ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Vztahy v reálném světě jako binární relace

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zuzana Pinkrová
Matematická studia – matematika, technická výchova

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2022

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 28. 06. 2022

vlastnoruční podpis

Tímto bych chtěla poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce,
PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za odborné vedení, věcné připomínky, za pomoc a rady při zpracování této práce.

OBSAH

ÚVOD 5
1 TEORETICKÁ ČÁST 6
1.1 POJEM MNOŽINA 6
1.2 USPOŘÁDANÁ DVOJICE 6
1.3 KARTÉZSKÝ SOUČIN 8
1.4 VLASTNOSTI KARTÉZSKÉHO SOUČINU 10
1.5 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ KARTÉZSKÉHO SOUČINU 10
1.6 BINÁRNÍ RELACE 15
1.7 ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY BINÁRNÍCH RELACÍ 16
1.8 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ RELACÍ 18
1.9 VLASTNOSTI BINÁRNÍ RELACE 23
1.10 ROZKLAD MNOŽINY NA TŘÍDY 29
2 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY 34
2.1 RODINNÉ DRAMA 34
2.2 RŮZNÉ HRY 37
2.3 POKÉMONI 41
2.4 MĚSTSKÁ HROMADNÁ DOPRAVA 44
3 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY 47
3.1 HRY 47
3.2 DOPRAVA 47
3.3 ZAMĚSTNÁNÍ 47
3.4 PŘÁTELSTVÍ 47
3.5 OSTATNÍ 48
ZÁVĚR 49
RESUMÉ 50
SEZNAM LITERATURY 52
SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ 54
REFERENCE OBRÁZKŮ: 55
PŘÍLOHY I
SEZNAM PŘÍLOH VI
REFERENCE PŘÍLOH: VII

ÚVOD

Vztahy v reálném světě jako binární relace – jak název sám o sobě vypovídá, v této bakalářské práci se budeme především zabývat různými vztahy, které pochází ze světa, který nás dennodenně obklopuje. Tyto vztahy pak budeme následně matematicky zkoumat pomocí vlastností binárních relací. Binární relace je, zjednodušeně řečeno, nějaký konkrétní vztah zkoumaný na předem určené množině.

Bakalářskou práci pod tímto názvem jsem si vybrala hned z několika důvodů. Prvním z nich byl samotný fakt, že jsem chtěla vypracovat něco originálního, ale zároveň práci takovou, aby se nějakým způsobem dotýkala každého z nás (včetně jedinců, které matematika nikdy neuchvátila). Dalším důvodem byl i fakt, že z mého úhlu pohledu existuje poměrně malé množství literatury, které se zabývá obecně binárními relacemi, a ještě méně zdrojů zkoumající reálné vztahy jako binární relace.

Náplň této práce je velmi prostá. Napsat bakalářskou práci takovou, aby mohla studentům matematiky, na vysokých školách, přiblížit celkově téma binárních relací, ale zároveň aby sloužila jako dobrý pomocný učební text, nebo sbírka příkladů (například k předmětu elementární algebra, kde se studenti s tímto tématem setkávají). Souběžně pak druhou důležitou náplní bylo napsat práci tak, aby i naprostý laik mohl sledovat, že nás matematika všudypřítomně obklopuje.

V první části se budeme věnovat především teorii, konkrétně tedy vymezením základních pojmů, jako je uspořádaná dvojice, kartézský součin, nebo pak samotné binární relace a jejich vlastnosti. Všechny definice jsou zároveň doplněny o ukázkové příklady.

Druhou část pak budeme věnovat konkrétním řešeným úlohám. Tedy vezmeme několik reálných vztahů, u kterých se budeme snažit určit jejich vlastnosti, respektive již zmíněné vlastnosti binárních relací. Bude se jednat o příklady z rodinných kruhů, jako vztahy „být sourozencem“ nebo „být rodičem“, ze světa deskových a počítačových her, například o hry jako je „Kámen, nůžky, papír“ nebo „Prší“. A nakonec se podíváme na vlastnosti relací městské hromadné dopravy, konkrétně té plzeňské.

V poslední části této práci jen zmíníme ještě několik dalších příkladů vztahů v reálném světě, u kterých bychom mohli zjišťovat vlastnosti relací. Tyto příklady budou neřešené.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 POJEM MNOŽINA

Jedním ze základních pojmů v matematice, které budeme k definování binárních relací potřebovat, je pojem množina.

Jestliže máme jistý soubor prvků, tak označení pro jejich celek chápeme jako množinu. Množina pak může obsahovat různý počet objektů (prvků množiny), který může být v důsledku jak konečný (například písmena v abecedě), tak i nekonečný (množina všech reálných čísel). Speciálním případem množiny je množina prázdná neboli ta, která neobsahuje žádné prvky. [1]

Množinu pak většinou značíme velkým tiskacím písmenem (např. A, N, M, P). Nyní si uveďme příklady množin:

- Množina všech písmen obsažených ve slově matematika → M= {a, e, i, k, m, t}.
- Množina všech sudých čísel → N = {2, 4, 6, 8, 10, 12, …} – nekonečná množina.
- Množina čísel větších než 30 ale menších než 35 → T = {31, 32, 33, 34}.
- Množina všech studentů v jedné třídě → {Marek, Adéla, Jan, Eliška, Anna, …}.

1.2 USPOŘÁDANÁ DVOJICE

Další nedílnou složkou definování pojmu binární relace, je pojem uspořádané dvojice.

DEFINICE 1.2.1.: Uspořádanou dvojicí prvků tedy rozumíme množinu (a, b), kterou definujeme pomocí vztahu (a, b) = {{a}, {a, b}}, kdy prvkem *a* označujeme první složku a prvkem *b* druhou složku. Následně množina {a, b} udává složky uspořádané dvojice (a, b), množinou {a} pak označujeme, kterou z těchto složek, chápeme jako tu první. ([2], s. 12)

Jinými slovy, z vlastní zkušenosti víme, že z hlásek o a d můžeme sestavit dvě různá slova, kdy záleží na pořadí zvolených hlásek (od nebo do). To samé pak můžeme provést i s čísly. Pokud si vezmeme číslice 5 a 6, jsme s jejich pomocí schopni vytvořit čísla 56 a 65.

Podle definice můžeme nyní tyto dvojice uspořádat:

(o, d) = {{o}, {o, d}} = {{o}, {d, o}}

(d, o) = {{d}, {d, o}} = {{d}, {d, o}}

(5, 6) = {{5}, {5, 6}} = {{5}, {6, 5}}

(6, 5) = {{6}, {6, 5}} = {{6}, {5, 6}}

Z těchto zápisů lze pochopit, které prvky jsou v dané dvojici těmi prvními, a ze kterých prvků se tyto dvojice skládají. Díky tomu můžeme nakonec zapsat tyto rovnosti:

{o, d} = {d, o},

{5, 6} = {6, 5},

tyto množinové rovnosti platí vždy, pokud obě příslušné množiny obsahují tytéž prvky.

Pro libovolné dvě uspořádané dvojice prvků pak následně platí:

VĚTA 1.2.2.: Mějme dvojice uspořádaných prvků (a, b) a (c, d), pak platí:

1) $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$
2) $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \land b=d$

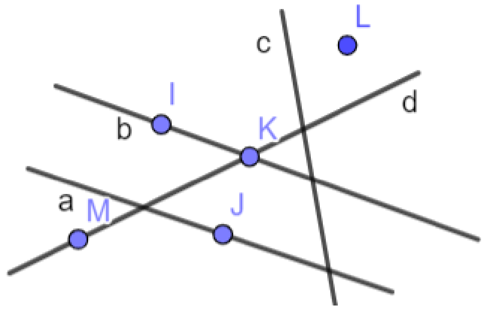
První bod uvádí, že pokud jsou prvky *a*, *b* různé, pak i jejich uspořádané dvojice (a, b) a (b, a) jsou rozdílné. Druhý bod pak popisuje, že pokud se sobě rovnají dvě uspořádané dvojice, pak se sobě rovnají i jejich složky (jak první, tak druhé). ([3], s.12)

Nyní si pro názornost uveďme několik příkladů:

PŘÍKLAD 1.2.3.: Zapište množinu (D) všech uspořádaných dvojic, kdy prvek množiny M je jejich první složkou a druhou složkou pak je prvek množiny P. M = {x, y, z, t}; P = {k, l, m}.

Řešení: D = {(x, k), (x, l), (x, m), (y, k), (y, l), (y, m), (z, k), (z, l), (z, m), (t, m), (t, l), (t, m)}.

PŘÍKLAD 1.2.4.: Dle obrázku 1 vypište všechny uspořádané dvojice, kdy první složkou bude název přímky a druhou pak její příslušné body:



Obrázek 1 – přímky k úloze 1.2.4. (zdroj: vlastní)

Řešení: M = {(a, J), (b, I), (b, K), (d, K), (d, M)} – na přímce c neleží žádný bod, Bod L neleží na žádné přímce, proto se nevyskytují v žádné uspořádané dvojici.

Dle této kapitoly již víme, že složené závorky {} používáme pro zápis množiny, zatímco kulaté závorky () používáme pro zápis uspořádaných dvojic.

Stejným způsobem, jako jsou definované uspořádané dvojice, můžeme definovat i uspořádané n-tice.

1.3 KARTÉZSKÝ SOUČIN

Nyní se dostáváme k zásadnímu pojmu, kterým je kartézský součin. Celý koncept „kartézský" je odvozen od formulace analytické geometrie francouzského matematika, filozofa a přírodovědce Reného Descarta. Descartes žil v první polovině 17. století. Jeho známý výrok „myslím, tedy jsem" (Cogito, ergo sum) započal nový filozofický systém založený na racionalismu, rozvíjející metodu dedukce. Zároveň v matematice je považován za jednoho ze zakladatelů analytické geometrie. ([4], s.22)

DEFINICE 1.3.1.: Pokud máme dvě libovolné množiny A, B, lze z nich vytvořit A × B – kartézský součin množin A, B, který je definovaný vztahem:

$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}$. ([5], s.52)

Tento zápis pak čteme tak, že kartézský součin množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic (a, b), pro které platí, že *a* je prvkem množiny A, *b* je prvkem množiny B. ([6], s. 2)

VĚTA 1.3.2.: Z definice kartézského součinu dále vyplývá, že pro libovolné množiny A, B platí:

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset.$$

To znamená, že pokud je množina A nebo B prázdná, pak je prázdná i množina kartézského součinu A × B. ([5], s. 52)

Nyní si uveďme několik příkladů pro pochopení:

PŘÍKLAD 1.3.3.: Mějme množiny E = {1, 3, 5, 8} a F = {a, b}. Určete tyto kartézské součiny: E×F, E×E, F×E.

Řešení: E×F = {(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (5, a), (5, b), (8, a), (8, b)}.

E×E = {(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 8), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 8), (5, 1), (5, 3), (5, 8), (8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 8)}.

F×E = {(a, 1), (a, 3), (a, 5), (a, 8), (b, 1), (b, 3), (b, 5), (b, 8)}.

PŘÍKLAD 1.3.4.: Mějme uspořádané dvojice: (o, u), (p, w), (q, q), (p, v), (o, w), (w, v), (r, u), (r, w), (u, o), (o, v), (p, u), (v, t). Rozhodněte, které z dvojic patří do kartézského součinu G×H a které ne. G = {o, p, q, r,} a H = {u, v, w}.

Řešení: Dvojice (o, u), (p, w), (p, v), (o, w), (r, u), (r, w), (o, v), (p, u) do kartézského součinu G×H patří.

Dvojice, které do kartézského součinu G×H nepatří, jsou: (q, q), protože $q \notin H$; (w, v) protože $w \notin G$; (u, o) protože $u \notin G$ a $o \notin H$; (v, t), protože $t \notin H$.

1.4 VLASTNOSTI KARTÉZSKÉHO SOUČINU

Nyní se podíváme vlastnostem kartézského součinu.

i) $A \times (B_1 \cup B_2) = (A \times B_1) \cup (A \times B_2)$

$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$

ii) $A \times (B_1 \cap B_2) = (A \times B_1) \cap (A \times B_2)$

$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$

iii) $A \times (B_1 - B_2) = (A \times B_1) - (A \times B_2)$

$(A_1 - A_2) \times B = (A_1 \times B) - (A_2 \times B)$

iv) $A \subseteq A_1 \wedge B \subseteq B_1 \Rightarrow A \times B \subseteq A_1 \times B_1$. ([5], s. 52)

Ad i) Tuto množinovou rovnost nazýváme distributivností kartézského součinu vzhledem ke sjednocení (na prvním řádku zprava, na druhém pak zleva).

Ad ii) Tuto množinovou rovnost nazýváme distributivností kartézského součinu vzhledem k průniku (na prvním řádku zprava, na druhém pak zleva).

Ad iii) Tuto množinovou rovnost nazýváme distributivností kartézského součinu vzhledem k rozdílu (na prvním řádku zprava, na druhém zleva).

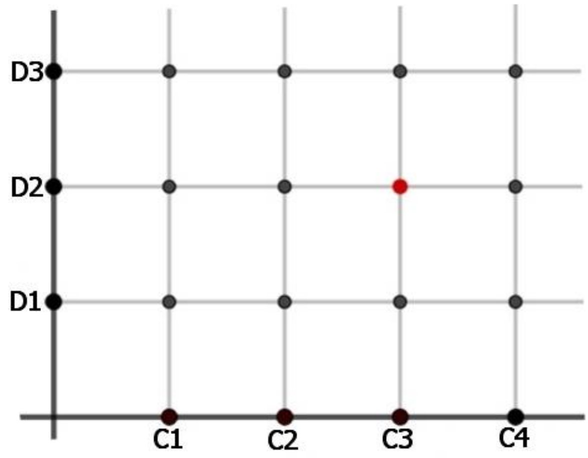
Ad vi) Pokud je A podmnožinou množiny A_1 a B podmnožinou množiny B_1, pak i jejich kartézský součin $A \times B$ je podmnožinou kartézského součinu $A_1 \times B_1$. ([7], s. 7-8) 0

1.5 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ KARTÉZSKÉHO SOUČINU

Nyní si představíme tři různé způsoby, kterým je možné znázornit kartézský součin.

a) Kartézský graf $C \times D$:

- Jako první si zvolíme dvě přímky (kolmice), většinou vodorovnou a svislou.
- Následně na vodorovné přímce (říkejme jí osa x) vyobrazíme jako body všechny prvky množiny C.
- Stejně tak na svislé přímce (říkejme jí osa y) znázorníme všechny prvky z množiny D jako body.
- Následně každým bodem vedeme kolmice – Body z množiny C povedeme kolmice k ose x; body z množiny D povedeme kolmice k ose y.
- Nyní označíme všechny průsečíky kolmic. Tyto průsečíky jsou obrazem prvků kartézského součinu $C \times D$ → uspořádané dvojice $(x, y) \in C \times D$.



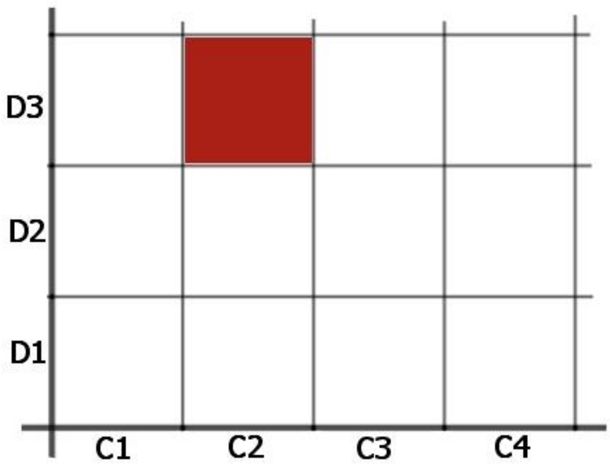
Obrázek 2 – kartézský graf (zdroj: vlastní)

C = {C1, C2, C3, C4}; D = {D1, B2, D3}.

Červeně vyznačený bod je obraz uspořádané dvojice (C3, D2). ([7], s. 9-10)

b) Šachovnicový graf C × D:

- Nejprve si zvolíme kolmice (například svislou a vodorovnou).
- Následně znázorníme jednotkové úsečky.
- Na vodorovné přímce přiřadíme k úsečkám dané prvky množiny C.
- Na svislé přímce přiřadíme k daným úsečkám prvky množiny D.
- Každým vyznačeným bodem pak vedeme kolmici na přímku, na níž leží, z čehož dostaneme čtvercovou síť.
- Každý čtverec v dané rovině je obrazem prvků kartézského součinu C × D → uspořádané dvojice (x, y) ∈ C × D.



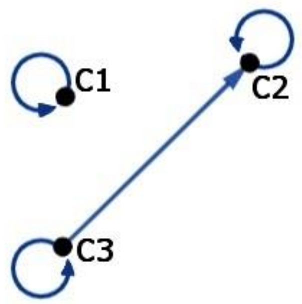
Obrázek 3 – šachovnicový graf (zdroj: vlastní)

C = {C1, C2, C3, C4}; D = {D1, D2, D3}.

Vyznačené pole je obrazem uspořádané dvojice (C2, D3). ([7], s.9-10)

c) Uzlový graf C × D:

- Nejprve musíme najít výčet prvků sjednocení množin C, D.
- Poté každý prvek tohoto výčtu zakreslíme jako bod (uzel).
- Jednotlivé uspořádané dvojice (x, y) ∈ C × D znázorníme těmito způsoby:
- Smyčkou kolem uzlu znázorníme uspořádanou dvojici, kdy se první a druhý prvek rovnají; pokud jsou první a druhá složka různé, zakreslíme tuto skutečnost jako orientovanou šipku, která vychází z první složky a jde k té druhé.



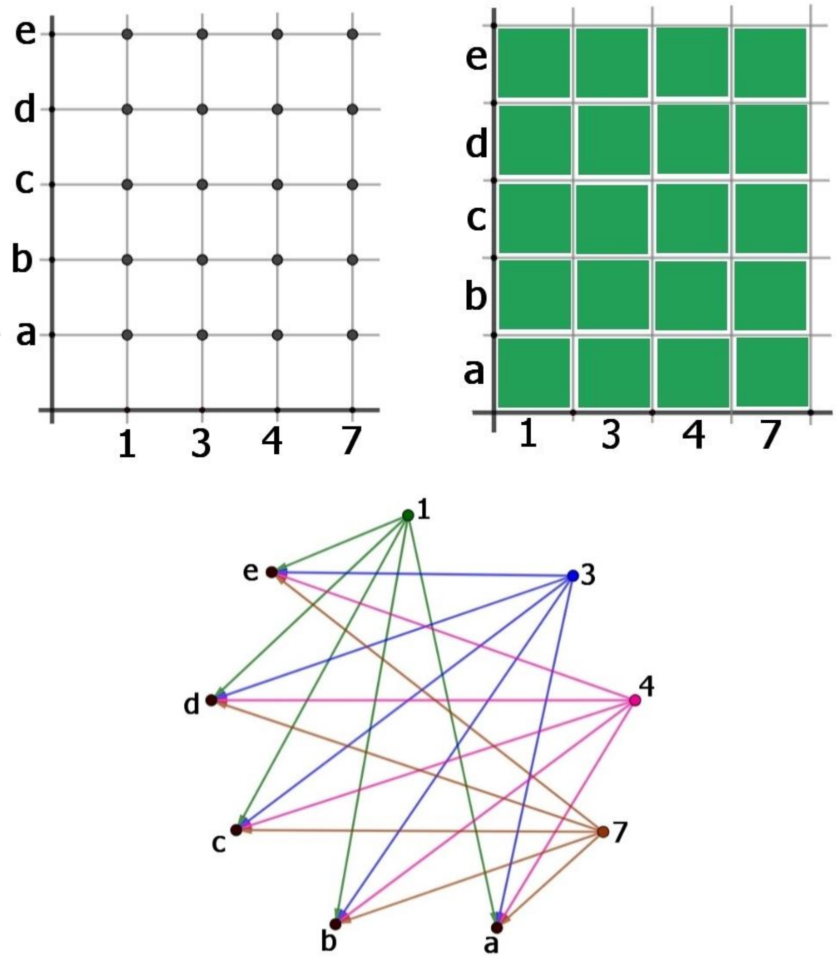
Obrázek 4 – uzlový graf (zdroj: vlastní)

V grafu jsou zakreslené obrazy uspořádaných dvojic (C1, C1), (C2, C2), (C3, C3), (C3, C2). ([7], s. 9-10)

Nyní si ještě ukážeme nějaké konkrétní příklady:

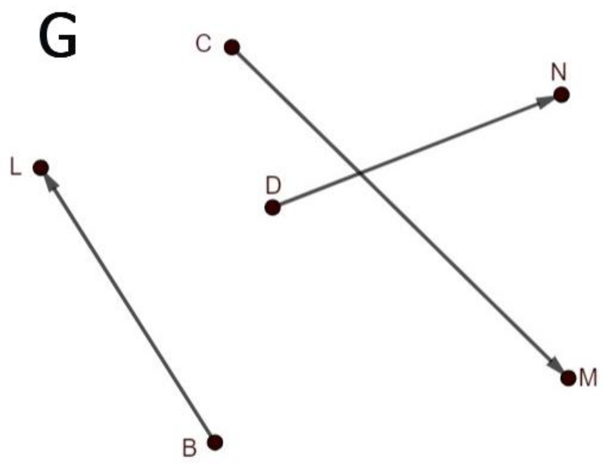
PŘÍKLAD 1.5.1.: Znázorněte všemi typy grafů kartézský součin A × B. Je-li A = {1, 3, 4, 7}, B = {a, b, c, d, e}.

Řešení:



Obrázek 5 – grafy k příkladu 1.5.1. (zdroj: vlastní)

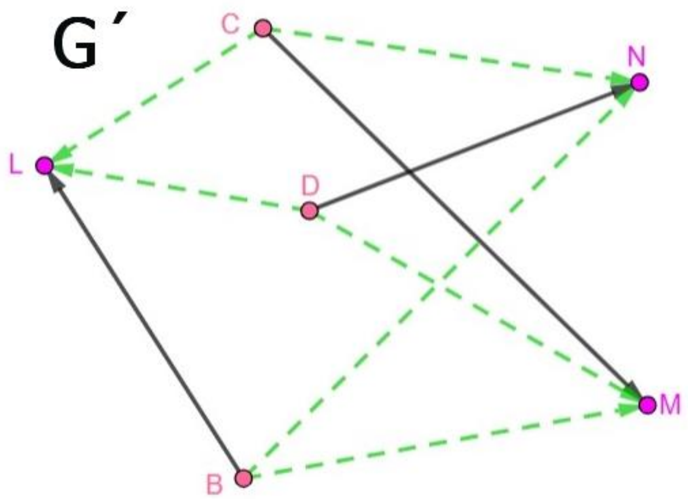
PŘÍKLAD 1.5.2.: Mějme zadaný uzlový graf G. Doplňte tento graf takovým způsobem, aby představoval uzlový graf kartézského součinu A × B. Množiny A, B (které jsou navzájem různé) zapište výčtem prvků.



Obrázek 6 – graf k příkladu 1.5.2. (zdroj: vlastní)

Řešení:

Nejprve si určíme složky první a druhé množiny. Do množiny první, tedy A, patří všechny prvky, ze kterých vystupují orientované šipky. Zatímco do druhé množiny, tedy B, patří ty prvky, ke kterým orientované šipky směřují.



Obrázek 7 – výsledný graf k úloze 1.5.2. (zdroj: vlastní)

1.6 BINÁRNÍ RELACE

Nyní se dostáváme ke stěžejnímu pojmu této práce, kterým jsou binární relace.

Nejprve však musíme definovat samostatný pojem relace:

DEFINICE 1.6.1.: Říkáme tedy, že relací R na množině M rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu M × M. ([6], s. 4)

Nyní definice binární relace:

DEFINICE 1.6.2.: Binární relace z množiny M do množiny N je množina, která je podmnožinou kartézského součinu M × N. Zapisujeme R ⊆ (M × N). ([6], s. 4)

Relaci značíme jako (x, y) ∈ R nebo x ρ y, přičemž první složku *x* označujeme jako první obor relace. Stejně pak druhou složku *y* označíme jako druhý obor relace. Jinými slovy, binární relace se v podstatě zabývají vyjádřením vztahů mezi dvěma prvky, respektive mezi dvěma množinami. ([8], s. 1)

Nyní si uveďme několik příkladů binárních relací:

PŘÍKLAD 1.6.3.: Je dána množina P = {1, 3, 4, 8, 9, 10, 16}, kdy máme dvoumístné predikáty[1]:

T = (x, y): y = x + 1. → relace definovaná pojmem „být o jedna větší“.
U = (x, y): y = x^2. → tedy „být druhou mocninou“.
V= (x, y): y = x < y. → tedy „být menší“.

Vypište výsledné relace podle těchto predikátů.

Řešení: Jako obor hodnot těchto predikátů dostaneme relace ve tvaru:

T = {[3, 4]; [8, 9]; [9, 10]}.
U = {[1, 1]; [3, 9]; [4, 16]}.
V = {[1,3]; [1, 4]; [1, 8]; [1, 9]; [1, 10]; [1, 16]; [3, 4]; [3, 8]; [3, 9], [3, 10]; [3, 16]; [4, 8]; [4, 9]; [4, 10]; [4, 16]; [8, 9]; [8, 10]; [8, 16]; [9, 10]; [9, 16]; [10, 16]}. ([8], s.1)

[1] Predikát = výraz, který předpokládáme, že je pravdivý

PŘÍKLAD 1.6.4.: Mějme jako množinu skupinu studentů: Alenu, Marka, Simonu, Adélu a Lukáše. A mějme předpoklad, že Alena měří 158 cm (narozena 7. 6. 2000). Marek 195 cm (narozen 25. 8. 2001), Simona 170 cm (narozena 6. 4. 2000), Adéla 164 cm (narozena 8. 8. 1999) a Lukáš 173 cm (narozen 5. 2. 2001).

Mějme predikáty:

S = (x, y): „x je vyšší než y".

Q = (x, y): „x je starší než y".

Určete relace S a Q.

Řešení: Jako pomoc pro řešení těchto dvou relací i vytvoříme následující tabulku:

Jméno	Výška (cm)	datum narození
Alena	158	7.6.2000
Marek	195	25.8.2001
Simona	170	6.4.2000
Adéla	164	8.8.1999
Lukáš	173	5.2.2001

Tabulka 1 – pomocná tabulka příklad 1.6.2. (zdroj: vlastní)

Z tabulky můžeme vypsat vyřešené predikáty:

S = {[Marek, Lukáš]; [Marek, Simona]; [Marek, Adéla]; [Marek, Alena]; [Lukáš, Simona]; [Lukáš, Adéla]; [Lukáš, Alena]; [Simona, Adéla]; [Simona, Alena]; [Adéla, Alena]}.

Q = {[Adéla, Simona]; [Adéla, Alena]; [Adéla, Lukáš]; [Adéla, Marek]; [Simona, Alena]; [Simona, Lukáš]; [Simona, Marek]; [Alena, Lukáš]; [Alena, Marek]; [Lukáš, Marek]}.

1.7 ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY BINÁRNÍCH RELACÍ

V případě binárních relací se můžeme setkat i s několika speciálními typy. Jako první se podíváme na extrémní případy binárních relací (relace prázdná a relace univerzální).

DEFINICE 1.7.1.: Prázdnou relací v libovolné množině M nazveme každou prázdnou podmnožinu množiny M × M. Tuto relaci pak označíme jako O_M. ([9], s. 12)

Obecně pak můžeme tvrdit, že každá relace definovaná na množině M, obsahuje prázdnou relaci.

PŘÍKLAD 1.7.2.: Mějme množinu T = {1, 3, 7, 9, 15} a předpokládejme, že T = (x, y): x + y > 84.

Řešení: Jelikož z množiny T součet žádných dvou prvků není větší než 84, tak řešením této úlohy je prázdná relace.

DEFINICE 1.7.3.: Úplnou relací v libovolné množině M nazveme tu množinu, která odpovídá kartézskému součinu M × M. ([9], s. 12)

PŘÍKLAD 1.7.4.: Mějme stejnou relaci jako v minulém příkladu. Tedy T = {1, 3, 7, 9, 15}. Tentokrát mějme předpoklad T = (x, y): x + y < 32.

Řešení: V tomto případě naopak predikátu odpovídají všechny možné dvojice relace, díky čemuž dostáváme úplnou relaci.

Dalšími speciálními typy relací jsou relace doplňková a inverzní.

DEFINICE 1.7.5.: Doplňkovou relací k relaci R na libovolné množině M rozumíme relaci R´ definovanou předpisem [a, b] ∈ R´ ⇔ [a, b] ∉ R. Lze tedy doplňkovou relaci na libovolné množině M definovat pomocí rozdílu M × M – R. ([8], s.3)

PŘÍKLAD 1.7.6.: Mějme množinu D = {4, 8, 9} a zadanou relaci E = {[4, 4]; [4, 8]; [8, 9]}. Určete doplňkovou relaci k relaci E.

Řešení: E´ = {[8, 8]; [9, 9]; [4, 9]; [8, 4]; [9, 4]; [9, 8]}

DEFINICE 1.7.7.: Inverzní relací k relaci R na libovolné množině M rozumíme relaci R^{-1} definovanou předpisem (a, b) ∈ R^{-1} ⇔ (b, a) ∈ R. ([8], s.3)

Důležité je si uvědomit, že sestavit inverzní relaci můžeme právě díky tomu, že relace je tvořená uspořádanými dvojicemi. Můžeme tedy říct, že jde o konkrétní operaci, která se odehrává nad relacemi. Tento fakt nám jen potvrzuje, že s relacemi můžeme provádět všechny známé matematické operace (sčítání, odčítání, dělení, …). ([8], s. 3)

PŘÍKLAD 1.7.8.: Mějme stejnou množinu D = {4, 8, 9} jako v minulém příkladu. Tentokrát však zadanou relaci F = {[4, 8]; [4, 9]; [9, 8]}. Určete k relaci F její relaci inverzní.

Řešení: F^{-1} = {[8, 4]; [9, 4]; [8, 9]}.

1.8 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ RELACÍ

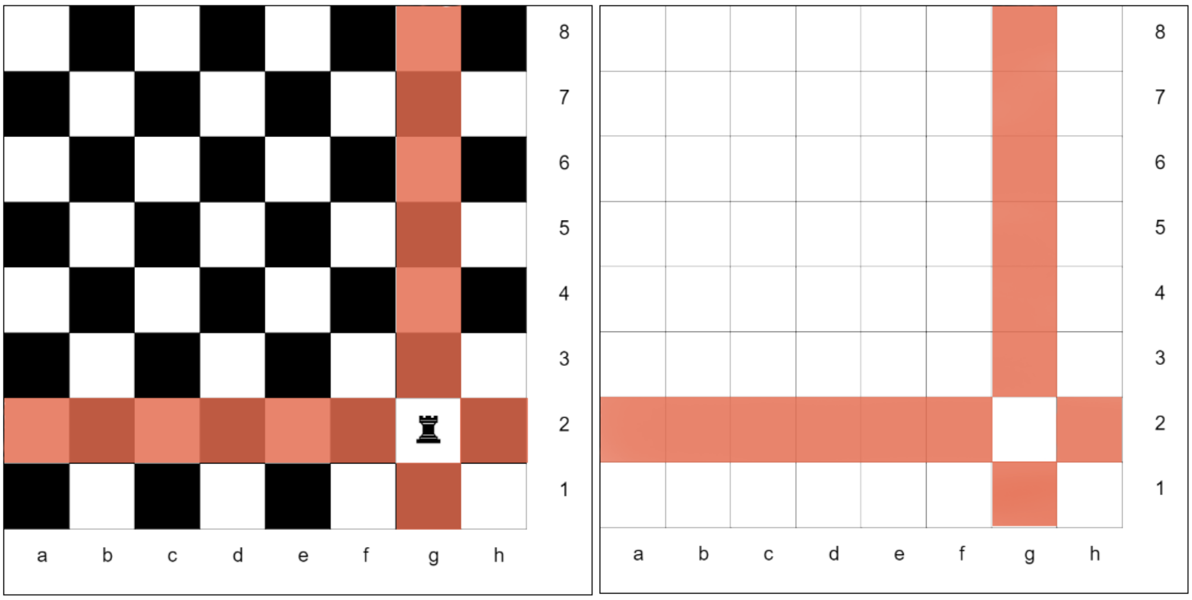
Z definice relace víme, že je úzce spojená s kartézským součinem. A stejně jako jsme si v podkapitole 1.5 vymezili grafické znázornění kartézského součinu, tak si nyní ukážeme, jakým způsobem budeme znázorňovat relace. U kartézského součinu jsme si ukázali, že jej znázorňujeme pomocí grafu uzlového, šachovnicového a kartézského. V případě relací jde v podstatě o ta stejná pravidla a ty samé typy grafů. Proto si v tomto případě ukážeme pouze několik příkladů (aniž bychom opakovali již jednou zavedenou teorii).

PŘÍKLAD 1.8.1.: Představme si šachovnici jako tabulku kartézského součinu A × B, kde A = {a, b, c, d, e, f, g, h} a B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Nyní si zaveďme relaci „figurka umístěná na poli [k, l] může táhnout z pole [k, l] na pole [x, y]“. Určete relace výčtem prvků a jejich grafickým znázorněním (kartézský graf).

a) Věž: [g, 2]
b) Jezdec [e, 5]
c) Střelec [a, 4]
d) Král [e, 1]

Řešení:

a) Věž [g, 2]:

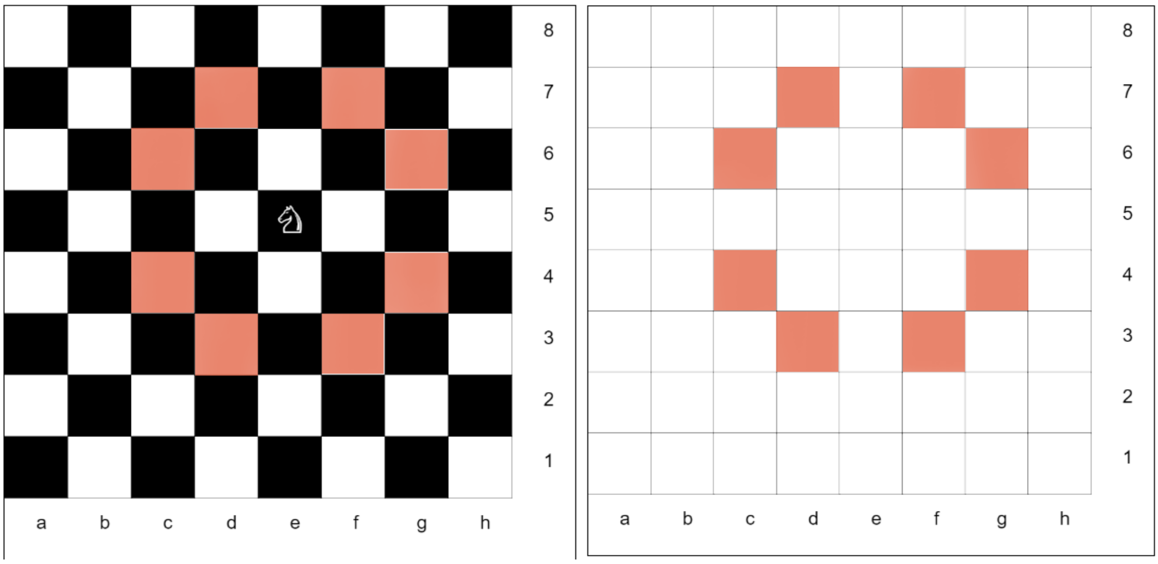


Obrázek 8 – příklad 1.8.1. a (zdroj: vlastní)

Levý graf nám znázorňuje postavení věže na pozici [g, 2] a zároveň zvýrazněná pole jsou místa, kam ji můžeme na šachovnici posunout. Levá část nám pak znázorňuje kartézský graf této relace (označme ji V). Výsledný výčet prvků vypadá takto:

V = {[a, 2]; [b, 2]; [c, 2]; [e, 2]; [f, 2]; [h, 2]; [g, 1]; [g, 3]; [g, 4]; [g, 5]; [g, 6]; [g, 7]; [g, 8]}.

b) Jezdec [e, 5]:

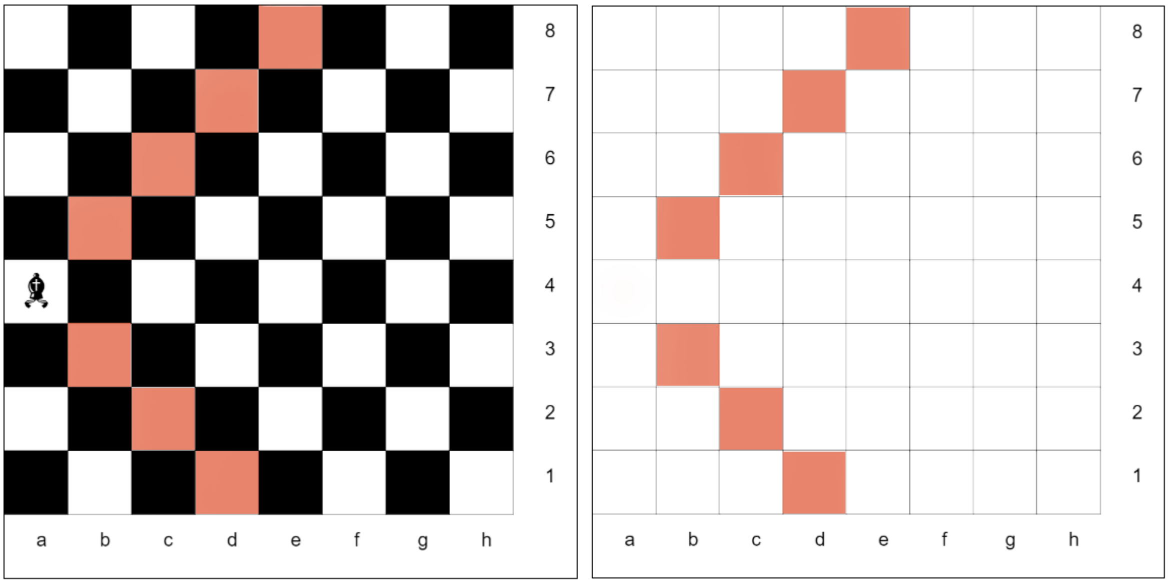


Obrázek 9 – grafy k úloze 1.8.1. b (zdroj: vlastní)

Pravý graf nám znovu znázorňuje postavení figurky jezdce na šachovnici a barevně znázorněná pole, kam může táhnout. Pravý obrázek je opět kartézský graf této relace (označme ji J). Výčet prvků relace J vypadá takto:

J = {[c, 4]; [c, 6]; [d, 3]; [d, 7]; [f, 3]; [f, 7]; [g, 4]; [g, 6]}.

c) Střelec [a, 4]:

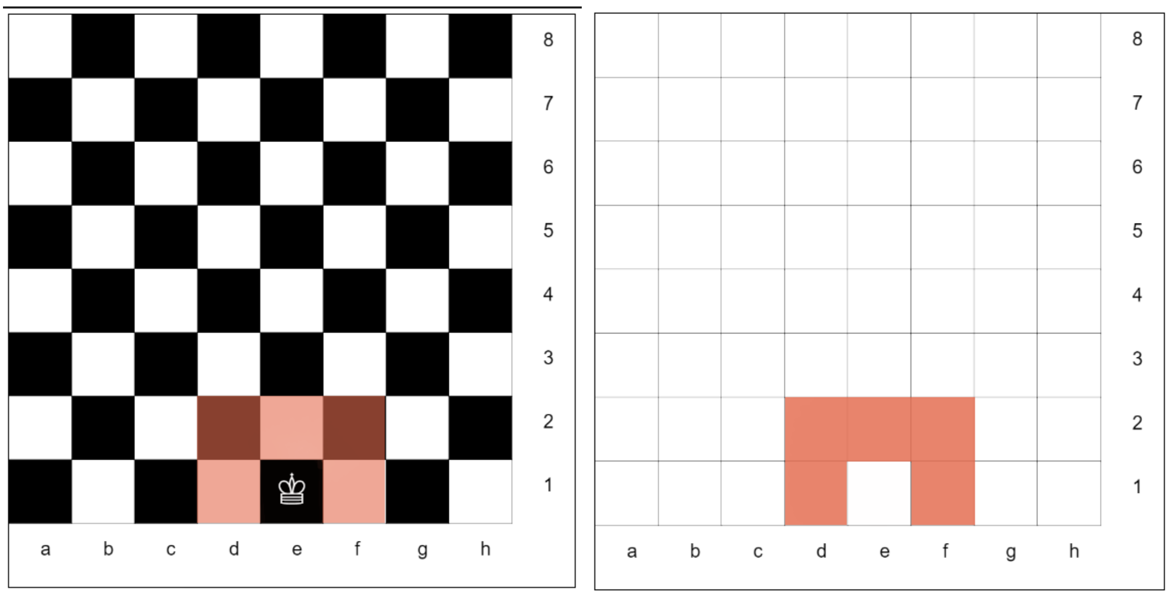


Obrázek 10 – grafy k úloze 1.8.1. c (zdroj: vlastní)

Obrázky stejně jako v předchozích případech znázorňují reálnou situaci na šachovnici (vlevo) a kartézský graf relace (vpravo). Výčet prvků této relace, označme ji S, bude vypadat následovně:

S = {[b, 3]; [b, 5]; [c, 2]; [c, 6]; [d, 1]; [d, 7]; [e, 8]}.

d) Král [e, 1]:



Obrázek 11 – grafy k příkladu 1.8.1. d (zdroj: vlastní)

I v posledním případě je v levé polovině obrázku uvedená situace pro krále na poli [e, 1]. V pravé části je pak kartézský graf relace, označme ji K. Následně pak výčet prvků této relace vypadá takto:

K = {[d, 1]; [d, 2]; [e, 2]; [f, 1]; [f, 2]}.

PŘÍKLAD 1.8.2.: Školní třída o žácích J, K, L, M plánuje jet na školní výlet. Zároveň o žácích víme že:

- Pojede alespoň jeden z dvojice K, M.
- Pojede alespoň jeden z žáků J, M.
- Pojede nejvýše jeden ze dvojice J, L.
- Pojeden nejvýše jeden z žáků K, L.
- K nepojede bez J.
- L pojede, pojede-li M.

Jaké jsou možnosti pro účast žáků na školním výletě, mají-li být splněny všechny uvedené podmínky.

Řešení: Nejprve si uvedeme formalizaci našich výrokových proměnných:

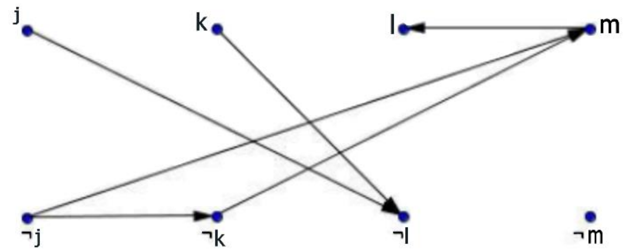
j: na výlet jede žák J.
k: na výlet jede žák K.
l: na výlet jede žák L.
m: na výlet jede žák M.

Dále pak pomocí výrokového kalkulu (implikace) přepíšeme uvedených 6 podmínek:

- $\neg k \Rightarrow m$; nejede-li K, musí jet M.
- $\neg j \Rightarrow m$; nejede-li J, musí jet M.
- $j \Rightarrow \neg l$; pokud pojede J, nemůže jet L.
- $k \Rightarrow \neg l$; pokud pojede K, nemůže jet L.
- $\neg j \Rightarrow \neg k$; když nepojede J, nepojede ani K.
- $m \Rightarrow l$; když pojede M, pojede i L.

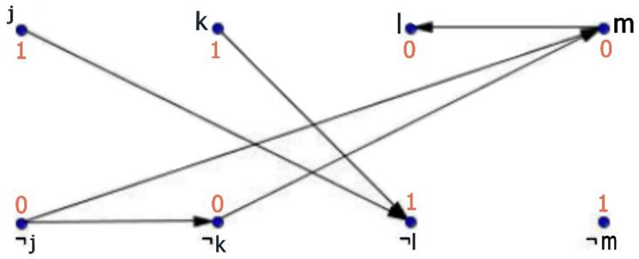
Množinu T nám tedy tvoří prvky: T= {j, k, l, m, ¬j, ¬k, ¬l, ¬m}. Na této množině si nyní zavedeme relaci R s předpisem: $[x, y] \in R \Leftrightarrow Ph\ (x \Rightarrow y) = 1$.

Nyní si zakreslíme pomocný orientovaný graf této relace:



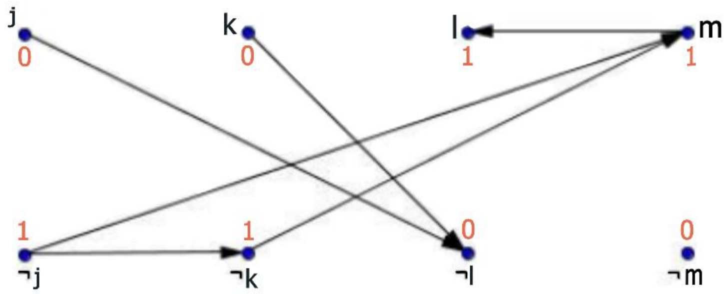
Obrázek 12 – orientovaný graf k úloze 1.8.2. (zdroj: vlastní)

Zvolme si pravdivostní hodnotu výroku j = 1. Díky tomu, poté můžeme doplnit pravdivostní hodnoty u všech ostatních výroků. Pravidla jsou taková, že pokud máme na začátku orientované šipky 1, na konci bude taktéž 1. Máme-li na konci orientované šipky 0, na začátku bude taktéž 0. Je-li u výroku 1/0, pak u negace výroku bude hodnota opačná.



Obrázek 13 – pravdivostní graf k úloze 1.8.2. (zdroj: vlastní)

Tentokrát si naopak zvolme hodnotu u výroku j = 0. Podle stejných pravidel jako u tvorby minulého grafu doplníme zbylé pravdivostní hodnoty.



Obrázek 14 – pravdivostní graf k úloze 1.8.2. (zdroj: vlastní)

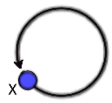
Z grafů, které jsme si vytvořili, můžeme jednoduše vyčíst dvě možná řešení. Těmi jsou, že na výlet pojede buď žák J společně s žákem K, nebo v druhém případě pojedou žáci L a M. ([8], s. 2-3)

1.9 VLASTNOSTI BINÁRNÍ RELACE

Vlastnosti binárních relací jsou hlavním zkoumaným tématem této bakalářské práce, proto si zde zavedeme několik pojmů, které budeme v druhé části této práce využívat.

DEFINICE REFLEXIVNOST 1.9.1.: Binární relace R na množině M je reflexivní právě, když pro všechny prvky množiny M platí, že jsou v relaci samy se sebou. Zapisujeme (∀x ∈ M): (x ρ x). ([3], s. 21)

Pokud bychom měli zadanou relaci {e, f, g}, tak reflexivnost by se ve výsledku projevila tak, že by daná relace obsahovala všechny tyto uspořádané dvojice [e, e], [f, f], a [g, g]. V případě grafického znázornění pro označení reflexivního prvku používáme smyčku.



Obrázek 15 – grafické značení reflexivity (zdroj: vlastní)

DEFINICE AREFLEXIVNOST 1.9.2.: Binární relace R na množině M je areflexivní, pokud existuje alespoň jedno *x*, pro které platí, že uspořádaná dvojice (x, x) nenáleží relaci R. Zapisujeme (∃x ∈ M): (x, x) ∉ R. ([8], s. 4)

DEFINICE ANTIREFLEXIVNOST 1.9.3.: Binární relace R na množině M je antireflexivní právě, když pro všechna *x* platí, že uspořádaná dvojice (x, x) nenáleží R. Zapisujeme (∀x ∈ M): (x, x) ∉ R. ([6], s. 11)

DEFINICE SYMETRIČNOST 1.9.4.: Binární relace R na množině M je symetrická, pokud platí, že prvek *x* je v relaci s prvkem *y*, a naopak i prvek *y* je v relaci s prvkem *x*. Tedy (∀x, y ∈ M): [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)]. ([3], s. 21)

Pokud bychom měli znovu zadanou relaci na množině {e, f, g}, symetričnost bychom poznali tak, že daná relace by obsahovala všechny tyto dvojice [e, f], [f, e], [e, g], [g, e], [f, g)], [g, f)]. Graficky pak symetričnost znázorňujeme oboustrannou šipkou.

Obrázek 16 – grafické znázornění symetričnosti (zdroj: vlastní)

DEFINICE ANTISYMETRIČNOST 1.9.5.: Binární relace R na množině M je antisymetrická, právě tehdy, když *x* je v relaci s *y* a zároveň je *y* v relaci s *x* pouze v případě, že *x* a *y* se sobě rovnají. Zapisujeme (∀x, y ∈ M): [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y). [10]

DEFINICE TRANZITIVITY 1.9.6.: Binární relace R na množině M je tranzitivní právě tehdy, když pro tři prvky *x*, *y* a *z* platí, že pokud je *x* v relaci s *y* a *y* pak v relaci se *z*, tak zákonitě musí platit, že *x* je také v relaci se *z*. Zapisujeme (∀x, y, z ∈ M): [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z). ([6], s. 11)

V tomto případě, abychom měli relaci tranzitivity na množině {e, f, g}, musí výčet prvků obsahovat dvojice tak, že pokaždé, když je druhá složka jedné dvojice zároveň první složkou jiné dvojice, tak zároveň musí první složka první dvojice mít dvojici s druhou složkou. Pokud máme dvojice v relaci [e, f] a [f, g], pak pro tranzitivnost musí relace obsahovat i dvojici [e, g]. V případě grafického znázornění musíme mít šipkami propojené všechny tři prvky tak, že z prvku *x* vedou orientované šipky do *y* i do *z* a z prvku *y* musí vést orientovaná šipka do *z*.

Obrázek 17 – grafické znázornění tranzitivity (zdroj: vlastní)

Pro lepší pochopení těchto vlastností si nyní ukažme jednoduchý příklad.

PŘÍKLAD 1.9.7.: Mějme zadanou množinu přímek v rovině a relaci D = (x, y): x || y. Tudíž relaci „být rovnoběžný“. Určete vlastnosti relace.

Řešení: **Reflexivnost:** (x ρ x) – Zajímá nás, jestli je přímka *x* rovnoběžná sama se sebou. Tato vlastnost platí, a tedy relace je reflexivní.

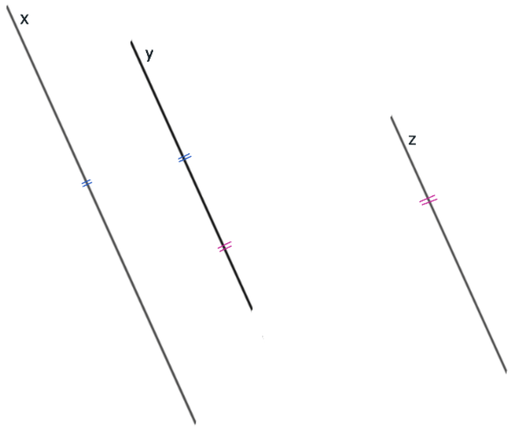
Pozn.: Pokud víme, že je relace reflexivní, nemusíme pak zkoumat areflexivnost a antireflexivnost, jelikož tyto stavy mohou nastat pouze v případě, že relace není reflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ y)] – Pokud tedy víme, že *x* je rovnoběžná s *y*, pak by také měla být *y* rovnoběžná s *x*. Tato situace v případě rovnoběžek platí, a tedy relace je symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) - Přímka *x* je rovnoběžná s přímkou *y* a zároveň je přímka *y* rovnoběžná s *x*, z čehož vyplívá že se prvky *x* a *y* rovnají. Na obrázku 18 můžeme vidět, že jsou rovnoběžné přímky, které nejsou identické. Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Máme tedy předpoklad, že *x* je rovnoběžná s *y* a zároveň je *y* rovnoběžná se *z*. Zajímá nás tedy, jestli je i *x* rovnoběžná se *z*. Tento předpoklad v rovině taktéž platí a relace je tedy i tranzitivní.

Řešením této úlohy tedy je, že relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní a není antisymetrická.



Obrázek 18 – rovnoběžky k úloze 1.9.7. (zdroj: vlastní)

DEFINICE RELACE EKVIVALENCE 1.9.8.: Relací ekvivalence na množině M nazveme relaci, která je zároveň reflexivní, symetrická i tranzitivní. ([3], s. 22)

Tedy o relaci v příkladu 1.9.6. můžeme prohlásit, že je relací ekvivalence.

Nyní si uvedeme ještě několik příkladů na zkoumání vlastností relace:

PŘÍKLAD 1.9.9.: Vyšetřete vlastnosti relací:

a) (x, y) ∈ R: x|y; relace R řešte v množině všech kladných přirozených čísel. Máme tedy relaci „x dělí y“.
b) (x, y) ∈ R: x + y > 8; relace na množině všech přirozených čísel. Máme tedy relaci „součet x a y je vetší než 8“.
c) (x, y) ∈ R: x ≤ y; relace na množině všech reálných čísel. Relace „být menší nebo rovno“.
d) (x, y) ∈ R: x < y; relace na množině všech reálných čísel. Tedy relace „být menší než“.

Řešení:

a) **Reflexivnost:** (x ρ x) – Tedy *x* dělí *x*. Jelikož jsou všechna kladná přirozená čísla dělitelná sama sebou, tak tato relace je reflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Tedy vycházíme z předpokladu, že *x* dělí *y*, pak i *y* dělí *x*. Tento předpoklad neplatí. Například pokud bychom vzali čísla x = 2, y = 4. 4 je dělitelné 2, ale 2 není dělitelná 4. Relace není symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) - Tedy zkoumáme, zda když *x* dělí *y* a zároveň *y* dělí *x*, pak *x* a *y* se sobě rovnají. Můžeme tvrdit, že menší prvek dělí vždy větší (podle pravidel dělitelnosti), taktéž můžeme říct, že ten samý větší prvek nedělí menší, to jsme si v zásadě dokázali u zkoumání symetričnosti. Dělitelnost tedy bude fungovat pouze v případě, že jsou prvky *x* a *y* identické. Relace je antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Tedy pokud víme, že *x* dělí *y* a zároveň *y* dělí *z*, pak musí platit, že i *x* dělí prvek *z*. Tento předpoklad platí pro všechna *x*, *y*, *z*, například pro x = 2, y = 4, z = 24. 2 dělí 4 a zároveň 4 dělí 24 a taktéž i platí, že 2 dělí 24. Relace je tranzitivní.

Relace je tedy reflexivní, antisymetrická a tranzitivní a není symetrická.

b) **Reflexivnost:** (x ρ x) – Tedy součet dvou stejných prvků by měl být větší než 8. Pokud bereme v potaz množinu všech přirozených čísel, kterými jsou všechna kladná celá čísla, tak víme, že tento předpoklad neplatí pro všechny prvky. Relace tedy není reflexivní.

Areflexivnost: (∃x ∈ M): (x ρ x) ∉ R – Tedy, že pro některé prvky *x* platí, že nenáleží naší relaci (našemu předpokladu), ale pro jiné prvky předpoklad platí. Můžeme říct, že pro x = 3 předpoklad, že součet x + x > 8, neplatí (3 +3 = 6 a 6 < 8). Na druhou stranu pro x = 7 předpoklad platí (7 + 7 = 14 a 14 > 8). Relace je tedy areflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Tedy pokud víme, že prvek *x* v součtu s prvkem *y* je větší než 8, pak by mělo platit, že *y* v součtu s *x* je větší než 8. Jelikož operace součet je komutativní[2], tak tento předpoklad pro všechny prvky platí. Například x = 12 a y = 3 → 12 + 3 = 15 a 15 > 8 a zároveň 3 + 12 = 15 a 15 > 8. Relace je symetrická.

[2] Komutativita = operace, která ve svém smyslu říká, že nezáleží na pořadí prvků. x + y = y + x.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – prvek *x* dává v součtu s *y* víc než 8 a zároveň *y* dává v součtu s *x* více než 8 z čehož vyplívá že *x* a *y* se sobě rovnají. Antisymetričnost neplatí, protože pokud bychom počítali, že x = 14 a y = 7, jejich součet je větší než 8, ale zároveň 14 ≠ 7.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Zajímá nás tedy pokud součet *x* a *y* je větší než 8 a zároveň víme, že součet *y* a *z* je větší než 8, pak by mělo zákonitě platit, že i součet *x* a *z* je větší než 8. Na jednoduchém příkladu si ukážeme, jak tento předpoklad vyvrátit. Vezměme si například prvky x = 1, y = 9 a z = 6. Můžeme tvrdit, že 1 +9 > 8 a zároveň i 9 + 6 > 8, ale 1 + 6 = 7 a 7 < 8, tedy x + z < 8 a předpoklad tedy neplatí. Relace není tranzitivní.

Relace x + y > 8 je tedy areflexivní, symetrická a není antisymetrická a tranzitivní.

c) **Reflexivnost:** (x ρ x) – Zajímá nás, zda je *x* menší nebo rovno *x*. Víme, že se každý prvek rovná sám sobě, tedy relace je reflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – V tomto případě chceme zjistit, jestli když prvek *x* je menší nebo roven prvku *y*, tak jestli je poté *y* menší nebo roven prvku *x*. To ovšem neplatí, protože pokud bychom například vzali prvky x = 5 a y = 14, pak by mělo platit, že 5 ≤ 14, ale 14 není ≤ než 5. Tedy relace není symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Prvek *x* je menší nebo roven prvku *y* a zároveň je *y* menší nebo roven *x*, z čehož vyplývá, že *x* a *y* se rovnají. A jelikož máme v zápisu relace predikát „být menší nebo roven“, tak díky rovnosti víme, že pak tento předpoklad platit bude. Relace je antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Mějme předpoklad, že prvek *x* je menší nebo roven *y* a zároveň je prvek *y* menší nebo roven *z*. Dále chceme zjistit, jestli v tomto případě taktéž platí, že prvek *x* je menší nebo roven *z*. Tento předpoklad by měl vždy platit. Například pro prvky x = 2, y = 4 a z = 18 → 2 ≤ 4 a 4 ≤ 18, zároveň pak platí že 2 ≤ 18. Relace je tranzitivní.

Ve výsledku máme relaci, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

d) **Reflexivnost:** (x ρ x) – Zkoumáme, jestli je možné, aby prvek *x* byl menší, než prvek *x*. To samo o sobě nedává žádný smysl (4 nikdy není menší než 4), z toho důvodu relace není reflexivní. V tomto případě víme, že pro všechny prvky platí, že *x* není nikdy menší než *x*. Z toho důvodu o této relaci můžeme prohlásit, že je antireflexivní.

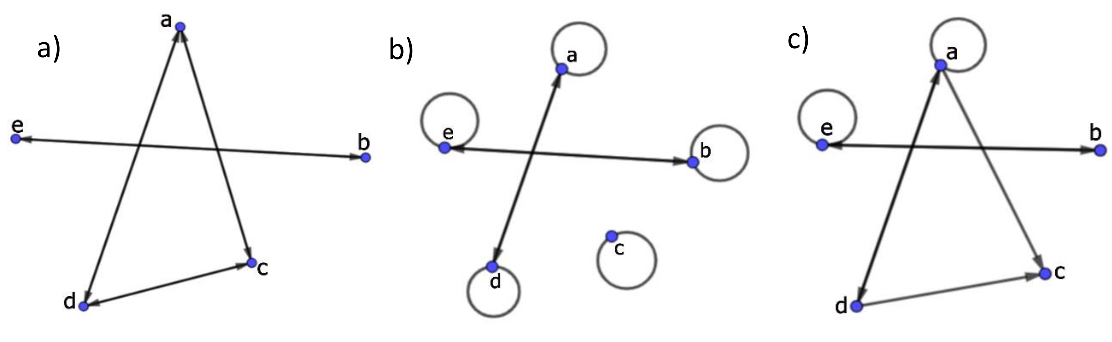
Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Podle předpisu by mělo platit, že pokud je prvek *x* menší než prvek *y*, je prvek *y* menší než prvek *x*. To neplatí a můžeme si to dokázat na triviálním příkladu. Vezměme si prvky x = 9 a y = 27, to že 9 < 27 je pravdivé, ale nikdy nenastane aby 27 < 9. Relace není symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) –Jelikož levá strana rovnice [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] nemá řešení (situace, aby bylo *x* menší než *y* a zároveň *y* menší, než *x* nastat nemůže), ve výrokové logice bychom místo levé strany doplnili 0. Taktéž podle výrokové logiky platí, že pokud máme na levé straně implikace 0, na pravé pak bude 1 nebo 0, což podle výrokové logiky implikace znázorňuje vždy pravdu. Relaci označíme jako triviálně antisymetrickou.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Tvrdíme, že pokud prvek *x* je menší než prvek *y* a *y* je zároveň menší než prvek *z*, pak musí platit, že prvek *x* je menší než prvek *z*. Tento predikát platí na celé množině reálných čísel. Například platí pro prvky x = 13, y = 20 a z = 31, tak můžeme tvrdit, že 13 < 20 a 20 < 31 a zároveň 13 < 31. Relace je tedy tranzitivní.

Relace „být menší než" je výsledně antireflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

PŘÍKLAD 1.9.10.: Mějme zadanou množinu G = {a, b, c, d, e}. Pomocí zadaných uzlových grafů určete vlastnosti relací.



Obrázek 19 – zadání k úloze 1.9.10. (zdroj: vlastní)

Řešení:

a) Relaci A můžeme označit jako antireflexivní (graf neobsahuje žádnou smyčku), symetrickou (všechny šipky v grafu jsou obousměrné) a tranzitivní (trojúhelník prvků a, c a d je uzavřený obousměrně).

b) O této relaci B můžeme prohlásit, že je reflexivní (všechny prvky mají kolem sebe smyčku) a symetrická (všechny šipky jsou obousměrné) a je tranzitivní.

c) Tentokrát můžeme o relaci C říct, že je areflexivní (obsahuje jen některé smyčky), není symetrická ani antisymetrická a je tranzitivní.

1.10 ROZKLAD MNOŽINY NA TŘÍDY

Jelikož jsme již definovali relaci ekvivalence, můžeme nyní definovat i takzvaný rozklad množiny na třídy ekvivalence.

DEFINICE 1.10.1: Rozkladem libovolné neprázdné množiny M rozumíme systém podmnožin $M_1, M_2, M_3, \ldots M_n$, který splňuje následující vlastnosti:

$M_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, n$,
$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_n = M$,
$M_i \cap M_j = \emptyset$, pro každé $i \neq j$,

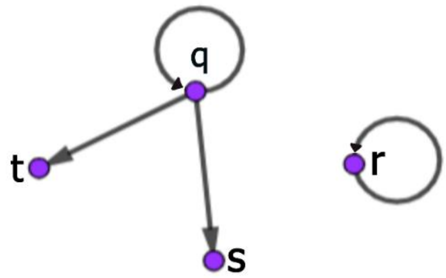
Pak množiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nazýváme třídami rozkladu množiny M. Z uvedeného zápisu je zřejmé, že systém podmnožin množiny M může být i nekonečný. ([7], s. 53)

Jinými slovy můžeme tuto situaci popsat tak, že kteroukoliv relaci ekvivalence na množině M, můžeme rozdělit na její jednotlivé třídy. Zároveň pak můžeme tvrdit, že ke každému rozkladu náleží nějaká relace ekvivalence.

Uveďme si nyní několik příkladů:

PŘÍKLAD 1.10.2: Mějme zadanou množinu P = {q, r, s, t} a na ní danou relaci R = [q, q]; [q, s]; [q, t]; [r, r]; [t, q]}. Relaci R doplňte nejmenším počtem uspořádaných dvojic tak, aby vznikla relace ekvivalence.

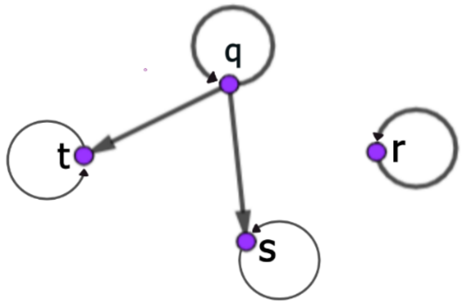
Řešení: Nejprve si nakreslíme graf pro lepší orientaci v relaci.



Obrázek 20 – graf k příkladu 1.10.2. (zdroj: vlastní)

Nyní relaci doplníme na relaci reflexivní. Tedy relaci R sjednotíme s těmito dvojicemi:

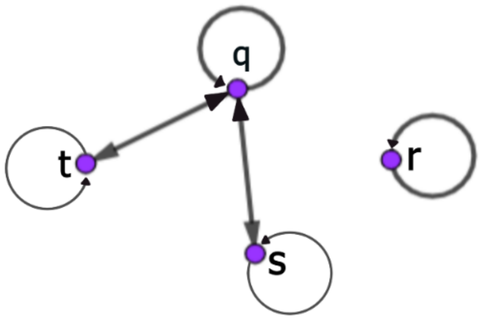
R_R = R ∪ {[s, s]; [t, t]}. V grafu doplníme u všech prvků smyčky.



Obrázek 21 – reflexivní graf k příkladu 1.10.2. (zdroj: vlastní)

Nyní relaci R_R doplníme na relaci symetrickou. Dostaneme tedy sjednocení relace R_R a těchto prvků:

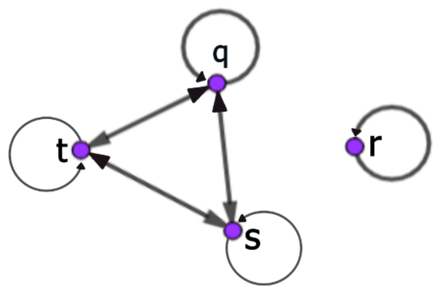
R_S = R_R ∪ {[s, q]; [t, q]}. Následující doplnění grafu by vypadalo takto:



Obrázek 22 – symetrický graf příkladu 1.10.2. (zdroj: vlastní)

Relaci R_S ještě naposledy doplníme na relaci tranzitivní. To dokážeme pomocí sjednocení relace R_S s těmito dvojicemi:

$R_T = R_S \cup \{[s, t]; [t, s]\} = R_E$, toto je naše výsledná relace ekvivalence.



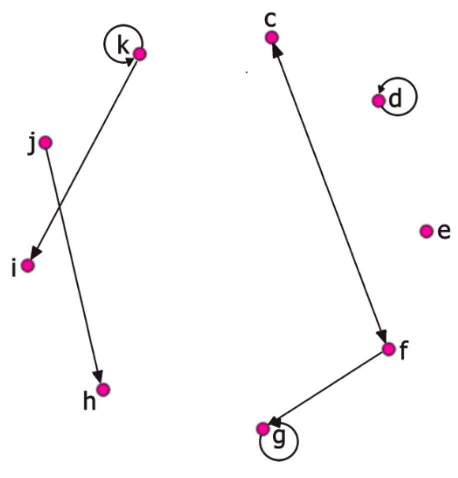
Obrázek 23 – graf relace ekvivalence příklad 1.10.2. (zdroj: vlastní)

Relace R_E je relací ekvivalence a rozloží množinu M na třídy:

$R_1 = \{q, s, t\}$,

$R_2 = \{r\}$.

PŘÍKLAD 1.10.3.: Mějme zadanou množinu A = {c, d, e, f, g, h, i, j, k}. Na této množině mějme zadanou relaci B následujícím grafem. Relaci B doplňte na relaci ekvivalence tak, aby vznikly co nejmenší třídy rozkladu.

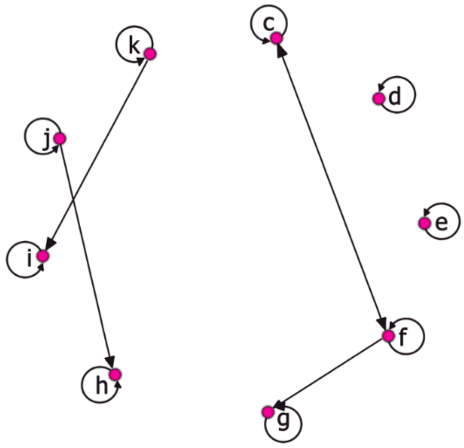


Obrázek 24 – zadání příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní)

Řešení: Jako první si vypíšeme všechny dvojice relace B.

B = {[c, f]; [d, d]; [f, c]; [f, g]; [j, h]; [k, k]; [k, i]}. Nejprve si tuto relaci doplníme na relaci reflexivní pomocí sjednocení.

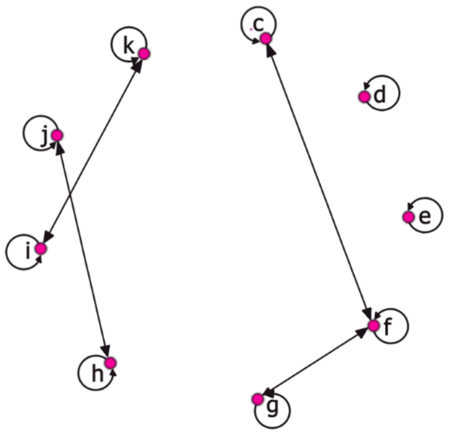
$B_R = B \cup \{[c, c]; [e, e]; [f, f]; [h, h], [i, i]; [j, j]\}$, do grafu pak přidáme ke všem prvkům smyčky.



Obrázek 25 – reflexivní graf příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní)

Nyní relaci B_R doplníme na relaci symetrickou dalším sjednocením.

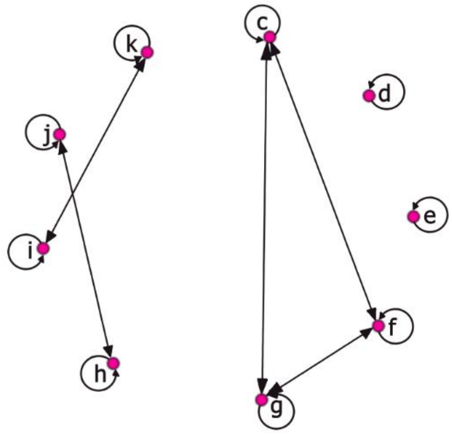
$B_S = B_R \cup \{[g, f]; [h, j]; [i, k]\}$, graficky pak uděláme všechny šipky obousměrné.



Obrázek 26 – symetrický graf příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní)

Máme tedy relaci reflexivní a symetrickou. Doplníme ještě na relaci tranzitivní, díky čemuž dostaneme relaci ekvivalence.

$B_T = B_S \cup \{[c, g]; [g, c]\} = B_E$. Graficky přidáme obousměrnou šipku mezi prvky c a g.



Obrázek 27 – graf relace ekvivalence příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní)

Množinu A můžeme momentálně rozdělit na několik ekvivalentních tříd:

$B_1 = \{c, f, g\}$,

$B_2 = \{d\}$,

$B_3 = \{e\}$,

$B_4 = \{h, j\}$,

$B_5 = \{i, k\}$.

2 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

V této části si vysvětlíme princip fungování binárních relací na skutečných situacích. Jsou zde zejména vybrané takové příklady, které jsou nějakým způsobem unikátní. Tyto příklady zde řešíme z toho důvodu, abychom si ukázali, že ne všechno je tak jednoduché, jak se může na první pohled zdát. A také kvůli tomu, že by normální člověk ani neřekl, že se vlastně jedná o binární relaci.

2.1 RODINNÉ DRAMA

V této části si ukážeme příklady, které budou úzce souviset s rodinnými vazbami a jak komplikované vlastně rodinné vazby mohou být.

2.1.1 BÝT SOUROZENCEM

V tomto konkrétním případě si ukážeme, jakým způsobem můžeme přemýšlet nad sourozeneckými vztahy. Protože ne vždy se v rodině vyskytují pouze sourozenci s oběma stejnými rodiči.

a) Být sourozencem (se stejnými rodiči):

Pro nás je tato relace vymezená tím, že prvky (jedinci) *x*, *y* i *z* mají tytéž rodiče A, B (viz Příloha I). Nyní si vyšetříme vlastnosti:

Reflexivnost: $(x \rho x)$ – V praxi pro nás tato vlastnost znamená „být svým vlastním sourozencem“. To samozřejmě neplatí, tudíž relace není reflexivní. Zároveň jsme schopni říct, že tento předpoklad neplatí nikdy, a tedy relace je antireflexivní.

Symetričnost: $[(x \rho y) \Rightarrow (y \rho x)]$ – Jestliže je jedinec *x* sourozencem *y*, pak následně i jedinec *y* je sourozencem *x*. Tento předpoklad platí, proto relace je symetrická.

Antisymetričnost: $[(x \rho y) \wedge (y \rho x)] \Rightarrow (x = y)$ – Zajímá nás, zda když *x* je sourozencem *y* a zároveň *y* je sourozencem *x*, tak z toho vyplývá, že *x* a *y* je tatáž osoba. Jelikož platí antireflexivnost tak situace že *x* a *y* jsou tatáž osoba nastat nemůže. Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: $[(x \rho y) \wedge (y \rho z)] \Rightarrow (x \rho z)$ – Pokud *x* je sourozencem *y* a zároveň je *y* sourozencem *z*, pak následně musí platit, že *x* je sourozencem *z*. To taktéž platí, tudíž můžeme tvrdit, že tato relace je i tranzitivní.

Dohromady jsme v tomto případě dostali relaci, která je antireflexivní, symetrická a tranzitivní a není antireflexivní.

b) Být sourozencem (nevlastní, s alespoň jedním rodičem stejným)

Mějme zadanou relaci „x je sourozencem y“ přičemž budeme do zadání počítat i se sourozenci nevlastními, nebo se sourozenci se stejným jen jedním rodičem. Situace, jak by tyto dvě možnosti mohly například nastat můžeme vidět viz. Příloha II a Příloha III.

Reflexivnost: (x ρ y) – stejně jako v předchozím případě prvek *x* není svým sourozencem. Relace není reflexivní, ale je antireflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Pokud *x* je sourozenec s *y* pak i *y* je sourozenec s *x*. Toto platí, neboť *x* i *y* jsou sourozenci navzájem. Relace je symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Zajímá nás, zda když *x* je sourozencem (nevlastním/polovičním) s *y* a zároveň *y* je sourozencem *x*, tak z toho vyplývá, že *x* a *y* je tatáž osoba. Jelikož platí antireflexivnost tak situace že *x* a *y* jsou tatáž osoba nastat nemůže. Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Jestliže *x* je sourozencem s *y* a zároveň pak *y* je sourozencem se *z* mělo by pak platit, že *x* je sourozencem *z*. Hned podle zmíněných příloh můžeme vidět, že tato relace být tranzitivní nemusí, protože nemusí existovat žádná vazba mezi *x* a *z*. Relace tranzitivní není.

Tato relace je symetrická a antireflexivní a není tranzitivní a antisymetrická.

2.1.2 BÝT RODIČEM

Tato relace by se na první pohled mohla zdát jako velmi jednoduchá. Jelikož se však nebudeme vyhýbat tématům jako je incest[3], dostaneme se ke komplikovanějším, ale na druhou stranu zajímavějším relacím.

a) Být rodičem:

Tato relace, je přesně ta jednoduchá varianta, kterou si většina lidí vybaví pod pojmem „být rodičem“. Nyní si ukažme vlastnosti této relace:

Reflexivnost: (x ρ x) – To znamená, že by jedinec *x* měl být svým vlastním rodičem. V tomto případě to není možné a relace není reflexivní. Naopak tento předpoklad není možný nikdy, a proto je relace antireflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Což znamená, že jedinec *x* je rodičem jedince *y* a zároveň by tedy i prvek *y* měl být rodičem jedince *x*. To ovšem znovu neplatí a neplatí ani symetričnost.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Tato relace bude triviálně antisymetrická. Podmínka platí díky stejnému principu, jako jsme řešili v příkladu 1.9.8. d). Tedy jelikož nemůže nikdy nastat pravá strana implikace, nemůžeme dokázat její nepravdivost.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Pokud jedinec *x* je rodičem *y* a *y* je rodičem *z*, pak z toho vyplývá, že *x* je rodičem *z*. Toto taktéž neplatí, protože obecně by *x* byl prarodičem *z*.

Relace je tedy antireflexivní, antisymetrická a není tranzitivní.

b) Být rodičem (teoreticky):

V tomto případě budeme relaci být rodičem brát čistě teoreticky. V podstatě zapojíme do řešení vlastností relace i právě již dříve zmíněná tabuizovaná témata, nebo cestování časem. Nyní si ukažme, jak by pak tato relace vypadala:

Reflexivnost: (x ρ x) –Jedinec *x* by měl být sám svým vlastním rodičem. Tato vlastnost by fungovala ve dvou možných případech. Prvním z nich je, že by samotný *x* uzavřel sňatek se svým původním rodičem – pak by se teoreticky stal svým nevlastním rodičem. Druhým opravdu velmi teoretickým způsobem by se situace dala vyřešit tak, že existuje cestování v čase. V tomto případě by samotný jedinec *x* cestoval do minulosti, kde by zplodil potomka

[3] Sexuální aktivita mezi příbuznými (krvesmilstvo).

se svým rodičem →zplodil by tedy sám sebe a následně by tedy platilo, že je svým vlastním rodičem. Z těchto teorií (tedy minimálně z té první) vyplývá, že ano jedinec *x* může být svým vlastním rodičem a relace je v teoretické rovině areflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ y)] – Pokud *x* je rodičem *y* tak zároveň platí, že *y* je rodičem *x*. Znovu na teoretické úrovni by si *y*, které je dítětem *x*, mohlo vzít (uzavřít sňatek) svého prarodiče (tedy rodiče *x*) a tím by se z *y* stal nevlastní rodič rodiče *x*. Stejným způsobem by se dalo využít teoretického cestování v čase. Jelikož, ale připouštíme vztahy z minulého příkladu, relace není symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Tedy *x* je rodičem *y* a *y* je rodičem *x*, z čehož vyplývá že *x* a *y* se sobě rovnají. Tuto implikaci ovšem můžeme vyvrátit tak, že by teoreticky mohla nastat situace, kdy *x* je rodičem *y*, ale *y* uzavře sňatek se svým prarodičem, tedy *y* by bylo nevlastním rodičem *x*. Přitom *x* a *y* jsou dvě různé osoby. Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Pokud je *x* rodičem *y* a zároveň je *y* rodičem *z*, tak z toho vyplývá že *x* je rodičem *z*. Tato vlastnost může fungovat na jednoduchém principu – jedinec *x* je rodičem *y* a pak následně ten samý jedinec *x* zplodí potomka společně s *y* (potomka *z*), ergo *y* je rodičem *z*, ale zároveň i *x* je rodičem *z*. Protože připouštíme i případ v minulém příkladu, relace znovu nebude tranzitivní.

Ve výsledku dostáváme relaci, která je areflexivní, ale není symetrická, antisymetrická, ani tranzitivní.

2.2 RŮZNÉ HRY

V této podkapitole si ukážeme, že mnoho her, a to jak deskových, karetních, nebo úplně speciálních, se dá vyjádřit jako binární relace. Ukážeme si jaké vlastnosti mají a jak vypadají.

2.2.1 KÁMEN, NŮŽKY, PAPÍR

První hra, kterou můžeme vyjádřit jako binární relaci, je stará klasická hra „Kámen, nůžky, papír“. Jedná se o hru pro dva a více hráčů a první známky o její existenci pochází z 19. století z Japonska. Tato hra funguje na principu vyřazování. Hráči pomocí odpočtu synchronizovaně ukážou jeden ze symbolů (kámen – zatnutá pěst, nůžky – zavřená ruka s dvěma zvednutými prsty (ukazováček, prostředníček), papír – rozevřená dlaň (viz Příloha IV)). Následně se vyřazuje ten hráč, který podle pravidel nikoho „nepřebíjí“. Pravidla jsou následující: kámen přebíjí nůžky (ztupí je), nůžky přebíjí papír (rozstřihnou ho) a papír přebíjí kámen (zabalí ho). Pokud ovšem všichni hráči ukážou v jednom kole stejný symbol, nebo pokud se všechny symboly navzájem v jednom kole přebíjí, tak se celé kolo anuluje a zůstávají nadále hrát všichni hráči. [11]

Nyní si ukažme, jaké vlastnosti má binární relace „x přebíjí y“.

Reflexivnost: (x ρ x) – Tedy *x* by mělo přebíjet samo sebe. To podle pravidel neplatí, protože pokud jsou symboly stejné, tak se kolo anuluje. Z toho vyplívá, že relace není reflexivní, ale dokonce je antireflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Pokud prvek *x* přebíjí prvek *y*, tak následně i prvek *y* přebíjí prvek *x*. Jelikož se jedná o jednosměrný kruh, tak vlastnost taky neplatí – například kámen přebíjí nůžky, ale nůžky nepřebíjí kámen. Relace není symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Prvek *x* je v relaci *y* a *y* je v relaci s *x,* což implikuje, že se prvky *x* a *y* rovnají. V tomto příkladu bude relace triviálně antisymetrická. Z přílohy IV můžeme zjistit, že levá polovina implikace nemůže nikdy nastat (ve výrokové logice označíme tuto relaci jako 0). V případě výrokové logiky implikace ať doplníme za pravou stranu 0 nebo 1, bude vždy vycházet tvrzení pravdivé. Ve výsledku je relace antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Jestliže *x* přebíjí *y* a zároveň *y* přebíjí *z*, pak z toho vyplývá, že *x* přebíjí *z*. Jak již bylo zmíněno, jedná se o jednosměrný kruh, a tato vlastnost taktéž není platná. Například papír přebíjí kámen a kámen přebíjí nůžky, ale papír nepřebíjí nůžky.

Výsledně je relace „Kámen, nůžky, papír“, relací, která je antireflexivní a antisymetrická a není tranzitivní.

2.2.2 PRŠÍ

Jako další příklad hry jako binární relace je Prší. Prší je velmi známá karetní hra, která vznikla v poválečných letech. Její původní název „Mau-mau“ pochází z odvození od křídla osvobozeneckého hnutí v Keni, ale ve střední Evropě je tato hra známá spíše pod pojmy „Pony“ nebo právě naše Prší. Tato hra se hraje nejčastěji s mariášovými kartami (32 karet – 7, 8, 9, 10, spodek, svršek, král, eso; barvy: srdce, zelené, žaludy a kule), a hlavním úkolem pro hráče (většinou 2 až 6) je zbavit se co nejrychleji svých karet, přičemž na začátku každého kola má každý hráč čtyři karty. V Příloha V se nachází složení všech 32 karet, se kterými Prší hrajeme. [12]

Pravidla hry jsou následující: jeden hráč rozdá všem hráčům karty a jednu pak lícem umístí doprostřed stolu (pokud se jedná o svršek o výběru startovní barvy rozhoduje barva úplně poslední karty v balíčku), zbytek balíčku postaví na stůl, kde bude sloužit pro dobírání karet (hráč si musí vzít kartu z balíčku, pokud nemůže nebo nechce odhodit ani jednu kartu, co drží v ruce). Karty může každý hráč zahrát tak, že na stejné číslo může zahrát pouze stejné číslo (různé druhy barev) nebo stejnou barvu (jakékoliv číslo). Například, leží-li na stole zelená 9, další hráč může na tuto kartu zahrát jakoukoliv devítku (žaludovou, srdcovou, nebo kulovou), nebo jakoukoliv zelenou kartu (7, 8, 10, spodek, svršek, král, eso). [12]

Tato pravidla se však úplně nevztahují na takzvané speciální karty (sedma, svršek, eso – viz Příloha VI). Tyto katry mají speciální efekty: sedma – pokud se zahraje, hráč, který je další na řadě, si musí vzít dvě karty z balíčku. Ovšem pokud se mezi sebou hráči domluví na „přebíjení“, tak pokud padne sedma a následující hráč má jinou sedmu v ruce, může tu první „přebít“ a tím pádem až další hráč bere karty z balíčku, tentokrát čtyři. Svršek – může být zahrán kdykoliv a na libovolnou kartu (mimo sedmy a esa) a hráč, který svrška použil, určuje, ve které barvě bude následující hráč pokračovat. Například hráč A zahraje svrška a rozhodne se pro žaludy, to tedy znamená, že další hráč musí zahrát jakoukoliv žaludovou kartu, nebo použít jiného svrška na změnění barvy znovu. Eso – podobně jako u sedmy, pokud nějaký hráč zahraje eso, následující hráč nehraje. Výjimkou je znovu „přebíjení“, kdy, pokud se zahraje eso a následující hráč ho vlastní mezi svými kartami, může to první „přebít“ a tím „stojí“ až hráč následující. [12]

Nyní si vymezíme vlastnosti relace Prší. V tomto případě relaci definovanou pojmem „moci zahrát na“ (ve hře můžeme přebíjet):

Reflexivnost: (x ρ x) – Na kartu *x* můžeme zahrát znovu kartu *x*. Toto obecně platí, v případě přebíjení a relace je tedy reflexivní.

Pozn: Ovšem je zde nutné zmínit, že v každém balíčku se každá karta nachází právě jednou, tudíž tato situace v praxi nastat nemůže (při hře s jednou sadou karet).

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – To nám popisuje vztah takový, že pokud můžeme na kartu *x* zahrát kartou *y*, tak i na kartu *y* můžeme hrát kartou *x*. Zde se dostáváme do jistého problému se speciálními kartami. Bez speciálních karet by symetričnost ve všech případech fungovala, ale pokud by například karta *x* byla srdcová 8 a karta *y* by byla srdcová 7, pak se dostáváme do sporu, protože na srdcovou 7 nemůže následující hráč zahrát srdcovou 8.

Pozn: Relace by z teoretického hlediska mohla být symetrická za předpokladu, že není povolené přebíjení. Šlo by o to, že první hráč by zahrál srdcovou sedmu, druhý hráč by musel brát dvě karty z balíku, díky čemuž by nehrál (nepoložil by do hry žádnou další kartu). Třetí hráč by mohl jako následující kartu zahrát právě danou srdcovou 8 – což by vedlo k tomu, že by na srdcovou 7 byla zahrána srdcová 8. Totéž by platilo i v případě přebíjení, ale za předpokladu, že by druhý hráč neměl žádnou sedmu, kterou by mohl přebít (pak by musel lízat a situace by byla obdobná).

Díky této poznámce můžeme tvrdit, že relace je symetrická.

Antisymetričnost: $[(x \rho y) \wedge (y \rho x)] \Rightarrow (x = y)$ – Typ *x* je v relaci s typem *y* a zároveň je typ *y* v relaci s *x*, z čehož vyplívá že se prvky *x* a *y* rovnají. V našem případě by to tedy znamenalo, že by relace byla symetrická pouze ve chvíli, kdy se karty x a y rovnají. Antisymetričnost neplatí, jelikož například pro kulovou 9 a zelenou 9 symetrie platí, aniž by se karty sobě rovnaly. Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: $[(x \rho y) \wedge (y \rho z)] \Rightarrow (x \rho z)$ – Tento předpoklad si můžeme vyložit tak, že na kartu *x* můžeme zahrát kartu *y*. Zároveň pak na kartu *y* můžeme hrát kartu *z*. Tento předpoklad můžeme vyvrátit hned několika způsoby. Například pokud budeme jako *x* hrát kulovou 10 a *y* budeme hrát žaludovou 10, *z* pak bude představovat žaludovou 8. V tomto případě určitě nemůžeme zahrát na kulovou desítku žaludovou 8 (to odporuje pravidlům hry). Dalším příkladem je opět využití speciálních karet, například za *x* si představme zelenou 9 a za y zelené eso, za z pak eso srdcové. Zde znovu určitě víme, že na zelenou 9 nemůžeme hrát srdcovým esem.

Ve výsledku tady dostáváme, že tato relace je reflexivní, symetrická, ale není antisymetrická ani tranzitivní.

2.3 POKÉMONI

Dalším, tentokrát poněkud zvláštním případem binární relace v reálném světě, jsou Pokémoni. Toto téma by se dalo zařadit do kapitoly hry, ale jelikož tuto množinu, množinu Pokémonů, můžeme využít hned několikrát, bude lepší ji věnovat samostatný oddíl.

Pojem Pokémon pochází z Japonska, jedná se v podstatě o zkratku vytvořenou ze slov „pocket monsters“, tedy do češtiny bychom tento výraz přeložili jako kapesní příšerky. Autorem původní videohry (tedy prostoru, kde se s nimi poprvé setkáváme) je Satoshi Tajiri. Byla poprvé publikována společností Nintendo v roce 1996. Hra Pokémon je po všech mnoha letech stále aktuální (prošla několika vylepšeními a obnovami), kdy jako poslední v roce 2022 vyšla tzv. osmá generace této videohry. Pokémoni se ale vryli do paměti svých fanoušků nejen jako hra na Nintendo, ale taktéž jako karetní hra, animovaný seriál nebo mobilní aplikace (Pokemon GO spuštěná v roce 2016). [13]

Pravidla hry se na první pohled mohou zdát poněkud složitá, ale princip je poměrně jednoduchý. Ve hře máte avatara, který má 6 pokémonů, se kterými bojuje proti ostatním. Pokémoni mohou být různého typu: normální, bojový, létající, jedovatý, zemní, kamenný, hmyzí, duch, ocelový, ohnivý, vodní, travní, elektrický, psychický, ledový, dračí, temný a vílí typ. Základem je, že každý tento typ má jiný vliv v boji proti ostatním typům. [13]

Na samotném bojišti si pak hráč vybere jednoho ze svých pokémonů a bojuje proti jinému, co si vybral protihráč. Celý zápas je konstruovaný na principu tahové strategie. V praxi to funguje takovým způsobem, že hraje první hráč, který má na výběr z několika akcí (může použít pouze jednu), jakmile svůj krok dokončí, hraje hráč druhý. Prohrává ten, kterému jako prvnímu klesne zdraví pokémona na minimum (pokémon omdlí a není schopen dalšího zápasu). Akce, ze kterých může hráč ve svém kole vybírat jsou: útok (pokémon zaútočí na soupeře), použití předmětu (uzdravovací lektvar, …), výměna pokémona (pokud má hráč více než jednoho, může je v průběhu boje vystřídat), odchod (pokud se to hráči povede, může se pokusit utéct společně se svým pokémonem). [13]

Pro naše šetření binárních relací budeme potřebovat informace, jakým způsobem a jak působí jeden typ na ostatní. Tyto údaje najdeme v tabulce Příloha VII.

2.3.1 BÝT EFEKTIVNÍ

Relace budeme definovat pojmem „být efektivní“, tedy jinak řečeno, typ pokémona dává normální, čí zvýšené poškození druhému typu pokémona. V tabulce (Příloha VII) nás zajímá, mezi kterými typy se vyskytuje 1 nebo 2:

Reflexivita (x ρ x): – Zajímá nás, jestli ten samý typ pokémona, má stejný vliv sám na sebe. To ale neplatí, jelikož například jedovatý typ na sebe působí pouze se sníženou efektivností. Z tabulky lze ale vyčíst, že některé prvky vůči sobě reflexivní jsou a díky tomu je relace areflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Zajímá nás, jestli je jeden typ pokémona efektivní vůči druhému a jestli je pak i ten druhý efektivní vůči prvnímu. Z tabulky můžeme vyčíst, že relace symetrická není, jelikož například kamenný typ je efektivní vůči normálnímu typu, ale naopak je normální typ pouze slabě efektivní (což neplatí pro predikát naší relace) vůči kamennému. Relace není symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Tento předpis nám říká, že relace je antisymetrická pouze v případě, že typy *x* i *y* se sobě rovnají a platí, že *x* je v relaci s *y* a *y* je v relaci s *x*. Toto dle přiložené tabulky taktéž neplatí, protože například hmyzí typ je efektivní proti normálnímu a zároveň ale i normální typ je efektivní vůči hmyzímu (a normální typ není stejný jako typ hmyzí). Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Tedy zkoumáme, pokud typ *x* je efektivní vůči typu *y* a zároveň je typ *y* efektivní vůči typu *z*, zda je typ *x* efektivní vůči typu *z*. Tento důsledek nám vyvrací například trojice, kde x = hmyzí typ, y = normální typ a z = létající typ. Hmyzí typ je efektivní proti normálnímu a normální typ je efektivní vůči létajícímu, ale hmyzí typ je jen slabě efektivní proti létajícímu. Relace tranzitivní není.

Tato relace je tedy areflexivní, není symetrická, antisymetrická ani tranzitivní.

2.3.2 BÝT SUPEREFEKTIVNÍ

Relace „být superefektivní“, jinak řečeno pokémon dává za útok pouze zvýšené poškození. V tabulce (viz Příloha VII) hledáme pouze hodnotu 2.

Reflexivnost: (x ρ x) – Zajímá nás, zda je každý prvek superefektivní sám vůči sobě. To neplatí a relace není reflexivní. Například zemní typ je vůči sobě pouze normálně efektivní. Ovšem v tabulce se vyskytuje několik typů, které podmínku splňují, a tedy relace je areflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Typ *x* je superefektivní proti typu *y* a pak zároveň i typ *y* má být superefektivní vůči *x*. V tabulce si můžeme například všimnout, že ocelový typ je superefektivní vůči kamennému, ale kamenný typ je pouze slabě efektivní vůči ocelovému. Relace není symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Typ *x* je v relaci s typem *y* a zároveň je typ *y* v relaci s *x*, z čehož vyplívá že se prvky *x* a *y* rovnají. Pokud bychom vyzkoušeli všechny kombinace superefektivních prvků, zjistili bychom, že relace je antisymetrická, protože jediné, kdy platí, že jsou dva prvky vzájemně vůči sobě superefektivní je, když jsou si prvky rovny (přesněji jediné dva prvky, a to duch a dračí typ).

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Pokud je typ *x* superefektivní vůči typu *y* a zároveň pokud je *y* superefektivní vůči typu *z*, pak musí platit, že i typ *x* je superefektivní vůči typu *z*. To bohužel neplatí, protože například hmyzí typ je superefektivní vůči travnímu typu a ten je pak superefektivní proti typu kamennému, ale hmyzí typ je jen normálně efektivní vůči kamennému. Relace je tranzitivní.

Relace je tedy areflexivní, antisymetrická a není symetrická a tranzitivní.

2.3.3 BÝT NEEFEKTIVNÍ

Relace „být neefektivní“, tedy pokémon dává pouze snížený nebo žádný útok. V tabulce (viz. Příloha VII) nás tentokrát zajímají hodnoty 0.5 a 0.

Reflexivita: (x ρ x) – Zajímá nás, zda ten samý typ je vůči sobě efektivní slabě nebo vůbec. To neplatí, jelikož například typ duch je vůči sobě superefektivní. Z tabulky zároveň můžeme vyčíst, že pro některé prvky však tento předpoklad platí, a proto je relace areflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Zajímá nás, zda pokud je typ *x* neefektivní vůči typu *y*, tak to znamená že typ *y* je neefektivní proti *x*. Tento předpoklad popřeme například ve chvíli, kdy bojový typ je neefektivní proti duchovi, ale duch je normálně efektivní vůči bojovému. Znamená to, že relace není symetrická.

Antisymetričnost: $[(x \rho y) \wedge (y \rho x)] \Rightarrow (x = y)$ – Což znamená, že typ *x* je v relaci s typem *y* a zároveň je typ *y* v relaci s *x*, z čehož vyplívá že se prvky *x* a *y* rovnají. Z tabulky můžeme vyčíst, že například typ duch nedává žádné poškození normálnímu a stejně tak i normální typ nedává žádné poškození duchovi. Relace není ani antisymetrická.

Tranzitivnita: $[(x \rho y) \wedge (y \rho z)] \Rightarrow (x \rho z)$ – Zkoumáme, zda pokud typ *x* je neefektivní vůči typu *y* a *y* je neefektivní vůči *z*, pak by mělo platit, že typ *x* je neefektivní proti typu *z*. Z tabulky jsme schopni zjistit, že pokud bychom si za prvky vzali x = bojový typ, y = typ duch a z = normální typ, kdy bojový typ je neefektivní proti duchovi a duch je neefektivní proti normálnímu, tak bojový typ je superefektivní proti normálnímu. Relace není ani tranzitivní.

Nakonec dostáváme relaci areflexivní, která ale není symetrická, antisymetrická ani tranzitivní.

2.4 MĚSTSKÁ HROMADNÁ DOPRAVA

Jako poslední ukázkovou binární relaci z reálného světa si zde ukážeme, že jako takovou binární relaci můžeme vzít tak banální koncept, jako je cestování městskou hromadnou dopravou. Pro názorné ukázky pak využijeme mapu plzeňské MHD, která je zároveň přiložená jako Příloha VIII, a současně na odkazu vloženém níže nalezneme stejnou mapu v interaktivním provedení.

https://jizdnirady.pmdp.cz/provoz

Pod pojmem MHD si tedy představujeme systém linek veřejné osobní městské hromadné dopravy. V Plzni by se pak jednalo konkrétně o 3 linky tramvají, 9 linek trolejbusů, 27 linek autobusů a 9 nočních linek. Tento systém pak využívá přesně 312 zastávek rozprostřených po celém městě a v jeho příměstských oblastech.

2.4.1 MOCT PŘESTOUPIT

Budeme se tedy zabývat relací vymezenou pomocí pojmu „moci přestoupit z linky x na linku y“. Určeme si nyní vlastnosti této relace.

Reflexivnost: $(x \rho x)$ – Zajímá nás, pokud jedeme konkrétní linkou *x*, zdali pak můžeme na nějaké zastávce přestoupit na tu samou linku *x*. To samozřejmě platí, jakmile na nějaké zastávce linky *x* vystoupíme, můžeme na tom samém místě nastoupit na tutéž linku znovu (a to ať už v případě, že jsme vystoupili z vozu, jen abychom pustili ostatní cestující ven, nebo, že chceme počkat na další spoj). Například jedeme-li linkou 12 a vystoupíme na zastávce Mikulášská, můžeme na té samé zastávce nastoupit na linku 12 znovu. Relace je tedy reflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – V našem případě jde o princip, že pokud můžeme přestoupit z linky *x* na linku *y*, tak zároveň můžeme i z linky *y* přestoupit na tom samém místě na linku *x*. Tedy jakmile linka *x* staví na zastávce, na které staví i jiná linka *y*, můžeme mezi nimi libovolně přestupovat. Takovýchto zastávek, kde staví více než jedna linka, je v Plzni 183. Tedy pokud bychom například jeli linkou tramvaje 4 a vystoupili bychom na zastávce Pod Záhorskem, můžeme přestoupit na linku tramvaje 1, a stejně tak můžeme na zastávce Pod Záhorskem přestoupit z linky 1 na linku 4. Relace je tedy symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – tedy z linky *x* můžeme přestoupit na linku *y* a zároveň z linky *y* můžeme přestoupit na linku *x* z čehož vyplývá, že linky *x* a *y* je jedna a tam samá linka. Toto můžeme vyvrátit tak že x = autobus 29 a y = autobus 30. Mezi linkami 29 a 30 můžeme libovolně přestupovat na zastávkách: Poliklinika Doubravka, Opavská, U Pietasu, U Astry, Rolnické náměstí, Částkova, Poliklinika Slovany, Pošta Francouzská, Slovany, Vodárna, Panasonic, Borská pole. Přitom linka 29 je rozdílná od linky 30. Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Zajímá nás, zda pokud můžeme z linky *x* přestoupit na linku *y* a *z* linky *y* přestoupit na linku *z*, jestli pak můžeme zároveň i přestoupit z linky *x* na linku *z*. Tento předpoklad vyvracíme, pokud bychom například za *x* zvolili linku autobusu 32, za *y* linku trolejbusu 16 a za linku *z* tramvaj 2. Z linky 32 můžeme přestoupit na linku 16 a to na dvou zastávkách (U Luny a U Teplárny). Z linky 16 pak můžeme přestoupit na tramvaj 2, na zastávce Hlavní nádraží, ale z linky 32 nemůžeme nikdy přímo přestoupit na tramvaj 2. Relace tedy není tranzitivní.

Pozn. Tato relace by mohla být tranzitivní v případě, že by například v zadání byl predikát „moci přestoupit na téže zastávce“. V tom případě by na stejné zastávce museli zastavovat všechny tři prvky a relace by byla i tranzitivní. Pak by byla relace zároveň relací ekvivalence. Takových zastávek, na kterých zastavují více než tři linky, je v Plzni 123 (včetně nočních linek).

Relace je reflexivní, symetrická, ale není tranzitivní.

2.4.2 CESTOVÁNÍ MEZI ZASTÁVKAMI

Tentokrát si zkusme relaci s predikátem „dostat se ze zastávky *x* do zastávky *y* pomocí linek MHD“. Mezi zastávkami můžeme neomezeně přestupovat. Určeme si nyní její vlastnosti.

Reflexivnost: (x ρ x) – Zajímá nás, zda se můžeme ze zastávky *x* dostat na tu samou zastávku *x*. V případě, že ze zastávky *x* odjíždí nějaká linka MHD, tak se na to místo také vrací a relace tedy je reflexivní.

Symetričnost: [(x ρ y) ⇒ (y ρ x)] – Tedy pokud se lze pomocí MHD dostat z místa *x* na místo *y*, pak by se mělo i z místa *y* dostat zpět pomocí MHD na místo *x*. Tuto vlastnost nám komplikují jednosměrné zastávky jako je například zastávka Hlavní pošta. Z Hlavní pošty totiž, můžeme například pomocí linky 2, dostat na zastávku Terezie Brzkové, ale ze zastávky Terezie Brzkové se přímo do zastávky Hlavní pošta nedostaneme. Můžeme však z Terezie Brzkové přejet až do zastávky Anglické nábřeží, kde můžeme přestoupit na opačný směr linky 2 a dojet zpět k Hlavní poště. Relace je tedy symetrická.

Antisymetričnost: [(x ρ y) ∧ (y ρ x)] ⇒ (x = y) – Ze zastávky *x* se můžeme pomocí MHD dostat na zastávku *y* a zároveň se ze zastávky y se můžeme dostat pomocí MHD dostat na zastávku *y*. Toto implikuje, že zastávky *x* a *y* jsou stejné (jedna stejná zastávka). Tato implikace neplatí, neboť se můžeme ze zastávky Slovany dostat pomocí MHD na zastávku Jedlová, stejně tak se můžeme ze zastávky Jedlová dostat na zastávku Slovany. Zastávky Jedlová a Slovany odlišné. Relace není antisymetrická.

Tranzitivita: [(x ρ y) ∧ (y ρ z)] ⇒ (x ρ z) – Zajímá nás, zda pokud se ze zastávky *x* můžeme pomocí linek MHD dostat do zastávky *y* a ze zastávky *y* se pak můžeme pomocí MHD dostat do zastávky *z*, znamená to že i ze zastávky *x* se můžeme pomocí MHD dostat do zastávky *z*. Jelikož v rámci relace máme povolené přestupy, pak se vždy můžeme dostat ze zastávky *x* do zastávky *z*. Relace tedy bude tranzitivní. Například ze zastávky Vinice se můžeme pomocí linky 41 dostat na zastávku Sady pětatřicátníků, odkud se pak můžeme dostat pomocí linky 4 na zastávku Technická. A zároveň můžeme ze zastávky Vinice přejet na zastávku technická dokonce tak, aniž bychom využili zastávku *y* (Sady pětatřicátníků).

Relace je tedy reflexivní, symetrická i tranzitivní – je tedy relací ekvivalence.

3 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Tato poslední část je věnována několika různým příkladům binárních relací, které bychom mohli najít ve světě kolem nás. Tentokrát jsou však příklady neřešené.

3.1 HRY

1. Vezměme si jako hru znovu Prší. Vyšetřete vlastnosti relace zadanou pojmem „x je přebito y“.
2. Vyšetřete vlastnosti relace „x platí y“ ve hře Monopoly.
3. Vyšetřete vlastnosti relace na množině hry Člověče, nezlob se, zadanou pomocí pojmu „x vyhodí figurku y“.
4. Mějme zadanou relaci pomocí pojmu „x zvítězí nad y“, vyšetřete její vlastnosti.
5. Vyšetřete vlastnosti relace „x remízuje s y“.

3.2 DOPRAVA

1. Vyšetřete vlastnosti relace zadané pomocí pojmu „x má novější model auta než y“.
2. Mějme relaci „x má dražší auto než y“, vyšetřete vlastnosti této relace.
3. Vyšetřete vlastnosti relace zadané predikátem „x předjel y“.

3.3 ZAMĚSTNÁNÍ

1. Mějme relaci být kolegou v práci, vyšetřete vlastnosti relace „x je kolegou y“.
2. Vyšetřete vlastnosti relace „x je učitelem y“.
3. Mějme zadaný predikát „x je nadřízeným y“, vyšetřete vlastnosti této relace.
4. Vyšetřete vlastnosti binární relace „x měsíčně vydělává více peněz než y“.

3.4 PŘÁTELSTVÍ

1. Mějme zadanou relaci pomocí pojmu „x zná y“, nebo relaci „x je přítelem na sociální síti y“, vyšetřete vlastnosti této relace.
2. Vyšetřete vlastnosti relace „x je nepřítel y“.
3. Mějme relaci zadanou pomocí predikátu „x je vyšší než y“, vyšetřete její vlastnosti.
4. Mějme zadanou relaci, kdy „x je zajímavý pro y“, vyšetřete vlastnosti této relace.
5. Vyšetřete vlastnosti relace „x je oblíbenější než y“.
6. Mějme zadanou relaci pomocí pojmu „x má společný koníček s y“, vyšetřete vlastnosti této relace.

3.5 OSTATNÍ

1. Vyšetřete vlastnosti relace zadanou pomocí pojmu „x je dvojčetem y“.
2. Vyšetřete vlastnosti relace zadanou predikátem „x je tanečníkem y“.
3. Mějme zadanou relaci, kdy „x je sousedem y“, vyšetřete její vlastnosti.
4. Relace je zadaná pomocí předpokladu „x a y vlastní stejnou značku telefonu“, vyšetřete vlastnosti této relace.
5. Mějme zadanou relaci „x je výš v potravním řetězci než y“, vyšetřete vlastnosti této relace.

ZÁVĚR

Tato práce měla dvě konkrétní náplně. První z nich bylo napsat bakalářskou práci takovou, aby mohla sloužit studentům matematických studií jako pomocný učební text a zároveň jako sbírka speciálních příkladů. Všem těmto studentům by měla pomoci komplexně pochopit téma binárních relací. Druhou náplní pak bylo napsat práci dostatečně srozumitelnou, aby si ji mohl přečíst každý, kdo by se rád přesvědčil, že matematika se v reálném světě opravdu prolíná kdekoliv.

Práci jsme rozdělili do tří hlavních kapitol.

První kapitolu jsme celou věnovali vysvětlování teorie. Tedy seznámení s matematickými pojmy, které pro zkoumání binárních relací potřebujeme. Začali jsme pojmem množina a přes pojmy, jako je uspořádaná dvojice, kartézský součin a jeho grafické znázornění, jsme se propracovali až k pojmům binární relace, grafické znázornění binárních relací a ke stěžejním vlastnostem binárních relací. Každou definici, či vysvětlivku, jsme pak pro snadnější pochopení doplnili o názorné příklady.

Ve druhé kapitole jsme pak již řešili konkrétní příklady z reálného světa. Ty jsme záměrně vybrali takové, aby byly nějakým způsobem zajímavé. Například příklady společné s tím, co nám je nejbližší, tedy s rodinou, nebo příklady ze světa her či z cestování městskou hromadnou dopravou. V této kapitole jsme zjistili, že ne všechny úlohy jsou tak jednoduché, jak se na první pohled může zdát. Tedy v případě relace „být sourozencem“ jsme se dostali do problémů s nevlastními sourozenci. V případě hry Prší vyvstal například problém u takzvaných speciálních karet, nebo u zkoumání plzeňské městské dopravy, kdy musíme počítat i s jednosměrnými zastávkami.

Ve třetí kapitole jsme pak už jen na závěr zmínili některé další příklady binárních relací v reálném světě. V tomto případě byly úlohy neřešené.

RESUMÉ

Tato bakalářská práce pojednává o vztazích v reálném světě jako o příkladech binárních relací. Tedy zabývá se šetřením vlastností binárních relací (reflexivita, symetričnost, tranzitivita) definovaných pomocí pojmů reálného prostředí. Nejprve práce vymezuje základní teoretické pojmy, které ve druhé části aplikuje na konkrétních příkladech. Poslední část je věnovaná neřešeným příkladům binárních relací reálného světa.

This bachelor thesis deals with real-world relationships as examples of binary relations. It studies properties of binary relations (reflexivity, symmetry, transitivity), which are defined with the usage of real-life surroundings. Firstly this work defines the basic theoretical concepts, which it then applies in the second part to specific examples. In the last part there are other examples of binary relations in the real world.

SEZNAM LITERATURY

[1] Množiny. In: *Matematika polopatě* [online]. mathweb, 2006 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/mnoziny/

[2] CHRVÁT, Lukáš. *Relace, uspořádání a ekvivalence – sbírka řešených příkladů* [online]. Brno, 2009 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/aej7c/BP.pdf. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Vedoucí práce Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

[3] VRÁBÍK, Josef. *Binární relace v učivu matematiky 1. stupně základní školy* [online]. Ostrava, 2014 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://theses.cz/id/ksz9ra/. Diplomová práce. OSTRAVSKÁ UNIVERZITA V OSTRAVĚ. Vedoucí práce PhDr. Bohuslav Pisklák, CSc.

[4] NOVÁK, Bohumil; EBEROVÁ, Jindřiška; STOPENOVÁ, Anna. Základy elementární matematiky v úlohách. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého – Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-244-0853-8.

[5] BALCAR, Bohuslav a ŠTĚPÁNEK, Petr. Teorie množin: vysokošk. příručka pro stud. matematicko-fyz. fakult. 1. vyd. Praha: Academia, 1986. 412 s.

[6] MIROSLAV, Bělík. *Binární relace: text ke studiu matematiky v oboru učitelství pro první stupeň základní školy zejména jako opora pro kombinované studium* [online sborník]. Ústí nad Labem, 2005 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://docplayer.cz/6348297-Text-ke-studiu-matematiky-v-oboru-ucitelstvi-pro-prvni-stupen-zakladni-skoly-zejmena-jako-opora-pro-kombinovane-studium.html. Elektronická skripta. UNIVERZITA JANA EVANGELISTY PURKYNĚ.

[7] PISKLÁK, Bohuslav. *Matematika pro učitele primárního vzdělávání: binární relace a zobrazení: distanční text*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7368-013-0. (strany 7–10, 53)

[8] DRÁBEK, Jaroslav a Lukáš HONZÍK. Elektronická skripta k předmětu Elementární algebra [online]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011 (strany 1–4)

[9] SADÍLEK, Martin. *RELACE, USPOŘÁDÁNÍ, SVAZY* [online]. Plzeň, 2010 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: elektronické prostředí Západočeské univerzity. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni. Vedoucí práce Mgr. Lukáš Honzík.

[10] HOLUB, Přemysl. *Pomocný text k předmětu Diskrétní matematika* [online]. Plzeň, 2021 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: courseware předmětu KMA/DMA. Skripta. Západočeská univerzita.

[11] Kámen, nůžky, papír. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/K%C3%A1men,_n%C5%AF%C5%BEky,_pap%C3%ADr

[12] Prší. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Pr%C5%A1%C3%AD

[13] Pokémon: Electronic game. In: *Encyclopedia Britannica* [online]. Encyclopedia Britannica, 2012, 2013, s. 1 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://web.archive.org/web/20150527200032/https:/www.britannica.com/EBchecked/topic/1474435/Pokemon

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

Obrázek 1 – přímky k úloze 1.2.4. (zdroj: vlastní)....8
Obrázek 2 – kartézský graf (zdroj: vlastní) 11
Obrázek 3 – šachovnicový graf (zdroj: vlastní) 11
Obrázek 4 – uzlový graf (zdroj: vlastní)....12
Obrázek 5 – grafy k příkladu 1.5.1. (zdroj: vlastní) 13
Obrázek 6 – graf k příkladu 1.5.2. (zdroj: vlastní)....14
Obrázek 7 – výsledný graf k úloze 1.5.2. (zdroj: vlastní)....14
Obrázek 8 – příklad 1.8.1. a (zdroj: vlastní)....18
Obrázek 9 – grafy k úloze 1.8.1. b (zdroj: vlastní)....19
Obrázek 10 – grafy k úloze 1.8.1. c (zdroj: vlastní) 20
Obrázek 11 – grafy k příkladu 1.8.1. d (zdroj: vlastní) 20
Obrázek 12 – orientovaný graf k úloze 1.8.2. (zdroj: vlastní)....22
Obrázek 13 – pravdivostní graf k úloze 1.8.2. (zdroj: vlastní) 22
Obrázek 14 – pravdivostní graf k úloze 1.8.2. (zdroj: vlastní) 22
Obrázek 15 – grafické značení reflexivity (zdroj: vlastní)....23
Obrázek 16 – grafické znázornění symetričnosti (zdroj: vlastní)....23
Obrázek 17 – grafické znázornění tranzitivity (zdroj: vlastní) 24
Obrázek 18 – rovnoběžky k úloze 1.9.7. (zdroj: vlastní) 25
Obrázek 19 – zadání k úloze 1.9.10. (zdroj: vlastní) 28
Obrázek 20 – graf k příkladu 1.10.2. (zdroj: vlastní) 30
Obrázek 21 – reflexivní graf k příkladu 1.10.2. (zdroj: vlastní)....30
Obrázek 22 – symetrický graf příkladu 1.10.2. (zdroj: vlastní)....30
Obrázek 23 – graf relace ekvivalence příklad 1.10.2. (zdroj: vlastní) 31
Obrázek 24 – zadání příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní)....31
Obrázek 25 – reflexivní graf příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní) 32
Obrázek 26 – symetrický graf příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní)....32
Obrázek 27 – graf relace ekvivalence příkladu 1.10.3. (zdroj: vlastní) 33

Tabulka 1 – pomocná tabulka příklad 1.6.2. (zdroj: vlastní) 16

REFERENCE OBRÁZKŮ:

Obrázek 2 – PISKLÁK, Bohuslav. *Matematika pro učitele primárního vzdělávání: binární relace a zobrazení: distanční text*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7368-013-0. (str. 9)

Obrázek 3 – PISKLÁK, Bohuslav. *Matematika pro učitele primárního vzdělávání: binární relace a zobrazení: distanční text*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7368-013-0. (str. 9).

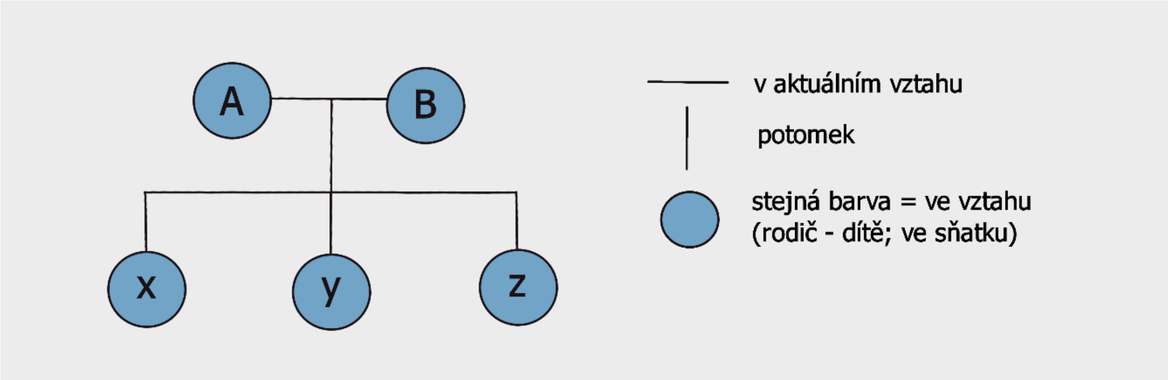
Obrázek 4 – PISKLÁK, Bohuslav. *Matematika pro učitele primárního vzdělávání: binární relace a zobrazení: distanční text*. Ostrava: Ostravská univerzita v Ostravě, Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7368-013-0. (str. 9)

Obrázek 12 – DRÁBEK, Jaroslav a Lukáš HONZÍK. Elektronická skripta k předmětu Elementární algebra [online]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. (str. 2)

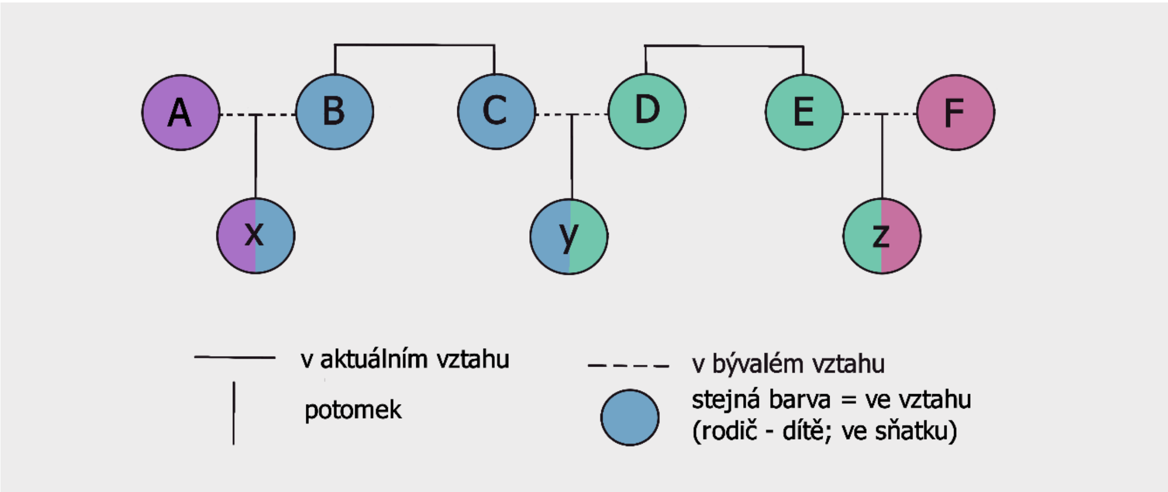
Obrázek 13 – DRÁBEK, Jaroslav a Lukáš HONZÍK. Elektronická skripta k předmětu Elementární algebra [online]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. (str. 3)

Obrázek 14 – DRÁBEK, Jaroslav a Lukáš HONZÍK. Elektronická skripta k předmětu Elementární algebra [online]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011. (str. 3)

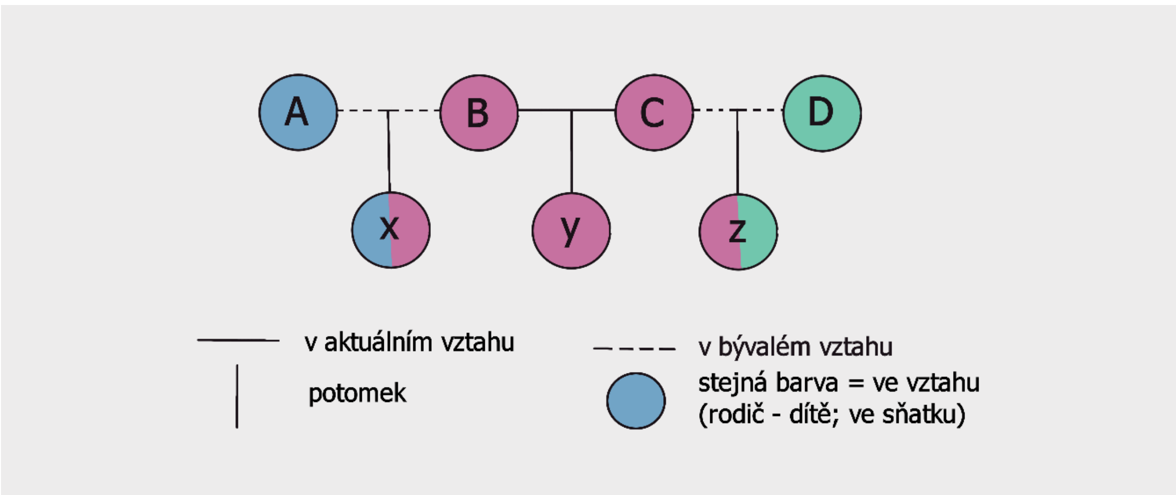
PŘÍLOHY



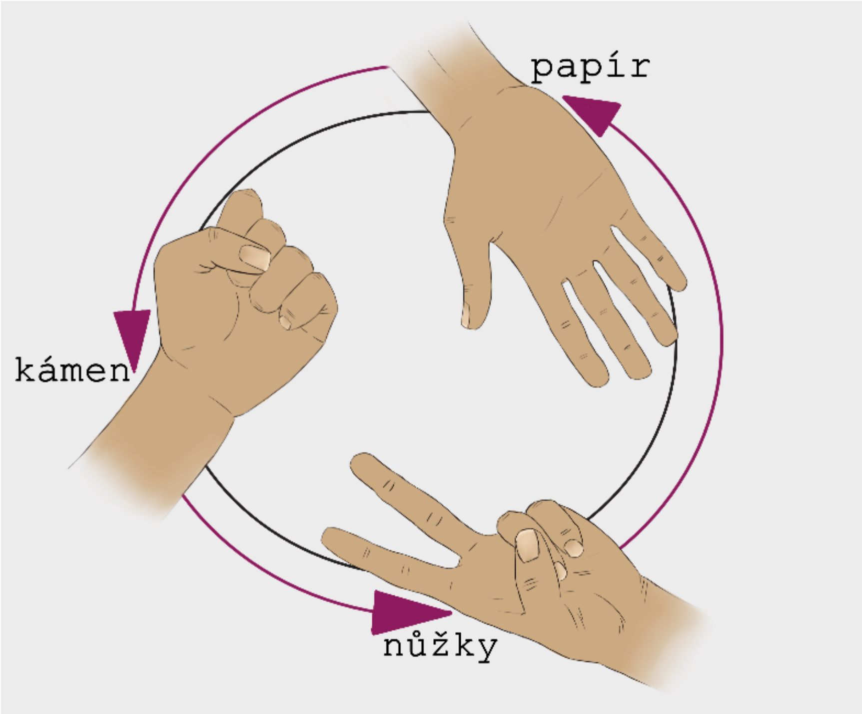
Příloha I – Rodokmenové zobrazení 1 (zdroj: vlastní)



Příloha II – Rodokmenové zobrazení 2 (zdroj: vlastní)



Příloha III – Rodokmenové zobrazení 3 (zdroj: vlastní)



Příloha IV – Kámen, nůžky, papír (zdroj: vlastní)

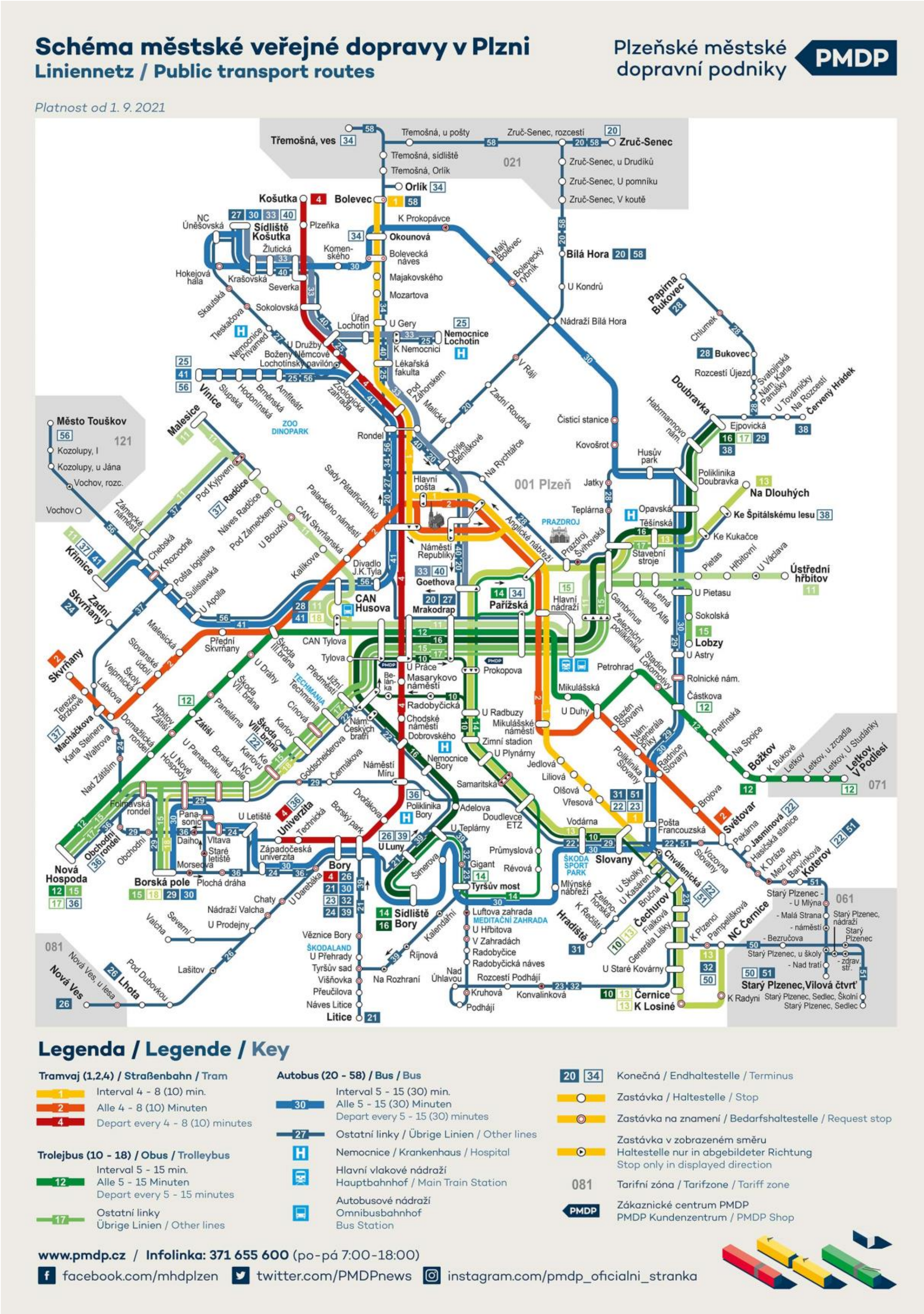
Příloha V – Mariášové karty (zdroj: vlastní)

Příloha VI – Speciální karty (zdroj: vlastní)

	Normální	Bojový	Létající	Jedovatý	Zemní	Kamenný	Hmyzí	Duch	Ocelový	Ohnivý	Vodní	Travní	Elektrický	Psychický	Ledový	Dračí	Temný	Vílí	
Normální	1	1	1	1	1	0.5	1	0	0.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Normální
Bojovný	2	1	0.5	0.5	1	2	0.5	0	2	1	1	1	1	0.5	2	1	2	0.5	Bojovný
Létající	1	2	1	1	1	0.5	2	1	0.5	1	1	2	0.5	1	1	1	1	1	Létající
Jedovatý	1	1	1	0.5	0.5	0.5	1	0.5	0	1	1	2	1	1	1	1	1	2	Jedovatý
Zemní	1	1	0	2	1	2	0.5	1	2	2	1	0.5	2	1	1	1	1	1	Zemní
Kamenný	1	0.5	2	1	0.5	1	2	1	0.5	2	1	1	1	1	2	1	1	1	Kamenný
Hmyzí	1	0.5	0.5	0.5	1	1	1	0.5	0.5	0.5	1	2	1	2	1	1	2	0.5	Hmyzí
Duch	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	0.5	1	Duch
Ocelový	1	1	1	1	1	2	1	1	0.5	0.5	0.5	1	0.5	1	2	1	1	2	Ocelový
Ohnivý	1	1	1	1	1	0.5	2	1	2	0.5	0.5	2	1	1	2	0.5	1	1	Ohnivý
Vodní	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	0.5	0.5	1	1	1	0.5	1	1	Vodní
Travní	1	1	0.5	0.5	2	2	0.5	1	0.5	0.5	2	0.5	1	1	1	0.5	1	1	Travní
Elektrický	1	1	2	1	0	1	1	1	1	1	2	0.5	0.5	1	1	0.5	1	1	Elektrický
Psychický	1	2	1	2	1	1	1	1	0.5	1	1	1	1	0.5	1	1	0	1	Psychický
Ledový	1	1	2	1	2	1	1	1	0.5	0.5	0.5	2	1	1	0.5	2	1	1	Ledový
Dračí	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5	1	1	1	1	1	1	2	1	0	Dračí
Temný	1	0.5	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	0.5	0.5	Temný
Vílí	1	2	1	0.5	1	1	1	1	0.5	0.5	1	1	1	1	1	2	2	1	Vílí

0 = neefektivní
1 = normální poškození
0.5 = snížené poškození
2 = superefektivní

Příloha VII – Tabulka typů pokémonů (zdroj: vlastní)



Příloha VIII – Mapa plzeňské MHD (zdroj: PMDP.cz)

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha I – Rodokmenové zobrazení 1 (zdroj: vlastní) I
Příloha II – Rodokmenové zobrazení 2 (zdroj: vlastní) I
Příloha III – Rodokmenové zobrazení 3 (zdroj: vlastní) I
Příloha IV – Kámen, nůžky, papír (zdroj: vlastní) II
Příloha V – Mariášové karty (zdroj: vlastní) III
Příloha VI – Speciální karty (zdroj: vlastní) III
Příloha VII – Tabulka typů pokémonů (zdroj: vlastní) IV
Příloha VIII – Mapa plzeňské MHD (zdroj: PMDP.cz) V

REFERENCE PŘÍLOH:

Příloha VII – DONALDSON, Alex. Pokemon Sword & Shield Type Chart: every type strength, weakness and resistance detailed. In: *VG247: News, Reviews, Articles, Guides* [online]. Network Limited, ReedPop, 2008, 14.12.2019 [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: Pokemon Sword & Shield Type Chart: every type strength, weakness and resistance detailed

Příloha VIII – Schéma městské hromadné dopravy v Plzni. In: *Plzeňské městské dopravní podniky* [online]. Plzeň: PMDP [cit. 2022-06-12]. Dostupné z: https://www.pmdp.cz/project/44/images/2523.jpeg