Synchronizace chaotických oscilátorů

Jiří Lahoda

Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací, Západočeská univerzita v Plzni

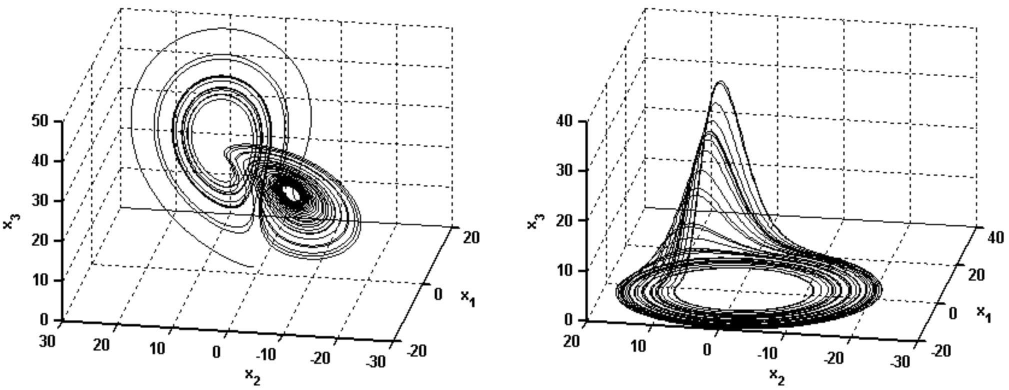
Synchronisation of chaotic oscillators

Abstract

In this paper, there is a possibility of nonlinear dynamic systems control described. A synchronisation of two coupled chaotic oscillators based on the state reconstruction is presented. As an example the well known Lorenz system was chosen and the same method of synchronisation was applied on the Rössler system as well.

Úvod

V současné době je známa celá řada dynamických systémů, které v závislosti na velikosti parametrů vykazují neperiodické oscilace. Jedna třída systémů generuje chaotické průběhy jako důsledek nepravidelného střídání intervalů stability a nestability [1], kdy se trajektorie systému pohybuje okolo jediného rovnovážného stavu, jehož stabilita se neperiodicky mění v závislosti na pohybu vektoru stavu ve stavovém prostoru. Studovány jsou dále systémy s nelinearitou typu hysterezní smyčky, kde jsou chaotické oscilace vyvolány změnami polohy nestabilního rovnovážného stavu v prostoru [2]. Dalším typem chaotických systémů jsou takové systémy, které mají více rovnovážných stavů, z nichž některé mohou být stabilní, a vektor stavu se pohybuje mezi nimi. Typickými příklady jsou Lorenzův a nebo Rösslerův systém, jejichž chaotické atraktory jsou znázorněny na obr. (1).

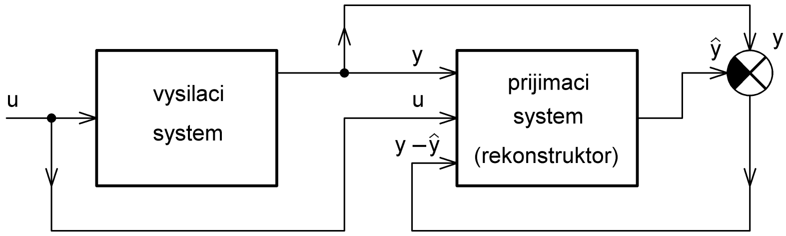


Obrázek 1.: Chaotické atraktory, vlevo Lorenzův, vpravo Rösslerův

Systém dvou vázaných chaotických oscilátorů

Vzhledem k tomu, že chaotické trajektorie jsou dlouhodobě nepredikovatelné, uvažuje se nad jejich využitím v zabezpečené komunikaci [3]. Jeden systém vystupuje v roli vysílače chaotické nosné vlny, na kterou je namodulován přenášený užitečný signál. Případný neoprávněný příjemce by bez detailní znalosti vysílajícího sytému neměl být schopen užitečný signál zrekonstruovat. Druhý systém pak představuje přijímač, a na základě rekonstrukce stavu vysílače bude separovat užitečný signál od chaotického průběhu.

Důležitým bodem je v takovém případě možnost synchronizace přijímacího systému se systémem vysílajícím. Přijímací systém je ve funkci rekonstruktoru stavu vysílače. Oba systémy sice mají totožné parametry, avšak jejich trajektorie vycházejí z různých počátečních podmínek. Blokové schema využití rekonstruktoru stavu je na následujícím obrázku (2).



Obrázek 2.: Blokové schema soustavy dvou vázaných systémů

Vysílací a přijímací systémy jsou popsány rovnicemi (1):

$$\begin{aligned} &\textit{vysílač}: && \textit{rekonstruktor}: \\ &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u && \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{H}(y - \hat{y}) = (\mathbf{A} - \mathbf{H}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{H}y \\ &y = \mathbf{C}\mathbf{x} && \hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{1}$$

Dynamika přijímacího systému je ovlivňována rozdílem mezi výstupní hodnotou systému vysílače a výstupem z přijímacího systému s vahou danou maticí **H**. Jak je patrné z úpravy rovnice pro rekonstruktor, vlastní čísla matice dané výrazem **A**–**HC** musí být záporná, jinak by trajektorie rekonstrukčního systému divergovala.

V následujících experimentech rozdělíme chaotický systém na dva podsystémy, totiž na jeho lineární a nelineární část, danou maticí **A**, resp. funkcí **f**. Pak popíšeme vysílač a rekonstruktor následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} &\textit{vysílač}: && \textit{rekonstruktor}: \\ &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, y) && \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, y) + \mathbf{H}(y - \hat{y}) \\ &y = \mathbf{C}\mathbf{x} && \hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \tag{2}$$

Vazba z vysílače je vedena právě do nelineární části rekonstruktoru, jehož úkolem je docílit nulového rozdílu mezi výstupem vysílače a výstupem svým.

Synchronizace dvou vázaných Lorenzových systémů

Lorenzův systém tří diferenciálních rovnic je patrně nejznámějším chaotickým systémem. V případě, že mají dva systémy zcela totožné parametry, avšak nejsou spolu nijak vázány, se jejich trajektorie vycházející z různých počátečních podmínek naprosto odlišují, viz obrázek (3). V případě vazby mezi nimi se však podaří docílit synchronizace, tj. rekonstruktor věrně reprodukuje trajektorii vysílajícího systému, viz obrázek (4). Rovnice klasického Lorenzova systému byly při tom upraveny do formy (3), (4).

vysílač

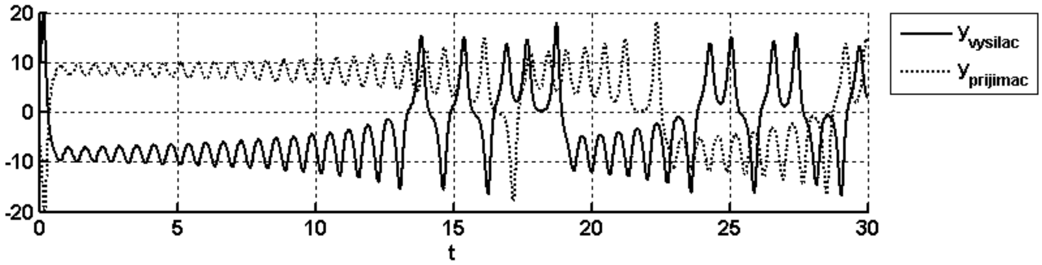
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & s & 0 \\ \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -yx_3 \\ yx_2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

rekonstruktor : (4)

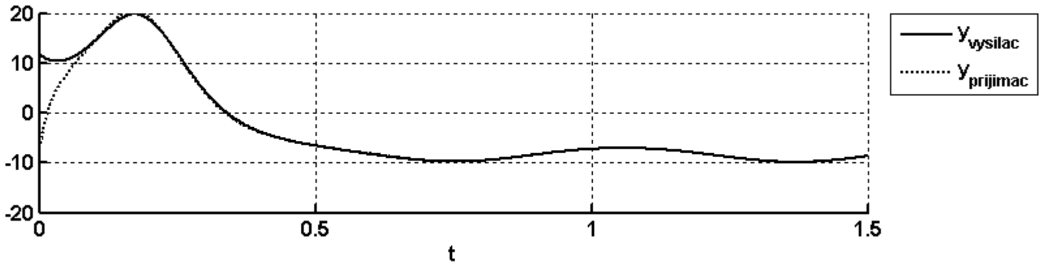
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-s & s & 0\\ \gamma & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ -y\hat{x}_3\\ y\hat{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}(y-\hat{y}) \qquad \hat{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}$$

$$s=10,\ \gamma=28,\ b=8/3,\ \mathbf{H}=\begin{bmatrix}30 & 28 & 0\end{bmatrix}^T\ \mathbf{x_0}=\begin{bmatrix}12 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\ \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{0}=\begin{bmatrix}-8 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \qquad (5)$$

Parametrizace systému je taková, aby generoval chaotické průběhy. Parametrizace matice **H** pak vychází z požadavku, aby byla vlastní čísla matice **A** – **HC** záporná.



Obrázek 3.: Chaotické průběhy dvou Lorenzových systémů bez vazby



Obrázek 4.: Synchronizace dvou Lorenzových systémů, detail počátku průběhu

Jak je patrné z uvedených grafů, popsaný způsob synchronizace chaotických oscilátorů je velmi rychlý a rekonstrukční systém je schopen sledovat výstup vysílače.

Synchronizace dvou vázaných Rösslerových systémů

Rösslerův systém je rovněž dán soustavou tří diferenciálních rovnic, v simulačních experimentech byly použity ve formě (6), (7) s parametrizací (8).

vysílač (6)

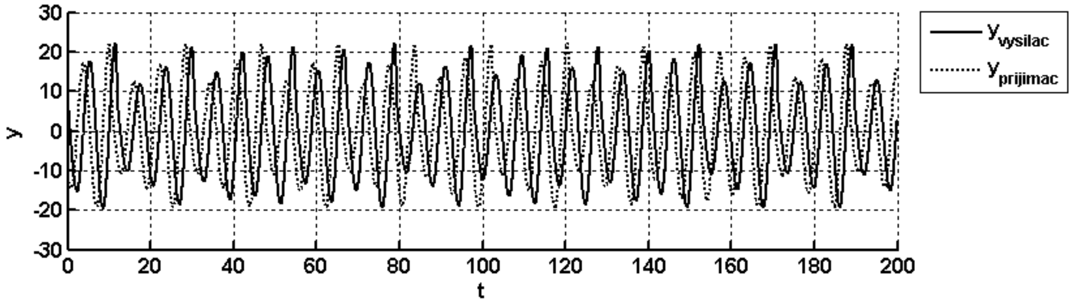
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & -c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ yx_3+b\end{bmatrix} \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

rekonstruktor : (7)

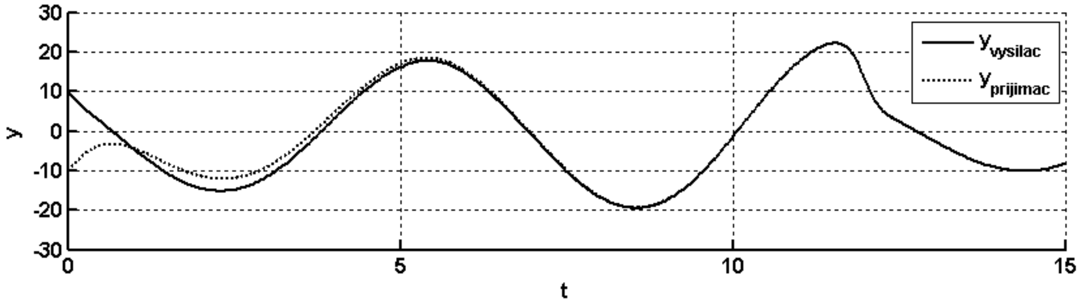
$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & a & 0\\ 0 & 0 & -c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ y\hat{x}_3+b\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{bmatrix}(y-\hat{y}) \qquad \hat{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}$$

$$a = 0.1,\ b = 0.1,\ c = 14,\ \mathbf{H} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\ \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix}10 & 10 & 10\end{bmatrix}^T, \hat{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix}-10 & 10 & 10\end{bmatrix}^T \qquad (8)$$

Výsledky provedených experimentů jsou uvedeny na obrázcích (5) a (6). I zde je schopnost synchronizace přijímací části zřejmá.



Obrázek 5.: Chaotické průběhy dvou Rösslerových systémů bez vazby



Obrázek 6.: Synchronizace dvou Rösslerových systémů, detail počátku průběhu

Závěr

Z uvedených experimentů je zřejmé, že systémy vykazující chaotické oscilace je možné vázat a synchronizovat. Provedené experimenty se týkají systémů s několika rovnovážnými stavy ve stavovém prostoru. Lorenzův systém má tři nestabilní rovnovážné stavy, Rösslerův pak jeden nestabilní a dva stabilní. V příspěvku popsaná metoda synchronizace dvou chaotických systémů se pro třídu systémů s jediným rovnovážným stavem zatím nejeví jako použitelná, zde je prostor pro další zkoumání.

Literatura

[1] Lahoda, J.: Nelineární dynamické systémy s nelinearitou v disipačním parametru. Elektrotechnika a informatika 2007. Část 2., Elektronika. V Plzni: Západočeská univerzita, 2007. ISBN 978-80-7043-571-7

[2] Lahoda, J.: Mechanism of Non-Linear and Chaotic Oscillations Occurence. AMTEE'07. Section II. V Plzni: Západočeská univerzita, 2007. ISBN 978-80-7043-564-9

[3] Kálal, V.: Synchronizace chaosu pro aplikace v zabezpečených komunikačních systémech, V Plzni: Západočeská univerzita, 2008. Diplomová práce.