\sigma_s + \sigma_s)]. \tag{37}$$

S ohledem na (35) a (37) pak bude mít měrná energie na změnu objemu tvar

$$\lambda_0 = \frac{3\sigma_s^2(1-2\nu)}{2E}. \tag{38}$$

Deformační energii na změnu tvaru snadno získáme pomocí úpravy vztahu (36) jako

$$\lambda_{tv} = \lambda - \lambda_0. \tag{39}$$

Po dosazení z rovnic (35) a (38) do (39) a následnými úpravami získáme vztah

$$\lambda_{tv} = \frac{1+\nu}{3E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)]. \tag{40}$$

A při využití intenzity napětí (9) lze tuto deformační energii vyjádřit jako

$$\lambda_{tv} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_i^2. \tag{41}$$

3.5 Plocha plasticity, von Misesova podmínka plasticity

Existence meze kluzu materiálu umožňuje zavést pojem počáteční plochy plasticity. Tato plocha pak má podobný význam jako mez kluzu a ohraničuje pružnou oblast v prostoru napětí. Kritérium pro tuto oblast pak pro jednoosé namáhání lze vyjádřit pomocí nerovnosti

$$|\sigma| - \sigma_k < 0. \tag{42}$$

Kritérium přechodu do plastického stavu je tedy dáno podmínkou plasticity

$$f(\sigma, \sigma_k) = |\sigma| - \sigma_k = 0, \tag{43}$$

kde $f(\sigma, \sigma_k)$ je tzv. funkce plasticity, pro kterou platí, že pokud se rovná nule, pak se nacházíme na hranici plastického stavu. Pro víceosou napjatost danou Cauchyho tenzorem napětí $\boldsymbol{\sigma}$ lze pak tuto funkci zobecnit. Následně učiníme předpoklad, že materiál bude pouze elastický jen tehdy, když

$$f(\boldsymbol{\sigma}) < 0. \tag{44}$$

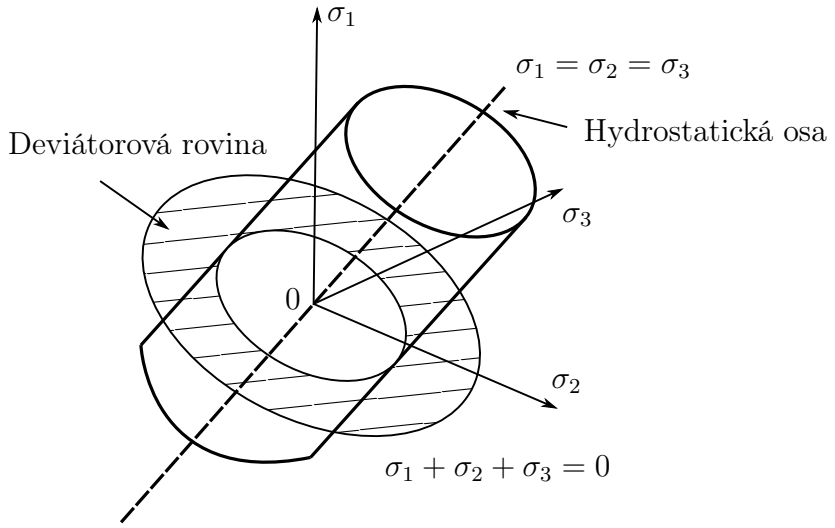
A pokud

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \tag{45}$$

pak materiál dosáhl plastického stavu. Pokud se plocha plasticity v průběhu zatěžování, odlehčování, či opakovaném zatěžování mění v prostoru napětí, pak již hovoříme o následných plochách plasticity. Počáteční plocha plasticity odpovídá ideálně plastickému materiálu bez zpevnění v plastické oblasti. Funkce plasticity by také měla obsahovat dostatečný počet konstant, aby byly vlastnosti materiálu plně určeny. Tenzor napětí je obecně určen třemi hlavními napětími a třemi úhly, jež určují orientaci hlavních os. Pro pružný isotropní materiál však tyto úhly neovlivňují stav napjatosti a podmínku plasticity (45) lze přepsat do tvaru

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \tag{46}$$

U většiny kovů je vznik plastického stavu málo ovlivňován středním napětím σ_s, viz (6), a plastické deformace vzniknou až při velmi vysokých hodnotách tohoto napětí. Tuto skutečnost lze vyjádřit závislostí funkce plasticity na složkách deviátoru napětí. Za předpokladu isotropie materiálu pak lze plochu plasticity geometricky znázornit v prostoru hlavních napětí (Haighově prostoru) jako obalovou plochu, jejíž osa je totožná s osou hydrostatickou, pro kterou platí $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. K této ose je pak kolmá tzv. deviátorová rovina, která prochází počátkem souřadnic a je definována vztahem $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.



Obr. 6: Plocha plasticity v prostoru hlavních napětí

Průsečnice válce s deviátorovou rovinou je nazývána křivkou plasticity. Pro isotropní materiál lze indexy hlavních os 1, 2, 3 přiřadit libovolně osám souřadnic, a proto má křivka plasticity tři osy symetrie.

Významnou plochou plasticity je Misesova (obálková plocha je v tomto případě plocha válce), která je založena na energetické podmínce vycházející z měrné deformační energie na změnu tvaru. Při Misesově ploše plasticity zavádíme předpoklad, že počátku plastického stavu je dosaženo, jestliže měrná deformační energie na změnu tvaru dosáhne kritické hodnoty

$$\lambda_{tv} = \lambda_{tv_k}. \tag{47}$$

Při dosazení z rovnice (41) lze tuto podmínku zapsat ve tvaru

$$\frac{1+\nu}{3E}\sigma_i^2 = \lambda_{tv_k}. \tag{48}$$

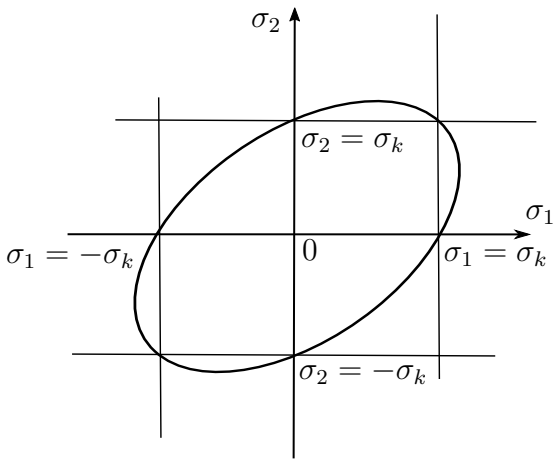
Kritickou hodnotu měrné deformační energie na změnu tvaru lze tedy snadno určit pomocí jednoosého tahu, kdy je intenzita napětí rovna působícímu napětí $\sigma_i = \sigma$ a kdy plastický stav vznikne pro $\sigma = \sigma_k$. Po dosazení do rovnice (48) za intenzitu napětí pomocí hlavních napětí lze získat předpis

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_k^2. \tag{49}$$

Tato rovnice vyjadřuje mezní plochu plasticity, která je v prostoru hlavních napětí válcovou plochou s osou válce totožnou s hydrostatickou osou.
Pro případ rovinné napjatosti přejde podmínka do tvaru

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_k^2. \tag{50}$$

V tomto případě je danou rovnicí, která popisuje hranici plochy plasticity, elipsa.



Obr. 7: Von Misesova plocha plasticity při rovinné napjatosti

4 Stanovení meze kluzu

4.1 Smluvní mez kluzu materiálu DP1000

Jak bylo již zmíněno v kapitole 3.3, mez kluzu materiálu je určována pomocí jednoosé tahové zkoušky, viz norma [7]. Nejprve je nutno převést pracovní diagram ze závislosti $F(\hat{\varepsilon})$ na závislost $\sigma(\varepsilon)$. Toto lze dosáhnout pomocí vztahů (25) až (29). Pro tuto práci byly provedeny 3 jednoosé tahové zkoušky ve směru válcování plechu. Následně byla nalezena taková křivka daná závislostí $\sigma(\varepsilon)$, která byla průměrnou hodnotou v každém časovém okamžiku těchto tří zkoušek. Ocel DP1000 nemá výraznou mez kluzu, a proto je mez kluzu určována pomocí určité hodnoty plastické deformace (nejčastěji 0,2%), viz obr. 4. Hodnotu skutečné plastické deformace lze zjistit ze vztahu (31) dosazením za hodnotu elastické deformace z (32). Platí tedy

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}, \tag{51}$$

kde průběh $\sigma(t)$ a $\varepsilon(t)$ je znám z průběhu zkoušky, ale Youngův modul E je nutno určit.

Youngův modul se nejčastěji určuje tzv. lineární regresí v elastické oblasti tahového diagramu a lze ho vyjádřit pomocí vztahu

$$E = \frac{\sum(\varepsilon_j \sigma_j) - k\overline{\varepsilon_j}\,\overline{\sigma_j}}{\sum \varepsilon_j^2 - k\overline{\varepsilon_j}^2}, \tag{52}$$

kde ε_j je přirozená deformace v daném časovém okamžiku, σ_j s ní korespondující hodnota skutečného napětí, $\overline{\varepsilon_j}$ a $\overline{\sigma_j}$ průměrné hodnoty přirozené deformace a napětí a k počet zkoumaných bodů na křivce. Pro malé deformace (které se běžně v lineární oblasti vyskytují) je možno zaměnit přirozenou deformaci za deformaci jmenovitou a skutečné napětí za napětí smluvní.

Pro určení vhodné lineární elastické oblasti pro zjištění Youngova modulu však existuje mnoho přístupů. V rámci této práce byly zvoleny 3 přístupy a následně byly mezi sebou porovnány:

(a) Postup uveden v práci [26].

Článek ukazuje použití jednoduché varianty nalezení horní a dolní hranice lineární elastické oblasti při stanovení σ_{max} a σ_{min}, které závisí na mezi pevnosti materiálu R_m, kterou lze definovat jako mezní hodnotu napětí, po jejímž překročení dojde k porušení integrity. Tyto meze jsou definovány pomocí vztahů

$$\sigma_{min} = 0,05 R_m, \tag{53}$$

$$\sigma_{max} = 0,18 R_m. \tag{54}$$

Pomocí této metody je Youngův modul $E = 185\ 055,9$ [MPa] a následně smluvní mez kluzu má velikost $R_{p0,2} = 730,7$ [MPa].

(b) Postup dle normy ČSN EN ISO 6892-1, [7].
V této normě je specifikováno rozpětí oblasti, závisející přímo na hodnotě meze kluzu, a je dané rovnicemi

$$\sigma_{min} = 0,1R_{p0,2}, \tag{55}$$

$$\sigma_{max} = 0,5R_{p0,2}. \tag{56}$$

Při této metodě je tedy nutno zvolit prvotní rozpětí a následně iteračním postupem pracovat s aktualizovanou hodnotou meze kluzu, dokud řešení nekonverguje s ohledem na zvolenou přesnost. Při nastavení přesnosti (absolutní hodnoty rozdílu hodnot meze kluzu z aktuální a předchozí iterace) na 5 [MPa] (0,68% celkové hodnoty meze kluzu) výpočet vždy konvergoval a výsledku bylo dosaženo po třech iteračních krocích. Výpočtem bylo zjištěno, že hodnota Youngova modulu je $E = 181\ 277,5$ [MPa] a smluvní mez kluzu má velikost $R_{p0,2} = 739,8$ [MPa].

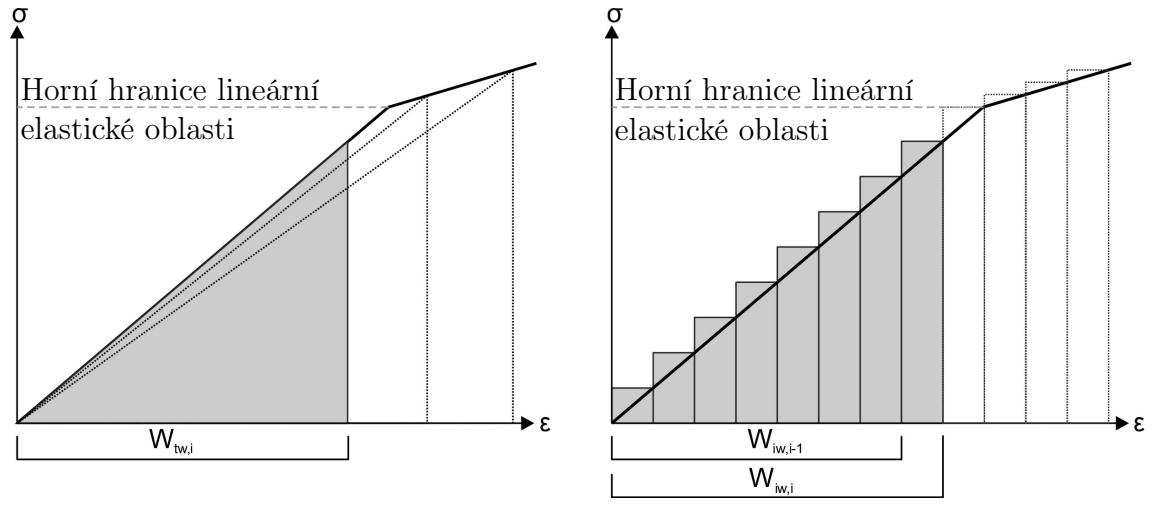
(c) Postup navržený Suttnerem a Merkleinovou, viz [28].
Dle tohoto článku jsou meze oblasti stanoveny pomocí dvou způsobů výpočtu deformační energie pod křivkou $\sigma(\varepsilon)$. První způsob je pomocí "trojúhelníkové" práce W_{tw}, vypočtené podle (33) pro každý i-tý bod křivky jako

$$W_{tw,i} = \frac{1}{2}\sigma_i\varepsilon_i. \tag{57}$$

Druhý způsob je založen na výpočtu inkrementální práce W_{iw}, kterou lze popsat jako součet "obdélníkových" inkrementů na křivce. Vztah pro i-tý inkrement pak lze zapsat ve tvaru

$$W_{iw,i} = \sigma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) + W_{iw,i-1}. \tag{58}$$

Znázornění těchto dvou způsobů výpočtu lze vidět na obr. 8.



Obr. 8: Dvojí způsob výpočtu deformační energie dle metody (c), převzato z [28]

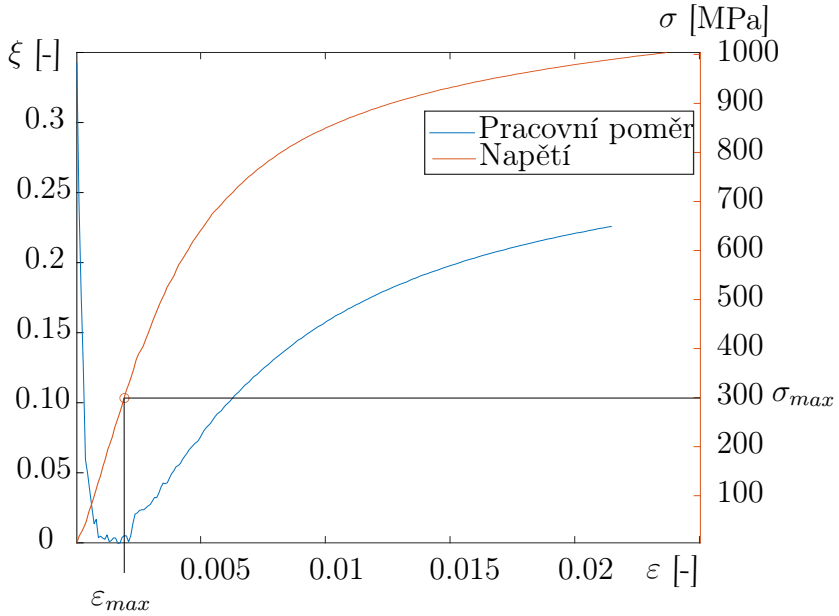
Po přechodu z lineární elastické oblasti se "trojúhelníková" práce W_{tw} odchyluje od inkrementální W_{iw}. Toto odchýlení lze vyjádřit pomocí pracovního poměru ξ, který je definován jako

$$\xi = \frac{|W_{iw} - W_{tw}|}{|W_{iw} + W_{tw}|}. \tag{59}$$

Horní mez lineární elastické oblasti pak lze určit jako minimum funkce $\xi(\varepsilon)$, tj.

$$\xi_{limit} = \min(\xi). \tag{60}$$

Toto minimum bylo stanoveno tak, že v okolí očekávaného extrému $\xi(\varepsilon)$ byla funkce aproximována polynomem druhého stupně. Odtud pak lze snadno určit hraniční hodnotu deformace $\varepsilon_{max} = \varepsilon(\xi_{limit})$ a tedy i korespondující hodnotu napětí $\sigma_{max} = \sigma(\varepsilon_{max})$.

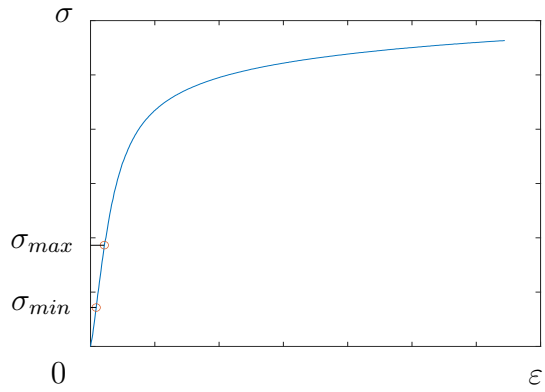


Obr. 9: Průběh $\xi(\varepsilon)$ v porovnání s průběhem $\sigma(\varepsilon)$ jednoosé tahové zkoušky

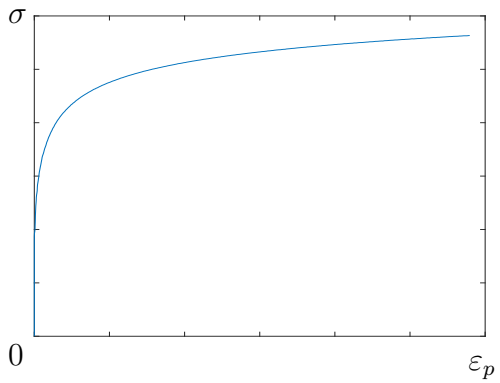
Spodní hranice pro určení Youngova modulu v tomto článku stanovena není, a proto byla zvolena pro jednoduchost dle přístupu (a) jako

$$\sigma_{min} = 0,05 R_m. \tag{61}$$

Při tomto přístupu je Youngův modul $E = 183\,205,81$ [MPa] a hodnota meze kluzu je $R_{p0,2} = 734,9$ [MPa].



(a) Závislost $\sigma(\varepsilon)$ s vyznačenou oblastí pro určení E



(b) Závislost $\sigma(\varepsilon_p)$

Obr. 10: Převedení závislosti $\sigma(\varepsilon)$ na $\sigma(\varepsilon_p)$ dle vztahu (51) při postupu (c)

Porovnání výsledků jednotlivých přístupů lze vidět v tab. 1. Nejjednodušším přístupem (a) bylo dosaženo vyšší hodnoty Youngova modulu, jelikož byla zvolena nízká horní hranice lineární elastické oblasti. Zároveň bylo ale k dispozici menší (asi 66% hodnot oproti ostatním dvěma případům) množství bodů k přesnému určení Youngova modulu lineární regresí. Tento přístup lze navíc považovat za dosti orientační, protože je vázán na mez pevnosti, nikoliv na mez kluzu. Přístupem (b) bylo naopak dosaženo nejvyšší hodnoty této hranice a Youngův modul byl proto poměrně nízký. Posledním přístupem (c) získáváme poměrně vysoké množství bodů pro vyhodnocení a zároveň neobsahuje příliš velké odchylky bodů křivky $\sigma(\varepsilon)$ od lineární aproximace. Přístup (c), který se však běžně v praxi prozatím nepoužívá, se tedy jeví pro ocele jako velmi vhodný.

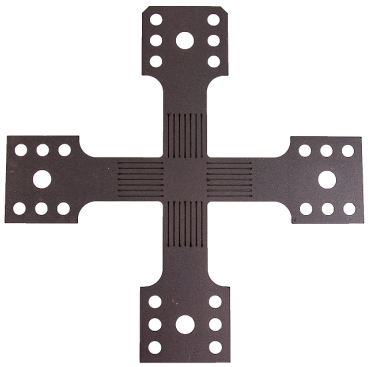
Varianta	Youngův modul E [MPa]	Mez kluzu $R_{p0,2}$ [MPa]	σ_{max} [MPa]	σ_{min} [MPa]
(a)	185 055,9	730,7	202,6	44,0
(b)	181 277,5	739,8	364,5	72,2
(c)	183 205,8	734,9	296,7	44,0

Tabulka 1: Porovnání výsledků přístupů při zjištění meze kluzu

5 Určení plochy plasticity pomocí biaxiálního namáhání zkušebního tělesa ve tvaru kříže

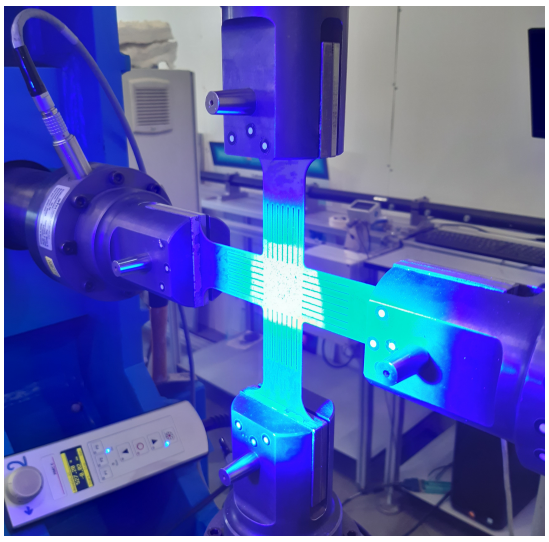
5.1 Průběh biaxiálních tahových zkoušek

Zkoušky pro určení plochy plasticity materiálu mohou probíhat např. podle normy ČSN ISO 16842, viz [6]. Ta uvádí zkušební těleso ve tvaru kříže se specifikovanými geometrickými rozměry a zářezy po délce ramen. Toto těleso lze vidět na obr. 11 a bylo používáno ve všech prováděných zkouškách při namáhání biaxiálním tahem.



Obr. 11: Zkušební těleso použité při zátěžových zkouškách

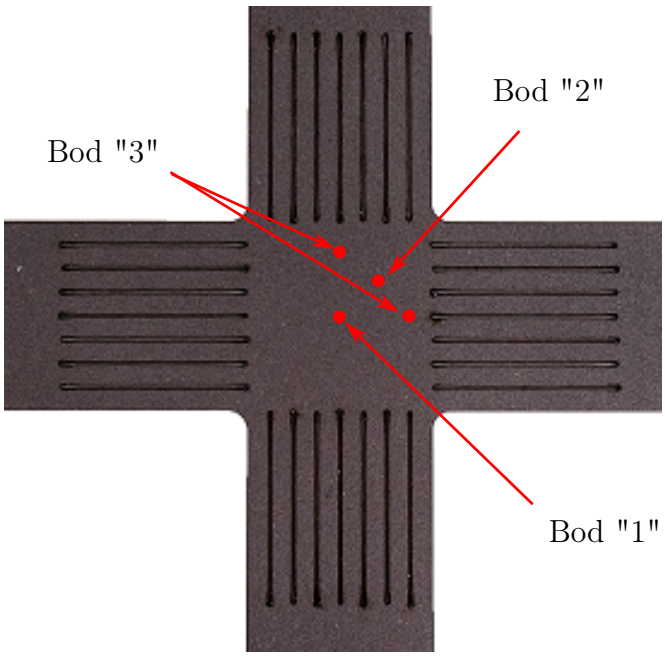
Normou ČSN ISO 16842 jsou dále kladeny nároky na přesnost a možnosti zkušebního stroje pro biaxiální zatěžování, přesnost měření sil a deformací v průběhu zatěžování a metodiku tohoto měření. Pro tento výzkum byl použit stroj umožňující zatížení konstantním poměrem sil (smluvního napětí) působících ve dvou navzájem kolmých směrech v jedné rovině a pro sledování deformací v průběhu zkoušky byl využit bezkontaktní optický systém Aramis, od společnosti GOM Metrology, pracující na principu digitální korelace obrazů.



Obr. 12: Průběh zkoušky biaxiálním tahem

Plochu plasticity v prostoru dvou hlavních napětí můžeme následně stanovit dle přílohy A zmíněné normy. Jelikož jsou vektory sil při biaxiální zkoušce na sebe navzájem kolmé, můžeme napětí ve směru os kříže považovat za napětí hlavní. Při jednoosé zkoušce je napětí ve směru zatížení také hlavní. Za tohoto předpokladu lze pro určité poměry sil získat body ležící na ploše plasticity přímo v rovině $\widehat{\sigma_1\sigma_2}$, resp. $\widehat{\sigma_x\sigma_y}$. Pro tuto práci byly poměry sil $F_x : F_y$, obdobně jako v dané příloze, nastaveny na $0 : 1$, $1 : 4$, $1 : 2$, $3 : 4$, $1 : 1$, $4 : 3$, $2 : 1$, $4 : 1$ a $1 : 0$. Pro poměry $0 : 1$ a $1 : 0$ bylo využito dat z jednoosých tahových zkoušek ve směru a kolmo na směr válcování plechu. Kříže pak byly směřovány vždy tak, aby směr osy y odpovídal směru válcování.

Na tělese byla měřena deformace celkem tří bodů pro každý poměr sil. Bod "1" je střed zkušebního tělesa, druhým zkoumaným bodem byl bod "2", který se nachází 11 [mm] diagonálně od středu. Norma [6] uvádí bod pro umístění dvouosého extenzometru v bodě "3" ve vzdálenosti $(0,35 \pm 0,05)B$ od středu tělesa v ose rovnoběžné s maximální tahovou silou, kde B je šířka ramene tělesa. V našem případě je vzdálenost $(0,35 \pm 0,05)B = 10,5$ [mm]. Pokud byl poměr sil $1 : 1$, byl volen bod na ose y (ve směru rovnoběžném s osou válcování plechu).



Obr. 13: Zkoumané body tělesa

5.2 Určení isočáry plastické práce

Fakt, že materiál DP1000 nemá výraznou mez kluzu a je tedy nutno uvažovat mez kluzu smluvní, lze rozšířit i pro případ počáteční plochy plasticity. Norma [6] uvádí následující postup: Zvolíme určitou hodnotu plastické deformace ε_{p0} v jednoosém tahu a vytvoříme tzv. isočáru plastické práce, pro kterou platí, že všechny body této křivky mají stejnou hodnotu plastické práce.

Plastickou práci W_0 pak lze definovat jako plochu pod křivkou $\sigma(\varepsilon_p)$ při jednoosé tahové zkoušce, případně součet ploch pod křivkami, danými vztahy $\sigma_x(\varepsilon_{px})$ a $\sigma_y(\varepsilon_{py})$, pro oba hlavní směry namáhání,

$$W_0 = W_x + W_y. \tag{62}$$

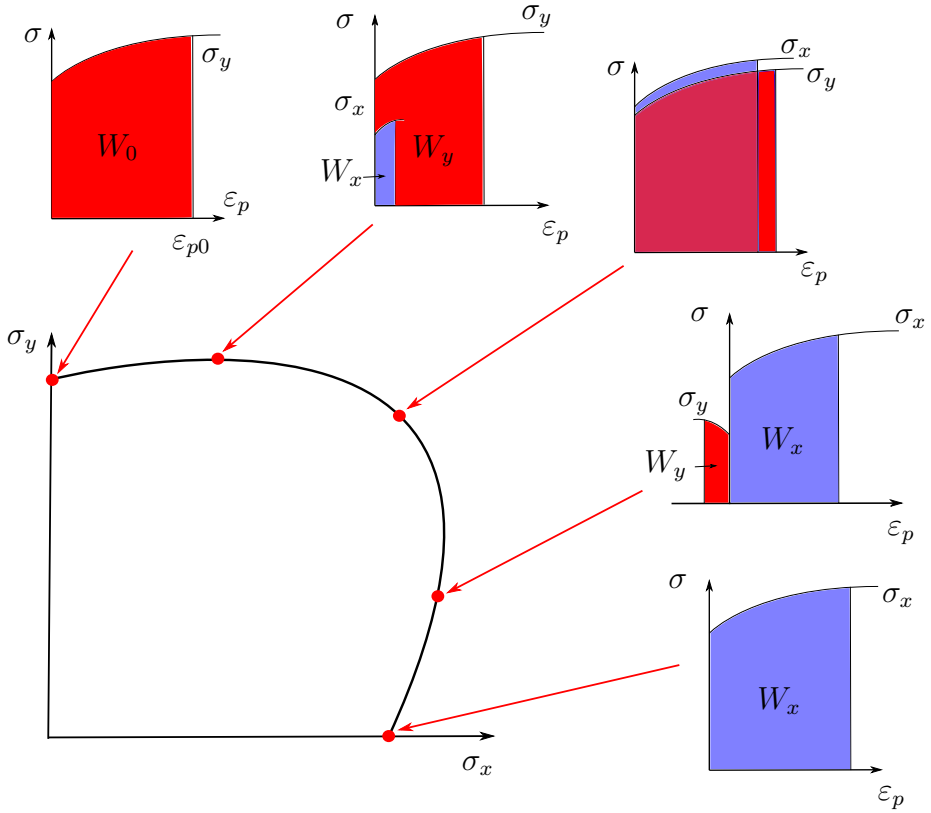
Pokud je zvolená plastická deformace pro jednoosý stav dostatečně malá, lze isočáru plastické práce považovat za počáteční plochu plasticity materiálu.

Pro výpočet plastické deformace pro oba hlavní směry deformací, bylo využito vztahů v normě [6]:

$$\varepsilon_{px} = \varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{C_x}, \tag{63}$$

$$\varepsilon_{py} = \varepsilon_y - \frac{\sigma_y}{C_y}, \tag{64}$$

kde C_x a C_y jsou sklony elastické části křivek, které jsou dané vztahy $\sigma_x(\varepsilon_x)$ a $\sigma_y(\varepsilon_y)$, měřené při zkoušce dvouosým tahem.



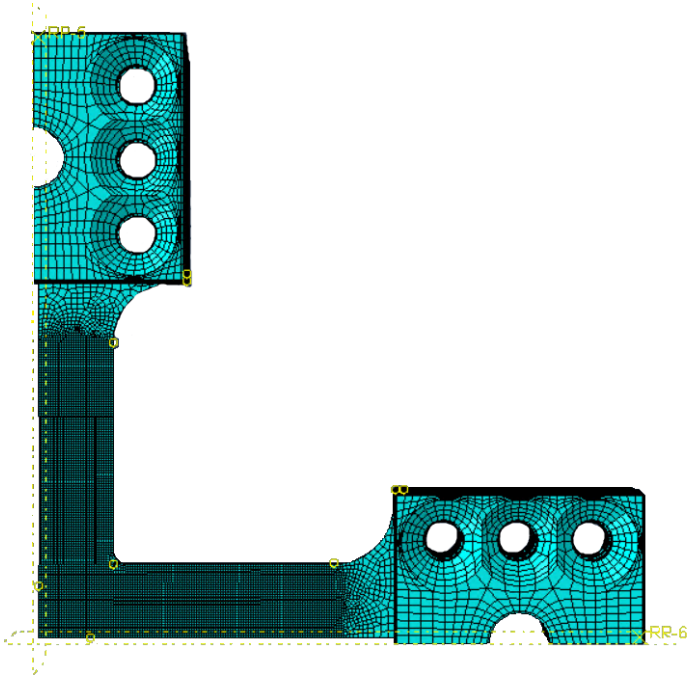
Obr. 14: Princip výpočtu bodů na isočáře plastické práce

5.3 Zjištění plochy plasticity pomocí numerických simulací

5.3.1 Výpočtový model

Za účelem zjištění plochy plasticity materiálu DP1000 bylo využito numerických simulací biaxiálních tahových zkoušek se zkušebním tělesem ve tvaru kříže. Byl vytvořen MKP model zkušebního tělesa ve výpočtovém prostředí Abaqus, za použití řešiče Abaqus/Standard 2021 General Static. Při vytvoření výpočtového modelu bylo využito dvou rovin symetrie a bylo tak možno provádět výpočet pouze na jedné čtvrtině tělesa, jak lze vidět na obr. 15. Model se skládal z 27 234 prvků ve tvaru hexaedrů. Všem uzlům v rovinách symetrie byl zamezen posuv kolmo na tyto roviny symetrie.

Součástí modelu byly i příložky s nastaveným kontaktem povrchu příložky na povrch tělesa bez prokluzu. Upevnění zkušebního tělesa nehrálo velkou roli v celkových výsledcích (bylo ověřeno numerickými simulacemi), a proto bylo možno vlivy tření mezi příložkou a tělesem a deformace příložek zanedbat. Všem uzlům příložek byl také zamezen posuv ve směru kolmém na rovinu zkušebního tělesa (ve směru otvorů příložek).



Obr. 15: MKP model zkušebního tělesa včetně příložek

Tento model byl následně zatěžován různými poměry statických sil v hlavních směrech dle normy [6], viz kapitola 5.1. Daná síla působila vždy v ose procházející těžištěm v dané rovině symetrie na referenční bod, který byl pevně kinematicky spojen se všemi uzly dané příložky, příložky tak mohly být považovány za pevná tělesa. Vývoj síly ve fiktivním čase (Total time) byl lineárně rostoucí od nulové síly až po $\frac{1}{4}$ celkové síly ve směru osy. Při výpočtu zatížení poměry sil $1:0$ a $0:1$ bylo využito také zkušební těleso ve tvaru kříže. Výsledné meze kluzu při zatěžování tělesa se pro tyto poměry lišily od jednoosých tahových zkoušek o 2,3% a bylo tedy možno těleso ve tvaru kříže bez obtíží využít i přes rozdílnou geometrii.

Model byl vytvořen s předpokladem isotropie materiálu. Poissonovo číslo bylo určeno z biaxiálních zkoušek jako $\nu = 0.32$ a následnými simulacemi bylo zjištěno, že jeho mírnou variací nejsou výsledky příliš ovlivněny. Youngův modul a data plastické části křivky byly určeny z dat jednoosé tahové zkoušky.

Pro získání těchto parametrů byla využita metoda (c) z kapitoly 4.1. Tentokrát byl však Youngův modul E určen jako směrnice přímky spojující počátek s bodem, který byl vyhodnocen jako konec lineární elastické části křivky. Od tohoto bodu byla pak určena data plastické části křivky za pomoci vztahu (51). Tato úprava výpočtu byla zavedena z důvodu nespojitosti s plastickou částí křivky v případě výpočtu za pomoci lineární regrese.

5.3.2 Interpretace výsledků

Výsledné veličiny byly získány z elementů s pozicemi v bodech, popsaných v kapitole 5.1. V těchto elementech, viz obr. 16, byly vyhodnocovány veličiny: přirozená deformace ε elementu (LE), skutečné napětí σ v elementu (S), skutečná plastická deformace ε_p (PE) a energie disipovaná na jednotku objemu plastickou deformací W_0 (EPDDEN).

Obr. 16: Detail sítě konečných prvků s vyznačenými elementy pro vyhodnocení sledovaných veličin

Veličiny LE a S přímo odpovídají přirozené deformaci a skutečnému napětí. Pro ostatní veličiny lze zavést zjednodušující vztahy, které pro tento model budou, i přes rozdílný způsob výpočtu, odpovídat veličinám daným výpočtovým softwarem. Vztahy (63) a (64) mezi veličinami ε a ε_p byly nahrazeny pomocí Hookeova zákona pro případ rovinné napjatosti a pro isotropní materiál jako

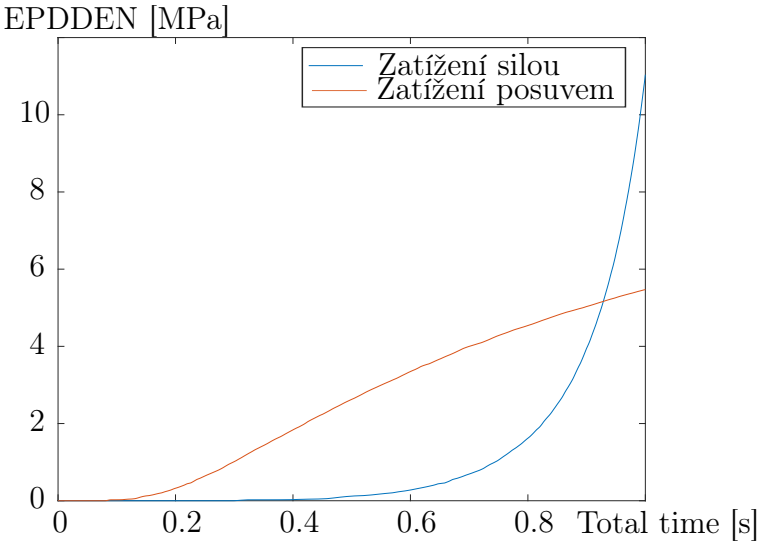
$$\varepsilon_{px} = \varepsilon_x - \frac{\sigma_x}{E} + \nu\frac{\sigma_y}{E}, \tag{65}$$

$$\varepsilon_{py} = \varepsilon_y - \frac{\sigma_y}{E} + \nu\frac{\sigma_x}{E}. \tag{66}$$

Při dosazení LE za ε je relativní maximální odchylka ε_p této úpravy vůči PE modelu v elementu přibližně 0,0036% (bylo ověřováno v elementech dle obr. 16). PE lze tedy označit za přesnou reprezentaci plastické deformace v hlavních směrech isotropního materiálu. Při numerické integraci lichoběžníkovou metodou byly vypočteny plochy pod křivkami danými závislostmi $\sigma(\varepsilon_p)$, tedy S(PE) a následně byl proveden součet těchto ploch dle (62).

Na základě všech provedených analýz byla zjištěna maximální relativní odchylka numerické integrace 0,0325% vůči EPDDEN modelu. Tuto veličinu tak lze považovat přímo za hledanou plastickou práci W_0 danou vztahem (62).

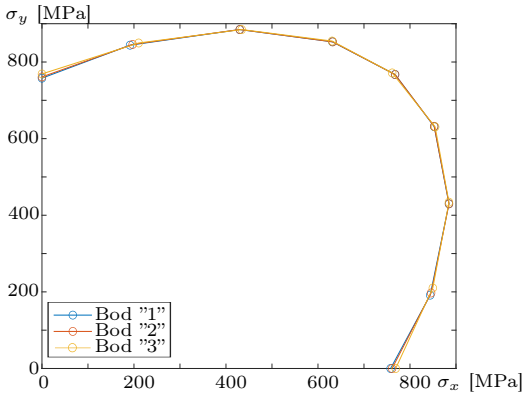
Norma [6] nespecifikuje jakým způsobem má být těleso zatíženo. Při zatížení výše popsaným způsobem pak při vykreslení EPDDEN ve fiktivním čase Total time získáme od hranice elastické oblasti exponenciální charakter nárůstu veličiny. Při zatížení tělesa konstantní rychlostí posuvu, však získáme podstatně méně rostoucí závislost EPDDEN na čase, jak lze vidět na obr. 17. Mohlo by se tedy zdát, že je výhodnější zatížení kříže pomocí lineárně rostoucích posuvů, jelikož nalezení odpovídající hodnoty na méně příkré křivce je přesnější, než na exponenciále v případě zatížení silou. Při tomto typu zatížení se však body pro různé hodnoty ε_{p0} nenachází na přímkách vycházejících z počátku a průběh sil v čase je naopak nelineární. Tímto přístupem by tak bylo snazší určení hodnoty EPDDEN pro danou hodnotu plastické deformace, ale určení odpovídající hodnoty napětí by bylo zatíženo podobnou chybou. Zatížení pomocí konstantní rychlosti posuvů tedy není principiálně výhodnějším přístupem a zatížení pomocí poměru sil je vhodnější pro zpětnou kontrolu dat.



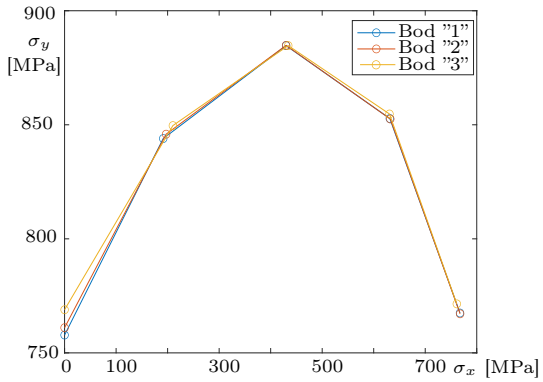
Obr. 17: Porovnání průběhu EPDDEN (plastické práce) při zatížení silou a posuvem

Pro získání plochy plasticity pak bylo provedeno zatížení v poměru sil 0 : 1 a pro určitou hodnotu PE ve směru y byla ve stejném časovém okamžiku zjištěna referenční práce EPDDEN a hodnota napětí ve směru y. Pro ostatní poměry zatížení pak byly zjištěny, vždy pro stejnou hodnotu EPDDEN ve stejném časovém okamžiku, hodnoty S v obou směrech. Tyto hodnoty následně vyneseme do roviny $\widehat{\sigma_x\sigma_y}$.

Z obr. 18 lze soudit, že čím je poloha zkoumaného bodu dál od středu, tím více se průběh napětí i deformace v bodě liší. Výsledné hodnoty napětí z bodů "1" a "2" jsou však velmi podobné a nejvíce lišící se bod "3" má maximální relativní odchylku 1%. Malá variace polohy bodu v rámci měřené oblasti tedy výsledky zásadně nezmění. Při zvyšování počtu elementů MKP modelu až na trojnásobek řešení konvergovalo.



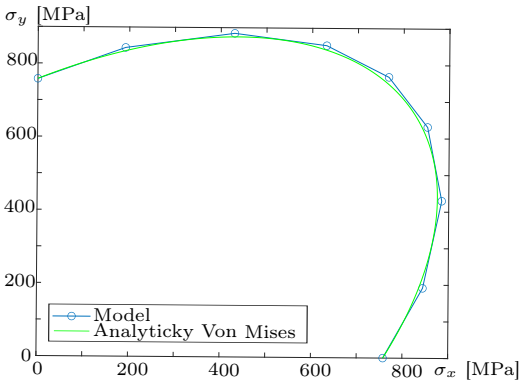
(a) Isočára plastické práce



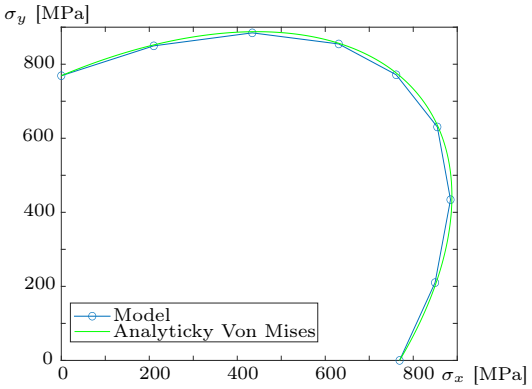
(b) Polovina isočáry plastické práce

Obr. 18: Isočára plastické práce s volbou plastické deformace v jednoosém tahu $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$ v různých bodech tělesa

Výsledná plocha plasticity pro každý bod byla následně porovnána s analyticky danou hranicí, popsanou vztahem (50), odpovídající von Misesově ploše plasticity s volbou σ_k jako hodnotou napětí odpovídající volbě ε_{p0} při poměru zatížení 0 : 1. Bod odpovídající poměru zatížení 0 : 1 na ploše plasticity tedy musí být totožný pro model i analytickou křivku.



(a) Element ve středu tělesa



(b) Element v bodě "3" dle normy [6]

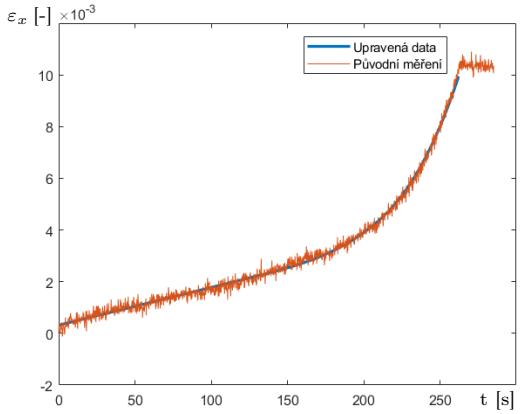
Obr. 19: Isočáry plastické práce numerických simulací s volbou plastické deformace $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$ v porovnání s von Misesovou plochou plasticity

Z výsledků numerických simulací je patrné, že bod daný normou lépe koresponduje s analyticky danou křivkou, jak lze vidět na obr. 19. Bod ve středu tělesa pak dosahuje vyšších hodnot napětí vůči von Misesově hypotéze. Výsledná napětí ve všech bodech se pak liší od analytické křivky o maximálně 1,3%.

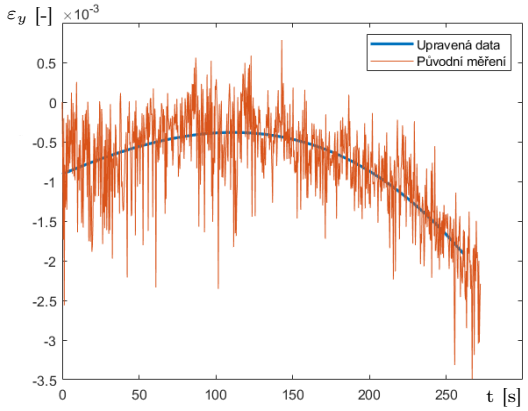
5.4 Experimentální zjištění plochy plasticity

Celkově bylo provedeno 48 experimentů dle normy [6] při využití zkušebních těles ve tvaru kříže za účelem zjištění plochy plasticity. Časové průběhy sil ve směrech x a y byly získány průměrem sil na dvou protilehlých ramenech v každém časovém okamžiku. Při vyhodnocování deformací ve směrech x a y ve všech třech bodech (uvedených v kapitole 5.1) byl však zjištěn značný šum dat, který lze považovat za chybu měřícího sytému, protože při záměně kamer za kamery s vyšším rozlišením byla data méně rozkolísána a při nižších hodnotách celkové deformace bylo kolísání poměrově větší. I přes využití lepšího kamerového systému však musela být data závislosti $\varepsilon(t)$ v každém směru a pro každý bod aproximována.

Tyto aproximace byly provedeny pomocí funkce UnivariateSpline knihovny scipy.interpolate programovacího jazyka Python 2 a byly vzhledem k potřebě individuálního nastavení parametru s funkce UnivariateSpline časově náročné. Podrobný popis související s vyhlazováním a aproximací dat je popsán v příloze A této práce. Příklad takovéto aproximace lze vidět na obr. 20.



(a) Deformace ve směru hlavní tahové síly

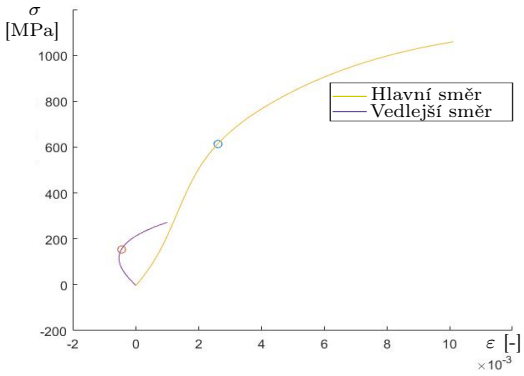


(b) Deformace kolmá na směr hlavní tahové síly

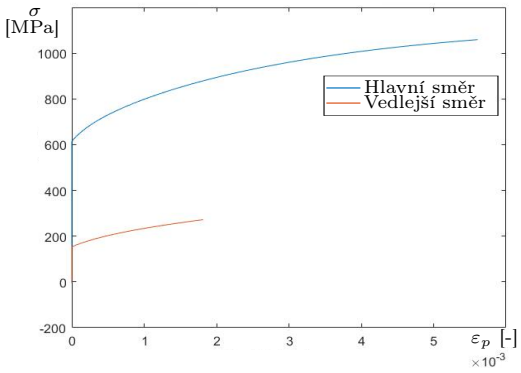
Obr. 20: Aproximace dat hladkými křivkami při zatížení poměrem sil 4 : 1 v bodě "3" dle normy [6]

U vyhodnocování plastické deformace v jednotlivých směrech nebylo možno efektivně využít vztah pro isotropní materiál, jako v případě modelu MKP, a to z důvodu různosti výsledků. Postup pro zjištění závislostí $\sigma(\varepsilon_p)$ byl tedy proveden dle již zmiňované normy [6] za pomoci vztahů (63) a (64). Pro upřesnění výsledků byl následně zaveden i předpoklad, že plastická deformace bude nulová v lineární elastické oblasti. Pro zjištění konstant C_x a C_y ve vztazích (63) a (64) byla použita varianta (c) z kapitoly 4.1. Ta však byla původně navržena pro jednoosý napjatostní stav a z tohoto důvodu byla využita vždy jen ve směru maximální tahové síly. Hranice oblasti v kolmém směru na směr maximální tahové síly byla určena pomocí předpokladu, že ke vzniku plastického stavu dochází v materiálu v jednom časovém okamžiku. Toto opatření bylo zavedeno z důvodu složitosti určování této hranice na křivkách, daných vztahem $\sigma(\varepsilon)$, kolmých na hlavní tahovou sílu při velmi nesymetrických poměrech zatěžování, jelikož hodnota sklonu lineární části křivky byla často i záporná a křivky často přecházely ze záporných hodnot deformace do kladných.

Na obr. 21 jsou znázorněny horní hranice elastické lineární oblasti pro jeden vzorek v hlavním směru (směru hlavní tahové síly) i vedlejším směru (směru kolmém na hlavní směr) a následná úprava křivek $\sigma(\varepsilon)$ na $\sigma(\varepsilon_p)$.



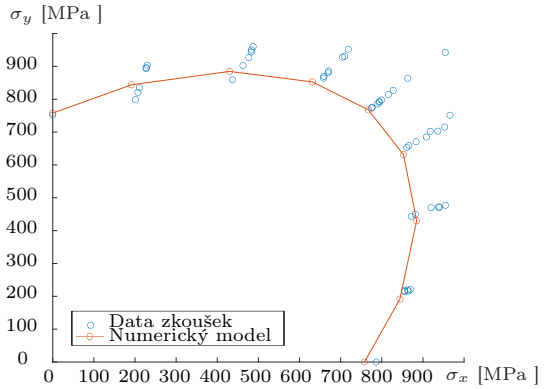
(a) Horní hranice elastických částí křivek



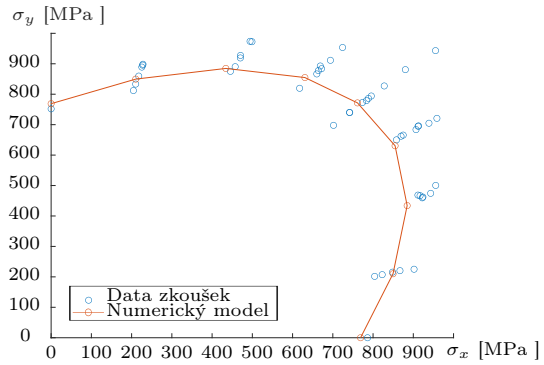
(b) Závislost $\sigma(\varepsilon_p)$ po úpravě křivek

Obr. 21: Horní hranice elastických částí křivek v hlavním směru a vedlejším směru a transformace na závislost $\sigma(\varepsilon_p)$ při silně nesymetrickém poměru zatěžování 4 : 1

Pro určení plochy pod každou křivkou danou vztahem $\sigma(\varepsilon_p)$ bylo využito numerické integrace pomocí lichoběžníkové metody. Následně byly plochy pod oběma křivkami sečteny a pro každý vzorek byl vynesen bod do roviny $\widehat{\sigma_x\sigma_y}$. Stejně jako v případě numerických simulací se výsledky v jednotlivých bodech tělesa příliš nelišily. Na obr. 22 je porovnání isočar plastické práce v bodě "1" a v bodě "3", který byl určen normou [6], s numericky vypočtenými hodnotami.



(a) Isočára plastické energie v bodě "1", středu tělesa

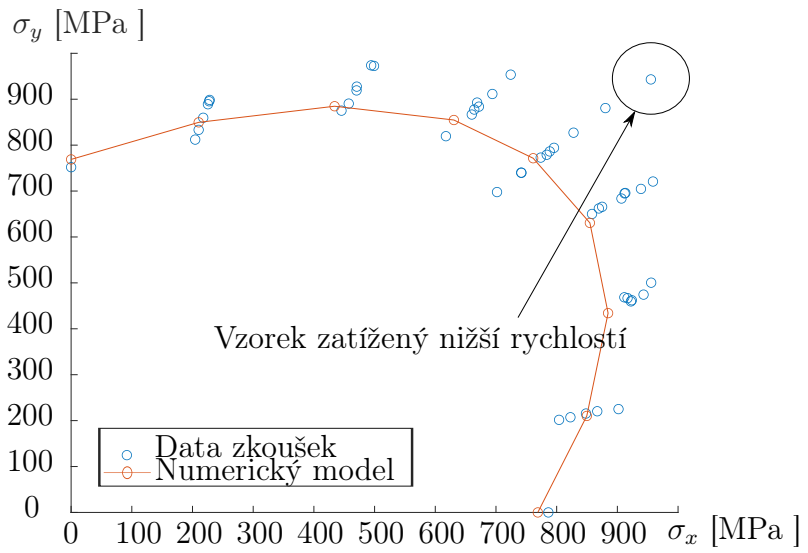


(b) Isočára plastické energie v bodě "3" dle normy [6]

Obr. 22: Porovnání experimentálních dat s numerickými výpočty pro volbu $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$

Lze si povšimnout faktu, že při namáhání tělesa ve tvaru kříže poměrem sil 0 : 1 jsou hodnoty meze kluzu vždy o trochu menší, než u jednoosé tahové zkoušky. Toto je pravděpodobně dáno rozdílnou geometrií těles. Dalším zjevným jevem je velký rozptyl experimentálních dat vůči numerickým hodnotám zvláště pak při poměru 1 : 1 a projevuje se více v bodě "3", daném normou. Tento rozptyl dat byl dán jak přirozenou statistickou odchylkou jednotlivých vzorků, tak extrémní citlivostí celého procesu na určení horní hranice lineární elastické oblasti materiálu, jelikož deformace materiálu byly příliš malé. Správné určení hranice elastické lineární oblasti a vhodná aproximace křivek skutečné deformace jsou tak pro určení izočár plastické práce a tím i plochy plasticity naprosto klíčové. I přes tento rozptyl lze s vysokou pravděpodobností říci, že plocha plasticity materiálu má jiný tvar, než ten, který udává von Misesovo kritérium.

Při experimentálním určení plochy plasticity bylo postupováno opět dle normy [6]. Zmiňovaná norma však nespecifikuje přesnou rychlost zatěžování a proto musela být volena. Jelikož byla tělesa ve tvaru kříže zatěžována nejvíce nesymetricky poměry 1 : 4 a 4 : 1, byl zvolen jeden díl roven 25 N/s. Při poměru sil 1 : 1 byla tedy rychlost zatěžování 100 N/s v obou směrech a např. při poměru 1 : 4 pak 25 : 100 N/s. Protože nebyla rychlost zatížení v normě specifikována přesně, byl jeden vzorek vyhodnocen nižší rychlostí zatěžování a byly pozorovány značně rozdílné výsledky. Jednalo se o vzorek zatěžovaný poměrem sil 1 : 1 a vykazoval výrazně vyšších hodnot napětí v obou směrech, než ostatní vzorky, viz obr. 23. Nelze však soudit, zda se jednalo právě o vliv rychlosti zatěžování, či nikoli, jelikož velkou roli v celkovém chování materiálu hrála i jeho šarže.

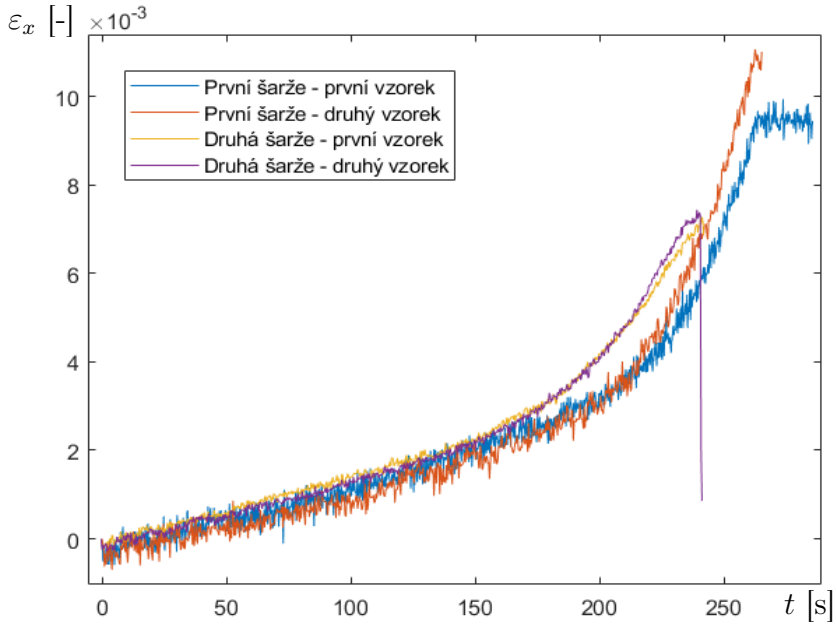


Obr. 23: Měření v bodě "1" vzorku, zatíženém rychlostí nižší než 100 : 100 N/s

5.5 Vliv šarže materiálu

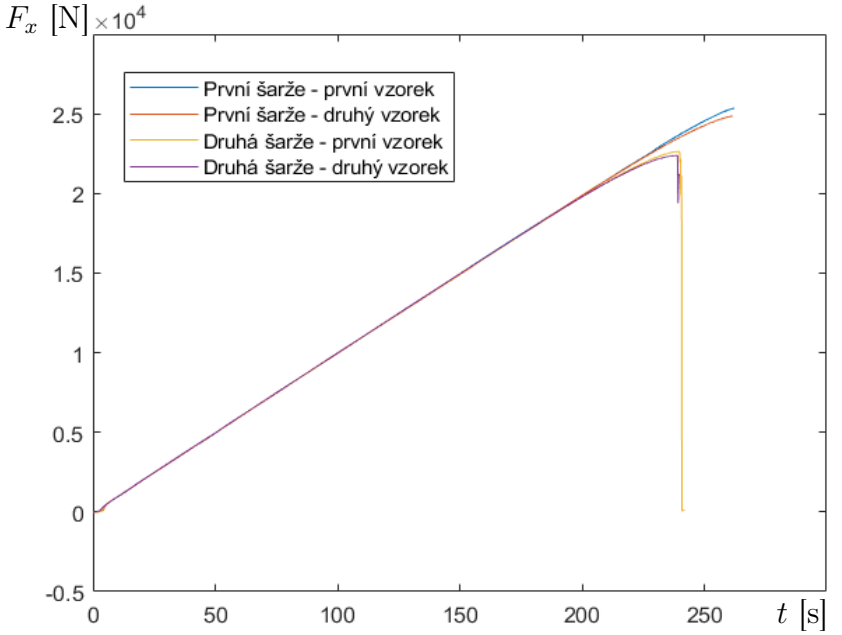
Z celkových 48 využitých vzorků ve tvaru kříže byl materiál dvou různých šarží (v dalším textu označeno jako šarže první a druhá). Obě šarže byly vyhodnocovány stejným způsobem popsaným normou [6]. Rozdíl mezi šaržemi však spočívá ve velkém rozptylu dat a vyšších hodnotách napětí v obou hlavních směrech na isočárách plastické práce první šarže zejména při symetrickém poměru tahových sil 1 : 1. Vliv šarže byl zkoumán i pro jednoosé zatěžování, ale nebyl nalezen významný rozdíl meze kluzu materiálu.

To lze vidět na obr. 24, který vyobrazuje, jako příklad, průběh deformace ve směru x v čase pro dva vzorky z různých šarží. Tato deformace byla měřena v bodě "3" stanoveném normou [6]. Materiál se stává podstatně rychleji plastickým a dochází k jeho narušení.



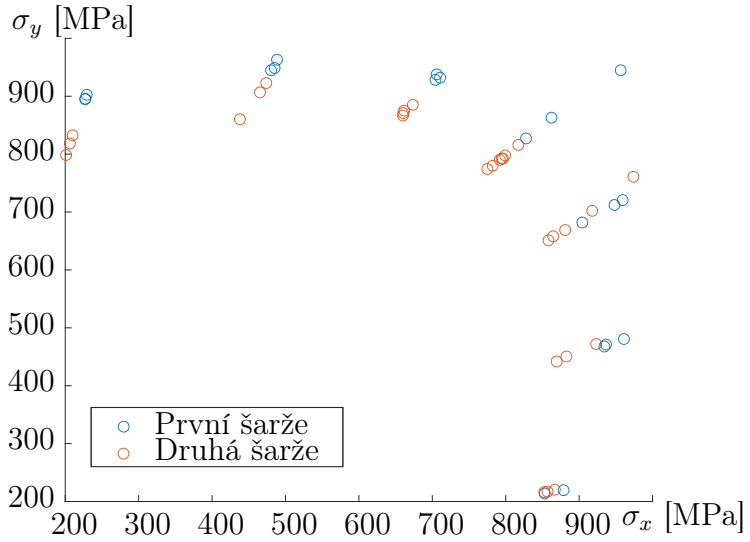
Obr. 24: Závislost $\varepsilon_x(t)$ dvou různých šarží při zatížení 1 : 1 v bodě "3" dle normy [6]

Tento efekt lze vidět ve všech zkoumaných bodech tělesa v obou směrech a nejedná se o chybu měření deformace. To lze potvrdit průběhem síly v ose x v čase, viz obr. 25, ze kterého je zjevné, že k porušení materiálu druhé šarže došlo podstatně dříve, než v případě šarže první.



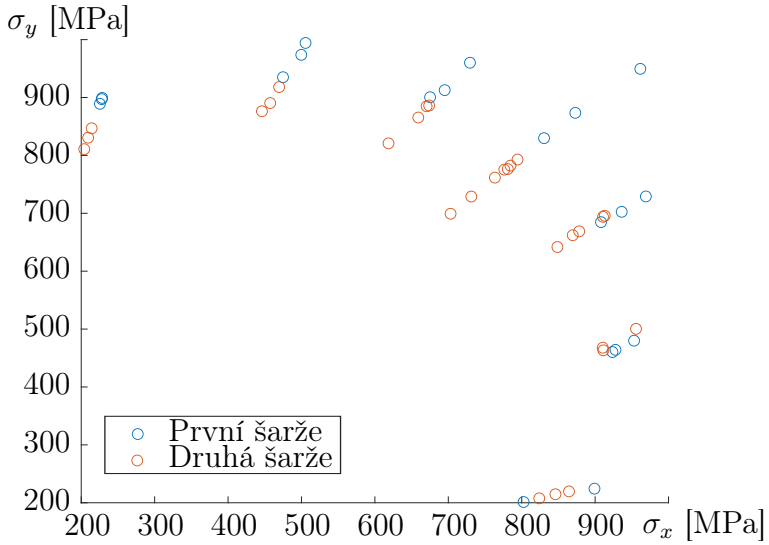
Obr. 25: Závislost $F_x(t)$ dvou různých šarží při zatížení 1 : 1

Při porovnání je patrné, že první šarže materiálu měla podobný tvar samotné plochy plasticity, jako druhá šarže. Na obr. 26 jsou body plochy plasticity pro každou šarži vyznačeny zvlášť. Deformace byly v tomto případě měřeny ve středu tělesa (v bodě "1").



Obr. 26: Isočáry plastické energie jednotlivých šarží v bodě "1" (středu tělesa) s volbou $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$

Z obr. 27 je zjevné, že skutečnost vyšších hodnot napětí se projevuje i v bodě "3" tělesa, který specifikuje norma [6]. Přestože v tomto bodě se vyskytují vyšší odchylky od numerických výpočtů i analyticky vyjádřené křivky, lze soudit, že plocha plasticity jednotlivých šarží materiálů je odlišná.



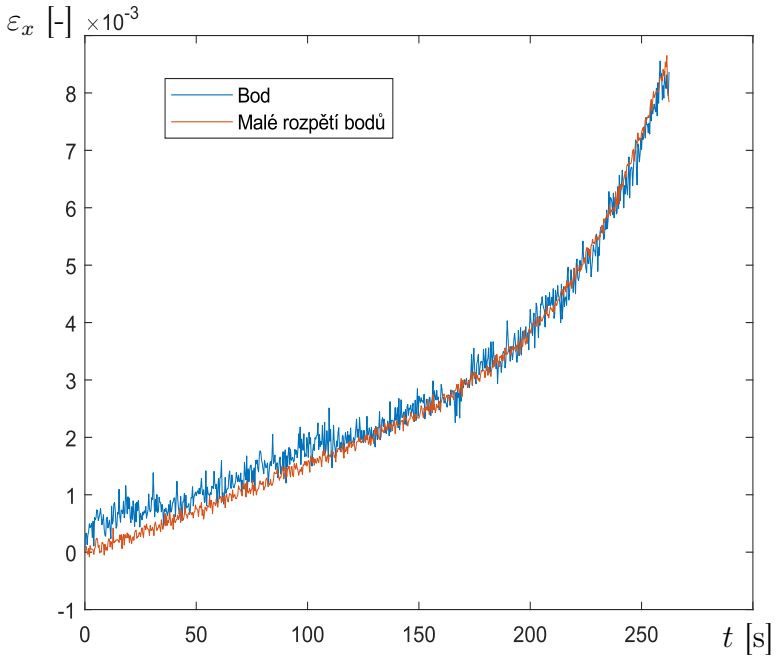
Obr. 27: Isočáry plastické energie jednotlivých šarží v bodě "3" (bodě dle normy [6]) s volbou $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$

5.6 Navrhované úpravy měření

Celý proces určování počáteční plochy plasticity, resp. isočáry plastické energie, pro ocel DP1000 byl velice zdlouhavý hlavně z důvodu nutnosti individuálního nastavení parametru pro aproximaci křivek deformací ve směrech x a y v příslušných bodech. Využitá testovací tělesa byla popsána v článku [32] spolu s dalšími alternativami zkušebních těles ve tvaru kříže. Tento článek označuje variantu využívanou v této práci za nejvhodnější, jak z hlediska rozložení plastické i elastické deformace v měřené oblasti, tak z hlediska průběhu napětí ve zkušebním tělese. Z tohoto důvodu je možné poměrně snadno provádět různé úpravy měření.

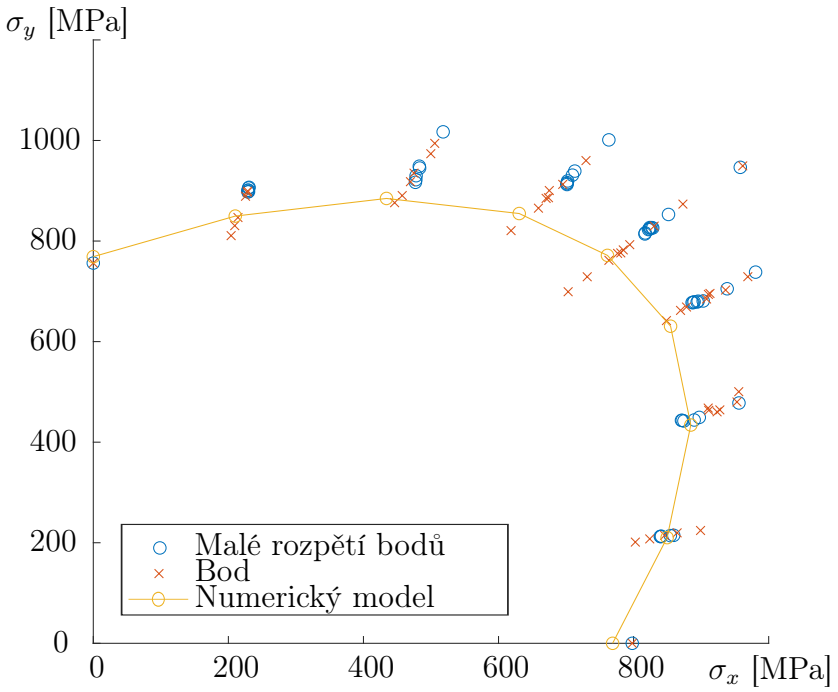
Pro každý ze zkoumaných bodů ("1", "2" i "3") byl šum, daný nejspíše nedostatečným rozlišením kamery, přibližně stejně velký (v absolutních hodnotách). Při zkoumání dvou bodů tělesa a jejich vzdálenosti se však křivky deformací značně liší. Analýzami měřené oblasti vzorku bylo zjištěno, že čím jsou dva zkoumané body dále od sebe, tím hladší je křivka deformace mezi body. Pro nahrazení křivek v jednom bodě bylo tedy využito dvou bodů, ležících na osách rovnoběžných s osami namáhání.

Norma [6] uvádí umístění dvouosého extenzometru v bodě "3". Vyhodnocení deformací v bodě "3" extenzometrem bylo proto nahrazeno deformacemi mezi dvěma body. Tyto body ležely na osách rovnoběžných s osami namáhání a byly ve vzdálenosti přibližně jednoho centimetru od bodu "3", čímž vznikl "reálnější popis" klasického extenzometru. Kvalita křivek $\varepsilon(t)$ za pomoci tohoto přístupu byla vyšší, než při vyhodnocení deformací přímo v bodě (příklad na obr 28).



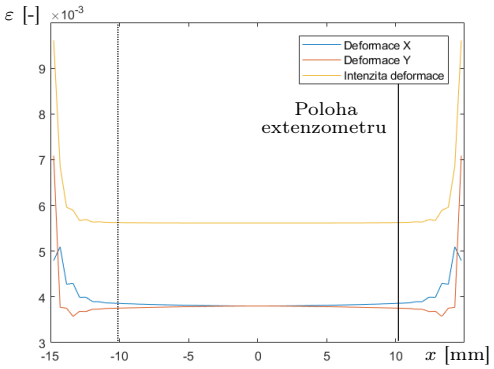
Obr. 28: Porovnání průběhu deformace ve směru x v bodě "3", a malého rozpětí bodů kolem bodu "3" pro vzorek zatěžovaný poměrem sil 4 : 3

I přes redukci šumu však kvalita a hladkost dat nebyla dostačující a data musela být opět aproximována. Tyto aproximace pak však lze považovat za vhodnější, protože výchylky dat měly nižší hodnoty. Proto lze takto získanou plochu plasticity považovat za přesnější, než při postupu získávání deformací z bodu. Tento postup však neeliminoval potřebu samotné aproximace dat a tak se proces určování plochy plasticity nijak nezrychlil, ani neusnadnil, ale pouze zpřesnil. Plochu plasticity vykreslenou po aproximaci těchto křivek lze vidět na obr. 29.

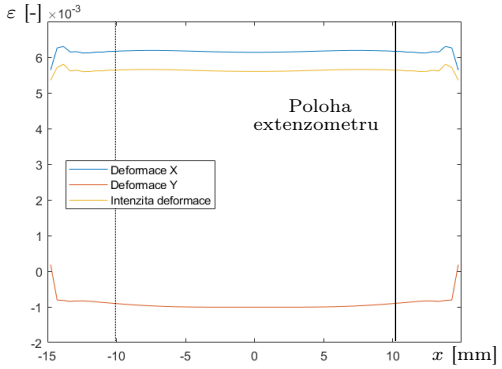


Obr. 29: Isočára plastické energie s volbou $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$ za pomoci malého rozpětí bodů okolo bodu "3"

Následně byla uvažována další varianta určování křivek deformací. Pro tento typ analýzy bylo ideální eliminovat smykové napětí měřením deformace na ose tělesa. Bylo tedy nutno popsat rozložení deformace na rovinách symetrie vzorku, aby mohla být zvolena možná vzdálenost bodů, která by nenarušovala charakter křivek deformace oproti charakteru křivek přímo v bodech daných normou [6], podobně jako v článku [21]. Rozložení deformace na osách získaných z numerického modelu, při zavedení souřadnice x od středu tělesa po ose symetrie x, lze vidět na obr. 30 (rozložení deformace na ose y má přesně opačný průběh deformací).



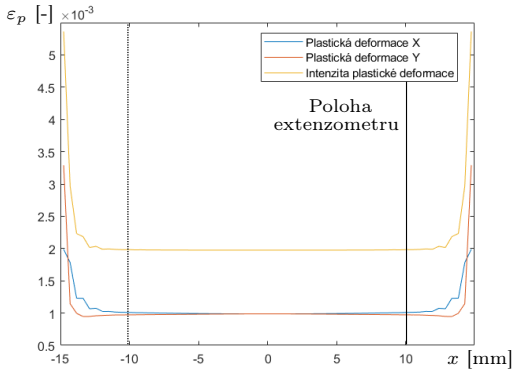
(a) Rozložení deformací podél osy x při poměru zatížení 1 : 1



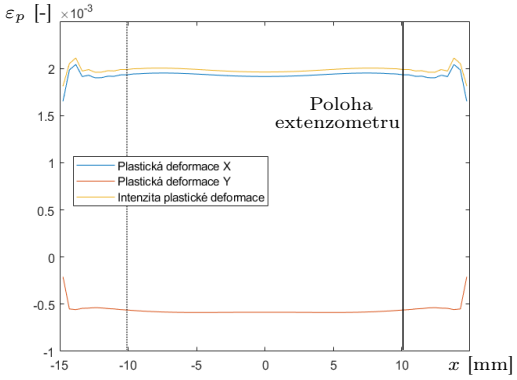
(b) Rozložení deformací podél osy x při poměru zatížení 4 : 1

Obr. 30: Průběh deformace při různých poměrech zatížení podél osy x na isočáře plastické práce s volbou $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$

Je zjevné, že bod specifikovaný v normě [6] se nachází na hranici konstantního průběhu deformace a rychlého nárůstu deformace na krajích měřené oblasti. Průběh plastické deformace je pak na obr. 31.



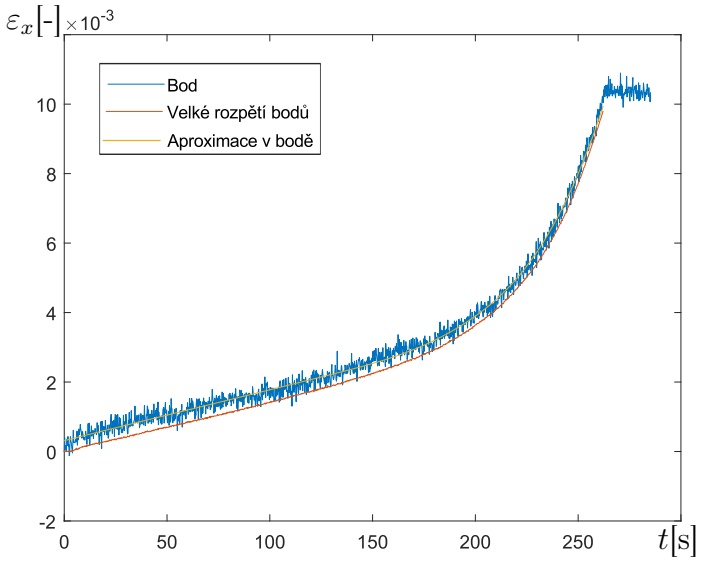
(a) Rozložení plastických deformací podél osy x při poměru zatížení 1 : 1



(b) Rozložení plastických deformací podél osy x při poměru zatížení 4 : 1

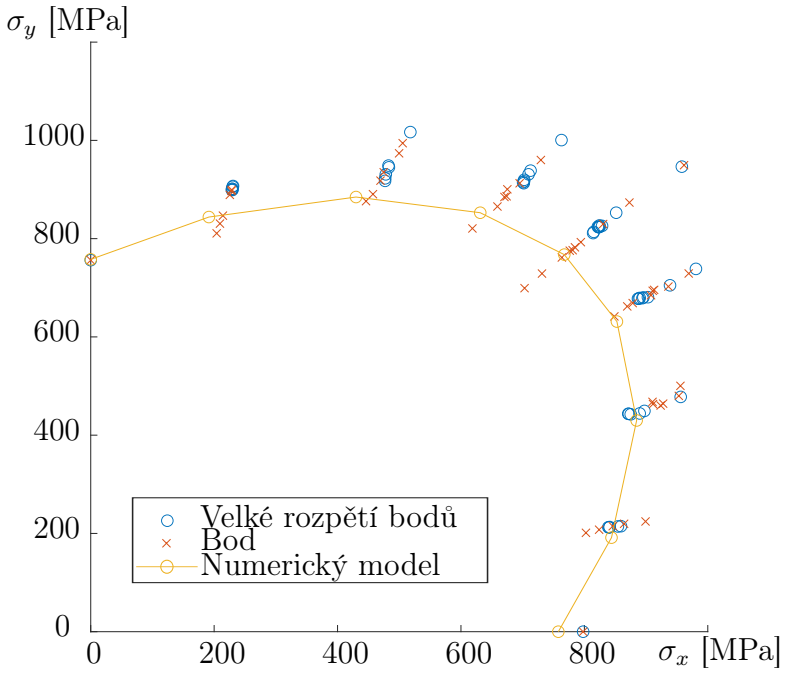
Obr. 31: Průběh plastické deformace při různých poměrech zatížení podél osy x na isočáře plastické práce s volbou $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$

Tvar těchto křivek je totožný s průběhem přirozené deformace a příliš se nemění pro všechny využité poměry zatížení z hlediska neměnnosti deformace v okolí středu tělesa. Z těchto pozorování lze vyvodit závěr, že měření lze provádět od bodu "3" extenzometru až k bodu symetrickému vůči středu (vzdálenost od středu je 10,5 [mm]). Na obr. 32 se nachází příklad průběhu deformace mezi těmito body v porovnání s daty získanými v bodě "3" a jejich aproximací.



Obr. 32: Porovnání průběhu deformace ve směru x, při zatížení poměrem sil 1 : 1, mezi dvěma body ve vzdálenosti 10,5 cm symetricky od středu tělesa, v bodě "3" a aproximace v bodě "3"

Takto zjištěné křivky obsahují velmi malý šum dat a za předpokladu následného výpočtu plochy pod křivkou lze tyto křivky integrovat přímo bez aproximací. Za pomoci tohoto přístupu byla zjištěna plocha plasticity materiálu, jak lze vidět na obr. 33.



Obr. 33: Isočára plastické energie s volbou $\varepsilon_{p0} = 0,2\%$ za pomoci velkého rozpětí bodů na osách symetrie tělesa

Při tomto přístupu jsou data na ploše plasticity velmi blízká datům, která byla získána za pomoci aproximace průběhu $\varepsilon(t)$ mezi dvěma body, vzdálenými 1 cm od bodu "3", kde jejich spojnice byly rovnoběžné s osami tělesa. Tento přístup tak lze doporučit jako nejvhodnější pro měření deformací při hledání počáteční plochy plasticity materiálu, kdy je těleso v průběhu zatěžování měřeno optickým systémem a dosahuje příliš malých deformací.

6 Závěr

Bylo úspěšně dosaženo všech cílů této práce. Pro získání meze kluzu materiálu DP1000 bylo třeba určit hranice lineární elastické oblasti pro určení Youngova modulu. Tato oblast byla vyhodnocena třemi různými způsoby v závislosti na mezi pevnosti materiálu, mezi kluzu materiálu a pomocí dvojího výpočtu měrné deformační energie. Za nejvíce vhodný byl označen energetický přístup, přestože se v praxi zatím nevyužívá, a bylo jím dosaženo výsledku $R_{p0,2} = 734,9$ [MPa]. U ostatních přístupů se pohyboval rozdíl vypočtené meze kluzu kolem 0,5%.

Dále byla vyhodnocena počáteční plocha plasticity materiálu pomocí biaxiálních tahových zkoušek dle normy ČSN ISO 1684. Byl vytvořen MKP model zkušebního tělesa s předpokladem isotropie materiálu, který odpovídal von Misesově podmínce plasticity. Data z tahových zkoušek pak byla porovnána s numerickými výpočty a i přes chybu měření a vliv daný aproximací lze tvrdit, že materiál se nechoval isotropně a plocha plasticity měla jiný tvar, než jaký popisuje von Misesovo kritérium. Rozdíl byl pak nejmarkantnější při zatížení poměrem sil 1 : 1, kde odchylka od numerických výpočtů dosahovala až 25%. Pro tento případ je však možné, že roli hrála i rychlosti zatěžování. Proto, pro případný budoucí výzkum by bylo vhodné pokusit se interpretovat výsledky za pomoci jiného kritéria, kterým lze popsat i anisotropii materiálu, např. Hillova kritéria a případně analyzovat tvar plochy plasticity v závislosti na rychlosti zatěžování.

V práci byla také věnována pozornost závislosti plochy plasticity materiálu na jeho šarži. Ta ovlivňovala jak tvar plochy plasticity, tak i velikosti odchylek mezi jednotlivými vzorky a její efekt byl nejlépe pozorovatelný při zatěžování poměrem sil 1 : 1. Byl řešen i problém aproximace dat získaných za pomoci optického systému v bodech tělesa, jelikož při malých deformacích materiálu docházelo k výraznému zkreslení výstupu měření šumem. Nakonec byl navržen alternativní způsob získávání těchto dat, aby nebylo nutné data aproximovat. Navržený postup spočíval v tom, že místo vyhodnocování deformací v bodech předepsaných normou byly deformace měřeny přes oblast, kde na základě numerických simulací vykazovaly deformace homogenní chování.

Příloha A - Aproximace křivek $\varepsilon(t)$ získaných v bodech

Při vyhodnocování křivek daných vztahem $\varepsilon(t)$ ve směrech x a y v bodech tělesa byl zjištěn značný šum dat, který lze považovat za chybu měřícího sytému. Tento šum se vyskytoval i při přístupu zjišťování deformace za pomoci malého rozpětí dvou bodů. Pro přesnější práci s danými závislostmi musela být tedy data aproximována. Tyto aproximace byly provedeny pomocí funkce UnivariateSpline knihovny scipy.interpolate programovacího jazyka Python 2, která umožní sadu dat aproximovat pomocí spline funkce při využití konečného počtu uzlů. Funkce byla využita ve tvaru

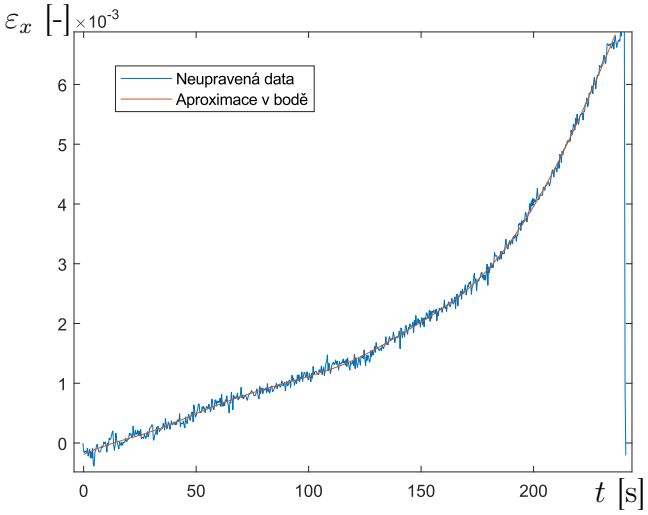
$$\text{spl} = \text{UnivariateSpline}(t, \varepsilon, s), \tag{67}$$

přičemž hledaný spline je po částech kubická funkce. První dva parametry t a ε reprezentují souřadnice pro vstupní data. Při výpočtech byly hodnoty ε normalizované tak, aby $\varepsilon \in [0, 1]$. Třetí vstupní parametr s zajišťuje míru vyhlazení křivky za pomoci zvyšování počtu uzlů kubického splineu. Počet uzlů je zvýšen za podmínky:

$$\sum_i [\varepsilon_i - \text{spl}(t_i)]^2 \leq s, \tag{68}$$

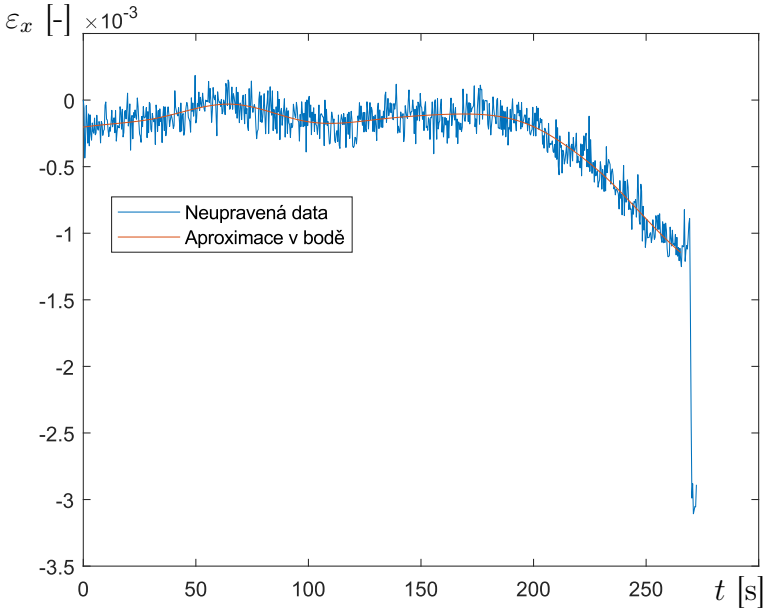
kde ε_i a t_i jsou i-té členy dat křivky $\varepsilon(t)$. Pokud je tedy parametr $s = 0$, pak probíhá interpolace skrz všechny body křivky a pokud je zvolena příliš vysoká hodnota tohoto parametru, aproximace je dána jednou kubickou funkcí přes celý rozsah dat.

Jak bylo již zmíněno, tento parametr se sice určoval vždy individuálně, ale pro efektivnější nalezení vhodné hodnoty byl vždy učiněn jeho odhad. Data byla po částech proložena parabolickou funkcí a dále byla vypočtena průměrná odchylka dat od této aproximace. Následně byl finální odhad parametru s určen jako průměr všech těchto částečných odchylek. Pro získání parametru s byl pak odhad dělen dle konkrétní potřeby hodnotami v rozmezí 0,8 až 50. Následně proběhlo opětovné převedení ze znormovaného tvaru křivky do absolutních hodnot. Příklad aproximace s poměrně nízkou volbou parametru s lze vidět na obr 34, kde v tomto případě jsou rozkmity dat relativně malé a proto není nutné volit vyšší hodnotu parametru s.



Obr. 34: Aproximace křivky dané vztahem $\varepsilon_x(t)$ v bodě pro poměr zatížení 1 : 1

Při silně nesymetrických poměrech zatížení byl šum dat ve směru kolmém na směr maximální tahové síly relativně velký. I přes tuto skutečnost bylo však nutno pro aproximaci zvolit parametr s takovým způsobem, aby vystihl skutečný tvar křivky. Na obr. 35 je příklad takovéto aproximace. Koncová data byla ve většině případů ignorována.



Obr. 35: Aproximace křivky dané vztahem $\varepsilon_x(t)$ v bodě pro poměr zatížení 1 : 4

Reference

[1] D. BANABIC, Sheet metal forming processes - Constitutive modelling and numerical simulation, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[2] R. BAPTISTA, R.A. CLAUDIO, L. REIS, J.F.A. MADEIRA, I. GUELHO, M. FREITAS, Optimization of cruciform specimens for biaxial fatigue loading with direct multi search. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Volume 80, 2015.

[3] R. M. CADDELL, R. S. RAGHAVA, A. G. ATKINS, Yield criterion for anisotropic and pressure dependent solids such as oriented polymers. Journal of Materials Science, Volume 8, 1973.

[4] L. CHEN, W. D. WEN, H. T. CUI, Generalization of Hill's yield criterion to tension-compression asymmetry materials. Sci China Tech Sci, 56: 89 97, 2013.

[5] C. A. COULOMB, Essai sur une application des regles des maximis et minimis a quelquels problemesde statique relatifs a la architecture. Mem. Acad. Roy. Div. Sav., Volume 7, 1776.

[6] ČSN ISO 16842, Kovové materiály - Plechy a pásy - Metoda zkoušení dvouosým tahem využívající zkušební těleso ve tvaru kříže. Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, Praha, 2015.

[7] ČSN EN ISO 6892-1, Kovové materiály - Zkoušení tahem - Část 1: Zkušební metoda za pokojové teploty. Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, Praha, 2010.

[8] N. DENG, T. KUWABARA, Y.P. KORKOLIS, Cruciform Specimen Design and Verification for Constitutive Identification of Anisotropic Sheets. Experimental Mechanics, Volume 55, 2015.

[9] V. S. DESHPANDE, N. A. FLECK, M. F. ASHBY, Effective properties of the octet-truss lattice material. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Volume 49, 2001.

[10] D. C. DRUCKER, W. PRAGER, Soil mechanics and plastic analysis for limit design. Quarterly of Applied Mathematics, Volume 10, no. 2, 1952.

[11] M. GOTOH, A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order (plane stress state) - I. International Journal of Mechanical Sciences, Volume 19, Issue 9, 1977.

[12] Y. HANABUSA, H. TAKIZAWA, T. KUWABARA, Numerical verification of a biaxial tensile test method using a cruciform specimen. Journal of Materials Processing Technology, Volume 213, Issue 6, 2013.

[13] A. HANNON, P. TIERNAN, A review of planar biaxial tensile test systems for sheet metal. Journal of Materials Processing Technology, Volume 198, Issues 1–3, 2008.

[14] R. HILL, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, New York, 1950.

[15] R. HILL, Theoretical plasticity of textured aggregates. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 85(1), 1979.

[16] M. KREJSA, L. LAUSOVÁ, V. MICHALCOVÁ. Pružnost a plasticita. V rámci projektu: Matematika pro inženýry 21. století. Ostrava, 2011-2012. Citováno dne 16. 3. 2022 ze stránky: http://fast10.vsb.cz/michalcova/Pruznost19/Skripta_pruznost_tisk.pdf.

[17] M. KURODA, V. TVERGAARD, Use of abrupt strain path change for determining subsequent yield surface: illustrations of basic idea. Acta Materialia, Volume 47, Issue 14, 1999.

[18] T. KUWABARA, S. IKEDA, K. KURODA, Measurement and analysis of differential work hardening in cold-rolled steel sheet under biaxial tension. Journal of Materials Processing Technology, Volumes 80–81, 1998.

[19] T. KUWABARA, M. KURODA, V. TVERGAARD, K. NOMURA, Use of abrupt strain path change for determining subsequent yield surface: experimental study with metal sheets. Acta Materialia, Volume 48, Issue 9, 2000.

[20] K.P. LI, W.P. CARDEN, R.H. WAGONER, Simulation of springback. International Journal of Mechanical Sciences, Volume 44, Issue 1, 2002.

[21] M. MERKLEIN, M. BIASUTTI, Development of a biaxial tensile machine for characterization of sheet metals. Journal of Materials Processing Technology, Volume 213, Issue 6, 2013.

[22] R. von MISES, Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. Göttin, Nachr. Math. Phys, 1913.

[23] F. PLÁNIČKA, Z. KULIŠ. Základy teorie plasticity. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2004. ISBN 80-01-02876-3.

[24] R. SERVÍT, E. DOLEŽALOVÁ, M. CRHA. Teorie pružnosti a plasticity I. Praha: SNTL, 1981.

[25] R. SERVÍT, Z. DRAHONOVSKÝ, J. ŠEJNOHA, V. KUFNER, Teorie pružnosti a plasticity II. Praha: SNTL, 1984.

[26] H. M. SONNE, B. KAISER. Bestimmung des Elastizitätsmoduls im Zugversuch - Determination of Young's modulus in tensile testing, Tagung Werkstoffprüfung. Nauheim, Friedberg, Německo, 1999.

[27] LI SUN, R. H. WAGONER. Complex unloading behavior: Nature of the deformation and its consistent constitutive representation. International Journal of Plasticity, Volume 27, 2011.

[28] S. SUTTNER, M. MERKLEIN, A new approach for the determination of the linear elastic modulus from uniaxial tensile tests of sheet metals. Journal of Materials Processing Technology, Volume 241, 2017.

[29] Š. SYCHROVÁ. Studie nárazu dopravního prostředku do stavební konstrukce. Diplomová práce. VUT v Brně, 2013.

[30] S. ŠMIŘÁK. Pružnost a plasticita I: pro distanční studium. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-7204-468-0.

[31] H. TRESCA, Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions. C. R. Acad. Sci. Paris, Volume 59, 1864.

[32] M.V. UPADHYAY, T. PANZNER, S. Van PETEGEM, H. Van SWYGENHOVEN, Stresses and Strains in Cruciform Samples Deformed in Tension. Experimental Mechanics, Volume 57(6), 2017.

[33] L. WAGNER, M. WALLNER, P. LAROUR, K. STEINDER, R. SCHNEIDER, Reduction of Young's modulus for a wide range of steel sheet materials and its effect during springback simulation. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 1157, 2021.

[34] R.H. WAGONER, Sheet springback. Continuum Scale Simulations of Engineering Materials, Fundamentals – Microstructures – Press Applications. Wiley-VCH, Weinheim, 2004.

[35] R. H. WAGONER, H. LIM, M.-G. LEE, Advanced Issues in springback. International Journal of Plasticity, Volume 45, 2013.