

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

Disertační práce

PLZEŇ, 2021

Ing. Marek Fehér

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra kybernetiky

APROXIMATIVNÍ PŘÍSTUP K PREDIKTIVNÍMU ŘÍZENÍ SYSTÉMU S DYNAMIKOU DVOJITÉHO INTEGRÁTORU

Ing. Marek Fehér

Disertační práce k získání akademického titulu doktor v oboru
Kybernetika

Školitel: doc. Ing. Ondřej Straka, Ph. D.

Plzeň, 2021

University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences
Department of Cybernetics

APPROXIMATIVE APPROACH
TO PREDICTIVE CONTROL
FOR SYSTEMS
WITH DOUBLE-INTEGRATOR
DYNAMICS

Ing. Marek Fehér

A dissertation submitted in partial fulfilment of the
requirements for the degree of Doctor of Philosophy in
Cybernetics

Advisor: doc. Ing. Ondřej Straka, Ph. D.

Pilsen, 2021

Prohlášení

Prohlašuji tímto, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

.....
(datum a vlastnoruční podpis autora)

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli doc. Ing. Ondřejovi Strakovi, Ph.D. za příkladný odborný dohled po celou dobu mého doktorského studia a za čas, jenž mně kvůli tomu obětoval. Poděkování patří rovněž i všem kolegům z Výzkumného týmu pro identifikaci systémů a rozhodování (IDM) a to jak za odborné rady, tak především za jejich přátelský a lidský přístup. Dále děkuji doc. Ing. Václavovi Šmídlovi, Ph.D. za cennou pomoc při řešení praktických problémů práce a vždy podnětné připomínky. Ing. Štěpánovi Janoušovi, Ph.D. pak patří dík za pomoc při laboratorních experimentech.

V neposlední řadě bych rád poděkoval své rodině a přátelům za podporu, které se mi od nich dostává za každé životní situace.

Anotace

Prediktivní řízení je v současnosti jednou z nejpoužívanějších strategií řízení. Mezi hlavní výhody prediktivního řízení lze bezesporu zařadit schopnost vyhovět případným omezením s menší náročností, než je tomu v případě konkurenčních strategií, i když větší výpočetní složitost rostoucí přirozeně s délkou prediktivního horizontu zůstává stále jednou z jeho největších slabin. Z tohoto důvodu byly metody prediktivního řízení zpočátku vyvíjeny pro potřeby chemického průmyslu, kde sloužily k regulaci pomalých chemických procesů. S dramatickým nárůstem výpočetní síly v posledních letech však prediktivní řízení proniká do stále nových oblastí. Aktuálně jsou techniky prediktivního řízení testovány a nasazovány i pro regulaci elektromechanických systémů, kde je nutné generovat akční zásah s velmi malou periodou. V případě návrhu prediktivního řízení pro takové systémy je však třeba, i přes veškeré výpočetní schopnosti dnešní výpočetní techniky, podstatně krátit prediktivní horizont. Důležitou otázkou tak je, jak se projeví dramatické zkrácení prediktivního horizontu na samotné kvalitě prediktivního řízení.

Tato disertační práce se věnuje návrhu prediktivního řízení pro speciální třídu systémů, jež se označuje jako systémy s dynamikou dvojitého integrátoru. Ve zmíněné třídě se pak práce soustředí na takové systémy, kde velká rychlost generování akčního zásahu představuje požadovanou vlastnost pro ně navrženého algoritmu prediktivního řízení. Práce zkoumá, jak se projevuje zkrácení prediktivního horizontu na celkové kvalitě prediktivního řízení těchto systémů a zda-li je možné případné kvalitativní nedostatky prediktivního řízení s krátkým prediktivním horizontem nějak eliminovat. K eliminaci nedostatků pak využívá právě paralelu řešené třídy systémů s dynamikou dvojitého integrátoru. Výsledkem jsou výpočetně efektivní algoritmy prediktivního řízení, které mohou obstát i ve srovnání s konkurenčními přístupy prediktivního řízení.

Annotation

The predictive control is currently one of the most popular control strategies. The main benefits of the predictive control include the ability to satisfy the constraints with less effort than in case of other strategies. On the other hand, the predictive control hardly manages to conceal its negatives consisting primarily in numerical complexity growing naturally with the length of the predictive horizon. For this reason, the predictive control was primarily deployed in control of slow chemical processes in the chemical industry. However, the increasing hardware performance in recent years has enabled the predictive control to penetrate into other areas. Nowadays, approaches of the predictive control are even tested and used to control electromechanical systems where the control action must be generated with a short sampling period. Despite the current hardware performance, it is necessary to shorten the predictive horizon in the predictive control design for these systems. Thus, the influence of the dramatical predictive horizon reduction on the control quality should thoroughly be investigated.

This dissertation is devoted to predictive control design for a special class of systems that are introduced here as systems with the double-integrator dynamics. This class includes the systems for which it is important to generate a control action very fast. The dissertation analyzes the impact of the predictive horizon shortening on the complete control quality and possibility of elimination of a short-horizon deficiency. To eliminate the short-horizon deficiency, the parallel between the class of systems with the double-integrator dynamics and double-integrator system is employed. This idea results in numerically cheap predictive control algorithms that can fully compete with other predictive control approaches.

Obsah

1	Úvod	1
1.1	Úvod do prediktivního řízení	2
1.2	Vývoj prediktivního řízení z historické perspektivy	3
1.3	Současné výzvy v oblasti prediktivního řízení	5
1.4	Struktura práce	6
2	Prediktivní řízení	7
2.1	Modely systémů v prediktivním řízení	7
2.2	Omezení	12
2.3	Koncept prediktivního řízení	12
2.4	Dynamické programování jako optimalizační prostředek v prediktivním řízení	15
2.5	Optimalizace v prediktivním řízení	18
3	Systémy s dynamikou dvojitého integrátoru	25
3.1	Dvojitý integrátor	25
3.2	Elektromotory	26
3.2.1	Stejnoseměrný motor	26
3.2.2	Synchronní motor s permanentními magnety	27
3.3	Prediktivní řízení systémů s dynamikou dvojitého integrátoru	30
3.3.1	Definice cílů řízení	30
3.3.2	Diskretizace	31
3.3.3	Prediktivní řízení	32
4	Cíle disertační práce	34
5	Aproximace dlouhého horizontu kritéria prediktivního řízení	36
5.1	Analýza vlastností vybraných norem ztrátové funkce	37
5.1.1	Vliv délky prediktivního horizontu na kvalitu	38
5.1.2	Čas ustálení	44
5.1.3	Výpočetní nároky	52
5.1.4	Shrnutí analýzy	54
5.2	Návrh terminální ztrátové funkce	54
5.2.1	Aproximace času ustálení (time-to-go funkce dvojitého integrátoru)	57
5.2.2	Aproximace času ustálení elektromotorů	60
5.2.3	Terminální ztrátová funkce v kritériu prediktivního řízení	61
5.3	Numerické experimenty	63
5.4	Shrnutí	68

6	Návrh efektivního prediktivního řízení	69
6.1	Přístupy prediktivního řízení synchronního motoru s permanentními magnety	70
6.2	Efektivní prediktivní řízení založené na diskretizaci prostoru akčních zásahů	71
6.3	Efektivní prediktivní řízení založené na relaxaci problému	71
6.4	Experimenty	76
6.4.1	Numerické experimenty	76
6.4.2	Experiment s reálným strojem	79
6.5	Shrnutí	81
7	Zobecnění návrhu prediktivního řízení	84
7.1	Time-to-go funkce dvojitého integrátoru pro nesymetrická omezení	84
7.2	Terminální ztrátová funkce při nesymetrických omezeních	90
7.3	Rozšířená aproximace modelu synchronního motoru s permanentními magnety	90
7.4	Numerické experimenty	92
7.5	Shrnutí	94
8	Závěr	98
8.1	Shrnutí práce a jejího přínosu	98
8.2	Možnosti rozšíření	100

Seznam použitých zkratek

ARIMA - Autoregresní integrovaný klouzavý průměr z *angl. **Auto**Regressive **I**ntegrated **M**oving **A**verage*

ARMA - Autoregresní klouzavý průměr z *angl. **Auto**Regressive **M**oving **A**verage*

CCS-MPC - MPC s kompletní spojitou doménou akčních zásahů z *angl. **C**omplete **(C**ontinuous) **C**ontrol **A**ction **S**et **M**PC*

CPU - Centrální procesorová jednotka z *angl. **C**entral **P**rocessing **U**nit*

DMC - Dynamická maticová regulace (metoda MPC) z *angl. **D**ynamic **M**atrix **C**ontrol*

DP - Dynamické programování z *angl. **D**ynamic **P**rogramming*

D-I - Dvojitý Integrátor

FCS-MPC - MPC s diskrétní konečnou doménou akčních zásahů z *angl. **F**inite **C**ontrol **A**ction **S**et **M**PC*

FW - Odbuzování motoru z *angl. **F**ield **W**eakening*

GPC - Zobecněné prediktivní řízení (metoda MPC) z *angl. **G**eneralized **P**redictive **C**ontrol*

IDCOM - Softwarová implementace MAC z *angl. **I**Dentification and **C**OMmand*

I/O - Vstupně-výstupní z *angl. **I**nput-**O**utput*

KKT - Karush-Kuhn-Tucker

LTI - Lineárně časově invariantní systém z *angl. **L**inear **T**ime-**I**nvariant system*

L_p-norma - V textu je tímto označením myšlena penalizace nějaké sledované veličiny y ve smyslu $|y - y^r|^p$, kde $p \in \{1, 2\}$ a y^r je referenční hodnota veličiny y

LQ - Lineární a kvadratické (přívlastky odpovídající volbě modelu a kritéria) z *angl. **L**inear-**Q**uadratic*

LQG - Lineární, kvadratické a gaussovské (přívlastky odpovídající volbě modelu, kritéria a vlastnostem poruch) z *angl. **L**inear-**Q**uadratic-**G**aussian*

MAC - Algoritmické řízení podle modelu (metoda MPC) z *angl. **M**odel **A**lgorithmic **C**ontrol*

- MIMO** - Systém s více vstupy a výstupy z *angl. Multiple-Input Multiple-Output*
- MPC** - Prediktivní řízení z *angl. Model Predictive Control*
- MPC- N** - MPC s nulovou volbou terminální ztrátové funkce a délkou prediktivního horizontu N
- MPC-T2G** - MPC s prediktivním horizontem jedna a terminální ztrátovou funkcí založenou na znalosti T2G funkce D-I systému s omezeními
- MPC-T2G-EXT** - MPC-T2G s rozšířeným aproximativním modelem a rozšířenou T2G funkcí zahrnující nesymetrická omezení
- MPHC** - Heuristické MPC (metoda MPC) z *angl. Model Predictive Heuristic Control*
- NLP** - Nelineární programování z *angl. NonLinear Programming*
- NMPC** - Nelineární MPC z *angl. Nonlinear MPC*
- OLOF** - Strategie otevřené smyčky se zpětnou vazbou z *angl. Open-Loop Optimal Feedback*
- PC** - Osobní počítač z *angl. Personal Computer*
- PID** - Regulátor s **P**roporcionální, **I**ntegrační a **D**erivační částí
- PMSM** - Synchronní motor s permanentními magnety z *angl. Permanent Magnet Synchronous Motor*
- QP** - Kvadratické programování z *angl. Quadratic Programming*
- RH** - Ustupující horizont z *angl. Receding Horizon*
- RHC** - Řízení založené na principu RH z *angl. Receding Horizon Control*
- SAŘ** - Systém **A**utomatického **Ř**ízení
- SISO** - Systém s jedním vstupem a jedním výstupem z *angl. Single-Input Single-Output*
- ST** - Čas ustálení z *angl. Settling Time*
- s.t.** - Při splnění podmínek (v optimalizaci) z *angl. Subject To*
- T2G** - Zbývající čas do konce regulace z *angl. Time-to(2)-Go*
- VSI** - Napěťový střídač z *angl. Voltage Source Inverter*

Kapitola 1

Úvod

Nedílnou součástí inženýrství, disciplíny, jež se zabývá aplikováním technických a vědeckých poznatků v praxi [93], jsou mimo jiné i aplikace, které se snaží nabyté znalosti o skutečnostech reálného světa (systémech) využít k přeměně jejich chování tak, aby to bylo pro člověka nějak výhodné. Taková část inženýrství má již rozsáhle vybudovanou teoretickou základnu se specifickým názvoslovím a postupy souhrnně označovanou jako teorie řízení [4, 31, 61, 86].

V současnosti se rozlišují dvě základní větve teorie řízení. První větev se označuje jako klasická teorie řízení a pracuje především s vnějším (vstupně-výstupním) popisem systému. Patří sem pojmy jako diferenciální rovnice, přenos a charakteristika systému, PID regulátor apod. Počátky klasické teorie řízení je možné hledat na konci 19. století a je ve své ranější fázi spjata se jmény jako Wiener, Nyquist, Bode atd. Druhá větev teorie řízení bývá pak označována jako moderní teorie řízení. Zde se pracuje především s vnitřním (stavovým) popisem systému. Moderní teorie řízení chápe návrh regulátoru jako optimalizační úlohu. Místo přímého nastavování konstant regulátoru tedy inženýr nastavuje parametry kritéria optimality a případných omezení. Kořeny moderní teorie řízení je možné hledat v 60. letech 20. století a mezi nejdůležitější jména její prvotní fáze je možné zcela určitě zařadit jména jako Kalman, Pontrjagin, Bellman atd. Nutno poznamenat, že obě právě představené větve teorie řízení jsou neustále rozvíjeny. Nežrídka kdy dochází i k jejich prolínání.

Text práce, kterou právě držíte v ruce, se zabývá speciálním souborem metod moderní teorie řízení označovaným jako prediktivní řízení (MPC). MPC má za sebou poměrně bohatou historii, kdy bylo několikrát znovuobjevováno a to jak průmyslem, který v počáteční fázi rozvíjel MPC takřka výhradně, tak i akademickým prostředím v pozdější době. Nezanedbatelný podíl na jeho rozvoji má samozřejmě i neustálý vývoj číslicové techniky, i když je to paradoxně nedostatek výpočetního výkonu při řešení složitých optimalizačních úloh, který se MPC snaží obejít.

Jmenovitě se pak práce soustředí na návrh MPC pro speciální třídu systémů, kterou souhrnně označuje jako systémy s dynamikou dvojitého integrátoru (D-I). Vyjma systémů popisujících pohyb hmotného tělesa do této třídy zařazuje i elektromotory, kde se paralely s D-I s výhodou využívá pro aproximační popis vztahu elektrických a mechanických veličin. Právě návrh MPC pro elektromechanické systémy je velmi aktuálním problémem, neboť formulace problému řízení těchto systémů dává tušit, že by MPC mohlo být vhodným kandidátem pro jeho řešení. Limitace ve výkonu výpočetní techniky si však

žádá přistupovat v tomto případě k návrhu MPC novými nestandardními přístupy.

1.1 Úvod do prediktivního řízení

Asi nejekonomičtěji je zaveden pojem MPC v [71] jako třída řídicích algoritmů, které využívají model řízené soustavy k predikování budoucí odezvy této soustavy. V každém časovém kroku se MPC algoritmus snaží optimalizovat budoucí chování soustavy dle zvoleného kritéria výpočtem konečné sekvence akčních zásahů. V pořadí první akční zásah získané optimální sekvence je pak aplikován a celý proces se opakuje v dalším časovém kroku. Ze zmíněné definice MPC je zřejmé, že se v drtivé většině metody MPC omezují na modely procesů popsaných diferenčními rovnicemi. Takové procesy mohou být diskrétní v čase ze své podstaty nebo mohou být odvozeny tzv. diskretizací [24] z původního modelu popsaného ve spojitém čase obvykle rovnicí diferenciální popř. určeny nějakou metodou parametrické identifikace systémů [47, 83].

Zmíněné jádro MPC algoritmů bývá někdy označováno jako ustupující horizont (RH). V [10] je princip RH shrnut podrobněji následujícími třemi po sobě jdoucími body:

1. Určení predikce chování řízené veličiny y vyvíjející se v nějakém čase t čili $y_t \triangleq y(t)$ nacházející se v aktuálním časovém okamžiku $t = k$, tj. y_k , tvořené na základě matematického modelu udávajícího vztah mezi touto veličinou a akčními zásahy u_t pro nadcházející časové okamžiky $t = k + i$, kde $i = 1, 2, \dots, N$. Označme tyto predikce možného vývoje y_{k+i} jako $y'_{k+i}(u_k^{k+i-1}, y_k)$, kde u_k^{k+i-1} označuje příslušnou posloupnost akčních zásahů $\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+i-1}\}$. Symbolem N pak značíme délku tzv. prediktivního horizontu, tj. úseku, na kterém sledujeme vývoj řízené i řídicí veličiny¹.
2. Určení takové posloupnosti z množiny všech možných posloupností akčních zásahů u_k^{N-1} , která minimalizuje nějaké předem zvolené kritérium. Tuto optimální posloupnost akčních zásahů označme jako u_k^{*N-1} . Co se samotného kritéria týče, nejpravděpodobněji bude primární snahou sledovat nějakou referenční trajektorii popř. dovést řízenou veličinu y do nějaké žádané hodnoty y^r . Ztrátová funkce kritéria tak obvykle penalizuje odchylky mezi prediktivní a referenční trajektorií a obvykle i velikost akčního zásahu k udržení rozumných energických výdajů na jeho provedení. Analytické řešení zmíněného optimalizačního problému je možné pouze v případě, že je model lineární, kritérium kvadratické a nejsou zde další omezení.
3. Aplikace prvního akčního zásahu u_k^* ze získané optimální posloupnosti akčních zásahů u_k^{*N-1} . Ostatní akční zásahy z optimální posloupnosti jsou ignorovány. Následuje vyčkání na další časový krok (např. po uplynutí periody vzorkování), přiřazení $k = k + 1$ a návrat opět k prvnímu bodu.

Uvedený princip RH tak vlastně zajišťuje relativně rychlou reakci na očekávané či neočekávané změny v chování řízeného systému. Shrňme nyní, jaké další výhody MPC v sobě ukrývá [10]:

¹Z praktických důvodů se lze v některých aplikacích setkat i s uvažováním různých délek predikce možného vývoje (horizontu predikce) a posloupnosti akčních zásahů (horizontu řízení) [42, 50]. V této práci budou však tyto délky uvažovány výhradně jako shodné a označeny právě jako prediktivní horizont.

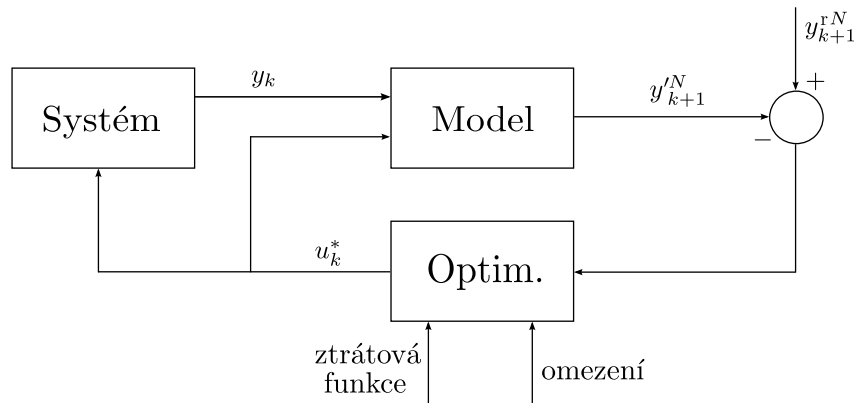
- Atraktivní metody pro inženýry s limitovanou znalostí teorie řízení, jelikož koncept MPC je velmi intuitivní a ladění parametrů spočívající především v nastavení váhových parametrů v kritériu je poměrně snadné.
- Jedná se o otevřenou metodologii založenou na určitých základních principech, což umožňuje spoustu dalších možných rozšíření (atraktivní pro akademické obce).
- Může být využito pro široké spektrum procesů - od těch s jednoduchou dynamikou, po ty výrazně složitější včetně neminimálně fázových a nestabilních systémů a systémů s velkými dopravními zpožděními.
- Případné rozšíření o další omezení je koncepčně jednodušší. Dále jsou to úlohy s omezeními, které je možné právě díky MPC řešit s malými výpočetními nároky.
- Užitečné pro aplikace, kde jsou známy referenční hodnoty s větším předstihem (reakce na tyto změny je pak o poznání lepší).
- Vhodné jak pro SISO, tak i MIMO systémy.

Naopak mezi nevýhody MPC je možné zařadit nutnost mít k dispozici co možná nejpřesnější model a nejpřesnější znalost řízené veličiny, neboť je z principu jasné, že se zde kvalita regulace odvíjí především od kvality matematického popisu řízeného procesu a znalosti o jeho aktuálním stavu. Pro některé aplikace, kde se pracuje s opravdu malou periodou vzorkování v poměru ke složitosti úlohy, je také nutné zmenšovat velikost prediktivního horizontu. To s sebou přináší samozřejmě další otázky a výzvy.

Schematicky lze MPC ilustrovat např. tak, jak je vyobrazeno na obr. 1.1 (značení bylo převzato z dřívějších úvah). Poznamenejme, že důvod toho, proč akční zásah určený optimalizační částí MPC regulátoru (označené jako Optim.) směřuje nejen do systému, ale i do modelové části MPC regulátoru je ten, že existují aplikace (např. uvažující fenomenologický model), kde predikce chování řízené veličiny nejsou tvořeny pouze na základě aktuální hodnoty této veličiny, ale i hodnot minulých vstupů a výstupů řízeného systému kvůli dalšímu možnému zpřesnění. Je zde tak ihned viditelný markantní rozdíl mezi MPC a klasickým zpětnovazebním přístupem k regulaci. Nabízí se paralela s řízením osobního automobilu uvedena v [10], kde zpětnovazební přístup je reprezentován řidičem, který řídí vůz pouze na základě informace ze zpětného zrcátka. Takový řidič evidentně příliš úspěšný nebude. Naopak MPC je pomyslným řidičem, který kromě cesty za sebou sleduje i cestu před sebou, čímž má daleko větší potenciál dojet zdárně do cíle. Cílem samotné paralely ale není apriori tvrdit, že zpětnovazební řízení je neúčinné. Poukazuje pouze na to, že pro některé aplikace je zkrátka z principu nedostačující.

1.2 Vývoj prediktivního řízení z historické perspektivy

Kořeny MPC je třeba hledat v samotných počátcích moderní teorie řízení. Prvním velkým výsledkem moderní teorie řízení byla bezesporu formulace a řešení tzv. LQ a LQG úlohy [35, 36]. Existuje spousta reálných problémů, které lze jako LQG úlohu vnímat. Problémem LQG řízení však je, že obvykle vyžaduje velmi přesný matematický model,



Obrázek 1.1: Schéma MPC.

a tudíž je nasazováno spíše v aplikacích, kde se vyplatí investovat spoustu nákladů do speciální teorie (např. letecký průmysl). Dalšími problémy, které zapříčinily, že LQG řízení mělo v počáteční fázi jen malý dopad na samotnou řídicí techniku té doby, byla možná omezení, nelinearity, nejistoty modelu, unikátní kritéria a odborné nedostatky personálu [71].

Z těchto důvodů zajišťoval vývoj MPC v prvních fázích právě průmysl, i když nesmíme opomenout první vědecké práce z 60. let 20. století, které ideu RH poprvé nastiňují [30]. Jedná se především o článek [70] a část úvah v knize [45]. Tyto práce však neměly kvůli nedostatku výpočetního výkonu tehdejšího hardwaru de facto žádný praktický dopad. V 70. letech 20. století se začínají objevovat první průmyslové aplikace, které z principu RH vycházejí. Jedná se výhradně o aplikace z chemického průmyslu. Důvod je zřejmý - metody MPC jsou aplikovány na řízení pomalých (v čase se pomalu vyvíjejících) chemických procesů, takže hardwarové nároky na výpočty jsou zde poměrně nízké. Celkovou sumari-zaci MPC metod aplikovaných v chemickém průmyslu je možné najít např. v [27]. My zde připomeňme alespoň dvě základní metody spadající do této historické etapy ve vývoji MPC a to algoritmické řízení podle modelu (MAC), označované někdy též jako heuristické MPC (MPHC) [75], známější díky své softwarové implementaci označené jako IDCOM, a dynamickou maticovou regulaci (DMC) [14]. Obě metody využívají oříznutých lineárních I/O modelů. V případě MAC je to oříznutý model impulsní odezvy (*impulse response model*). V případě DMC pak model odezvy na skok (*step response model*). Společné jádro těchto metod odpovídající principu RH je však ihned patrné, neboť je v obou případech hledáno minimum kritéria nabývající kvadratické formy přes konečný prediktivní horizont a první akční zásah výsledné sekvence řízení se uvažuje jako optimální [10]. V dalších letech pak přibývá průmyslově orientovaných MPC metod, které jsou schopny lépe zpracovat složitější modely a omezení na veličiny [27, 71].

Ke konci 70. let už paralelně s průmyslem získává pozornost RH princip i v akademické sféře a to primárně jako alternativa k LQ a LQG úlohám. Tyto postupy jsou označovány jako řízení založené na principu RH (RHC) [42]. První výsledky se týkaly především vlastností stability RHC řešené pro případ diskretního i spojitého systému [43, 44]. V dalších letech pak opět dochází k rozšiřování teorie RHC o složitější nelineární modely a omezení [53]. Za zmínku zde ještě stojí i tzv. zobecněné prediktivní řízení (GPC) [12]. To se od

předešlých akademických postupů liší díky svému původu v adaptivním řízení především v tom, že parametry modelu jsou odhadovány z měřených dat on-line. Parametry modelu řízeného SISO systému, v případě GPC se jedná o ARMA nebo ARIMA model, tak nejsou jako v případě RHC předem známy, což přináší trochu více obecnější pohled na MPC.

V prvním desetiletí 21. století se pak objevují první souhrnná díla autorů zabývajících se problematikou MPC takřka celou svou profesní dráhu jako např. [10, 30, 42, 50, 52, 71, 74]. Tato díla shrnují koncept MPC a dodávají mu pomyslný teoretický základ. Tím s sebou přináší možnost snadnější orientace pro nováčky v této oblasti moderní teorie řízení.

1.3 Současné výzvy v oblasti prediktivního řízení

Výše uvedené však neznamena, že by MPC byla uzavřenou disciplínou. Naopak. Stále zde existuje spousta výzev a problémů - a to jak ryze teoretických, tak i čistě praktických. Teoretické výzvy MPC jsou diskutovány např. v [17, 52, 91]. Praktické problémy jsou pak spojené hlavně s faktem, že MPC proniká neustále do nových oblastí, kde lze problémy návrhu vhodného automatického řízení řešit pomocí něj mnohdy o poznání úspěšněji nebo jednodušeji než to umožňovaly přístupy dosavadní. Především intuitivnost při návrhu a schopnost vypořádat se s omezeními a poruchami o dost jednodušším způsobem než tomu bývá u konkurenčních přístupů k řízení jsou vlastnosti, díky nimž se postupně o MPC začíná hovořit i v souvislosti s řízením složitých systémů s omezeními, kde rychlost generování akčního zásahu hraje klíčovou roli.

Typickým příkladem mohou být elektromechanické akční členy, výkonová elektronika apod. [13, 22, 28, 38, 59, 76]. Byť číslicová technika poskočila o velký skok dopředu a lze předpokládat, že se rychlost jejího vývoje jen tak nezastaví, tak právě zde spousta praktických úloh naráží v souvislosti s MPC na stále nedostatečně rychlý výpočet akčního zásahu. K pomalému výpočtu akčního zásahu přispívá především složitost modelu systému popř. složitost omezení a RH princip MPC, který úlohu často s rostoucím prediktivním horizontem výpočetně komplikuje. V takovém případě lze vyzorovat následující možnosti pro zjednodušení numerických vlastností MPC vedoucí na rychlejší výpočet adekvátního akčního zásahu [18, 19, 30, 42, 50, 74]:

- Aproximace dlouhého horizontu MPC kritéria nebo jeho úplné vyloučení (uvažování pouze krátkých prediktivních horizontů).
- Redukce domény akčních zásahů (např. spojitý prostor možných akčních zásahů je redukován do diskretní podmnožiny tohoto prostoru).
- Upřednostnění některých norem ve ztrátové funkci MPC kritéria s lepšími numerickými vlastnostmi na úkor norem, které by byly z hlediska výsledné kvality řízení vhodnější (typickým případem je přeformulování problému do problému se ztrátovou funkcí v kvadratické formě).
- Zjednodušení modelu řízeného systému (obvyklá je linearizace nelineárních modelů).
- Zrychlení (zjednodušení, zkvalitnění, optimalizace) samotného optimalizačního algoritmu určeného pro řešení MPC problému.

V praktických úlohách se pak využívá jedné či kombinace více těchto možností zjednodušení. Kvalita výsledného MPC tak nezávisí kdy závisí právě na kvalitě toho, jak bylo ke zjednodušení přistoupeno (tj. jak moc odráží navržené zjednodušení realitu - např. zda-li je lineární model pro daný pracovní bod dostatečně přesný apod.).

Další praktické problémy MPC plynou z jeho přímých kořenů v moderní teorii řízení. Je zde např. otázka vhodného nastavení uživatelsky volitelných parametrů, které se objevují ve ztrátové funkci MPC kritéria, kde zpravidla dávají do poměru fyzikálně neso-
souměřitelné veličiny. Navíc se u spousty návrhů aproximací dlouhého horizontu využívá dalších uživatelsky nastavitelných parametrů, čímž pak MPC poněkud ztrácí svoji výhodu oproti alternativním přístupům řízení jako je PID regulace, kde je právě potřeba ladění velkého počtu parametrů obecně považována za velkou nevýhodu.

1.4 Struktura práce

Text práce je strukturován následujícím způsobem. Po stručném úvodu do problematiky MPC, jeho historie a současných výzev uvedených v kapitole 1, je čtenář v rámci kapitoly 2 seznámen podrobněji s MPC jako takovým. V kapitole 2 jsou tak shrnuty stěžejní pojmy a koncepty z oblasti MPC. Kapitola 3 se poté věnuje systémům s D-I dynamikou. Popisuje charakteristické rysy této třídy systémů a vybírá konkrétní zástupce, na nichž jsou v dalším textu práce zkoumány vlastnosti diskutovaných a navržených MPC přístupů. V kapitole 4 jsou na základě poznatků autora vytyčeny tři hlavní cíle práce týkající se návrhu MPC pro třídu systémů s D-I dynamikou. Vytyčené cíle disertační práce jsou pak postupně řešeny v rámci kapitol 5-7. Každá z těchto kapitol obsahuje shrnutí hodnotící, mimo jiné, úspěšnost splnění vytyčeného cíle. Práce je uzavřena závěrečnými úvahami v kapitole 8.

Kapitola 2

Prediktivní řízení

Kapitola Prediktivní řízení si klade za cíl seznámit čtenáře blíže se základními pojmy a koncepty z oblasti MPC. Přestože ji nelze vnímat jako detailní vhled do této problematiky, čtenář by měl po jejím prostudování získat přehled o základních ideách MPC tolik nutný pro porozumění dalšímu textu práce. Pro detailnější studium je v textu kapitoly uvedeno rozsáhlé množství odborné literatury, ze které bylo čerpáno.

2.1 Modely systémů v prediktivním řízení

Jádro MPC je vždy pevně spjato s predikcí chování řízeného systému. K tomu je primárně zapotřebí nějakým způsobem získat model tohoto chování. Pro tento účel se využívá matematicko-fyzikálního modelování, identifikace či kombinace obojího. Modely dynamických systémů mohou být různé. Mezi základní typy takových modelů lze zařadit [83]:

- Matematické modely - tyto modely popisují chování systému nějakou matematickou formulí, v případě popisu chování dynamických systémů pak nejčastěji diferenciální či diferenční rovnicí.
- Mentální, intuitivní či slovní modely (tento typ modelů používáme pro popis následků nějakých činů - např. při popisu způsobu řízení automobilu - „stlačením brzdy sniž rychlost“, „otáčením volantu změň směr jízdy“).
- Tabulky a grafy - např. logaritmická frekvenční charakteristika, graf ceny a spotřeby určitého zboží apod.

Jak úvod napověděl, jsou to především matematické modely, které se využívají pro predikci v MPC. Matematické modely mohou být klasifikovány opět z různých hledisek. Uveďme zde ta nejzákladnější hlediska a zasadíme je přímo do kontextu MPC:

- Modely časově (t -) invariantní vs. variantní - na rozdíl od t -invariantního modelu se v případě t -variantního modelu předpokládá změna jeho parametrů s časem. Princip MPC umožňuje zakomponovat oba typy modelů a je výhodný právě pro t -variantní systémy.
- Modely deterministické vs. stochastické - u deterministických modelů může být výstup, zhruba řečeno, přesně vypočten, jakmile je vstupní signál známý. Naopak

stochastický model obsahuje náhodné složky popisující poruchy, které takový přesný výpočet znemožňují. V MPC se objevují metody zabývající se jak deterministickými, tak i stochastickými modely chování dynamických procesů. Např. v [52] je právě toto rozdělení modelu bráno jako primární kritérium dělení MPC metod.

- Modely fenomenologické (I/O) vs. stavové - fenomenologické modely jsou výsledkem vnějšího popisu systému, kde se vyjadřují dynamické vlastnosti dějů mezi vstupy a výstupy. Při vnějším popisu systému se tak systém považuje za jakousi černou skříňku a vnitřní děje nejsou blíže zkoumány. Naopak stavový model je vnitřním popisem systému, kde se hledí i na vnitřní dynamiku. Oba zmíněné druhy modelů lze v MPC najít, avšak většina literatury se soustředí převážně na stavové modely, což je dáno do jisté míry provázaností MPC a moderní teorie řízení.
- Modely lineární vs. nelineární - model je lineární, jestliže je popsán např. lineárními diferenčními rovnicemi. Opuštění podmínky linearitativy modelu s sebou přináší spoustu výzev. Proto se někdy soubor metod MPC zabývajících se řízením systémů s nelineární dynamikou označuje speciálně jako nelineární MPC (NMPC) [30].
- Modely parametrické vs. neparametrické - parametrické modely předpokládají, že jsou dány nějakou konečnou množinou parametrů. Naopak modely neparametrické předpokládají, že rozložení dat nemůže být definováno konečnou množinou parametrů, ale lze je definovat nekonečnou množinou parametrů, nejčastěji nějakou funkcí. Z historických a aplikačních důvodů se v MPC setkáváme spíše s modely parametrickými, nicméně můžeme zde uvést i pokusy o spojení konceptu MPC a neparametrických modelů jako např. [11, 39].
- Modely s jedním vstupem a výstupem (SISO) vs. s více vstupy a výstupy (MIMO) - SISO modely se používají k popisu procesů, kde existuje vliv pouze jednoho vstupu na jeden výstup. Jestliže je uvažováno více vstupů a výstupů, hovoříme o MIMO modelech. Obecnější metody MPC se snaží samozřejmě vždy zapracovat MIMO model. Existují však metody MPC, které jsou limitovány pouze na použití SISO modelu. Obvykle se jedná o speciální aplikace jako např. v diagnostice [32].
- Modely spojité vs. diskrétní v čase - již dříve v textu byla uvedena zmínka o tom, že modely spojité v čase popisujeme diferenčními rovnicemi a modely diskrétní v čase rovnicemi diferenčními. Model diskrétní v čase tak popisuje vztah mezi vstupy a výstupy pouze v určitých časových okamžicích, obvykle se uvažuje ekvidistantní doba mezi dvěma po sobě jdoucími okamžiky. Z principu MPC je zřejmé, že naprostá většina metod uvažuje modely v čase diskrétní.

Po stručném rozdělení matematických modelů systémů se dále podrobně zaměříme na ty modely, kterým je vzhledem k obsahu této práce věnována zvýšená pozornost.

Nelineární stavové modely

Pro základní seznámení s nelineárními modely dynamických systémů v souvislosti s MPC se postačí omezit na modely stavové, které jsou zde využívány dominantně. Nejobecnější

formu stavového deterministického modelu dynamického systému představuje obecný stavový t -variantní nelineární model, který lze pro spojitý čas zapsat jako

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{x}_{t_0} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad (2.1c)$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ značí stav systému, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ reprezentuje vstup, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ označuje výstup a $t \in \mathbb{R}_{\geq t_0}$ je čas, kde $t_0 \geq 0$. Funkce \mathbf{f} a \mathbf{h} jsou definovány jako $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}^p$. Počáteční podmínka \mathbf{x}_0 pak specifikuje stav v počátečním čase $t = t_0$.

V čase diskretní obdoba v čase spojitého modelu (2.1) je následující diskretní stavový t -variantní nelineární model

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k),$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k),$$

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0,$$

kde se čas pohybuje po ekvidistantních časových okamžicích daných periodou vzorkování T_s a $k \in \mathbb{N}_0$ jako $t = t_0 + kT_s$. Pro jednoduchost je symbolika převzata z modelu (2.1), tj. \mathbf{f} a \mathbf{h} jsou opět obecné funkce nikterak související s funkcemi v modelu (2.1).

Opustíme-li předpoklad t -variantnosti, lze obecný stavový t -invariantní model zapsat jako

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{h}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{x}_{t_0} = \bar{\mathbf{x}}_0 \quad (2.3c)$$

a jeho v čase diskretní obdoba jako

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (2.4c)$$

Lineární stavové modely

Speciální podmnožinu nelineárních modelů systémů tvoří modely lineární. Kromě výše uvedené poznámky, že tyto modely popisují systémy pomocí lineární diferenciální nebo diferenční rovnice v závislosti na uvažování spojitého či diskretního času, se též vyznačují vlastností platnosti principu superpozice [4]. Jinými slovy je u těchto modelů systému splněna aditivita (výstup součtu dvou vstupních signálů bude stejný, jako součet výstupů pro tyto signály jednotlivě) a homogenita (výstup násobku vstupního signálu bude roven stejnému násobku výstupu pro tento vstup). To má za následek snadnější analýzu takto popsaných systému pro případnou syntézu. Často se tedy i při kvalitním nelineárním modelu uchyluje k linearizaci v okolí pracovního bodu.

Nejobecnějším stavovým modelem lineárního dynamického systému je t -variantní model, který lze pro spojitý čas zapsat jako

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{B}_t\mathbf{u}_t, \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{D}_t\mathbf{u}_t, \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{x}_{t_0} = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad (2.5c)$$

kde matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je maticí stavového přechodu (dynamiky), $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je vstupní maticí, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je výstupní maticí a $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ zachycuje případný přímý vliv vstupního signálu na výstup. Hodnotu stavu \mathbf{x}_t lze získat řešením stavové rovnice (2.5a) jako [1]

$$\mathbf{x}_t = \Phi(t, t_0)\bar{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{B}_s\mathbf{u}_s ds, \quad (2.6)$$

kde $\Phi(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice přechodu daná Peano-Bakerovou řadou

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I}_{n \times n} + \int_{\tau}^t \mathbf{A}_{s_1} ds_1 + \int_{\tau}^t \mathbf{A}_{s_1} \int_{\tau}^{s_1} \mathbf{A}_{s_2} ds_2 ds_1 + \int_{\tau}^t \mathbf{A}_{s_1} \int_{\tau}^{s_1} \mathbf{A}_{s_2} \int_{\tau}^{s_2} \mathbf{A}_{s_3} ds_3 ds_2 ds_1 + \dots$$

Řešení výstupní rovnice (2.5b) získáme jednoduše dosazením řešení stavové rovnice (2.6) do výstupní rovnice (2.5b) a lze jej vyjádřit jako

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}_t\Phi(t, t_0)\bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C}_t \int_{t_0}^t \Phi(t, s)\mathbf{B}_s\mathbf{u}_s ds + \mathbf{D}_t\mathbf{u}_t.$$

Uveďme dále v čase diskrétní období modelu (2.5), tj. model lineární t -variantní model dynamického systému. Jeho strukturu lze popsat jako

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{u}_k, \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k\mathbf{u}_k, \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad (2.7c)$$

kde jednotlivé matice jsou opět nějaké obecné matice nesouvisející s maticemi v modelu (2.5). Hodnotu stavu \mathbf{x}_k lze pak získat řešením stavové rovnice (2.7a) jako

$$\mathbf{x}_k = \Phi(k, 0)\bar{\mathbf{x}}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i+1)\mathbf{B}_i\mathbf{u}_i,$$

kde matice přechodu $\Phi(k, \kappa)$ je daná vztahem

$$\Phi(k, \kappa) = \begin{cases} \prod_{i=\kappa}^{k-1} \mathbf{A}_i, & \text{pokud } k > \kappa, \\ \mathbf{I}_{n \times n}, & \text{pokud } k = \kappa. \end{cases}$$

Řešení výstupní rovnice (2.7b) lze pak snadno vyjádřit jako

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \Phi(k, 0) \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C}_k \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(k, i+1) \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k.$$

Připustíme-li t -invariantnost, tak model (2.5) přechází do struktury

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t, \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t, \quad (2.8b)$$

$$\mathbf{x}_{t_0} = \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (2.8c)$$

Na tomto místě je vhodné podotknout, že lineární t -invariantní model systému se v literatuře označuje zkratkou LTI. Matici přechodu pro LTI systém je pak možné vyjádřit jako

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I}_{n \times n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i (t - \tau)^i}{i!} = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}.$$

Řešení stavové rovnice (2.8a) pro získání hodnoty stavu \mathbf{x}_t tedy přechází do podoby

$$\mathbf{x}_t = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \bar{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}_s ds \quad (2.9)$$

a řešení výstupní rovnice (2.8b) do podoby

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)} \mathbf{B}\mathbf{u}_s ds + \mathbf{D}\mathbf{u}_t. \quad (2.10)$$

Ze vztahů (2.9) a (2.10) je patrné, jak je analýza LTI systémů zjednodušená - např. pro analýzu stability postačí sledovat vlastní čísla matice dynamiky \mathbf{A} .

Diskrétní verze obecného modelu LTI systému má pak následující strukturu

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k, \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (2.11c)$$

Řešení stavové rovnice (2.11a) pro získání hodnoty stavu \mathbf{x}_k přechází do podoby

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \bar{\mathbf{x}}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}_i$$

a odpovídající řešení výstupní rovnice (2.11b) je

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^k \bar{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i-1} \mathbf{B}\mathbf{u}_i + \mathbf{D}\mathbf{u}_k.$$

Znovu jsou zde tedy patrná zjednodušení, co se případné analýzy týče.

2.2 Omezení

Jako standardní součást modelu se v MPC uvažují omezení. V reálných úlohách dochází velmi často k tomu, že vstupní veličina je omezená (např. napětí je možné generovat jen v určitém rozsahu, ventil se otáčí jen v určitém rozmezí apod.). Vstupní veličina tak naráží na fyzikální limity. Naopak v případě stavu popř. výstupu se obvykle setkáváme s úlohami, kde je žádoucí nepřesáhnout nějaké předem zvolené pásmo. Důvody mohou být např. bezpečnostního nebo kvalitativního rázu.

Obecně tak v případě omezení vstupních, stavových či výstupních veličin opět uvažujeme, že tyto veličiny spadají do kompaktních podmnožin odpovídajících prostorů čili

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \subseteq \mathbb{R}^p.$$

Demonstrujme příklad omezení na skalárním případě. V tomto případě lze omezení veličiny $x \in \mathbb{R}$ vyjádřit obecně nerovností

$$c(x) \leq 0,$$

kde $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. V praxi se často setkáváme s případy, kdy c nabývá kvadratické formy v součtu s nějakou konstantou udávající symetrické omezení veličiny x . Nicméně existují i omezení složitější.

V souvislosti nejen s MPC se velmi často rozlišují dva druhy omezení. První tzv. tvrdá (*v angl. hard constraints*) označují omezení, kde je naprosto zakázáno překročit dané omezení. Druhá tzv. měkká (*v angl. soft constraints*) jsou omezení, která je dobré dodržet, avšak překročení těchto omezení je do určité míry možné - jako příklad uveďme působení stochastické poruchy na výstupu, které apriori neumožňuje dokonalé dodržení omezení.

2.3 Koncept prediktivního řízení

Jak bylo nastíněno v úvodu textu, MPC lze vnímat jako soubor metod, kde je akční zásah získán on-line, tj. v každém okamžiku vzorkování, výpočtem, obvykle konečné (viz RHC), optimální sekvence v čase po sobě jdoucích akčních zásahů. Tuto sekvenci získáváme řešením optimalizačního problému s nějakým kritériem hodnotícím budoucí chování systému, přičemž respektujeme případná omezení. Veškerá informace, která je k dispozici o dosavadním chování systému, se kumuluje v aktuálním časovém okamžiku - např. v aktuálním stavu systému. V pořadí první akční zásah optimální sekvence akčních zásahů je pak považován za optimální a aplikován. MPC se tak liší od konvenčních přístupů moderní teorie řízení [6, 8, 31], kde se strategie řízení „předpočítává“ pro otevřenou smyčku.

MPC však v sobě výpočet optimální strategie řízení pro otevřenou smyčku nepřimo zahrnuje. Uveďme konkrétní případ - je-li v aktuálním časovém okamžiku k stav dán jako \mathbf{x}_k , pak problém hledání optimální strategie řízení podle principu RH může být chápán jako přímovazební čili výpočet budoucích akčních zásahů je závislý pouze na aktuálním stavu \mathbf{x}_k . Optimální sekvenci akčních zásahů tak od okamžiku k určujeme obdobně jako pro otevřenou smyčku. Podstatný rozdíl oproti konvenčním přístupům však tkví v tom, že

v dalším časovém okamžiku se celý postup opakuje, přičemž vycházíme opět z aktuálního stavu. Na MPC tak lze nahlížet jako na strategii, jež se v literatuře označuje jako „open-loop optimal feedback“ (OLOF, otevřená smyčka se zpětnou vazbou), kde je využíváno informace o aktuálním stavu, ale nepředpokládá se, že bude v budoucnu nějaká další informace o stavu získána [5].

Věnujme nyní pozornost návrhu deterministického MPC pro systémy, kde z faktických či ryze praktických (aproximačních) důvodů nepředpokládáme vliv neurčitosti. Je zřejmé, že většinu reálných fyzikálních systémů lze výhodně popsat nelineárním modelem spojitým v čase. Jako příklad tedy uvažujme model (2.3a). Dále se pokusme v krátkosti demonstrovat, jak by mělo být navrženo optimální řízení pro tento model a vysvětlit, jaká jsou úskalí takového idealizovaného přístupu. To nám umožní lépe pochopit, proč se v praktických problémech ve většině případů MPC používá v podobě, v jaké se používá.

Uvažujme tedy model systému jako

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \quad (2.12)$$

s počáteční podmínkou \mathbf{x}_{t_0} a případná omezení dána jako

$$\mathbf{u}_t \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbf{x}_t \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

Pro takovou třídu systémů je trajektorií řízení s nejlepšími vlastnostmi v uzavřené smyčce řešení následujícího optimalizačního problému

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(t_0, \infty)}^* &= \arg \min_{\mathbf{u}_{(t_0, \infty)}} J_{t_0}(\mathbf{x}_{t_0}, \mathbf{u}_{(t_0, \infty)}), \\ &\text{s.t.} \quad (2.12), (2.13) \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde $\mathbf{u}_{(t_0, \infty)}$ označuje vývoj akčního zásahu pro $t \in (t_0, \infty)$ a kritérium J_{t_0} je uvažováno jako

$$J_{t_0}(\mathbf{x}_{t_0}, \mathbf{u}_{(t_0, \infty)}) = \int_{t_0}^{\infty} l(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) dt,$$

kde ztrátová funkce $l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ je pozitivně definitní. Uzavřený systém tak přechází do podoby

$$\frac{d\mathbf{x}_t^*}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*).$$

Nalezení optimální trajektorie řízení $\mathbf{u}_{(t_0, \infty)}^*$ představuje, vyjma některých speciálních případů, velice komplikovaný problém. Nelinearitu systému, zprava neomezený interval času a ne vždy nutnou konvexitu kritéria zmiňme jako příklady, které mohou řešení dané úlohy zkomplikovat. Rovněž trvat na spojitosti času nemusí být vždy nutně ku prospěchu věci, obzvláště v dnešní době, kdy měření stavové informace i samotná regulace probíhají primárně pomocí číslicové techniky.

Z těchto důvodů je tedy pro MPC výhodné nějakým způsobem slevit z požadovaných nároků. Jak bylo diskutováno dříve v textu, první takovou slevou obvykle bývá diskretizace celého problému, která přece jen do konceptu MPC z logiky věci zapadá daleko lépe.

V případě modelu (2.12) tak přecházíme diskretizací do struktury modelu (2.4a) čili na model

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (2.15)$$

(z důvodu jednoduššího zápisu nebudeme opět měnit značení funkce \mathbf{f} - časové indexy proměnných prozradí, že se jedná o diskretizaci původní spojité funkce). Definujme kritérium pro aktuální časový okamžik k a aktuální stav \mathbf{x}_k jako

$$J_k(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{\infty}) = \sum_{i=k}^{\infty} l(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \quad (2.16)$$

kde posloupnost akčních zásahů je $\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{\infty} = \{\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots\}$ a $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}'_{k+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$, $\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}'_{k+2}(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{k+1})$, \dots jsou predikce stavu založené na modelu (2.15) a předchozích akčních zásahách. Optimální sekvenci akčních zásahů pak hledáme obdobně jako v případě optimalizačního problému (2.14), tj. jako

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{*\infty} &= \arg \min_{\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{\infty}} J_k(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{\infty}). \\ &\text{s.t. (2.13), (2.15)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Opět však tušíme nevýhodu plynoucí z nekonečného horizontu, tj. optimalizační problém (2.17) je opět, až na výjimky, velmi komplikovaný. MPC tak přináší určitou možnost aproximace takových složitých problémů.

Slevme tedy pro účely MPC z délky horizontu, tj. uvažujme nyní konečný horizont délky N . Kritérium tak přechází do podoby

$$J_k^{N+k}(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}) = \sum_{i=k}^{N+k-1} l(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + l_f(\mathbf{x}_{N+k}), \quad (2.18)$$

kde funkce $l_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je ohodnocení koncového stavu (terminální ztrátová funkce). V MPC existují prakticky tři způsoby, jak se k ohodnocení koncového stavu postavit. Buď penalizovat koncový stav nějakou funkcí udávající, jak jsme s daným koncovým stavem spokojeni, nebo se pokusit touto terminální ztrátovou funkcí aproximovat „utrženou“ část kritéria (myšleno pro horizont $N+k+1$, $N+k+2$, \dots) a nebo jednoduše toto ohodnocení vypustit čili uvažovat $l_f(\mathbf{x}_{N+k}) = 0$. Pro obecnost také uvažujme, že koncový stav má své vlastní omezení, tj. omezení nyní uvažujme jako

$$\mathbf{u}_i \in \mathbf{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbf{x}_j \in \mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_{N+k} \in \mathbf{X}_f \subseteq \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathbb{N}_{k:N+k-1}, \forall j \in \mathbb{N}_{k+1:N+k-1}. \quad (2.19)$$

S kritériem (2.18) pak přechází problém návrhu MPC regulátoru s konečným horizontem N do podoby

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{*N+k-1} &= \arg \min_{\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}} J_k^{N+k}(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}), \\ &\text{s.t. (2.15), (2.19)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde podle principu RH je aplikován pouze v pořadí první akční zásah optimální sekvence akčních zásahů, tj. \mathbf{u}_k^* , a v následujícím časovém okamžiku se celý proces syntézy opakuje, tj. lze položit $k = k + 1$.

Zatím jsme uvažovali t -invariantní nejen systém, ale i omezení na ztrátovou funkci. Nutno ovšem poznamenat, že i z tohoto předpokladu lze ustoupit. t -variantní omezení lze tak obecně uvažovat jako

$$\mathbf{u}_i \in \mathbb{U}_i \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbf{x}_j \in \mathbb{X}_j \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_{N+k} \in \mathbb{X}_f \subseteq \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathbb{N}_{k:N+k-1}, \forall j \in \mathbb{N}_{k+1:N+k-1}$$

a např. t -variantní obdobu kritéria problému s konečným horizontem (2.18) jako

$$J_k^{N+k} \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right) = \sum_{i=k}^{N+k-1} l_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + l_f(\mathbf{x}_{N+k}),$$

kde ztrátové funkce $l_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ jsou opět pozitivně definitní. Právě pro tyto t -variantní problémy je MPC ze své podstaty obzvláště výhodné (např. nemusíme zde znát vývoj parametrů systému příliš dopředu a v případě potřeby, tj. pokud se parametry mění jinak než jsme původně předpokládali, lze MPC jednoduše upravit [56, 57]).

V souvislosti s omezeními ještě zdůrazněme, že z důvodu predikování podléhají stavovým omezením predikce chování stavu závislé na již daném aktuálním stavu a odpovídajících akčních zásazích. Např. pro problém (2.20) lze tedy množinu všech možných sekvencí akčních zásahů, jejichž následkem stavové predikce nepřekročí stavová omezení, chápat jako [52, 74]

$$\mathcal{U}_N(\mathbf{x}_k) = \left\{ \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \mid \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right) \in \mathbb{Z}_N \right\},$$

kde množina $\mathbb{Z}_N \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{Nm}$ je uvažována jako

$$\mathbb{Z}_N = \left\{ \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right) \mid \mathbf{u}_j \in \mathbb{U}, \mathbf{x}'_l \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{l-1} \right) \in \mathbb{X}, \mathbf{x}'_{N+k} \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right) \in \mathbb{X}_f, \forall j \in \mathbb{N}_{k:N+k-1}, \forall l \in \mathbb{N}_{k+1:N+k-1} \right\}.$$

Optimalizační problém (2.20) lze tak alternativně zapsat jako

$$\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1*} = \arg \min_{\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \in \mathcal{U}_N(\mathbf{x}_k)} \left\{ J_k^{N+k} \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right) \right\}. \quad (2.21)$$

Ne každý optimalizační problém má řešení, tj. nelze zaručit, že pro aktuální stav $\mathbf{x}_k \in \mathbb{X}_k \subseteq \mathbb{R}^n$ existuje taková posloupnost akčních zásahů $\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}$, která splňuje $\left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right) \in \mathbb{Z}_N$. Aby úloha měla smysl, měla by existovat neprázdná podmnožina \mathbb{X}_k , pro kterou řešení problému (2.20), (2.21) bude existovat. V [74] je ukázáno, za jakých podmínek je zaručena existence tohoto řešení.

2.4 Dynamické programování jako optimalizační prostředek v prediktivním řízení

Po stručném představení obecného konceptu MPC je třeba se zamyslet nad konkrétnějšími otázkami. Velmi důležitou otázkou je volba způsobu práce s dostupnou informací při řešení optimalizačního problému (2.20), (2.21). Výpočetně jednodušší cestou k jeho řešení

jsou metody vedoucí na návrh optimálního programového (open-loop) řízení dynamického systému jako např. řešení Euler-Lagrangeovy rovnice či její rozšíření o Pontrjaginův princip maxima (minima) [3, 8]. Ačkoliv má pak řízení, pokud ho touto „přímou“ cestou nalezneme, optimální vlastnosti, z praktického hlediska je žádoucí spíše zpětnovazební přístup k syntéze kvůli nejistotě, která, byť jsme ji doposud apriori nepřipustili, v reálném prostředí do úlohy obvykle zasahuje. V MPC se tudíž klade důraz na dynamické programování (DP) [6].

DP se využívá jako zpětnovazební alternativa syntézy regulátoru. Výsledkem je optimální zpětnovazební strategie řízení μ reprezentující zobrazení z prostoru stavů do prostoru řízení. V případě horizontu délky N pak hledáme posloupnost N takových strategií, abychom pro všechny časové okamžiky tohoto horizontu věděli, jaký akční zásah generovat v závislosti na aktuálním stavu. DP tak ve své explicitní podobě poskytuje strategii řízení, která může být jednoduše fyzicky implementována. Bohužel nalezení takové strategie je pro většinu problémů velmi složité až nemožné - vyjma snad jen problémů, kde systém je lineární bez omezení a ztrátová funkce kritéria je v kvadratické formě.

MPC na rozdíl od explicitního přístupu využívá DP jako optimalizačního prostředku v duchu strategie OLOF. Výhodou MPC tak je, že jeho RH přístup přináší dostatečně rychlá řešení využívající standardních matematických nástrojů a to i v případě nelineárních systémů s omezeními a velkými dimenzemi stavu. Jinými slovy MPC umožňuje aplikaci DP i na problémy, kde je explicitní získání optimální strategie řízení nemožné. Na MPC tak lze nahlížet jako na jakousi efektivní aproximaci DP a nikoliv jako na novou metodu řízení [74].

Obecné dynamické programování

Dříve, než využijeme DP jako nástroj optimalizace v MPC, představme základní myšlenku tohoto přístupu syntézy. Jak bylo zmíněno v úvodu této podkapitoly, primárním úkolem DP je získat posloupnost zpětnovazebních strategií řízení generující posloupnost akčních zásahů, pro které kritérium nabývá své minimální hodnoty [1]. Uvažujme nejprve problém nalezení optimálních akčních zásahů s kritériem

$$J_0^N \left(\mathbf{x}_0, \{\mathbf{u}_i\}_{i=0}^{N-1} \right) = \sum_{i=0}^{N-1} l(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + l_f(\mathbf{x}_N), \quad (2.22)$$

kde x_0 je počáteční stav, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ jsou predikce stavu založené na modelu (2.15) a uvažujme omezení

$$\mathbf{u}_i \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathbf{x}_j \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_N \in \mathbb{X}_f \subseteq \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathbb{N}_{0:N-1}, \forall j \in \mathbb{N}_{1:N-1}. \quad (2.23)$$

Dále definujme koncovou část kritéria optimality jako

$$J_k^N \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N-1} \right) \triangleq \sum_{i=k}^{N-1} l(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + l_f(\mathbf{x}_N), \quad (2.24)$$

kteřou lze rovněž přepsat rekurentně jako

$$J_k^N \left(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N-1} \right) = l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + J_{k+1}^N \left(\mathbf{x}_{k+1}, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k+1}^{N-1} \right). \quad (2.25)$$

Na chvíli předpokládejme, že již známe celou posloupnost strategií řízení $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=0}^{N-1}$ generující posloupnost optimálních akčních zásahů $\{\mathbf{u}_i^*\}_{i=0}^{N-1}$ pro problém s kritériem (2.22). Potom lze tvrdit, že i oříznutá posloupnost strategií řízení $\{\boldsymbol{\mu}_i\}_{i=k}^{N-1}$ je optimální pro podproblém s kritériem (2.24). Uvedená úvaha se v literatuře označuje jako princip optimality [1, 30, 74] a lze ji rovněž interpretovat tak, že každý koncový úsek optimální trajektorie systému, tj. trajektorie systému řízeného pomocí optimální strategie řízení, je optimální pro koncový úsek trajektorie.

Na první pohled nemusí být zjevné, v čem je princip optimality unikátní. Sledujme proto vývoj minimální hodnoty koncového úseku kritéria, tj.

$$V_k^N(\mathbf{x}_k) = \min_{\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N-1}} J_k^N(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N-1}), \quad (2.26)$$

s.t. (2.15), (2.23)

kde funkci $V_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ budeme dále nazývat Bellmanovou funkcí. Využitím rekurentního vyjádření (2.25) lze Bellmanovu funkci (2.26) vyjádřit také jako

$$\begin{aligned} V_k^N(\mathbf{x}_k) &= \min_{\mathbf{u}_k} \left[l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \min_{\{\mathbf{u}_i\}_{i=k+1}^{N-1}} J_{k+1}^N(\mathbf{x}_{k+1}, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k+1}^{N-1}) \right] = \\ &= \min_{\mathbf{u}_k} [l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + V_{k+1}^N(\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k))] . \end{aligned} \quad (2.27)$$

s.t. (2.15), (2.23)

Ze vztahu (2.27) je patrný rekurzivní přístup k řešení problému s kritériem (2.22) jdoucí zpětně v čase založený právě na principu optimality. Optimální strategii lze konstruovat po částech. První částí je získání Bellmanovy funkce v čase $k = N - 1$, v druhé části se rekurzí snažíme dostat k Bellmanově funkci v čase $k = N - 2$ a celý postup pak pokračuje až do počátečního času nula. Tento slovně uvedený postup lze shrnout do rovnic Bellmanovy optimalizační rekurze, které mají podobu

$$V_\kappa^N(\mathbf{x}_\kappa) = \min_{\mathbf{u}_\kappa} [l(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa) + V_{\kappa+1}^N(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa))], \quad (2.28a)$$

s.t. (2.15), (2.23)

$$\mathbf{u}_\kappa^* = \boldsymbol{\mu}_\kappa(\mathbf{x}_\kappa) = \arg \min_{\mathbf{u}_\kappa} [l(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa) + V_{\kappa+1}^N(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa))], \quad (2.28b)$$

s.t. (2.15), (2.23)

$$V_N^N(\mathbf{x}_N) = l_f(\mathbf{x}_N), \quad (2.28c)$$

kde $\kappa = N - 1, N - 2, \dots, 0$. Bellmanova optimalizační rekurze (2.28) tak představuje způsob řešení problému nalezení optimální strategie řízení pro systém (2.15) s počátečním stavem \mathbf{x}_0 a kritériem (2.22) na časovém horizontu N . Získáváme tak kompletní strategii pro všechny uvažované časové okamžiky daného horizontu [74].

Dynamické programování v prediktivním řízení

Proveďme nyní modifikaci předchozích úvah tak, aby je bylo možné opět zasadit do rámce MPC [30, 74]. Dle principu RH je tak počátečním stavem aktuální stav \mathbf{x}_k systému (2.15)

a kritérium na časovém horizontu N přechází do podoby (2.18). Pro jistotu přehlednosti zápisu redefinujeme nejprve Bellmanovu funkci jako

$$V_j^{N+k}(\mathbf{x}_j) = \min_{\{\mathbf{u}_i\}_{i=j}^{N+k-1}} J_j^{N+k}(\mathbf{x}_j, \{\mathbf{u}_i\}_{i=j}^{N+k-1}).$$

s.t. (2.15), (2.23)

Rovnice Bellmanovy rekurze tedy přechází v MPC do podoby

$$V_\kappa^{N+k}(\mathbf{x}_\kappa) = \min_{\mathbf{u}_\kappa} [l(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa) + V_{\kappa+1}^{N+k}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa))],$$

s.t. (2.15), (2.23)

$$\mathbf{u}_\kappa^* = \boldsymbol{\mu}_\kappa(\mathbf{x}_\kappa) = \arg \min_{\mathbf{u}_\kappa} [l(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa) + V_{\kappa+1}^{N+k}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_\kappa, \mathbf{u}_\kappa))],$$

s.t. (2.15), (2.23)

$$V_{N+k}^{N+k}(\mathbf{x}_{N+k}) = l_f(\mathbf{x}_{N+k}),$$

(2.29c)

kde $\kappa = N + k - 1, N + k - 2, \dots, k$. Za optimální akční zásah v MPC pak budeme považovat $\mathbf{u}_k^* = \boldsymbol{\mu}_k(\mathbf{x}_k)$.

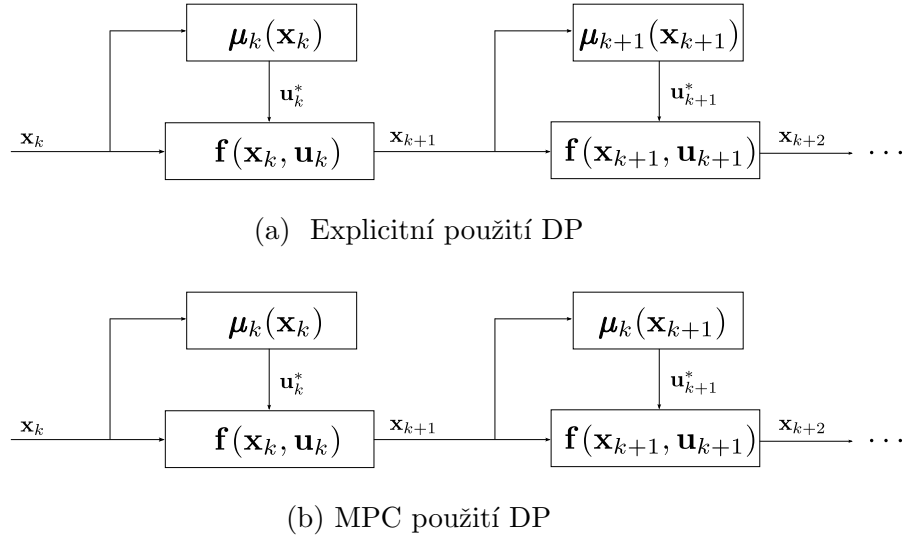
Všimněme si rozdílu mezi explicitním využitím DP a jeho modifikací pro potřeby MPC pro deterministický t -invariantní systém (2.15). Explicitním přístupem DP vypočteme off-line t -variantní posloupnost optimálních zpětnovazebních strategií. Nacházíme-li se v časovém okamžiku k , považujeme aktuální stav \mathbf{x}_k za počáteční, vyřešíme Bellmanovu optimalizační rekurzi (2.28) a aplikujeme strategii $\mathbf{u}_k^* = \boldsymbol{\mu}_k(\mathbf{x}_k)$. Použitím akčního zásahu \mathbf{u}_k^* se dostaneme do stavu \mathbf{x}_{k+1} , kde aplikujeme odpovídající strategii $\mathbf{u}_{k+1}^* = \boldsymbol{\mu}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})$. Tak pokračujeme na zvoleném časovém horizontu stále dál.

V MPC je situace jiná. Zde v aktuálním časovém okamžiku k opět vypočítáme off-line posloupnost strategií řešením rekurze (2.29) a rovněž aplikujeme strategii $\mathbf{u}_k^* = \boldsymbol{\mu}_k(\mathbf{x}_k)$. Nicméně v následujících časových krocích budeme i nadále aplikovat tuto strategii, tj. $\mathbf{u}_{k+1}^* = \boldsymbol{\mu}_k(\mathbf{x}_{k+1})$ atd. Je tak zřejmé, že optimální trajektorie stavu a akčních zásahů se obecně mohou u obou případů lišit, a tudíž trajektorie získané MPC nelze považovat apriori za optimální pro problém (2.22). Opět ale připomeňme, že MPC je jakousi efektivní aproximací pro problémy, kde by uvažování delších horizontů s sebou přineslo spoustu výpočetních problémů, a tudíž se jedná o poměrně zajímavý inženýrský nástroj. Slovy popsany rozdíl mezi explicitním a MPC použitím DP je pro lepší představu ilustrován na obr. 2.1.

Využití DP jako optimalizačního prostředku umožňuje hlouběji analyzovat vlastnosti systému automatického řízení (SAŘ) řízeného pomocí MPC. Např. v [54] bylo ukázáno, za jakých podmínek kladených na Bellmanovu funkci a koncové podmínky lze zajistit stabilitu rovnovážného stavu takového systému. Později byla tato práce pro širší inženýrskou veřejnost rozšířena v [30, 74]. Rovněž je možné díky DP získat lepší představu o podobě terminální ztrátové funkce MPC kritéria l_f . Je evidentní, že taková funkce v ideálním případě reprezentuje Bellmanovu funkci v časovém kroku odpovídajícím zvolenému prediktivnímu horizontu.

2.5 Optimalizace v prediktivním řízení

Přestože nám uvažování DP jako optimalizačního prostředku v MPC pomáhá analyzovat vlastnosti MPC SAŘ, pro řešení optimalizačního problému (2.20), kde jsou uvažovány



Obrázek 2.1: Rozdíl mezi explicitním a MPC použitím DP.

omezení, nemusí být hledání zpětnovazební strategie pomocí DP snadným úkolem. V praktických úlohách, kde rychlost určení akčního zásahu představuje obvykle klíčovou roli, se tedy většinou přechází na některou z jiných forem matematického programování.

Za jednu z hlavních dělicích čar mezi MPC problémy lze bezesporu považovat skutečnost, zda je řešený optimalizační problém konvexní nebo nekonvexní. Pokud se jedná o konvexní problém, existují algoritmy, které jsou schopny najít globální řešení daného MPC problému s dostatečnou přesností v konečném čase. Připomeňme, že aby byl MPC problém konvexní, musí být uvažovaný model systému lineární a kritérium a příslušná nerovnostní omezení konvexní. Pokud je daný problém nekonvexní, tj. není splněna alespoň jedna z právě vyjmenovaných podmínek, obvykle je nutné spokojit se s aproximací pomocí lokálních extrémů. Upřesněme tedy úvahu zmíněnou v dělení modelů na lineární a nelineární, kde jsme do třídy úloh NMPC zařadili úlohy uvažující nelineární model systému. Do třídy NMPC úloh se dále řadí rovněž úlohy porušující konvexitu kritéria či nerovnostních omezení. Ostatní, konvexní, úlohy se někdy označují jako lineární MPC [18].

Konvexní optimalizace pro lineární MPC

Zaměříme nyní pozornost na standardní možnosti řešení optimalizačních problémů v lineárním MPC. Uvažujme tedy model systému popsany lineárním t -invariantním modelem (2.11).

Asi nejrozšířenějším problémem patřícím do třídy lineárních MPC je minimalizace konvexního kvadratického kritéria (kritéria s konvexní kvadratickou ztrátovou funkcí a koncovým úsekem Bellmanovy funkce) přepsatelná do následujícího kvadratického programu (QP) [18]

$$\min_{\{\mathbf{x}_i\}_{i=k}^{N+k}, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=k}^{N+k-1} [\mathbf{x}'_i, \mathbf{u}_i] \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_i \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{N+k}^{TT} \mathbf{P} \mathbf{x}'_{N+k} \right), \quad (2.30a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}'_k - \mathbf{x}_k = \mathbf{0}, \quad (2.30b)$$

$$\mathbf{x}'_{i+1} - \mathbf{A}\mathbf{x}'_i - \mathbf{B}\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad i = k, k+1, \dots, N+k-1, \quad (2.30c)$$

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{P}_1\mathbf{x}'_i + \mathbf{P}_2\mathbf{u}_i \leq \mathbf{0}, \quad i = k, k+1, \dots, N+k-1, \quad (2.30d)$$

$$\mathbf{p}_2 + \mathbf{P}_3\mathbf{x}'_{N+k} \leq \mathbf{0}, \quad (2.30e)$$

kde $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}$, $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$, $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{p_2 \times m}$, $\mathbf{P}_3 \in \mathbb{R}^{p_2 \times n}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Zároveň musí být splněno, že matice $\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix}$ a \mathbf{P} jsou symetrické a pozitivně semidefinitní, abychom zaručili, že QP (2.30) je skutečně konvexní.

Motivací pro volbu formy zápisu QP (2.30), kde jsou, na rozdíl od předchozích zápisů, predikce stavu striktně vyznačené apostrofy a aktuální stav v okamžiku k se do problému dostává skrze rovnostní omezení (2.30b), bylo názorně poukázat na to, že úlohu lze přepsat dosazením rovnostního omezení (2.30c) za predikce stavu do formy odpovídající QP

$$\min_{\mathbf{U}} \quad \frac{1}{2} [\mathbf{U}, \mathbf{x}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix}, \quad (2.31a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{d} + \mathbf{K}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}\mathbf{U} \leq \mathbf{0}, \quad (2.31b)$$

kde $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_k^T, \mathbf{u}_{k+1}^T, \dots, \mathbf{u}_{N+k-1}^T]^T$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d \times Nm}$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{Nm \times Nm}$, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{Nm \times n}$. Tento způsob přepsání původního „řídkého“ QP (2.30) do tvaru QP (2.31) se někdy v literatuře označuje pojmem zhušťování (*condensing*). Zhuštěná formulace QP je numericky výhodnější především pro menší prediktivní horizonty, neboť výpočetní složitost u ní roste kubicky právě s velikostí prediktivního horizontu [18, 34].

V MPC řešíme QP (2.30), potažmo QP (2.31), pro nalezení \mathbf{U}^* . Dle principu RH pak v aktuálním časovém okamžiku k aplikujeme \mathbf{u}_k^* . Otázkou však zůstává, jak nalézt \mathbf{U}^* v přítomnosti omezení. Připomeňme, že optimální řešení \mathbf{U}^* spolu s odpovídajícím vektorem Lagrangeových multiplikátorů $\boldsymbol{\lambda}^*$ je jednoznačně určené tzv. Karush-Kuhn-Tuckerovými (KKT) podmínkami [18, 50, 58]. Toho více či méně využívají numerické algoritmy pro řešení QP s omezeními. Úkolem tohoto textu není věnovat se zmíněným numerickým algoritmům nějak hlouběji, ale s ohledem na časté využívání těchto algoritmů pro řešení problémů v MPC především prostřednictvím různých již naimplementovaných solverů by bylo žádoucí představit alespoň jejich základní dělení a stručně nastínit jejich hlavní princip (pro vysvětlení principu se omezme např. na zhuštěnou formu QP (2.31)).

Metody aktivních množin První větví numerických algoritmů pro řešení QP s omezeními jsou tzv. metody aktivních množin (*active set methods*). Aktivní množinou se rozumí takové množina nerovnostních omezení (2.31b), které jsou pro daný bod, v našem případě nějaký akční zásah z vektoru \mathbf{U} , splněny s rovností. Pokud bychom znali aktivní množinu pro dané \mathbf{x}_k , bylo by už snadné dopátrat se řešení. Metody aktivních množin proto pracují s odhadem těchto množin, který iterativně vylepšují. V každé iteraci je řešen daný lineární systém s ohledem na uvažovaný odhad aktivních množin. Pokud dojde ke splnění KKT podmínek, optimální řešení \mathbf{U}^* bylo nalezeno. Pokud ne, je potřeba dalšího rozdělení na aktivní a inaktivní množiny [18, 50].

Dnes existuje spousta druhů numerických algoritmů pro řešení QP s omezeními, které lze zařadit do větve metod aktivních množin. Zmíňme např. primární metody aktivních množin (*primar active set methods*), které se snaží nejprve odhadnout realizovatelné \mathbf{U} , a následně přidávat nebo odebírat příslušné aktivní množiny tak, aby \mathbf{U} zůstalo

stále realizovatelné, nebo duální metody aktivních množin (*dual active set methods*), které se snaží udržovat multiplikátory kladné namísto náročnějšího udržování realizovatelného \mathbf{U} [23]. Z hlediska MPC je tak výhodou duálních metod aktivních množin oproti primárním fakt, že mohou být s výhodou použity pro tzv. teplý start, kde se využívá získaného optimálního \mathbf{U}^* v předchozím časovém kroku jako počátečního odhadu popř. jeho adekvátního časového posunu jako počáteční podmínky pro optimalizační algoritmus v aktuálním časovém kroku [18].

Metody vnitřního bodu Další větev numerických algoritmů pro řešení QP s omezeními představují tzv. metody vnitřního bodu (*interior point methods*). Tyto metody se snaží nahradit KKT podmínky hladkou aproximací, která využívá parametru $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ pro redefinování podmínek optima do podoby

$$\mathbf{H}\mathbf{U}^* + \mathbf{G}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}^T\boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0} \quad (2.32a)$$

$$(\mathbf{d} + \mathbf{K}\mathbf{x}_k + \mathbf{M}\mathbf{U}^*)_i \boldsymbol{\lambda}_i^* + \tau = 0, \quad (2.32b)$$

kde dolní index i představuje číslo řádku příslušné matice resp. vektoru. Podmínky (2.32) formují systém nelineárních rovnic, který jednoznačně definuje ¹primární-duální řešení $\mathbf{U}^*(\tau)$ a $\boldsymbol{\lambda}^*(\tau)$ uvnitř realizovatelné množiny. Nejsou ekvivalentní KKT podmínkám, ale s $\tau \rightarrow 0$ se jejich řešení blíží přesnému řešení QP.

Vlastní algoritmus metod vnitřního bodu pak řeší systém (2.32) obvykle Newtonovou metodou [58]. Současně je parametr τ , jenž byl při inicializaci nastaven na nějaké velké číslo, iterativně redukován, čímž dochází k přibližování systému (2.32) k originálním KKT podmínkám [18, 50].

Metody projekce gradientu Na rozdíl od výše zmíněných větví numerických algoritmů, stačí v algoritmech spadající do větve metod projekce gradientu (*gradient projection methods*) vyhodnotit pouze gradient kriteriální funkce v každé iteraci a tyto metody jsou tak z principu výpočetně méně náročné. Lze je však použít pouze v případě, kdy realizovatelná množina akčních zásahů je jednoduchou množinou ve smyslu toho, že projekce $\mathcal{P}(\mathbf{U})$ do této množiny je velmi snadno vypočitatelná, tj. např. pro omezení pouze na \mathbf{U} . Metody projekce gradientu pak určují odhad optimálního \mathbf{U}^* zhruba následujícím iterativním postupem [18, 80]

$$\mathbf{U}^{[l+1]} = \mathcal{P} \left(\mathbf{U}^{[l]} - \alpha \left(\mathbf{H}\mathbf{U}^{[l]} + \mathbf{G}\mathbf{x}_k \right) \right),$$

kde $\mathbf{U}^{[l]}$ označuje odhad \mathbf{U}^* v l -té iteraci algoritmu a parametr $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ určuje další vlastnosti konvergence k tomuto odhadu. Algoritmy spadající do metod projekce gradientu se liší primárně v různě volených projekcích a právě ve způsobu práce s parametrem α .

Metody projekce gradientu jsou výpočetně jednoduché a lze je snadno používat v režimu teplého startu k ještě rychlejšímu určení akčního zásahu. Nevýhodou oproti výše uvedeným metodám však je jejich nevšestrannost ve smyslu schopnosti zpracovat pouze jednoduchá omezení.

¹Nejefektivnější algoritmy patřící do větve metod vnitřního bodu jsou tzv. primární-duální. To znamená, že hledají nejen řešení primární, ale i odpovídající duální úlohy, což je de facto doplňková úloha k primárně řešené úloze redefinována jako úloha maximalizační. Řešení obou úloh, primární i duální, probíhá z důvodu větší efektivity. Duální mezera, tj. rozdíl mezi primárním a duálním řešením, je u konvexních úloh nulová čili obě řešení jsou si rovny [50, 58].

Optimalizace pro NMPC

Jak bylo nastíněno v úvodu, u optimalizačních algoritmů v NMPC se musíme spokojit pouze s určením lokálních minim, především, jde-li nám o dostatečně krátkou dobu výpočtu. Stejně jako v případě kvadratického programování před samotným představením vybraných optimalizačních metod hojně používaných v NMPC definujeme nejprve řešený nelineární program (NLP) jako

$$\min_{\{\mathbf{x}_i\}_{i=k}^{N+k}, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}} \Phi \left(\{\mathbf{x}'_i\}_{i=k}^{N+k}, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right), \quad (2.33a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{g}_{\text{rov}} \left(\{\mathbf{x}'_i\}_{i=k}^{N+k}, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}, \mathbf{x}_k \right) = \mathbf{0}, \quad (2.33b)$$

$$\mathbf{g}_{\text{nerov}} \left(\{\mathbf{x}'_i\}_{i=k}^{N+k}, \{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1} \right) \leq \mathbf{0}, \quad (2.33c)$$

kde $\Phi : \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nm} \rightarrow \mathbb{R}$ je kriteriální nelineární funkce, kterou se snažíme minimalizovat. Obecně nelineární funkce $\mathbf{g}_{\text{rov}} : \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nm} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{g_{\text{rov}}}$ a $\mathbf{g}_{\text{nerov}} : \mathbb{R}^{Nn} \times \mathbb{R}^{Nm} \rightarrow \mathbb{R}^{g_{\text{nerov}}}$ reprezentují rovnostní a nerovnostní omezení. Do funkce \mathbf{g}_{rov} je tak třeba vždy zahrnout rovnost $\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ a vazbovou podmínku modelu systému, tj. např. v případě uvažování modelu (2.4a) se jedná o rovnostní omezení $\mathbf{x}'_{i+1} - \mathbf{f}(\mathbf{x}'_i, \mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ pro $i = k, k+1, \dots, N+k-1$.

Obdobně jako u QP lze NLP (2.33) přepsat dosazením rovnostních omezení za predikce do zhuštěné formy

$$\min_{\mathbf{U}} \Phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{U}), \quad (2.34a)$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{g}_{\text{nerov}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{U}) \leq \mathbf{0}, \quad (2.34b)$$

Při řešení zhuštěného NLP (2.34) nějakým iterativním algoritmem tak vlastně sekvenčně simulujeme a optimalizujeme systém, zatímco v případě NLP (2.33) optimalizační algoritmus simuluje a optimalizuje souběžně, simultánně. Proto někdy hovoříme o NLP (2.33) jako o simultánním přístupu (*simultaneous approach*) a o NLP (2.34) jako o sekvenčním přístupu (*sequential approach*) k optimalizaci [18].

Představme dále některé hojně využívané algoritmy pro řešení NLP (2.33), potažmo NLP (2.34). Pro vlastní představení předpokládejme nyní pro změnu nezhuštěný, simultánní, NLP. Definujme tedy pro jednoduchost značení všech optimalizovaných proměnných jako $\mathbf{v} = [\mathbf{x}_k^T, \mathbf{u}_k^T, \mathbf{x}_{k+1}^T, \mathbf{u}_{k+1}^T, \dots, \mathbf{u}_{N+k-1}^T, \mathbf{x}_{N+k}^T]^T$. Dále se omezme pouze na optimalizační algoritmy Newtonova typu.

Všechny algoritmy Newtonova typu se snaží nalézt bod vyhovující KKT podmínkám využitím série linearizací kriteriální funkce a příslušného lagrangiánu, který lze vyjádřit jako

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}) = \Phi(\mathbf{V}) + \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{g}_{\text{rov}}(\mathbf{V}, \mathbf{x}_k) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}_{\text{nerov}}(\mathbf{V}),$$

kde $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{g_{\text{rov}}}$ a $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{g_{\text{nerov}}}$ představují rovnostní a nerovnostní multiplikátory. Vycházejíce z počátečního odhadu $\mathbf{V}^{[0]}, \boldsymbol{\nu}^{[0]}, \boldsymbol{\lambda}^{[0]}$ algoritmy Newtonova typu iterativně generují primární-duální odhady $\mathbf{V}^{[l]}, \boldsymbol{\nu}^{[l]}, \boldsymbol{\lambda}^{[l]}$ optimálních $\mathbf{V}^*, \boldsymbol{\nu}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$.

Algoritmy Newtonova typu pak můžeme rozdělit do dvou hlavních větví lišících se především v tom, jak nakládají s nerovnostními omezeními, na algoritmy sekvenční kvadratického programování (*sequential quadratic programming*) a nelineární metody vnitřního bodu (*nonlinear interior point methods*). Představme nyní v krátkosti jejich podstatu.

Sekvenční kvadratické programování V případě sekvenčního kvadratického programování se linearizují všechny nelineární funkce s ohledem na odhad v l -té iteraci, tj. $\mathbf{V}^{[l]}, \boldsymbol{\nu}^{[l]}, \boldsymbol{\lambda}^{[l]}$, a odhad pro další iteraci se hledá řešením následujícího QP

$$\min_{\mathbf{V}^{[l+1]}} \Phi^{\text{kvad}} \left(\mathbf{V}^{[l+1]}; \mathbf{V}^{[l]}, \boldsymbol{\nu}^{[l]}, \boldsymbol{\lambda}^{[l]} \right), \quad (2.35a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{g}_{\text{rov}}^{\text{lin}} \left(\mathbf{V}^{[l+1]}, \mathbf{x}_k; \mathbf{V}^{[l]} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.35b)$$

$$\mathbf{g}_{\text{nerov}}^{\text{lin}} \left(\mathbf{V}^{[l+1]}; \mathbf{V}^{[l]} \right) \leq \mathbf{0}, \quad (2.35c)$$

kde horní index lin v omezeních vyjadřuje to, že funkce omezení byla aproximována Taylorovým rozvojem prvního stupně, a horní index kvad značí rozvoj kritériální funkce

$$\begin{aligned} \Phi^{\text{kvad}} \left(\mathbf{V}^{[l+1]}; \mathbf{V}^{[l]}, \boldsymbol{\nu}^{[l]}, \boldsymbol{\lambda}^{[l]} \right) &= \Phi^{\text{lin}} \left(\mathbf{V}^{[l+1]}; \mathbf{V}^{[l]} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathbf{V}^{[l+1]} - \mathbf{V}^{[l]} \right)^T \\ &\quad \times \nabla_{\mathbf{V}}^2 \mathcal{L} \left(\mathbf{V}^{[l]}, \boldsymbol{\nu}^{[l]}, \boldsymbol{\lambda}^{[l]} \right) \left(\mathbf{V}^{[l+1]} - \mathbf{V}^{[l]} \right). \end{aligned}$$

Připomeňme, že $\nabla_{\mathbf{V}}^2 \mathcal{L}$ značí Hessovu matici lagrangiánu \mathcal{L} . V případě, že je tato Hessova matice pozitivně semidefinitní, QP (2.35) je konvexní, a tudíž řešitelné např. nějakou z metod představených v části konvexní optimalizace pro lineární MPC. Řešením získáme $\mathbf{V}^{[l+1]}, \boldsymbol{\nu}^{[l+1]}, \boldsymbol{\lambda}^{[l+1]}$ a celý postup opakujeme znovu v další iteraci [18, 58].

Zmiňme, že existuje spousta různých variant algoritmů spadajících do větve sekvenčního kvadratického programování lišící se hlavně ve způsobu práce s Hessovou maticí a zajištění její semidefinitnosti. Např. dobrou aproximaci Hessovy matice lze zajistit, pokud je kritériální funkce Φ konvexní a kvadratická. Takové metodě sekvenčního kvadratického programování se pak říká zobecněná Gauss-Newtonova metoda [18].

Nelineární metody vnitřního bodu Stejně jako v případě klasických metod vnitřního bodu se i nelineární metody vnitřního bodu snaží nahradit KKT podmínky. V tomto případě nějakou vhodnou spojitou nelineární aproximací, kde se opět využívá parametru τ pro redefinování podmínek optima. Tentokrát do podoby odpovídající

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{V}} \mathcal{L} \left(\mathbf{V}^*, \boldsymbol{\nu}^*, \boldsymbol{\lambda}^* \right) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_{\text{rov}} \left(\mathbf{V}^*, \mathbf{x}_k \right) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}_{\text{nerov}} \left(\mathbf{V}^* \right)_i \boldsymbol{\lambda}_i^* + \tau &= 0. \end{aligned}$$

Pro hledání příslušného optimálního \mathbf{V}^* se pak postupuje opět stejně jako v případě klasické verze, kdy je využívána Newtonova metoda a parametr τ klesá z nějaké počáteční inicializace o velké hodnotě. Jediným rozdílem oproti klasickým metodám vnitřního bodu aplikovatelným na QP je, že v každé iteraci u nelineárních metod vnitřního bodu dochází k linearizaci všech funkcí v řešeném problému [18, 58].

Mimo algoritmy Newtonova typu existuje celá řada jiných algoritmů založených na různých principech. Algoritmy Newtonova typu zde zmiňujeme kvůli jejich relativní jednoduchosti a aplikovatelnosti na širokou škálu problémů v NMPC.

Nutno poznamenat, že právě popsané MPC, kde dochází k výpočtu akčního zásahu online, tj. akční zásah se vypočítává v každém časovém okamžiku regulace znovu a znovu

namísto vytěžení nějakého univerzálního řídicího zákona, se v literatuře velmi často označuje pojmem explicitní MPC [18, 52, 74]. Úspěšnost explicitního MPC lze v praktických úlohách vylepšit celou řadou způsobů. Uveďme zde např. již zmíněný teplý start nebo kompenzaci zpoždění pomocí predikce, kdy v případech, že víme, jak dlouho bude probíhat řešení daného MPC problému, tuto informaci využijeme pro predikci takového stavu, ve kterém se systém bude nacházet při aplikaci akčního zásahu. Akční zásah je tak určen s ohledem na tuto predikci a ne přímo s ohledem na aktuální stav, i když ten je samozřejmě pro uvedenou predikci využit. Další postupy pro vylepšení explicitního MPC lze nalézt např. v [18, 19].

Kapitola 3

Systemy s dynamikou dvojitého integrátoru

Následující kapitola pojednává o třídě systémů, kterou lze označit souhrnně jako systémy s dynamikou dvojitého integrálu. Do této třídy spadají ty systémy, jejichž kompletní matematický popis odpovídá nebo alespoň jejich určitá část lze popsat, lze aproximovat, D-I dynamikou. V této práci je kladen důraz na elektromotory, které se dají do jisté míry jako systémy s D-I dynamikou rovněž vnímat. Právě paralela elektromotorů s dvojitým integrátorem by mohla později přinést nová zlepšení pro MPC elektromotorů ať už z kvalitativního, nebo efektivního hlediska. Charakteristickými systémy, které do třídy systémů s D-I dynamikou spadají, jsou však typicky systémy, které popisují pohyb objektu vyvolaný externí silou.

3.1 Dvojitý integrátor

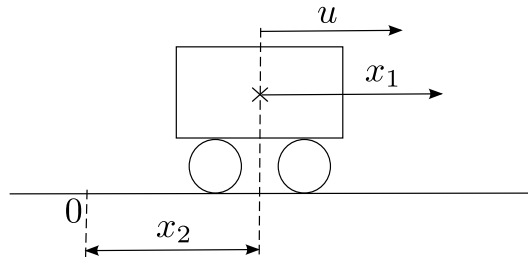
Pro svoji jednoduchost a přímočarost je matematický model D-I systému v automatickém řízení hojně využíván - a to ať už v akademických úlohách pro testování teoretických principů řízení [3, 8, 48, 72], nebo v praxi jako aproximace složitějších (modelů) systémů [25, 78, 82]. Jedná se o speciální případ systému druhého řádu se dvěma nulovými vlastními čísly (dvěma nulovými póly) [55], jehož dynamiku vystihuje následující v čase spojitý t -invariantní lineární stavový model

$$\frac{dx_{1,t}}{dt} = K_1 u_t, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dx_{2,t}}{dt} = K_2 x_{1,t}, \quad (3.1b)$$

kde x_1, x_2 reprezentují stavy D-I systému, u akční zásah a $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tzv. časové konstanty D-I systému. Model (3.1) tak odpovídá obecné struktuře (2.8a), kde vektor stavu je dán $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$.

Nejčastěji se D-I model (3.1) pro lepší vzhled ilustruje jako pohyb masy v jednodimenzionálním prostoru, na niž nepůsobí žádné další externí vlivy kromě síly, kterou je tlačena. Např. pokud $K_1 = K_2 = 1$, lze na D-I model nahlížet jako na vozík o hmotnosti 1 kg pohybující se po ose x rychlostí v $m \cdot s^{-1}$ odpovídající stavu x_1 , jehož směr určuje



Obrázek 3.1: Paralela D-I modelu s jednoosým vozíkem.

externí síla v N odpovídající akčnímu zásahu u . Poloha vozíku na ose x v m pak odpovídá stavu x_2 . Právě popsanou paralelu s vozíkem vystihuje obr. 3.1.

Co se případných omezení týče, lze vycházet z reálných požadavků. Obvykle je žádoucí např. dostat vozík z jedné polohy do druhé a přitom nepřekročit určitou rychlost, při které by hrozilo vysypání nákladu. Rovněž akční zásah musí být obvykle limitován - síla, která je k dispozici k tlačení vozíku není nekonečná. Předpokládejme tedy, že veličiny x_1 a u jsou omezeny jako

$$x_{1,t} \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle, \quad (3.2a)$$

$$u_t \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (3.2b)$$

kde $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}_{>0}$. Připomeňme, že omezení akčního zásahu (3.2b) nutně neznamená, že by akční zásah nemohl ležet v jiném symetrickém intervalu než ± 1 . Pokud bude požadavek na jinou mez, lze velikost této meze zahrnout přímo do časové konstanty K_1 jejím vynásobením příslušnou velikostí meze.

3.2 Elektromotory

Ačkoliv samotné elektromotory nelze vnímat v jejich kompletní podobě jako D-I systémy, už jen z toho důvodu, že většinou modely pokročilých elektromotorů mají daleko více stavů, složitější (často nelineární) dynamiku apod., v [25] bylo diskutováno, že vztah mezi elektrickým momentem motoru a jeho úhlovou rychlostí může být do určité míry aproximován D-I dynamikou. V [25], jak bude zmíněno zevrubně později, bylo této aproximace s výhodou využito při návrhu terminální ztrátové funkce MPC kritéria. Představme si nyní dva zástupce elektromotorů, jimž bude dále v práci věnována pozornost - základní hypotetický model stejnosměrného motoru a synchronní motor s permanentními magnety.

3.2.1 Stejnosměrný motor

Matematické modely elektromotorů obecně dávají do vztahu elektrické a mechanické veličiny. Jako nejjednodušší příklad elektromotoru tak lze vnímat stejnosměrný motor řízený do kotvy, jehož v čase spojitý t -invariantní lineární stavový model lze získat seskupením Kirchhoffova zákona pro kotevní obvod a rovováhy momentů. Tento model hypotetického motoru lze zapsat jako [41, 55]

$$\frac{di_{K,t}}{dt} = -\frac{R_K}{L_K}i_{K,t} - \frac{K_m}{L_K}\omega_{m,t} + \frac{1}{L_K}u_{K,t}, \quad (3.3a)$$

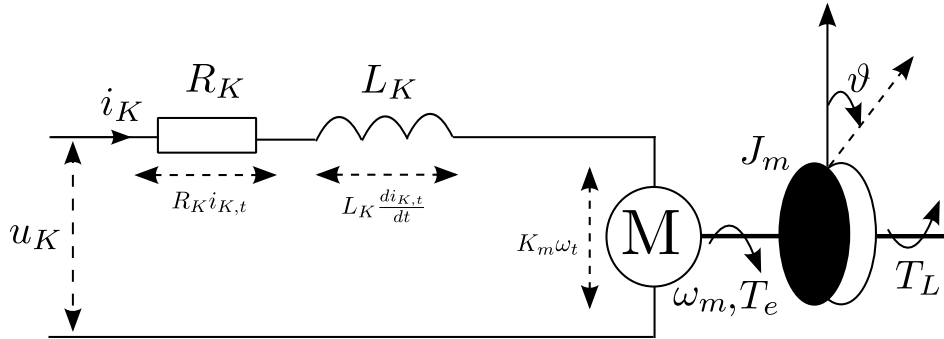
$$\frac{d\omega_{m,t}}{dt} = \frac{1}{J_m} (T_{e,t} - T_{L,t}), \quad (3.3b)$$

$$\frac{d\vartheta_{m,t}}{dt} = \omega_{m,t}, \quad (3.3c)$$

$$\frac{dT_{L,t}}{dt} = 0, \quad (3.3d)$$

$$T_{e,t} = K_e i_{K,t}, \quad (3.3e)$$

kde i_K představuje proud procházející kotevním obvodem, ω_m úhlovou rychlost, ϑ_m úhel natočení motoru, T_e a T_L elektrický (točivý) a zátěžový moment. Parametry motoru jsou: rezistance R_K a indukčnost L_K kotvy, magnetický tok K_m , moment setrvačnosti J_m a konstanta elektrického momentu K_e . Kotevní napětí u_K je vnímáno jako vstup systému. Pro ilustraci je schéma takového hypotetického elektromotoru ilustrováno na obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Stejnosměrný motor řízený do kotvy.

Je třeba zdůraznit, že se při odvození matematického modelu stejnosměrného motoru (3.3) vychází z celé řady zjednodušujících předpokladů jako např. předpoklad lineární závislosti elektrického momentu motoru na proudu kotvy, zanedbání třetího momentu závislého na úhlové rychlosti motoru apod. Strukturálně pak model stejnosměrného motoru (3.3) odpovídá stavovému modelu (2.8a), kde je vektor stavu uvažován jako $\mathbf{x} = [i_K, \omega_m, \vartheta_m, T_L]^T$ a vstupem se rozumí skalár $u = u_K$.

Omezení elektromotorů nejčastěji vycházejí z nutnosti držet Jouleovy ztráty pod určitou mezí (např. bezpečnostní faktory, hrozící přehřátí apod.) a z faktu, že vstupní napětí má vždy nějakou maximální hodnotu, kterou je možné vygenerovat. Omezení pro stejnosměrný motor tak lze např. vyjádřit jako

$$i_{K,t}^2 \leq I_{K,\max}^2, \quad (3.4a)$$

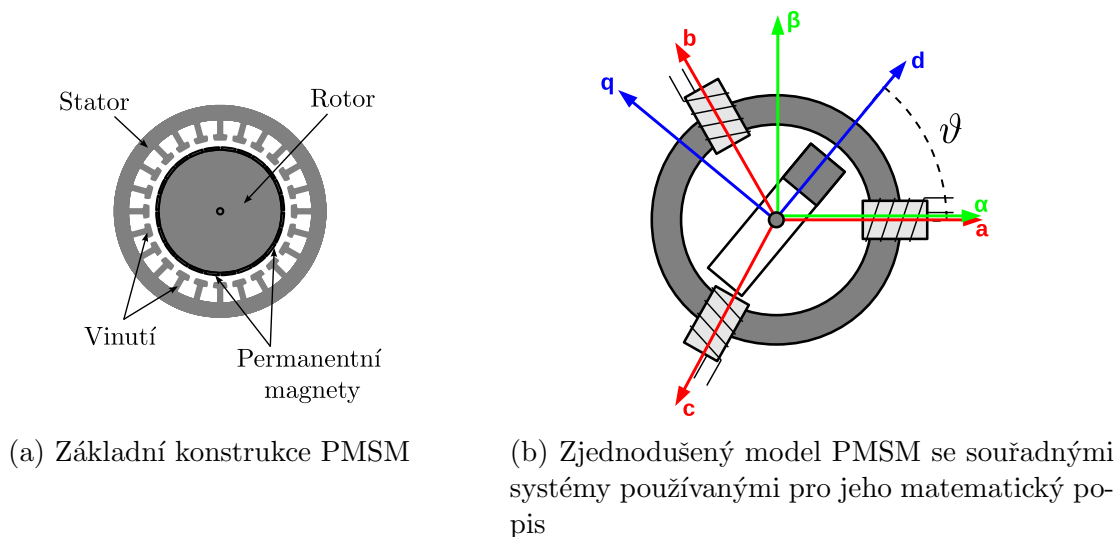
$$u_{K,t} \leq U_{K,\max}. \quad (3.4b)$$

3.2.2 Synchronní motor s permanentními magnety

Před uvedením matematického modelu synchronního motoru s permanentními magnety PMSM představme v krátkosti několik základních informací o tomto druhu elektromotoru, neboť tomuto typu elektromotoru bude v práci věnována zvýšená pozornost.

Pro generování magnetického pole rotoru je v případě PMSM využito namísto tradičního budícího vinutí permanentních magnetů. Ty jsou vyrobeny ze speciálních slitin tzv. vzácných zemin jako např. samarium-kobalt nebo neodym-železo-bor vyznačující se daleko větší magnetickou indukcí. Právě klesající cena a zvyšující se dostupnost těchto a obdobných slitin vede v současné době ke vzrůstajícímu zájmu o samotný PMSM. Např. v oblasti servopohonů postupně nahrazují stejnosměrné a krokové motory [60], kde si s sebou PMSM přináší obdobné výhody jako asynchronní stroje vůči stejnosměrným, tj. především vysokou spolehlivost a teoreticky jednodušší konstrukci. Pokud bychom pak měli srovnat výhody PMSM oproti asynchronním strojům, jednalo by se hlavně o možnost fyzicky menší konstrukce díky absenci rotorového vinutí (mohou být menší, lehčí, s menším momentem setrvačnosti rotoru, prakticky nedochází k poruchám rotoru), skutečnost, že není třeba motor před rozběhem budit, velká momentová přetížitelnost a vyšší účinnost (kvůli nulovým Jouleovým ztrátám v rotoru). Mezi nevýhody lze určitě zařadit vyšší cenu, technologicky složitější výrobu (tzv. „lepením“ permanentních magnetů na rotor), problematické odbuzování a závislost permanentních magnetů na teplotě [16].

Základní konstrukce PMSM je ilustrována na obr. 3.3a). Vnější kruh představuje stator se zuby, na kterých je navinuto statorové vinutí. Vnitřní kruh reprezentuje rotor, na jehož povrchu jsou umístěny permanentní magnety. Existuje i odlišný způsob konstrukce PMSM, kdy je stator umístěn do středu a rotor rotuje kolem něj v podobě rotujícího prstence. Dále se pak rozlišují konstrukce podle umístění magnetů jako např. konstrukce, kde jsou magnety umístěné na povrch rotoru, zapuštěné v povrchu rotoru, umístěné uvnitř rotoru apod. [40, 88].



Obrázek 3.3: Konstrukce PMSM (jádro ilustrací převzato z [88]).

Matematický model PMSM dává opět do vztahu elektrické a mechanické veličiny. Elektrické veličiny se nejčastěji uvažují v jednom ze tří souřadných systémů - $a-b-c$, $\alpha-\beta$ a $d-q$. Obecně nelze tvrdit, která soustava je lepší. Záleží na konkrétní situaci. Zmíněné souřadné systémy si je možné prohlédnout na obr. 3.3b), který ilustruje zjednodušený model PMSM, kde rotor se stává pouze z jednoho permanentního magnetu a stator ze tří cívek posunutých o $2\pi/3[rad]$ reprezentujících statorové vinutí. Vidíme, že systém

$a - b - c$ představuje soustavu os vinutí jednotlivých fází. Protože elektrické veličiny nebývají v jednotlivých osách systému $a - b - c$ vzájemně nezávislé, přechází se obvykle do systému $\alpha - \beta$ reprezentujícího statorovou ortogonální soustavu, kde platí $\alpha = a$, pomocí tzv. Clarkovy ($\alpha - \beta$) transformace souřadnic v podobě (zde ilustrováno pro statorové proudy i_α a i_β) [20, 84]

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix},$$

kde i_a , i_b a i_c jsou fázové proudy ve fázích a , b a c splňující vzhledem ke konstrukci stroje

$$i_a + i_b + i_c = 0.$$

Někdy je výhodné popisovat elektrické veličiny z pohledu rotoru. Pak přecházíme do souřadného systému $d - q$ - rotorové ortogonální soustavy natočené vůči systému $\alpha - \beta$ o úhel natočení (pozici) rotoru ϑ , kde osa d je umístěna ve směru osy permanentního magnetu a směřuje k jeho severnímu pólu. Tento a opačný přechod se provádí tzv. Parkovou transformací ve tvaru (ilustrováno pro magnetický tok produkující proud i_d a točivý moment produkující proud i_q) [20, 84]

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}.$$

Pro další úvahy budeme uvažovat právě souřadný systém $d - q$.

Jako základní v čase spojitý matematický popis PMSM se nejčastěji využívá následující model [20, 63, 84, 88]

$$\frac{di_{d,t}}{dt} = -\frac{R_s}{L_d}i_{d,t} + \frac{L_q}{L_d}i_{q,t}\omega_t + \frac{1}{L_d}u_{d,t}, \quad (3.7a)$$

$$\frac{di_{q,t}}{dt} = -\frac{R_s}{L_q}i_{q,t} - \frac{\Psi_{PM}}{L_q}\omega_t - \frac{L_d}{L_q}i_{d,t}\omega_t + \frac{1}{L_q}u_{q,t}, \quad (3.7b)$$

$$\frac{d\omega_t}{dt} = \frac{p_p}{J}(T_{e,t} - T_{L,t}), \quad (3.7c)$$

$$\frac{d\vartheta_t}{dt} = \omega_t, \quad (3.7d)$$

$$\frac{dT_{L,t}}{dt} = 0, \quad (3.7e)$$

$$T_{e,t} = k_p p_p (\Psi_{PM} i_{q,t} + (L_d - L_q) i_{d,t} i_{q,t}), \quad (3.7f)$$

kde u_d a u_q představují komponenty napětí, ω je úhlová rychlost, ϑ reprezentuje úhel (pozici) natočení, T_L je zátěžový moment a T_e je moment elektrický. Parametry modelu

jsou - komponenty indukčnosti L_d a L_q , statorová rezistance R_s , moment setrvačnosti J , počet párů pólů p_p , tok permanentních magnetů Ψ_{PM} a $k_p = 3/2$ je tzv. Parkova konstanta.

Model (3.7) dává do vztahu elektrické a mechanické součásti PMSM prostřednictvím jejich vzájemné energetické bilance a pro spoustu regulačních problémů je zcela dostačující. Složitější fyzikální jevy jako teplotní závislost parametrů či sycení magnetickým tokem jsou zanedbány. Strukturálně tak model (3.7) odpovídá t -invariantnímu nelineárnímu stavovému modelu (2.3a), kde stavem PMSM rozumíme vektor $\mathbf{x} = [i_d, i_q, \omega, \vartheta, T_L]^T$ a vstupem vektor $\mathbf{u} = [u_d, u_q]^T$.

Stejně jako v případě zjednodušeného hypotetického stejnosměrného motoru jsou i v případě PMSM omezení dány požadavkem na určitou maximální hodnotu Jouleových ztrát a maximálního možného vstupního napětí, tj.

$$i_{d,t}^2 + i_{q,t}^2 \leq I_{\max}^2, \quad (3.8a)$$

$$u_{d,t}^2 + u_{q,t}^2 \leq U_{\max}^2. \quad (3.8b)$$

3.3 Prediktivní řízení systémů s dynamikou dvojitého integrátoru

V rámci druhé kapitoly bylo vybudováno teoretické zázemí pro MPC. Naplníme nyní teoretické pojmy konkrétními příklady a formulujeme úlohu MPC pro zkoumanou třídu systémů s D-I dynamikou, resp. pro její konkrétní zástupce.

3.3.1 Definice cílů řízení

Při představování konceptu MPC byl uveden obecný cíl řízení jako optimalizační problém (2.14). V případě uvažovaných zástupců třídy systémů s D-I dynamikou tak řešíme optimalizační problém (2.14) s.t. trajektorie systému dána modelem zvoleného systému a jeho omezeními.

Důležitou otázkou pak je samotná volba ztrátové funkce. V případě systémů s D-I dynamikou se obvykle volí pro penalizaci veličin odpovídajících stavu x_1 základního D-I modelu (3.1) kvadrát těchto veličin (rychlost vozíku by měla být pokud možno co nejmenší, Jouleovy ztráty by měly být co nejmenší). Kvadrát je zde zcela přirozenou volbou (Jouleovy ztráty jsou přímo uvažovány jako proud v kvadrátu). V případě veličin odpovídajícím stavu x_2 základního D-I modelu (3.1) je otázka penalizace komplikovanější. Kvadrát odchylky tohoto stavu od požadovaného (referenčního) stavu x_2^r (odchylka aktuální polohy vozíku od požadované polohy, odchylka aktuální úhlové rychlosti motoru od požadované úhlové rychlosti) by s sebou mohl přinést lepší numerické vlastnosti, nicméně z regulačního pohledu může mít absolutní hodnota v některém aspektu výhodnější vlastnosti než numericky výhodnější kvadrát. Otázkou s ohledem na MPC také je, jak se projeví výběr normy na kvalitě MPC pro různě dlouhé prediktivní horizonty.

Ponechme proto zatím otázku volby normy pro penalizaci veličin odpovídajícím stavu x_2 základního D-I modelu (3.1) nezodpovězenou a definujme ztrátové funkce pro zkoumané systémy následovně:

- dvojitý integrátor:

$$l(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) = |x_{2,t} - x_2^r|^p + c \cdot x_{1,t}^2, \quad (3.9)$$

- stejnosměrný motor:

$$l(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) = |\omega_{m,t} - \omega^r|^p + c \cdot i_{K,t}^2, \quad (3.10)$$

- synchronní motor s permanentními magnety:

$$l(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) = |\omega_t - \omega^r|^p + c \cdot (i_{d,t}^2 + i_{q,t}^2), \quad (3.11)$$

kde konstanta $c \in \mathbb{R}_{>0}$ představuje uživatelsky volitelný parametr udávající poměr mezi fyzikálně nesouměřitelnými veličinami, které obvykle stavy systémů s D-I dynamikou reprezentují. Jako ω^r je označena požadovaná úhlová rychlost motoru a $p \in \{1, 2\}$. V případě konkrétní volby p bude dále v textu tato volba pro jednoduchost označena jako Lp norma (pozor - tento pojem je obvykle v literatuře vnímán lehce odlišně [7]).

3.3.2 Diskretizace

Jak bylo dále uvedeno při představení konceptu MPC, je dále nutné pro účely MPC přenést formulaci cíle řízení do v čase diskrétní podoby. Nejprve se zaměříme na samotný model systému.

Pro získání v čase diskrétních modelů bude v práci s výhodou využito diskretizační metody založené na Taylorově rozvoji [92]. V čase diskrétní model získaný touto metodou je dán jako

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \sum_{z=1}^Z \mathbf{A}_z(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \frac{T_s^z}{z!}, \quad (3.12)$$

kde T_s je uvažovaná perioda vzorkování a $\mathbf{A}_z(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ je získáno rekurzivně vztahem

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_k, \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{A}_{z+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \frac{\partial \mathbf{A}_z(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}_k), \quad (3.12b)$$

kde forma funkcí $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ a $\mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ odpovídá příslušnému v čase spojitému modelu. Právě popsany algoritmicizovaný přístup k časové diskretizaci modelu se výborně hodí pro diskretizaci pokročilejších elektromotorů jako je např. PMSM, kde se často pro predikční model využívá faktu, že pro statorovou dynamiku, kde vstup má okamžitý efekt na derivaci, je dostačující volit menší řád rozvoje ($Z = 1$), což v čase diskrétní model zjednodušuje. Naopak pro mechanické veličiny, kde tento efekt okamžitý není, je žádoucí volit rozvoj vyššího řádu (alespoň $Z = 2$) [26].

Dalším nutným krokem po časové diskretizaci modelu je přizpůsobit diskretizaci omezení. Ty pro námi zvolené speciální případy z třídy systémů s D-I dynamikou přecházejí do podoby:

- dvojitý integrátor (časová diskretizace omezení (3.2)):

$$x_{1,k} \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle, \quad (3.13a)$$

$$u_k \in \langle -1, 1 \rangle, \quad (3.13b)$$

- stejnosměrný motor (časová diskretizace omezení (3.4)):

$$i_{K,k}^2 \leq I_{K,\max}^2, \quad (3.14a)$$

$$u_{K,k} \leq U_{K,\max}^2, \quad (3.14b)$$

- synchronní motor s permanentními magnety (časová diskretizace omezení (3.8)):

$$i_{d,k}^2 + i_{q,k}^2 \leq I_{\max}^2, \quad (3.15a)$$

$$u_{d,k}^2 + u_{q,k}^2 \leq U_{\max}^2. \quad (3.15b)$$

V čase spojitý optimalizační problém (2.14) tak lze nyní přepsat do jeho v čase diskrétní podoby dané optimalizačním problémem (2.17), kde hledáme na nekonečném horizontu optimální sekvenci akčních zásahů s.t. dynamika zvoleného systému reprezentována příslušným modelem diskretizovaným pomocí metody (3.12) a příslušným výše uvedeným omezením v diskrétním čase. V čase diskrétní ztrátové funkce kritéria (2.16) pro zkoumané systémy přecházejí do podoby:

- dvojitý integrátor (časová diskretizace ztrátové funkce (3.9)):

$$l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = |x_{2,k+1} - x_2^r|^p + c \cdot x_{1,k+1}^2, \quad (3.16)$$

- stejnosměrný motor (časová diskretizace ztrátové funkce (3.10)):

$$l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = |\omega_{m,k+1} - \omega^r|^p + c \cdot i_{K,k+1}^2, \quad (3.17)$$

- synchronní motor s permanentními magnety (časová diskretizace ztrátové funkce (3.11)):

$$l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = |\omega_{k+1} - \omega^r|^p + c \cdot (i_{d,k+1}^2 + i_{q,k+1}^2). \quad (3.18)$$

3.3.3 Prediktivní řízení

V rámci prediktivního řízení pak optimalizační problém (2.14) aproximačně řešíme jako optimalizační problém (2.17) s konečným prediktivním horizontem N , tj. jako optimalizační problém (2.20). Pro zkoumané systémy lze tak optimalizační problém řešený v rámci MPC vyjádřit jako

$$\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{*N+k-1} = \arg \min_{\{\mathbf{u}_i\}_{i=k}^{N+k-1}} \left[\sum_{i=k}^{N+k-1} l(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) + l_f(\mathbf{x}_{N+k}) \right], \quad (3.19)$$

jenž řešíme pro

- dvojitý integrátor s.t. (3.1) disk. pomocí (3.12), (3.13), (3.16),
- stejnosměrný motor s.t. (3.2) disk. pomocí (3.12), (3.14), (3.17),
- synchronní motor s permanentními magnety s.t. (3.7) disk. pomocí (3.12), (3.15), (3.18).

V pořadí první akční zásah ze získané optimální sekvence akčních zásahů \mathbf{u}_k^* je pak v rámci RH strategie MPC aplikován. V dalším časovém kroku se pak celý optimalizační problém (2.20) řeší znovu.

Rychlost určení akčního zásahu (řešení optimalizačního problému (2.20)) je, především pro elektromotory, kde je nutné držet periodu vzorkování T_s dostatečně krátkou, klíčová. Jak bylo diskutováno v úvodní kapitole a při obecném popisu konceptu MPC, existují různé možnosti, jak ke zrychlení výpočtu akčního zásahu v MPC přistoupit. Není tak divu, že je návrh výpočetně nenáročných technik, které by dokázaly řešit problém (2.20) při respektování složitosti modelu a omezení dostatečně efektivně, velmi aktuálním problémem [13].

Kapitola 4

Cíle disertační práce

Na základě nabytých znalostí o MPC a systémech s D-I dynamikou shrnutých v předešlých kapitolách a zhodnocení aktuálních výzev z oblasti MPC si tato disertační práce klade následující cíle:

1. Nalezení vhodné aproximace dlouhého horizontu kritéria prediktivního řízení pro třídu systémů s dynamikou dvojitého integrátoru.

Lze předpokládat, že návrh vhodné terminální ztrátové funkce MPC kritéria pro systémy s D-I dynamikou by mohl mít potenciál urychlit samotné generování akčního zásahu určeného MPC přístupem. Návrhu terminální ztrátové funkce však musí předcházet podrobná analýza vlivu délky prediktivního horizontu na různé volby ztrátové funkce - především je třeba detailně zkoumat, jak se liší vlastnosti L1 a L2 normy s rostoucím prediktivním horizontem. Teprve na základě takové analýzy je možné vybrat tu správnou normu pro ztrátovou funkci MPC kritéria, která s rostoucím prediktivním horizontem dosahuje zajímavých výsledků. Aproximace dlouhohorizontové informace pro takovou normu, návrh terminální ztrátové funkce pro MPC kritérium se ztrátovou funkcí s touto normou, by tudíž mohl být pro potenciální aplikace žádoucí.

2. Návrh efektivního prediktivního řízení použitelného v praktických aplikacích.

Ukáže-li se, že navržená terminální ztrátová funkce, resp. její využití v MPC kritériu, přináší zajímavé výsledky, mohl by být tento přístup s výhodou implementován do praktických problémů řízení. Především návrh výpočetně nenáročného MPC pro PMSM je velmi aktuální problém a v literatuře je možné dohledat spoustu přístupů k jeho řešení. Pro případný rozvoj této úvahy tak bude potřebné shrnout různé přístupy k MPC řízení PMSM a navrhnout takový MPC algoritmus, založený na poznatcích získaných díky splnění prvního cíle, který by obstál v konkurenci v literatuře uvedených přístupů. Navržený MPC algoritmus bude otestován na reálném PMSM.

3. Zobecnění návrhu prediktivního řízení pro nesymetrická omezení.

U všech vybraných příkladů systémů spadajících do třídy systémů s D-I dynamikou se obvykle uvažují symetrická omezení. Protože může být symetričnost v některých úlohách příliš omezující, závěrečným cílem této disertační práce je pokusit se

předpoklad symetričnosti opustit a navržený přístup k MPC vhodným způsobem upravit tak, aby byl schopný obstát i v obecnější rovině, kde mohou nesymetrická omezení veličin přicházet v úvahu.

Kapitola 5

Aproximace dlouhého horizontu kritéria prediktivního řízení

Jednou z neoddiskutovatelných výhod MPC je jeho schopnost reagovat na změny referenčních hodnot řízených veličin s předstihem. Např. víme-li, že na konci prediktivního horizontu nastane změna referenční hodnoty, lze již tuto změnu brát ve výpočtu optimálního akčního zásahu v patrnost dopředu. Délka prediktivní horizontu se tak viditelně podepíše na celkové kvalitě řízení. Nicméně, dlouhé prediktivní horizonty se mohou na kvalitě řízení odrazit i v případech, kdy apriori nepředpokládáme znalost vývoje referenční hodnoty řízené veličiny (když jsou změny referenčních hodnot nárazové, okamžité). Logickou otázkou je, jak se změna délky horizontu vlastně odrazí na kvalitě řízení v takových úlohách. Má zde smysl vůbec prediktivní horizont prodlužovat? Projeví se délka horizontu na kvalitě řešení obecného optimalizačního problému (2.14)? A pokud ano - jak se odrazí délka horizontu na kvalitě pro různé volby ztrátové funkce kritéria?

Následující kapitola se snaží na tyto otázky odpovědět vzhledem ke zvolené třídě systémů s D-I dynamikou. Analyzovány zde jsou konkrétní příklady MPC jednotlivých zástupců této třídy při různých volbách délek prediktivních horizontů a ztrátových funkcí. Primárním cílem analýzy je určit, při jakých podmínkách má uvažování dlouhého horizontu MPC kritéria neoddiskutovatelný význam, a tudíž jej nelze v kritériu zanedbat (uvažovat pouze krátký prediktivní horizont). Připomeňme, že především pro elektromotory je rychlost generování akčního zásahu klíčová, a proto v praktických úlohách nelze při jejich řízení dlouhé horizonty uvažovat vůbec.

Tam, kde taková analýza odhalí, že má pro MPC přístup délka horizontu fatální vliv na celkovou kvalitu výsledného řešení optimalizačního problému (2.14), zkoumá kapitola možnosti, jak dlouhohorizontovou informaci do MPC kritéria zařadit, aniž by se musela nějak víc prodlužovat celková délka prediktivního horizontu. To činí pomocí vhodného návrhu terminální ztrátové funkce. Právě takový přístup k návrhu MPC může mít spoustu zajímavých důsledků, jež by šlo využít v reálných aplikacích.

5.1 Analýza vlastností vybraných norem ztrátové funkce

Aby bylo možné pochopit, jaký vliv má délka prediktivního horizontu na různé aspekty MPC při různých volbách ztrátové funkce jeho kritéria, je nutné nejprve prozkoumat, jaké vlastnosti s sebou větší délka horizontu přináší. Pro takovou analýzu předpokládejme následující konkrétní zástupce třídy systémů s D-I dynamikou resp. následující konkrétní problémy syntézy řízení:

Problém 1: v tomto případě bude analyzováno MPC řízení D-I systému, který pro ilustraci bude vnímán jako již dříve představený jednoosý vozík, kde stav x_1 reprezentuje rychlost vozíku v $m \cdot s^{-1}$, stav x_2 polohu vozíku v m a akční zásah představuje externí sílu působící na vozík v N , s parametry uvedenými v tabulce 5.1 podle kritéria (3.19) s nastavením odpovídajícím D-I systému. Požadovaná poloha ve ztrátové funkci nechť je dána jako $x_2^r = 7$. Pro vozík je tak požadováno, aby zaparkoval v poloze $x_2^r = 7 m$, přičemž počáteční stav vozíku bude uvažován jako nulový, tj. $x_{1,0} = x_{2,0} = 0$.

Tabulka 5.1: Parametry uvažovaného jednoosého vozíku.

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
K_1	2	\bar{x}_1	$2 m \cdot s^{-1}$
K_2	1	T_s	$1 \cdot 10^{-2} s$

Problém 2: v tomto případě bude analyzováno MPC řízení hypotetického stejnosměrného motoru (3.3) s parametry uvedenými v tabulce 5.2 podle kritéria (3.19) s nastavením odpovídajícím stejnosměrnému motoru. Požadovaná úhlová rychlost motoru nechť je dána jako $\omega^r = 30 rad \cdot s^{-1}$. Počáteční stav stejnosměrného motoru je nulový ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$).

Tabulka 5.2: Parametry uvažovaného stejnosměrného motoru.

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
R_K	0.3Ω	J_m	$0.01 kg \cdot m^2$
L_K	$0.005 H$	$U_{K,\max}$	$12 V$
K_m	$0.7 V \cdot s \cdot rad^{-1}$	$I_{K,\max}$	$5 A$
K_e	$0.1 N \cdot m \cdot A^{-1}$	T_s	$100 \cdot 10^{-6} s$

Problém 3: v tomto případě bude analyzováno MPC řízení PMSM (3.7) s parametry uvedenými v tabulce 5.3 podle kritéria (3.19) s nastavením odpovídajícím PMSM. Požadovaná úhlová rychlost motoru nechť je dána jako $\omega^r = 100 rad \cdot s^{-1}$. Počáteční stav PMSM je, stejně jako v předchozích problémech, nulový ($\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$).

Pro problémy 1-3 dále předpokládejme vždy nulovou volbu terminální ztrátové funkce MPC kritéria (3.19), tj. $l_f = 0$. Jedná se tak o případ, kdy je dlouhohorizontová informace z MPC kritéria vypuštěna. Takový přístup k řízení bude dále v textu označován jako

Tabulka 5.3: Parametry uvažovaného PMSM.

Parametr	Hodnota	Parametr	Hodnota
R_s	0.28Ω	p_p	4
L_d	$0.003465 H$	J	$0.04 kg \cdot m^2$
L_q	$0.004465 H$	U_{\max}	200 V
Ψ_{PM}	$0.1989 Wb$	I_{\max}	20 A
k_p	1.5	T_s	$50 \cdot 10^{-6} s$

MPC- N , kde N bude udávat délku zvoleného (krátkého) prediktivního horizontu. Co se volby samotné ztrátové funkce MPC kritéria týče, omezíme se, jak bylo nastíněno již v minulé kapitole, na L1 a L2 normu pro penalizaci stavů odpovídající stavu x_2 D-I systému. Takové volby ztrátové funkce mají z praktického hlediska nejsignifikantnější dopad, ať už z výpočetních nebo kvalitativních měřítek.

Pro vlastní numerické řešení problémů 1-3 bude využito softwarového nástroje MathWorks® Matlab® (R2018b) běžícího na PC vybaveném CPU Intel® Core™ i7-4790 (3.60 [GHz]). Optimalizační problém (3.19) bude řešen pomocí standardní funkce `fmincon` [solver - nelineární metoda vnitřního bodu, studený start (nulové počáteční podmínky)] z MathWorks® Optimization Toolbox™. Ta sice nenabízí nejrychlejší řešení, ale pro potřeby demonstrace plně postačí (byť především u LQ úloh existují efektivnější algoritmy pro jejich numerické řešení, i zde by se měla jejich menší výpočetní náročnost projevit) [49].

Z důvodu větší výpočetní náročnosti zvoleného řešení jednotlivých problémů však bude zapotřebí stanovit pevná pravidla, meze, v rámci kterých budou problémy 1-3 řešeny. Jedná se zejména o stanovení maximální délky prediktivního horizontu N_{\max} pro MPC- N a dále o uvažování maximálního přípustného času ustálení (ST), jenž je třeba z fyzikální podstaty problému pevně vymežit, aby nebyl příliš dlouhý. Volme tedy maximální přípustný ST např. jako čas, kdy řízený systém dosáhne chybového pásma daného odchylkou $\pm 0.1\%$ a již z tohoto pásma nevystoupí, tj. $ST_{\pm 0.1\%}^{\max}$. V případě problému 1 tak budou kompletní meze úlohy vybrány jako $N_{\max} = 100$ a $ST_{\pm 0.1\%}^{\max} = 50 s$, u problému 2 jako $N_{\max} = 20$ a $ST_{\pm 0.1\%}^{\max} = 0.2 s$ a u problému 3 jako $N_{\max} = 10$ a $ST_{\pm 0.1\%}^{\max} = 0.1 s$.

5.1.1 Vliv délky prediktivního horizontu na kvalitu

Nejprve v rámci analýzy zkoumejme, jak se odrazí volba délky prediktivního horizontu N v MPC- N pro zkoumané ztrátové funkce kritéria s L1 a L2 normou. K této analýze přikročíme tak, že budeme měnit u řešených problémů 1-3 uživatelsky volitelný parametr c (od 0 do 10^5) a sledovat jednak vývoj celkové hodnoty kritéria a jednak, a to je hlavní, poměr mezi jednotlivými složkami tohoto kritéria, tj. při jakých konkrétních ztrátách obdržíme jaký celkový součet regulačních odchylek penalizovaný příslušnou normou.

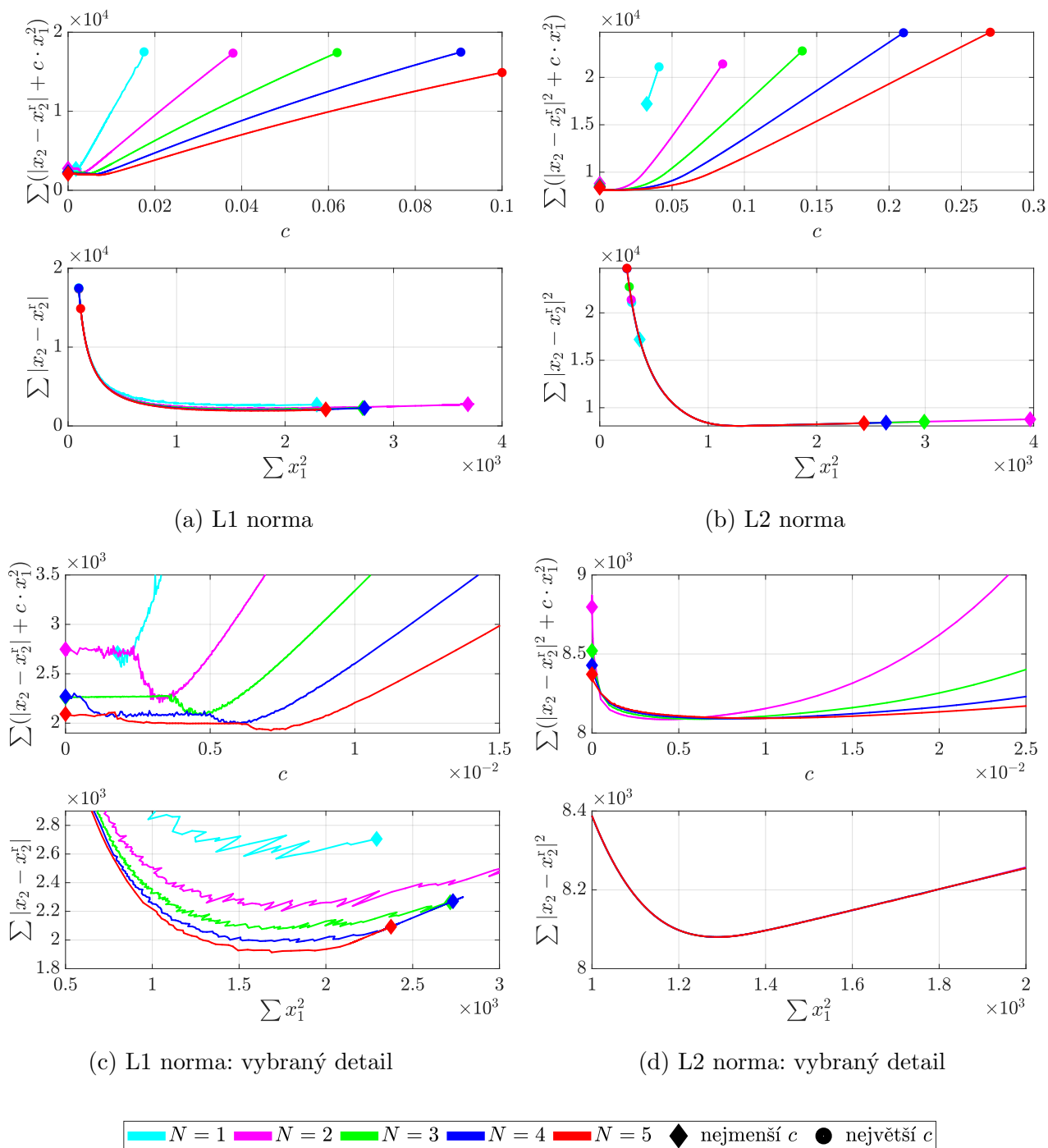
Problém 1 Diskutujme nejprve výpočetně nejméně náročný problém 1. Na obr. 5.1 a 5.2 jsou shrnuty výsledky výše uvedeného experimentu. Ihned tak vidíme, že délka prediktivního horizontu má signifikantní dopad na výslednou kvalitu MPC- N s L1 normou. Především grafy zachycující poměr mezi jednotlivými složkami kritéria jasně demonstrují, že abychom obdrželi lepší poměr mezi celkovými ztrátami a celkovou odchylkou pena-

lizovanou příslušnou normou (ve smyslu při stejných ztrátách získáme menší celkovou odchylku), je nutné volit delší horizont. V případě L2 normy je situace odlišná. Zde lze pozorovat, že v grafech zachycujících poměr složek kritéria leží de facto všechny horizonty na jedné křivce. Nevýhoda krátkého horizontu $N = 1$ pro L2 normu tkví tak především v tom, že se pohybuje pouze v malém rozmezí ztrát, kde obdržíme poměrně velkou celkovou odchylku. Lze tak tvrdit, že v případě L2 normy se držíme Paretova optima (Paretovy fronty) [51, 79] bez ohledu na délku prediktivního horizontu, zatímco u L1 normy k tomuto optimu s rostoucím prediktivním horizontem postupně konvergujeme.

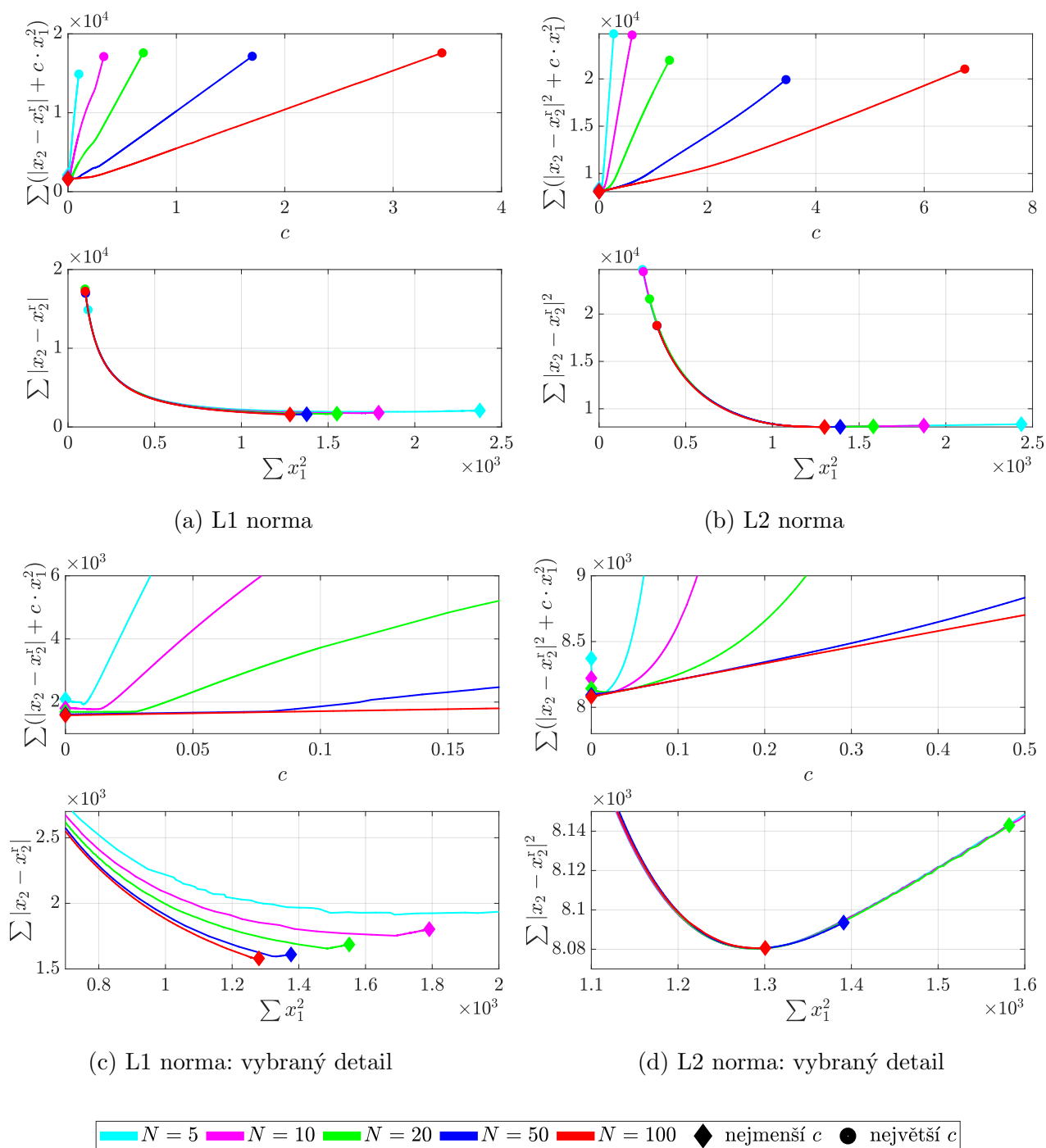
Pro lepší pochopení toho, proč se zkoumané normy chovají tak odlišně, pozorujme vybrané časové průběhy. Na obr. 5.3a) a b) vidíme časový vývoj řízeného systému pomocí MPC- N pro různé volby prediktivního horizontu při fixní volbě uživatelsky volitelného parametru c (parametr c volený tak, aby horizont $N = 1$ splnil stanovené meze úlohy). V případě L2 normy dochází k postupnému náběhu do požadované polohy vozíku, přičemž se MPC- N dostává již pro malé horizonty (od $N = 2$) na mezní rychlost, již postupně snižuje. Čím delší prediktivní horizont je, tím lépe dokáže MPC- N odhadnout, kdy je vhodné začít rychlost snižovat tak, aby vozík dokázal zaparkovat přesně v požadované poloze. U L1 normy se na maximální rychlost dostáváme s přibývajícím prediktivním horizontem. Strategie MPC- N s touto normou je držet určitou rychlost a v momentě, kdy dorazí vozík do požadované polohy, začít brzdit, resp. začít snižovat rychlost. Délka prediktivního horizontu se tak zde odráží již na volbě maximální rychlosti, kterou vozík nechá MPC- N jet a také na schopnosti vozíku adekvátně brzdit.

Zajímavější vhléd do rozdílnosti zkoumaných norem, který vysvětluje, proč získáváme v případě L1 normy, na rozdíl od L2 normy, s přibývajícím prediktivním horizontem při stejných ztrátách menší celkovou odchylku poskytují obr. 5.3c) a d). Ty zobrazují vývoj řízeného systému pomocí MPC- N pro různé volby prediktivního horizontu při fixní volbě celkových ztrát (konkrétní naladění uživatelsky volitelných parametrů c bylo v experimentu takové, aby celkové ztráty řízeného systému spadly do pásma $\sum x_1^2 = 1200 \pm 70$). Je tak patrné, že v případě L2 normy lze pouhou změnou volby uživatelsky volitelného parametru c docílit časového průběhu se stejným charakterem jak u krátkých, tak dlouhých prediktivních horizontů již od relativně krátkého prediktivního horizontu (od $N = 2$). Dále zjišťujeme, v čem tkví podstata problému MPC- N s krátkým prediktivním horizontem ($N = 1$), spočívajícím v neschopnosti pohybovat se ve větším rozmezí celkových ztrát. Krátký prediktivní horizont u L2 normy s sebou přináší větší trvalou regulační odchylku, díky níž MPC-1 v našem teoretickém příkladě nesplňuje požadavek na dosažení požadovaného $ST_{\pm 0.1\%}^{\max}$ (MPC-1 je na obr. 5.3d) znázorněno čárkovanou čarou, aby bylo zjevné, že je dodáno do analýzy jen pro ilustraci). L1 norma problém s trvalou regulační odchylkou nevykazuje. Zde dochází opět k dramatickým změnám rychlosti s cílem zabrzdit přesně v požadované poloze. Nutnost těchto změn klesá s přibývajícím prediktivním horizontem, což se ve výsledku odráží na menším ST.

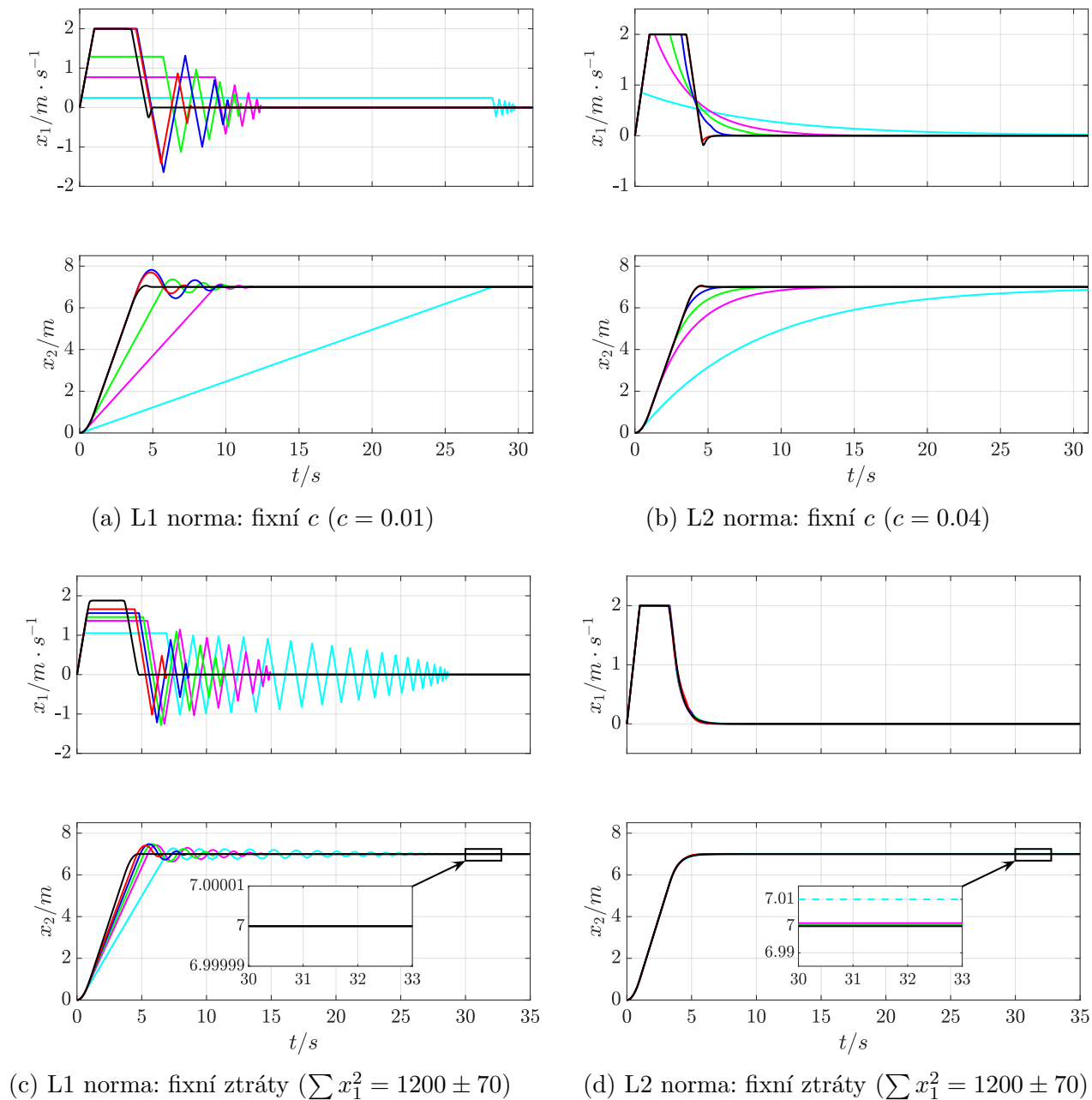
U konkrétního naladění problému 1 můžeme při porovnání krátkých a delších horizontů na obr. 5.1 a 5.2 rovněž pozorovat, že se pro krátké horizonty, v rozporu se standardní logikou, nedostáváme k minimální celkové odchylce pro nejmenší možnou volbu uživatelsky volitelného parametru ($c = 0$). Pro delší horizonty se již řízený systém chová standardně. Toto chování, tolik patrné v případě L1 normy, vysvětluje obr. 5.4, který porovnává chování řízeného systému s minimálním a maximálním naladěním uživatelsky volitelného parametru s naladěním tohoto parametru pro případ, kdy byla obdržena mi-



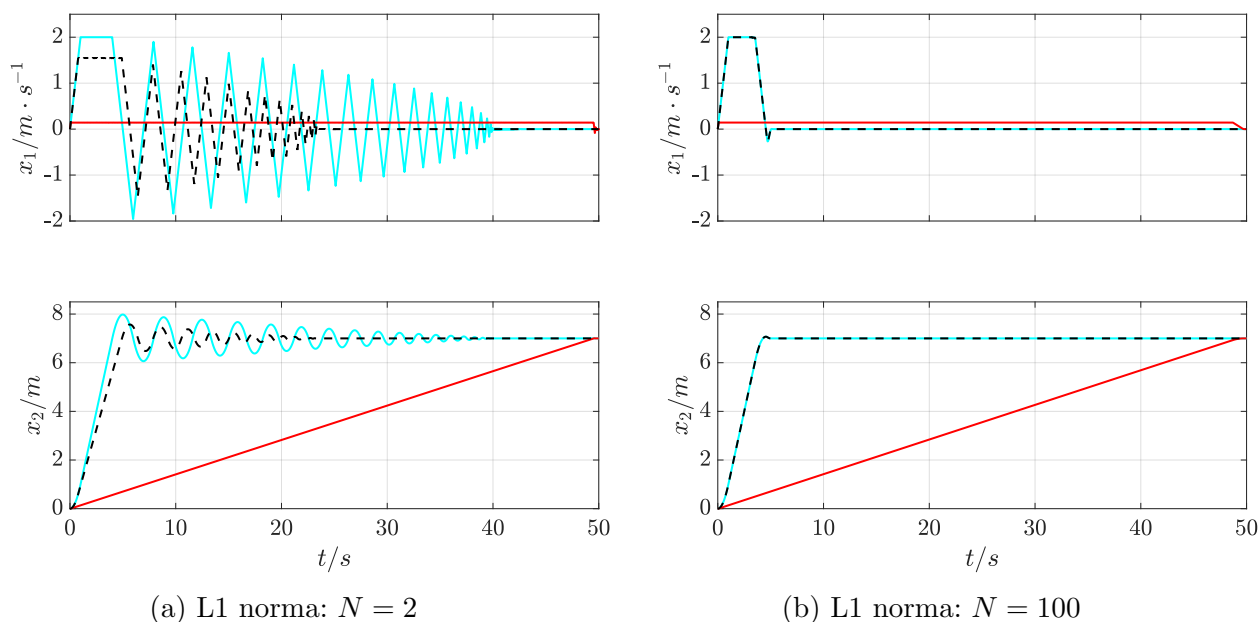
Obrázek 5.1: Problém 1 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c (krátké horizonty): celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c .



Obrázek 5.2: Problém 1 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c (delší horizonty): celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c .



Obrázek 5.3: Problém 1 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N v závislosti na délce prediktivního horizontu N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou.



■ nejmenší c
 ■ největší c
 ■ c vedoucí na minimální $\sum |x_2 - x_2^f|$

Obrázek 5.4: Problém 1 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N pro nejmenší a největší volbu uživatelsky volitelného parametru c a naladění tohoto parametru poskytující minimální celkovou odchylku.

minimální odchylka. Je tak patrné, že pro krátké prediktivní horizonty je to právě adekvátní penalizace ztrát, jež dopomáhá k rychlejší stabilizaci uzavřeného systému. S delším horizontem potřeba adekvátně penalizovat i celkové ztráty pro rychlejší stabilizaci klesá.

Další odlišnost zkoumaných norem, kterou je potřeba diskutovat, spočívá v jejich numerické stabilitě, kdy celkem očekávaně u L1 normy, na rozdíl od L2 normy, na obr. 5.1 a 5.2 pozorujeme, že pro krátké horizonty je řešení numericky velmi nestabilní, tj. malé změny uživatelsky volitelného parametru c poměrně značně ovlivňují celkový výsledek (byť celkový trend zobrazených křivek je dosti patrný). Zajímavé je, že délka prediktivního horizontu numerickou nestabilitu rovněž ovlivňuje - čím delší prediktivní horizont MPC- N s L1 normou je, tím je numerické řešení více stabilní.

Problém 2 Obdobnou analýzu jako v případě problému 1 provedeme nyní pro problém 2.

Na obr. 5.5 sledujme opět především poměr mezi jednotlivými složkami kritéria, kde vidíme, že v případě penalizace pomocí L1 normy u MPC- N se opět s rostoucím prediktivním horizontem posouváme blíže k oblasti Paretova optima. Delší prediktivní horizont se zde také pozitivně odráží na větší numerické stabilitě. U L2 normy je též situace obdobná jako u problému 1 s tím rozdílem, že zde MPC-1 dokáže pokrýt delší úsek celkových ztrát a odchylek. V případě MPC-1 s penalizací pomocí L2 normy můžeme rovněž pozorovat menší numerickou nestabilitu. Ta může jít na vrub zvolenému způsobu řešení optimalizačního problému; nicméně trend jasně ukazuje, že MPC-1 má přece jen o něco horší vlastnosti než MPC- N s (alespoň o něco) delšími prediktivními horizonty. Důvod

lze hledat opět ve větší trvalé regulační odchylce.

Právě velkou trvalou regulační odchylku MPC-1 spolu s dalšími vybranými časovými průběhy si je možné prohlédnout na obr. 5.6. Vidíme tak, že řízený systém s ryzí D-I dynamikou v podobě vozíku v problému 1 svým chováním skutečně odpovídá řízenému stejnosměrnému motoru v problému 2. Pokud bychom chtěli být korektnější, měli bychom pro toto tvrzení samozřejmě zkoumat průběh momentu T_e namísto proudu i_K , neboť právě moment motoru odpovídá dle předchozích tvrzení prvnímu stavu D-I modelu; nicméně lineární závislost ve vztahu proudu a elektrického momentu (3.3e) dává tušit, že moment má stejný charakter jako proud. Na obr. 5.6 zobrazující časový průběh vybraných proudů je navíc ihned patrné splnění proudového omezení (3.4a).

Problém 3 analyzujeme i poslední z vytyčených problémů. Na tomto místě připomeňme, že se, na rozdíl od problémů 1 a 2, u problému 3 přesouváme z lineárního MPC do NMPC, neboť model PMSM (3.7) vykazuje nelineární charakter.

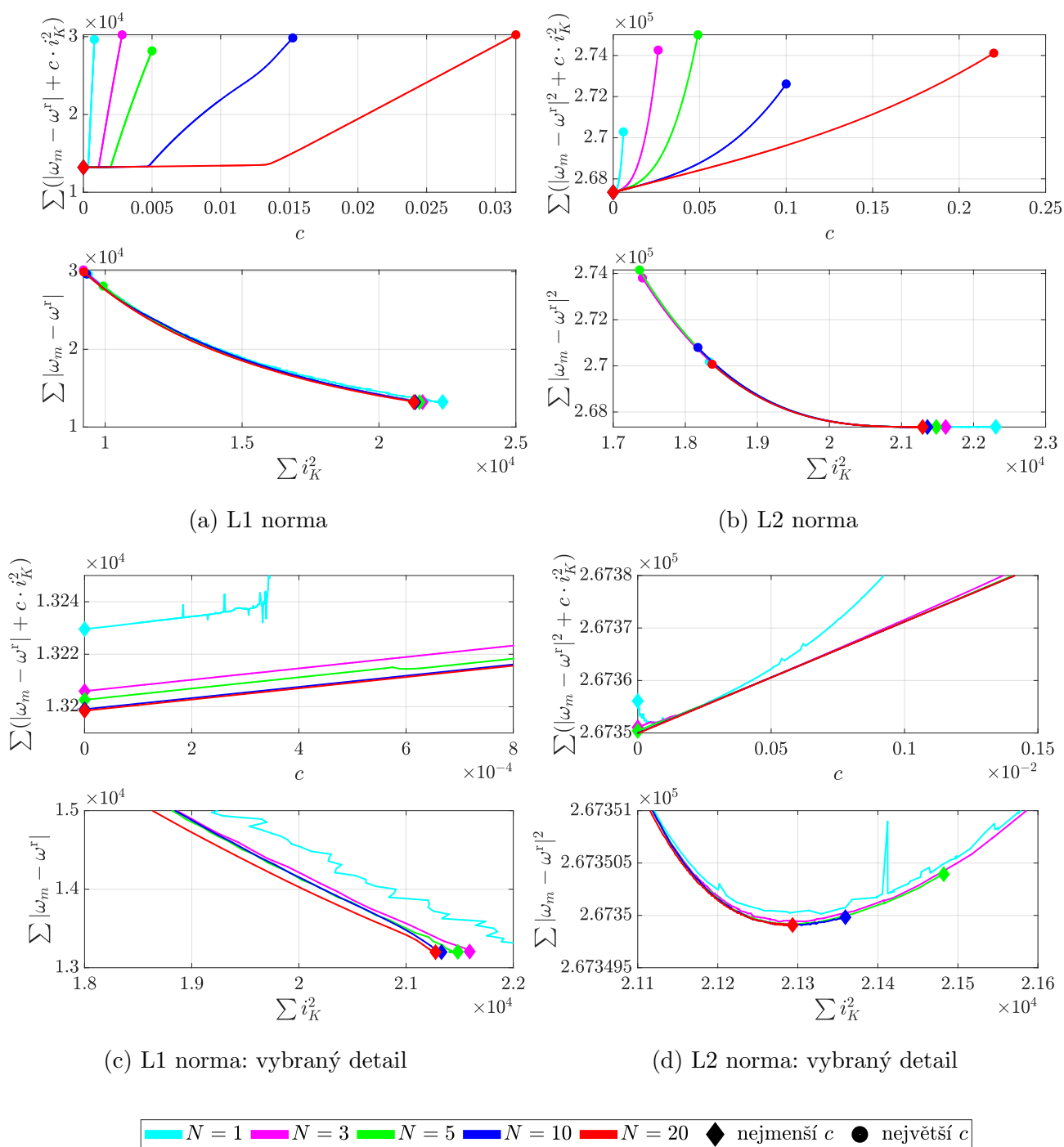
Jak prozrazuje obr. 5.7 opět zachycující vývoj kritéria a poměr jeho složek s rostoucím uživatelsky volitelným parametrem c vyobrazený pro různé prediktivní horizonty, v případě MPC- N s L1 normou můžeme nastínit obdobné závěry jako u předešlých problémů, tj. delší prediktivní horizont se jednoznačně odráží na kvalitě výsledného řízení, neboť řízený PMSM díky němu dosahuje pro menší Jouleovy ztráty menší celkové odchylky. Delší horizont se opět projevuje i v lepší numerické stabilitě, i když i v případě delších prediktivních horizontů lze pozorovat horší numerické vlastnosti, než tomu bylo u předchozích problémů. Právě to, že se jedná o NMPC problém, je patrné především u L2 normy, kde pozorujeme obdobné chování jako u L1 normy. Vliv prediktivního horizontu je tak i zde, samozřejmě s ohledem na prostředky, kterými byla úloha řešena, patrný. Nyní se k Paretovu optimu postupně blížíme, stejně jako u L1 normy, se zvyšujícím se prediktivním horizontem.

Vybrané časové průběhy znázorněné na obr. 5.8 lze okomentovat obdobně jako v předchozích problémech. Na obr. 5.8 je již znázorněný moment T_e , aby bylo patrné, že vztah mezi točivým momentem a úhlovou rychlostí PMSM odpovídá svým chováním D-I dynamice. Opět je patrný opatrnější náběh na požadovanou úhlovou rychlost u L2 normy s tím, že zde dochází u MPC- N s kratšími prediktivními horizonty k větší trvalejší odchylce. L1 norma je zase opatrnější, co se nájezdu na proudové omezení týče; nicméně v nájezdu na požadovanou rychlost je razantnější, i za cenu překmitu, a o poznání rychlejší a přesnější. Abychom se pak přesvědčili o splnění omezení na Jouleovy ztráty, jsou pro vybrané časové průběhy řízených systémů znázorněny tyto ztráty separátně na obr. 5.9.

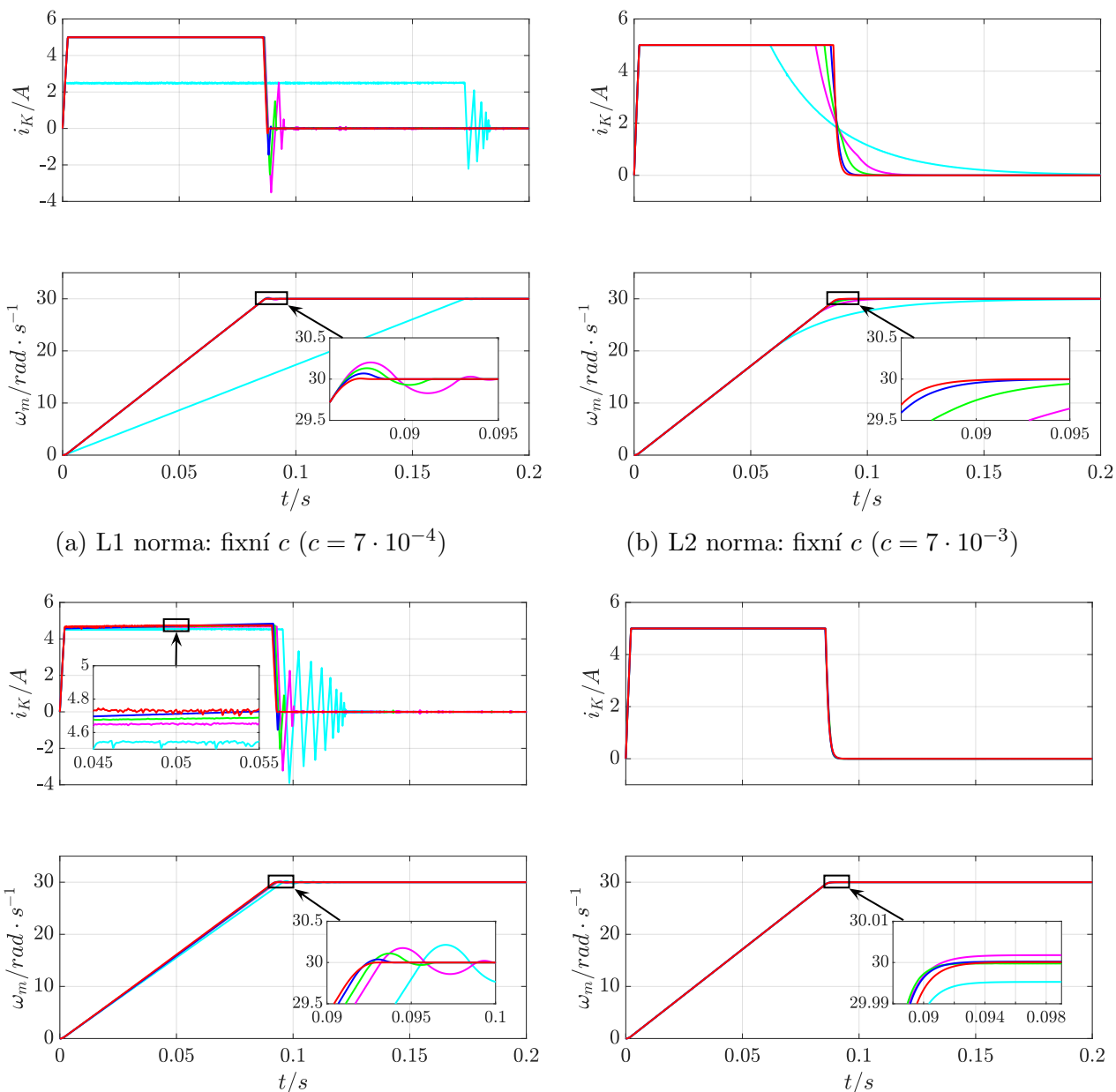
5.1.2 Čas ustálení

Právě analýza dosaženého ST v MPC- N dává možnost porovnat vzájemně obě zkoumané normy ve ztrátové funkci MPC kritéria, neboť je to kvalita, kterou u obou norem apriori nežadáme. ST sice není to, co přímo zanášíme do ztrátové funkce, ale v praktických úlohách může být i tento aspekt velmi důležitý [2, 8, 33, 62].

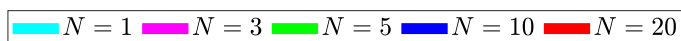
Sledujme tak nejprve, jak se bude měnit $ST_{\pm 0.1\%}$ s rostoucím uživatelsky volitelným parametrem c pro různě dlouhé prediktivní horizonty MPC- N při uvažování penalizace pomocí L1 normy v problémech 1-3. Výsledek analýzy tohoto hlediska zachycuje obr. 5.10, ze kterého je ihned patrné, že v případě L1 normy má prediktivní horizont u MPC- N



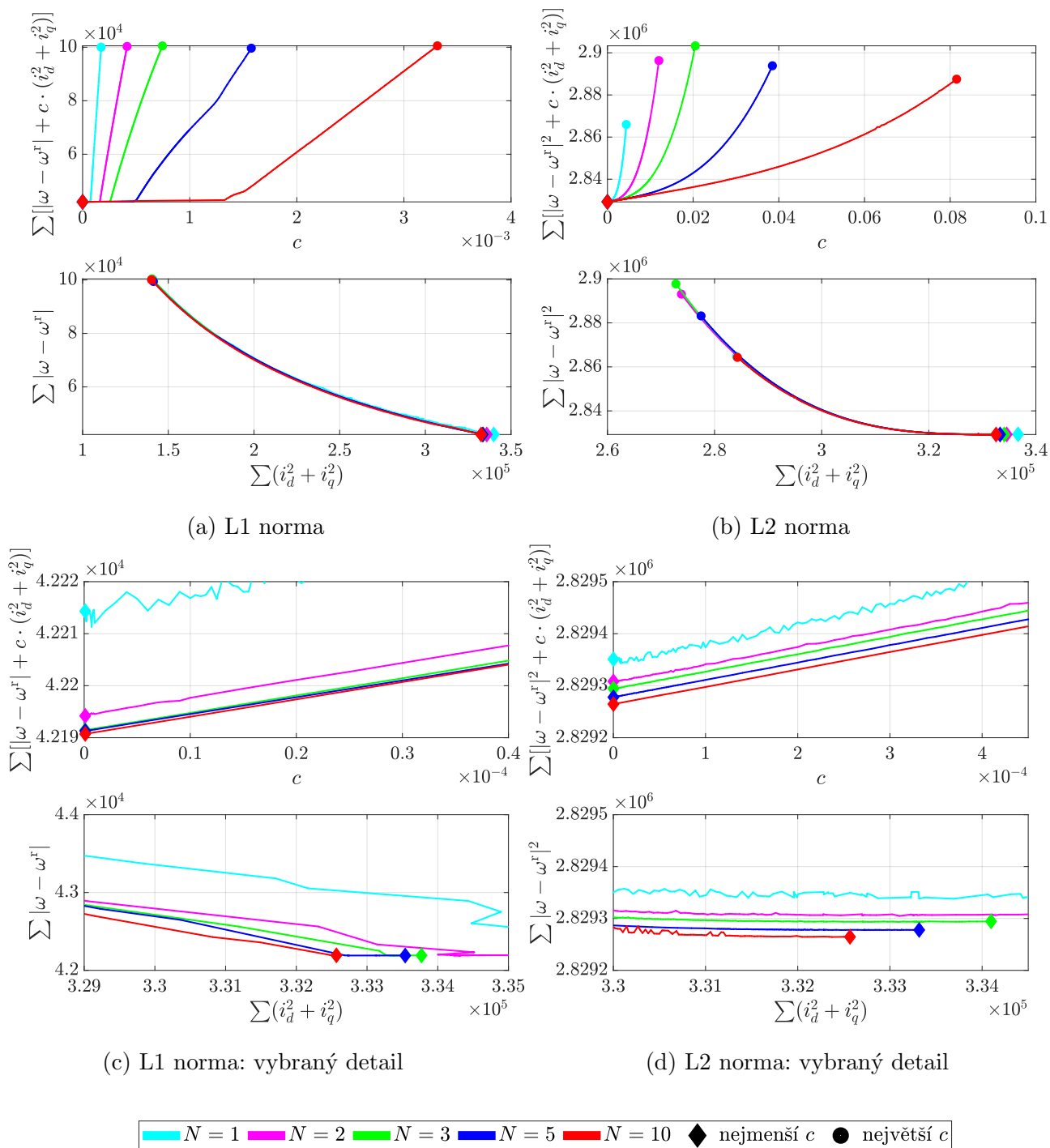
Obrázek 5.5: Problém 2 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c .



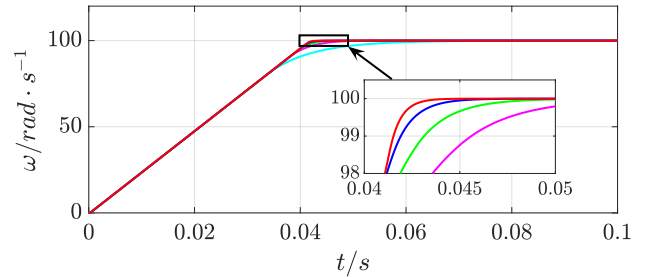
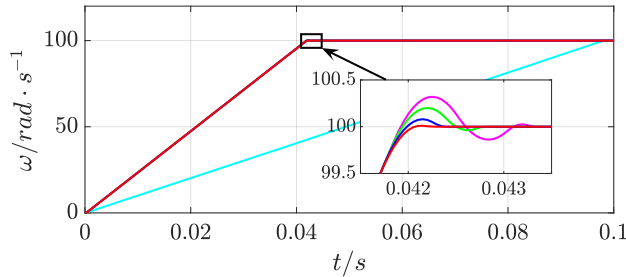
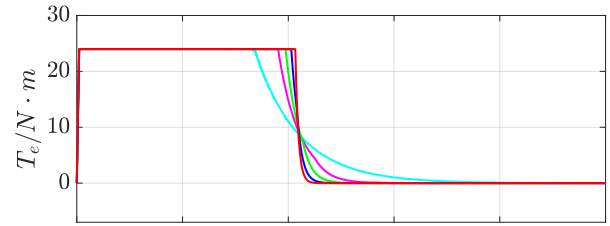
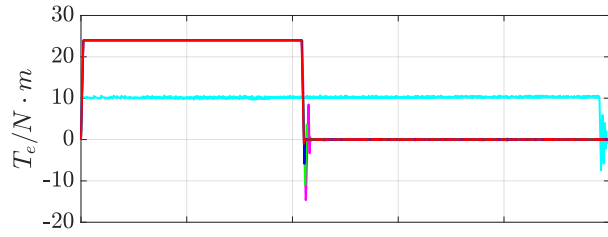
(c) L1 norma: fixní ztráty ($\sum i_K^2 = 2 \cdot 10^4 \pm 70$) (d) L2 norma: fixní ztráty ($\sum i_K^2 = 2.12 \cdot 10^4 \pm 70$)



Obrázek 5.6: Problém 2 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N v závislosti na délce prediktivního horizontu N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou.

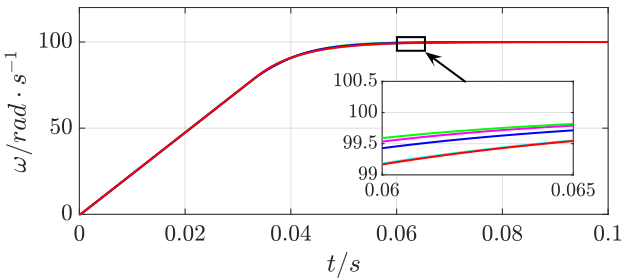
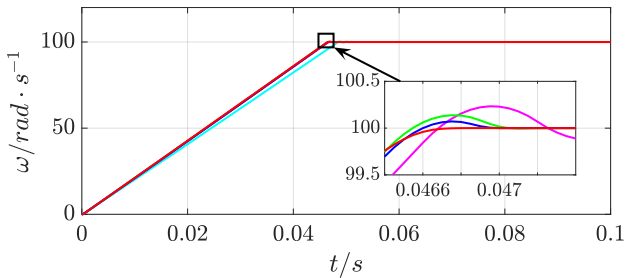
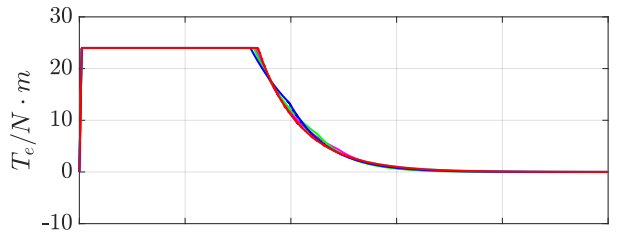
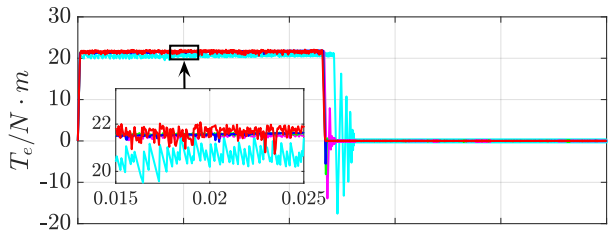


Obrázek 5.7: Problém 3 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c .

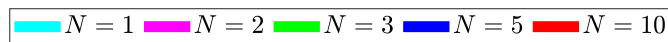


(a) L1 norma: fixní c ($c = 1.7 \cdot 10^{-4}$)

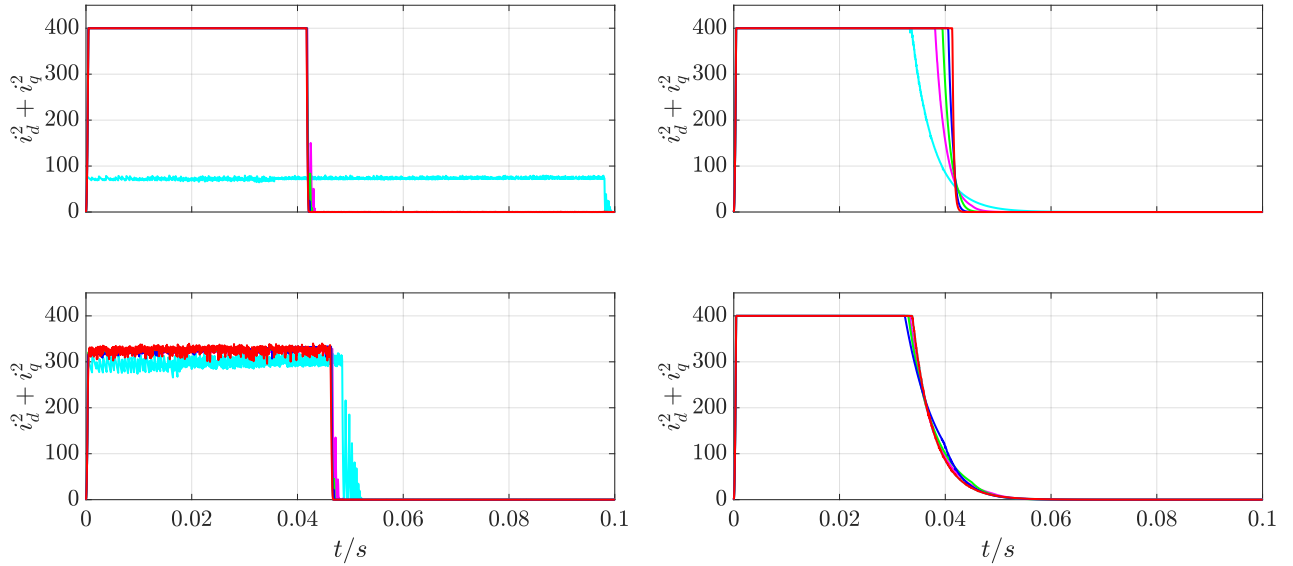
(b) L2 norma: fixní c ($c = 3 \cdot 10^{-3}$)



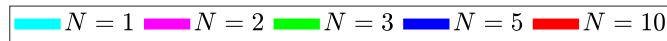
(c) L1 norma: fixní ztráty ($\sum(i_d^2 + i_q^2) = 3 \cdot 10^5 \pm 700$) (d) L2 norma: fixní ztráty ($\sum(i_d^2 + i_q^2) = 3 \cdot 10^5 \pm 700$)



Obrázek 5.8: Problém 3 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N v závislosti na délce prediktivního horizontu N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou.



(a) L1 norma: pro obr. 5.8a) (nahore), pro obr. 5.8c) (dole) (b) L2 norma: pro obr. 5.8b) (nahore), pro obr. 5.8d) (dole)

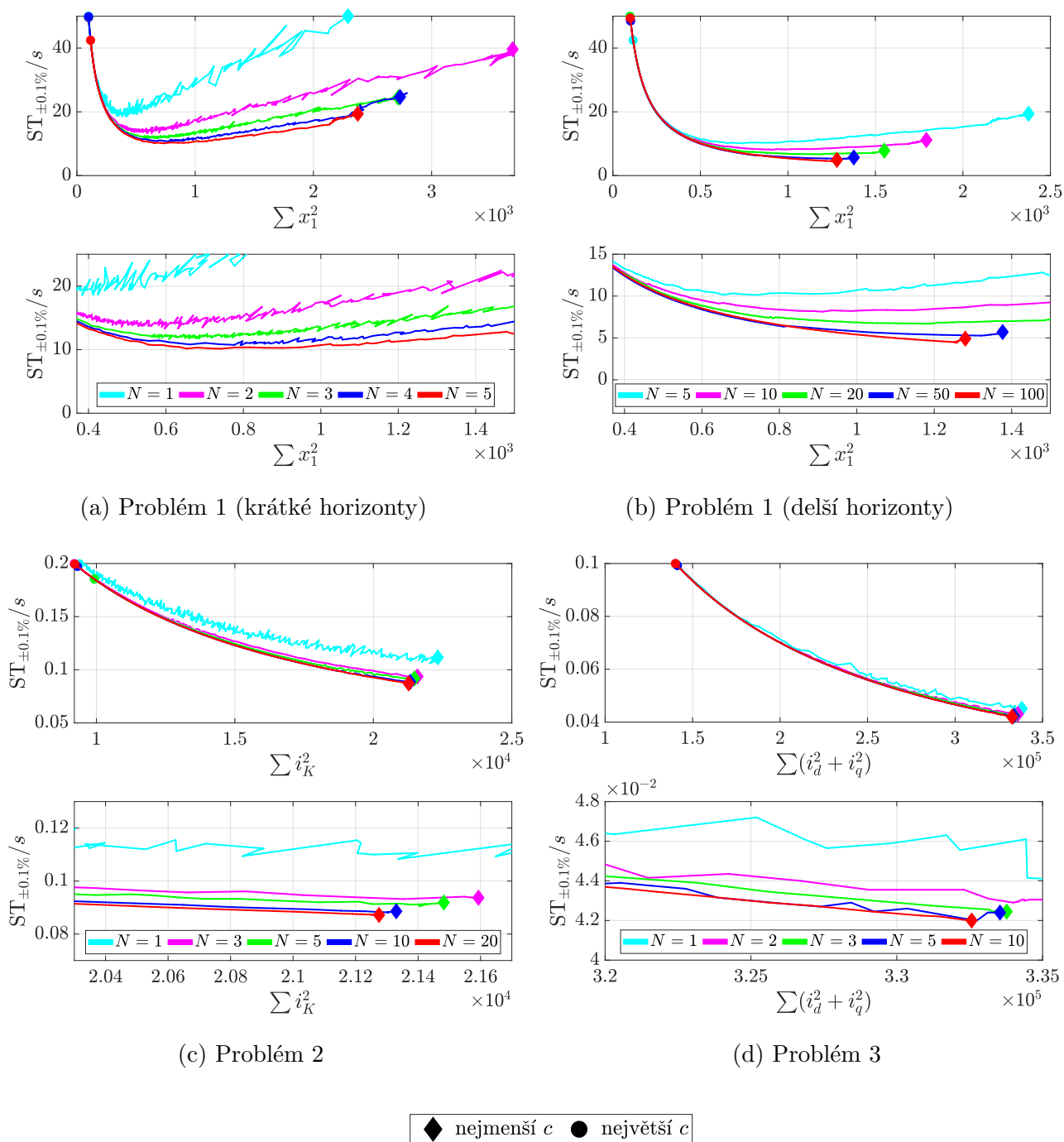


Obrázek 5.9: Problém 3 - časové průběhy Jouleových ztrát odpovídající příkladům řízených systémům na obr. 5.8.

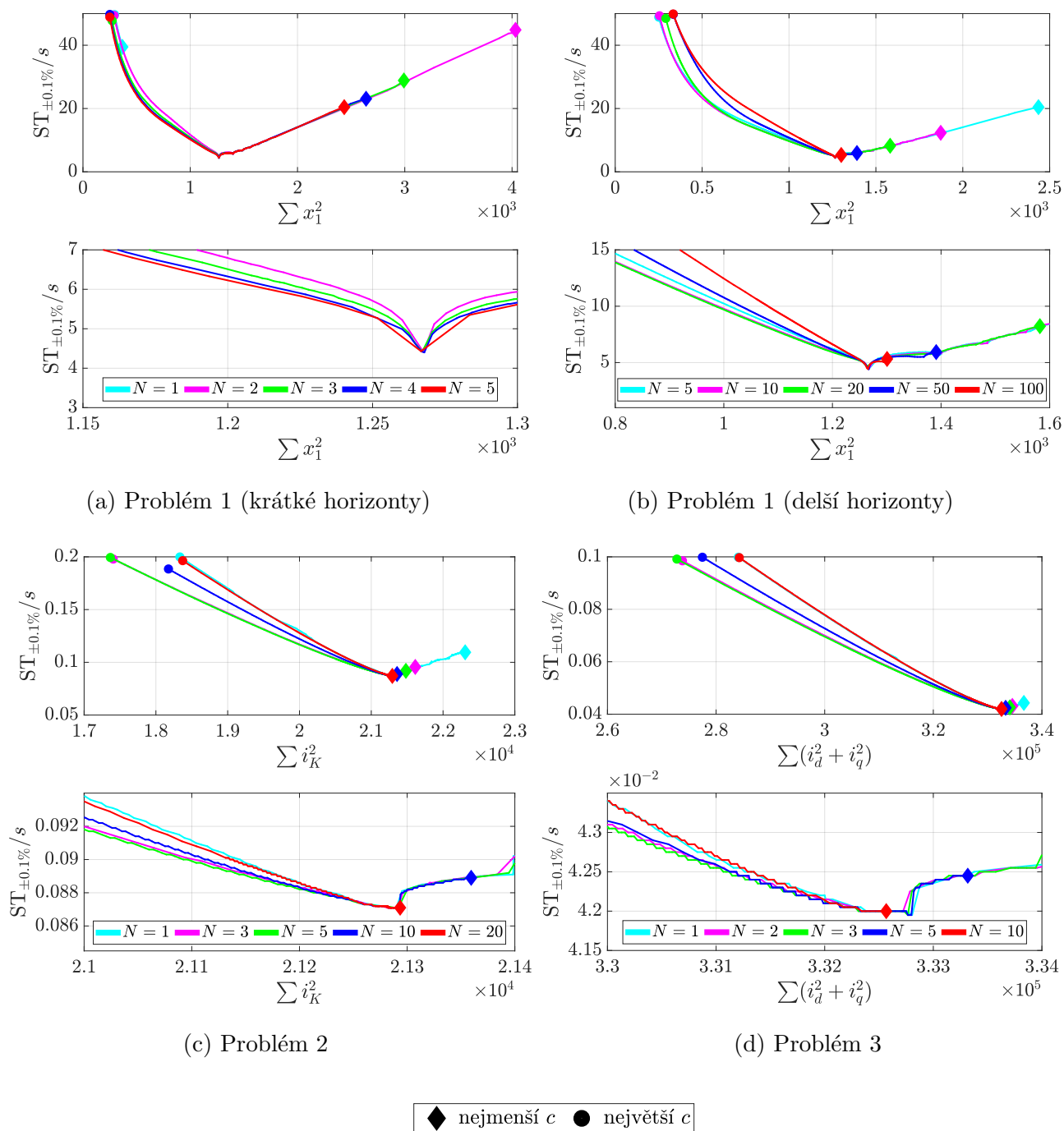
zásadní vliv na snížení ST. Pozorujeme zde, jak s delším prediktivním horizontem jednoznačně klesá dosažený poměr mezi ST a celkovými ztrátami - a to takřka na celém intervalu vytyčeném parametry řešeného problému.

Pokud budeme stejným způsobem analyzovat chování řízeného systému pomocí MPC- N s L2 normou (viz obr. 5.11), zjistíme u všech řešených problémů, že se pro kratší prediktivní horizonty dosažený ST nejprve snižuje, ale pro delší horizonty začne opět narůstat. To platí opět takřka na celých intervalech vytyčených parametry řešených problémů vyjma jednoho bodu (jedné oblasti). Tento bod je z hlediska regulace velmi zajímavý, protože se jedná o takové naladění MPC- N , při němž řízený systém dosáhne minimálního ST při minimálních celkových ztrátách.

Pro vysvětlení toho, proč se L1 a L2 norma chovají z hlediska ST tak odlišně, se postačí znovu podívat na obr. 5.6 a 5.8, kde pro fixní celkové ztráty je jasně patrný zcela jiný přístup k řízení MPC- N s L1 a L2 normou. Priorita MPC- N s L2 normou není zkrátka tolik orientována na celkovou rychlost a přesnost regulace. Ne nadarmo se L1 norma začíná uplatňovat v MPC právě pro problémy, kde ST hraje klíčovou roli, tj. návrh tzv. časově-optimálního řízení. Budeme-li se držet zavedeného značení, tak čistě hypoteticky by přirozenou volbu normy ve ztrátové funkci časově-optimálního MPC kritéria musela reprezentovat L0 norma. To by s sebou však přineslo spoustu praktických problémů, neboť by prediktivní horizont musel být většinou obrovský - ve zvoleném prediktivním horizontu by muselo MPC dohlédnout do cíle, aby se vůbec penalizace L0 normou projevila. Proto se již v literatuře objevují první ukázky toho, že L1 norma, díky své blízkosti L0 normě, je výbornou volbou v případě návrhu takového MPC, kde je stěžejním ukazatelem kvality



Obrázek 5.10: Vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : poměr celkových ztrát a získaného ST s rostoucím c .



Obrázek 5.11: Vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : poměr celkových ztrát a získaného ST s rostoucím c .

i dosažený ST [21, 72].

Abychom více podtrhli rozdíl mezi L1 a L2 normou v MPC- N , porovnejme ještě vzájemně obdržené poměry mezi celkovými ztrátami a ST. Na obr. 5.12 je toto porovnání provedeno pro vybrané prediktivní horizonty a zároveň je zde pro bližší vzhled do principu fungování diskutovaných norem ilustrován zvolený časový průběh nájezdu do požadovaného stavu odpovídající stavu x_2 D-I systému při dosažení obdobné kvality celkových ztrát. Vidíme, že pro kratší horizonty L1 norma v oblasti malých ztrát nejprve poskytuje menší ST, ale pro vyšší ztráty se situace obrací ve prospěch MPC- N s L2 normou a stejně krátkou délkou horizontu. S delším horizontem však u L1 normy pozorujeme, že poskytuje menší ST přes celý interval obdržených celkových ztrát. Naopak, jak bylo zmíněno výše, L2 norma s rostoucím prediktivním horizontem začíná takřka přes celý interval ztrát ST zvyšovat. Dlouhohorizontové MPC- N s L1 normou a MPC- N s L2 normou od prediktivního horizontu délky $N = 2$ se sbíhají v již diskutovaném bodě, kde řízený systém dosáhne minimálního ST při minimálních celkových ztrátách.

5.1.3 Výpočetní nároky

Dalším ukazatelem, který nám pomůže vzájemně porovnat jednotlivé normy z dalšího důležitého hlediska, je výpočetní složitost. Zde s výhodou využijeme toho, že problémy 1-3 jsou řešeny stejnou metodikou na stejném stroji. Zvolme tedy jako ukazatel výpočetní složitosti např. průměrný čas výpočtu optimálního akčního zásahu MPC- N v jednom časovém kroku, v jednom okamžiku vzorkování, $\varnothing t$.

V tabulce 5.4, jež zachycuje průměrné časy optimalizačního výpočtu $\varnothing t$ pro problémy 1-3 (tento průměr byl určen přes všechny provedené simulace), jasně vidíme, že L2 norma ve ztrátové funkci MPC- N je rychlejší (i při zvolené metodě optimalizace), jak se ostatně dalo očekávat. Rovněž je evidentní, že opuštění linearity systému u problému 3 vede u obou diskutovaných norem k citelnému nárůstu výpočetního času.

MPC- N	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 50$	$N = 100$
L1 norma ($\varnothing t/s$)	0.0144	0.0226	0.0304	0.0381	0.0508	0.1059	0.2620	0.3011	0.4669
L2 norma ($\varnothing t/s$)	0.0112	0.0209	0.0254	0.0359	0.0464	0.0929	0.2133	0.2839	0.4485

(a) Problém 1

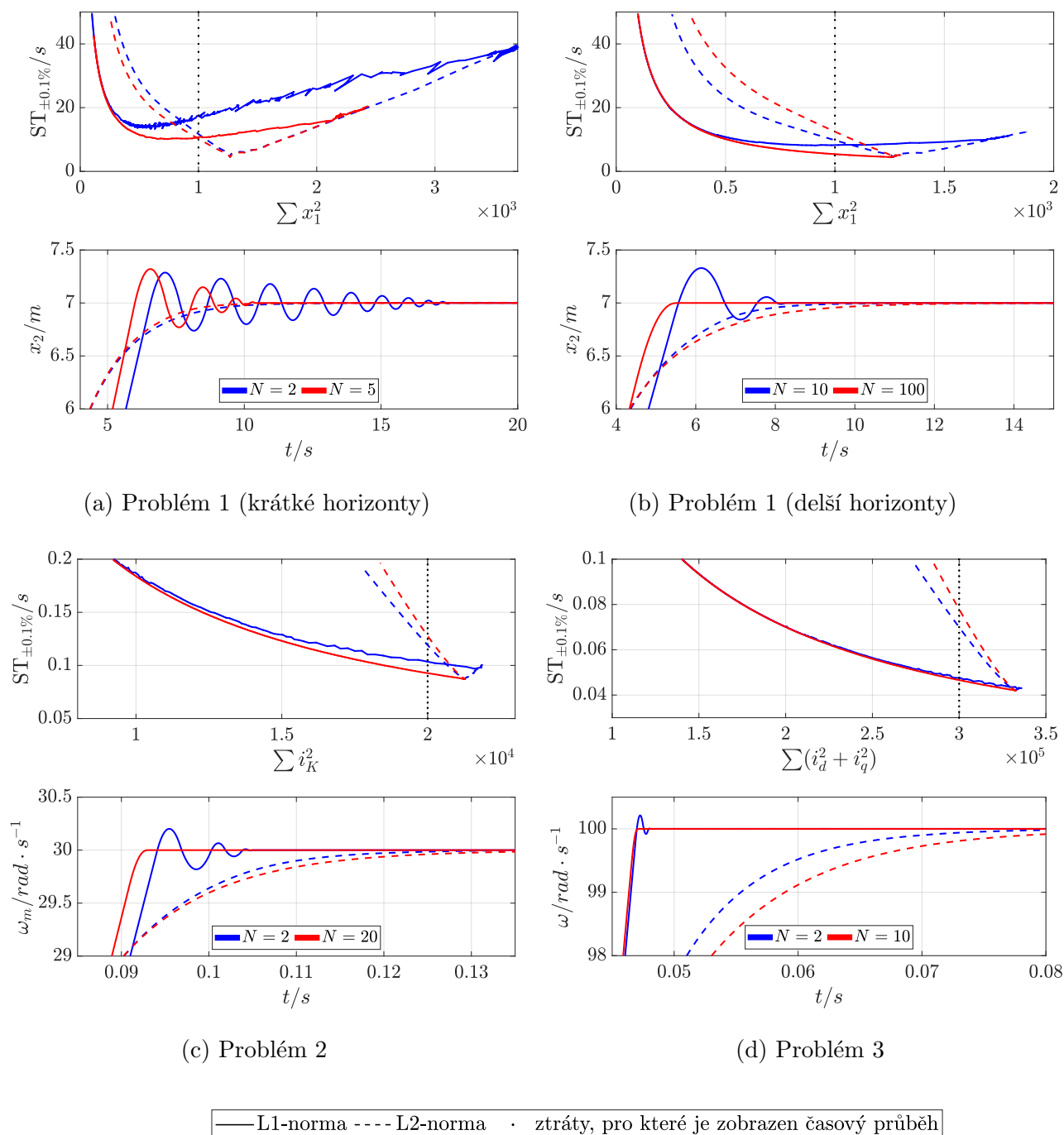
MPC- N	$N = 1$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$
L1 norma ($\varnothing t/s$)	0.0244	0.0426	0.0800	0.1771	0.3954
L2 norma ($\varnothing t/s$)	0.0177	0.0319	0.0721	0.1499	0.3875

(b) Problém 2

MPC- N	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 10$
L1 norma ($\varnothing t/s$)	0.0291	0.1276	0.2307	0.3001	0.5080
L2 norma ($\varnothing t/s$)	0.0203	0.0897	0.1600	0.2354	0.4784

(c) Problém 3

Tabulka 5.4: Průměrné časy určení optimálního akčního zásahu pro jeden okamžik vzorkování $\varnothing t$ pro MPC- N .



Obrázek 5.12: Porovnání výkonu L1 a L2 normy ve ztrátové funkci kritéria MPC- N pomocí dosaženého ST pro vybrané prediktivní horizonty N včetně ilustračních časových průběhů.

5.1.4 Shrnutí analýzy

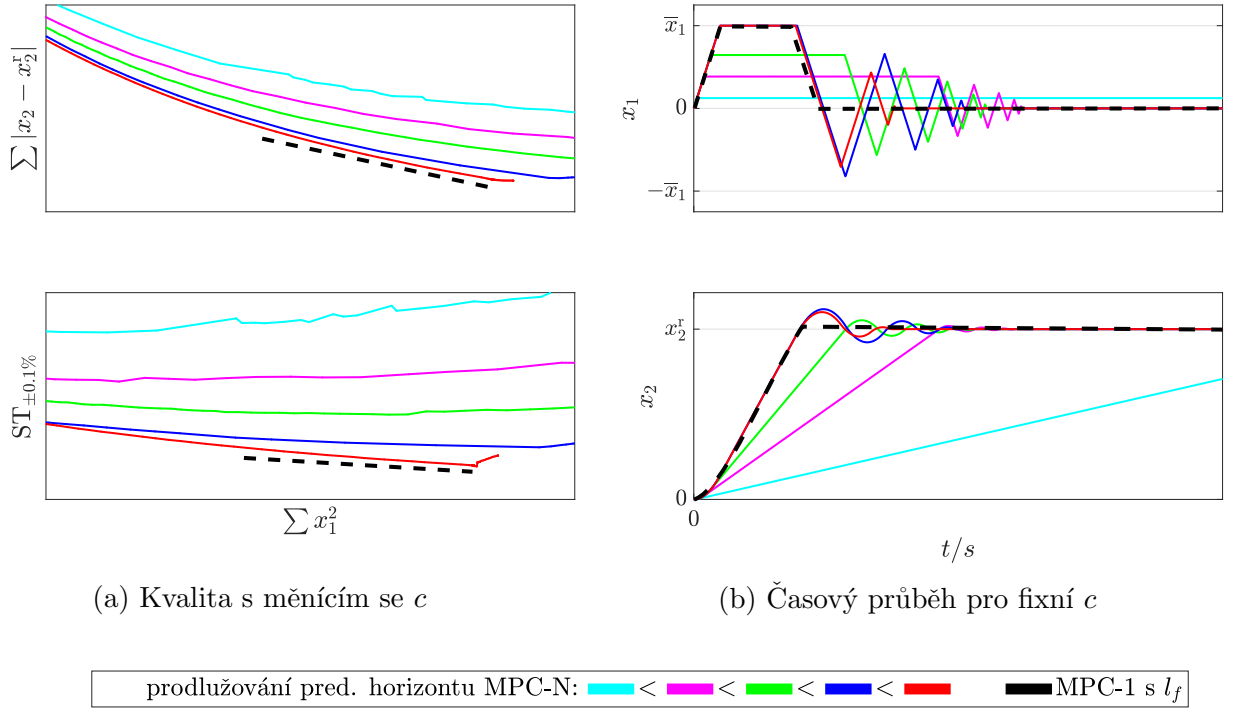
Poměrně jasný vliv délky prediktivního horizontu na kvalitu, kterou pro MPC- N s L1 normou ve ztrátové funkci kritéria u systémů s D-I dynamikou vykazuje, dává tušit, že je to právě nutnost uvažovat dlouhé horizonty, která L1 normu v pomyslné soutěži s L2 normou pro praktické aplikace jasně znevýhodňuje. Přitom, jak rovněž analýza odhalila, při volbě dlouhého prediktivního horizontu si L1 norma s L2 normou nijak nezadá - a to jak kvalitativně, tak numericky. Navíc se ukázalo, že z určitých hledisek, jako je např. co nejmenší ST v SAŘ, disponuje L1 norma výhodnějšími vlastnostmi.

5.2 Návrh terminální ztrátové funkce

Pokusme se nyní obejít nutnost volby dlouhého prediktivního horizontu MPC- N s L1 normou pomocí návrhu adekvátní terminální ztrátové funkce MPC kritéria, jež by dodala chybějící dlouhohorizontovou informaci v případě, že budeme uvažovat velmi krátký prediktivní horizont (s ohledem na to, jakým systémům je věnována pozornost, předpokládejme maximální délku prediktivního horizontu pouze jako $N = 1$). Proto nejprve na základě výše uvedené analýzy formulujme, jaké vlastnosti by tato terminální ztrátová funkce aproximující dlouhohorizontovou informaci měla, resp. MPC-1 s touto terminální ztrátovou funkcí l_f mělo, mít:

1. Pro libovolnou volbu uživatelsky volitelného parametru c (v nějakém smysluplném intervalu) by mělo MPC-1 s terminální ztrátovou funkcí l_f
 - a) poskytnout menší poměr celkových ztrát a celkové odchylky penalizované L1 normou než MPC- N s krátkými horizonty (situace je pro představu modelově ilustrována na obr. 5.13a)),
 - b) poskytnout menší poměr celkových ztrát a ST než MPC- N s krátkými horizonty (situace je pro představu modelově ilustrována na obr. 5.13a)).
 - c) vést celkově k rychlejšímu ustálení (menšímu ST) než MPC- N s krátkými horizonty (situace je pro představu modelově ilustrována na obr. 5.13b)).
2. MPC-1 s terminální ztrátovou funkcí l_f by mělo být co nejméně výpočetně náročné, tj. průměrný čas výpočtu akčního zásahu Δt s ohledem na zvolený způsob řešení by se zde měl pohybovat někde na úrovni MPC-2 s L2 normou, kterou vzhledem k jejím vlastnostem, lze považovat za blízkého konkurenta - ať už ve smyslu kvalitativních měřítek, tak právě numerických vlastností.

Z ryze teoretického hlediska je to, co by mělo terminální ztrátovou funkci l_f představovat, pokud požadujeme, aby vystihovala chybějící dlouhohorizontovou informaci v MPC- N , zřejmé. V rámci kapitoly 2.4 věnující se DP byl představen pohled na DP jako optimalizační prostředek v MPC, kde Bellmanova optimalizační rekurze (2.29) startuje právě z terminální ztráty. V iniciální rovnici Bellmanovy rekurze (2.29c) jsme však předpokládali znalost terminální ztrátové funkce l_f (mohlo se jednat o libovolnou ztrátovou funkci penalizující koncový stav). Pokud tedy nyní žádáme, aby terminální ztrátová funkce reprezentovala dlouhý prediktivní horizont $N \rightarrow \infty$, musí pro terminální



Obrázek 5.13: Ilustrace požadovaného chování systému s D-I dynamikou řízeného MPC-1 s terminální ztrátovou funkcí l_f , jejíž podobu hledáme.

ztrátovou funkci platit, že pro ni Bellmanova optimalizační rekurze startuje v nekonečnu a končí právě tam, kde končí prediktivní horizont, tj. v čase $N + k$. Jinými slovy

$$l_f(\mathbf{x}_{N+k}) \triangleq V_{N+k}^\infty(\mathbf{x}_{N+k}). \quad (5.1)$$

Problém ovšem je, jak takovou funkci (5.1) získat. V [Feh5] byl navržen aproximativní způsob ke stanovení této funkce pro PMSM. Využijme tedy opět analogie mezi systémy s D-I dynamikou a zobecněme pro ně přístup uvedený v [Feh5].

Pro stanovení terminální ztrátové funkce l_f tak nejprve předpokládejme nekonečný prediktivní horizont $N \rightarrow \infty$ a rozdělme MPC kritérium na dvě části

$$J_k^\infty(\mathbf{x}_k, \{\mathbf{u}_j\}_{j=k}^\infty) = \underbrace{\sum_{i=k}^{N+k-1} l(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}_{\text{krátký horizont (} N \text{ predikcí)}} + \underbrace{\sum_{i=N+k}^{\infty} l(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)}_{\text{dlouhý horizont}}.$$

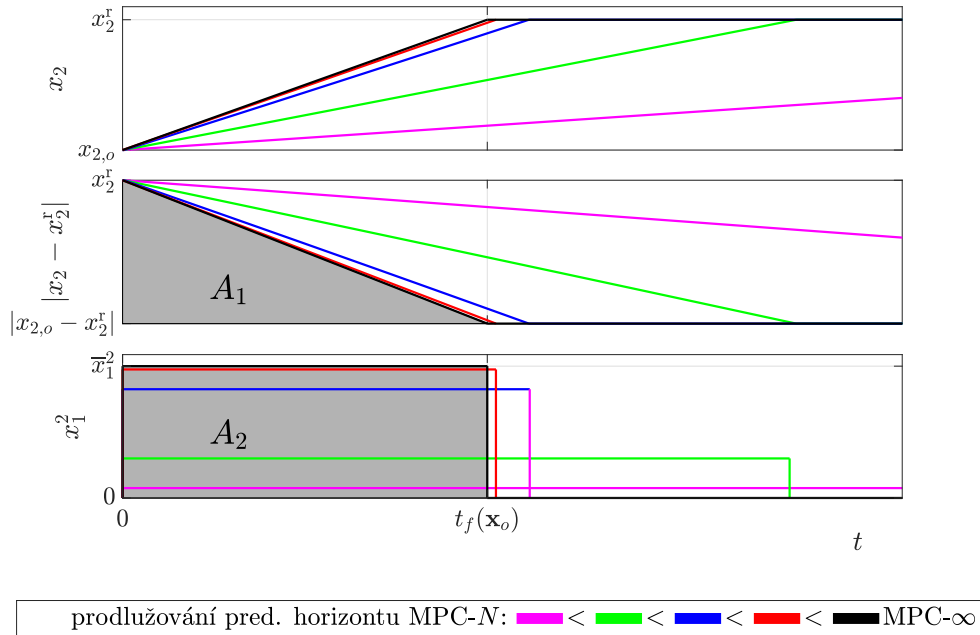
Vidíme, že terminální ztrátová funkce odrážející dlouhohorizontovou informaci by měla vyjadřovat součet ztrátových funkcí počínaje časem $N + k$ - samozřejmě za předpokladu, že bude použita optimální sekvence akčních zásahů, kterou však neznáme. Dlouhohorizontovou informaci je tudíž nutné získat aproximativně nějakou úvahou. Ta bude spočívat v předpokladu, že známe minimální čas, za který dosáhneme cílového stavu systému s D-I dynamikou z aktuálního stavu, v němž se systém nachází. Tento minimální čas označme dále jako t_f .

Ze simulačních experimentů provedených v rámci analýzy navíc víme, jak se zhruba chová systém s D-I dynamikou řízený MPC- N s L1 normou a jak se jeho chování

mění s přibývajícím prediktivním horizontem. Nachází-li se systém v nějakém obecném stavu \mathbf{x}_o , lze časové průběhy MPC- N s L1 normou s přibývajícím prediktivním horizontem vystihnout tak, jak ilustruje obr. 5.14, tj. předpokládáme, že s rostoucím prediktivním horizontem MPC- N dojde k ustálení řízeného systému právě za čas t_f . Terminální ztrátová funkce zastupující dlouhý horizont by tak měla odpovídat adekvátně váženému (uživatelsky volitelným parametrem c) součtu ploch pod odchylkou od referenčního stavu penalizovanou L1 normou A_1 a pod ztrátami A_2 . Ty lze za předpokladu znalosti t_f v uvažovaném stavu \mathbf{x}_o a krátké periodě vzorkování vyjádřit jako

$$A_1 = \int_0^{t_f(\mathbf{x}_o)} |x_2 - x_2^r| dt, \quad (5.2a)$$

$$A_2 = \int_0^{t_f(\mathbf{x}_o)} x_1^2 dt. \quad (5.2b)$$



Obrázek 5.14: Předpokládané časové průběhy systému s D-I dynamikou v aktuálním časovém okamžiku k s ohledem na délku prediktivního horizontu.

Aproximujme dále časové průběhy ztrát a nájezdu do referenčního stavu odpovídající MPC- N s L1 normou a s velmi dlouhým prediktivním horizontem tak, jak je ukázáno na obr. 5.14. Předpokládejme tak, že ztráty řízeného systému s D-I dynamikou se pro velmi dlouhý horizont drží po celou dobu svého maxima a po uplynutí t_f klesnou na nulu a že nájezd na referenční stav odpovídající stavu x_2 D-I systému lze vystihnout lineární funkcí

$$x_{2,t} = \frac{(x_2^r - x_{2,o})t}{t_f(\mathbf{x}_o)} + x_{2,o}. \quad (5.3)$$

Potom kombinací vztahů (5.2) a (5.3) získáváme terminální ztrátovou funkci ve tvaru

$$l_f(\mathbf{x}_o) = \frac{1}{T_s} (A_1 + c \cdot A_2) = \left(\frac{|x_{2,o} - x_2^r|}{2} + c \cdot \bar{x}_1^2 \right) \frac{t_f(\mathbf{x}_o)}{T_s}, \quad (5.4)$$

kde čas t_f je nutné dělit periodou vzorkování T_s k získání odpovídajícího poměru mezi krátkým a dlouhým horizontem MPC kritéria, které pracuje přirozeně ve vzorcích. Znovu upozorníme, že navržená terminální ztrátová funkce (5.4) je pouhou aproximací skutečného koncového úseku Bellmanovy funkce (5.1), a proto, aby bylo možné tuto funkci vyčíslit, je nutné ještě získat minimální čas, za který dosáhneme referenčního stavu, t_f .

5.2.1 Aproximace času ustálení (time-to-go funkce dvojitého integrátoru)

Zabývejme se nyní problémem nalezení minimálního času, za který dosáhneme referenčního stavu z libovolného stavu fázové roviny, t_f přímo pro D-I systém. Funkci poskytující tento čas označujeme dále angl. názvem time-to-go (T2G) funkce. Matematicky lze T2G funkci D-I systému formulovat jako

$$t_f^{\text{D-I}}(\mathbf{x}_0) = \min_{u_{(0,\infty)}} T^{\text{D-I}}, \quad (5.5)$$

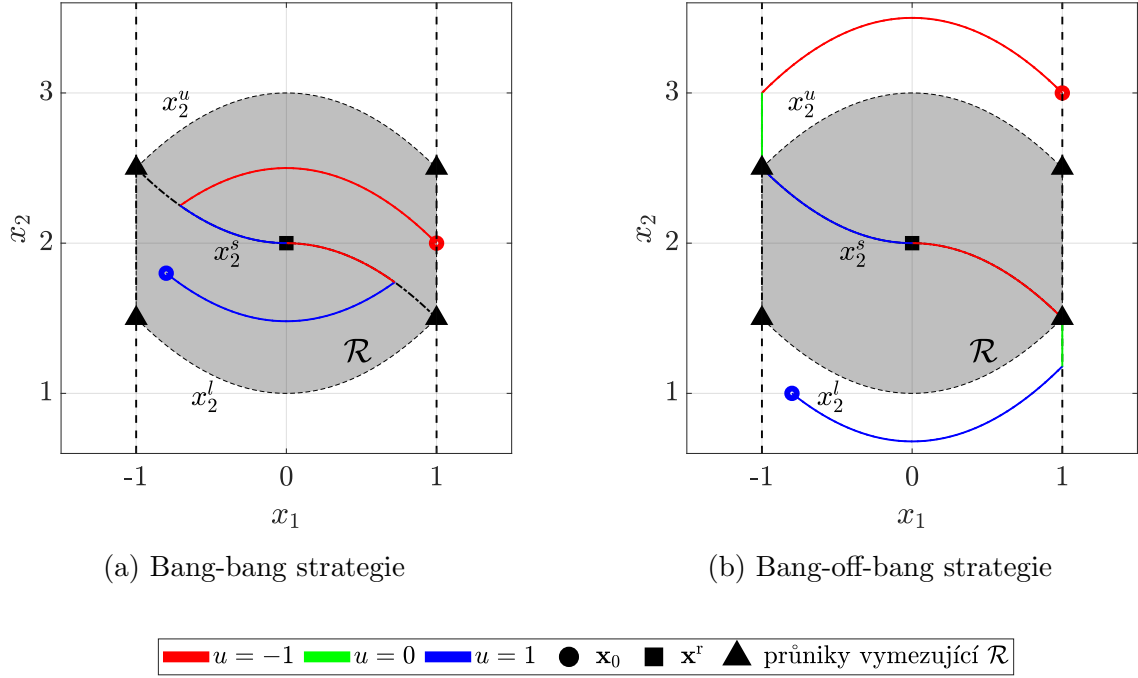
s.t. (3.1), (3.2)

kde $t_f^{\text{D-I}}$ je T2G funkce D-I systému a $T^{\text{D-I}}$ označuje čas, ve kterém je dosažen referenční stav D-I systému $[x_1^r, x_2^r]^T$ ze stavu $[x_{1,0}, x_{2,0}]^T$. Otázkou je, jak takovou T2G funkci najít, tj. jak lze přistoupit k řešení problému (5.5).

Např. v [25] bylo k problému nalezení T2G funkce D-I systému (5.5) přistoupeno aproximativně, kdy jak čas, tak i prostor řízení byly nejprve diskretizovány, a poté se přistoupilo k řešení problému (5.5) „bellmanovskou“ cestou, tj. z referenčního stavu se zpětně v čase určily stavy, ze kterých je možné dostat se do stavu referenčního za periodu vzorkování využitím uvažovaných akčních zásahů. Stejný postup se aplikoval na tyto odvozené stavy do té doby, dokud nebyl získán nějaký ucelený pohled na tvar T2G funkce. Ta se poté nahradila spojitou funkcí, která zhruba odpovídala průběhu této původní nespojitě T2G funkce, neboť pro další využití hledané T2G funkce je samozřejmě důležité, aby funkce byla spojitá nad stavovým prostorem. Navržená aproximativní spojitá funkce je však závislá hned na několika uživatelsky volených parametrech, což snadnost jejího pozdějšího využití zřetelně zmenšuje.

V [Feh1] bylo představeno alternativní řešení, kdy pro určení T2G funkce je nejprve analyticky určena optimální strategie řízení zajišťující minimální čas regulace D-I systému (3.1) pomocí Pontrjaginova principu minima [64]. Tato strategie může být pro uvažovaný problém s omezeními dvojího typu. Pokud nehrozí, že stav vlivem řízení překročí stavové omezení, pak se jedná o strategii typu bang-bang, kdy aplikujeme vždy jednu z mezních hodnot intervalu řízení. Pokud se však vlivem řízení dostaneme na stavové omezení, aplikujeme strategii bang-off-bang, kdy v případě, že jsme dosáhli právě zmíněného stavového omezení, aplikujeme nulové řízení.

Pro lepší pochopení se opět nabízí paralela s jednoosým vozíkem. Řekněme, že se chceme s vozíkem zaparkovat co možná nejrychleji v nějakém referenčním bodě, přičemž maximální rychlost je omezena. Pro řešení tohoto úkolu je logické začít zrychlovat co možná nejvíce k referenčnímu a v určitém okamžiku před ním co nejvíce zpomalovat, abychom zabrzdlili přesně v něm. Pokud je od nás referenční bod dostatečně vzdálen na to, abychom zrychlováním došli na omezení rychlosti, musíme v okamžiku dosažení tohoto omezení přestat zrychlovat a pouze držet rychlost vozíku na mezní rychlosti, dokud opět nedosáhneme bodu, od kterého začneme opět co nejvíce zpomalovat.


 Obrázek 5.15: Časově optimální strategie řízení D-I systému ($K_1 = K_2 = \bar{x}_1 = 1$).

Z uvedené paralely je zřejmé, že jak strategie bang-bang, tak i bang-off-bang vyžadují specifikaci místa, kde dochází ke změně akčního zásahu z jednoho extrémů resp. z nulového řízení na opačný extrém řízení. Toto místo lze ve stavovém prostoru D-I systému charakterizovat křivkou, kterou označujeme přepínací křivka. Ta má pro uvažovanou úlohu časově optimálního řízení D-I systému (3.1) s omezeními (3.2) podobu [8],[Feh1]

$$x_2^s = \frac{K_2}{2K_1} \operatorname{sgn}(-x_1 + x_1^r) (x_1^2 - (x_1^r)^2) + x_2^r. \quad (5.6)$$

Pokud stav D-I systému leží na přepínací křivce (5.6) a splňuje stavové omezení, pak je zřejmé, že k přepnutí nedojde a bude aplikován pouze jedna z mezních hodnot intervalu řízení a to v závislosti na poloze x_1 a x_1^r . Pokud stav na přepínací křivce neleží, je aplikován akční zásah s minimální velikostí, v našem případě $u = -1$, dokud se stav nachází nad přepínací křivkou, a naopak zásah s maximální velikostí, $u = 1$, dokud se stav nachází pod přepínací křivkou. V okamžiku dosažení přepínací křivky se tyto mezní hodnoty akčních zásahů prohodí. Popsaná strategie je ilustrována na obr. 5.15a). Zmiňme ještě, že pokud je aplikován minimální nebo maximální přípustný akční zásah, pak trajektorie stavu D-I systému probíhá ve fázové rovině po parabolických křivkách

$$x_{2,t} = \begin{cases} -\frac{K_2}{2K_1} (x_{1,t}^2 - x_{1,0}^2) + x_{2,0}, & \text{pokud } u_t = -1, \\ \frac{K_2}{2K_1} (x_{1,t}^2 - x_{1,0}^2) + x_{2,0}, & \text{pokud } u_t = 1, \end{cases} \quad (5.7)$$

kde $[x_{1,0}, x_{2,0}]^T$ je počáteční stav.

Kvůli stavovému omezení (3.2a) nejde však ze všech stavů dosáhnout přepínací křivky výše uvedenou strategií bang-bang. Z průniku přepínací křivky a stavového omezení s ohledem na stavové trajektorie (5.7) (na obr. 5.15 ilustrováno trojúhelníky) je možné jed-

noduše určit podprostor stavů D-I systému \mathcal{R} takový, pro který je bang-bang strategie řízení dostačující (na obr. 5.15 vyznačen šedě). Tento podprostor lze vyjádřit jako

$$\mathcal{R} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle \wedge x_2^l \leq x_2 \leq x_2^u \right\},$$

kde hraniční křivky podprostoru jsou dány jako

$$\begin{aligned} x_2^l &= \frac{K_2}{2K_1} (x_1^2 + (x_1^r)^2) - \frac{K_2}{K_1} \bar{x}_1^2 + x_2^r, \\ x_2^u &= -\frac{K_2}{2K_1} (x_1^2 + (x_1^r)^2) + \frac{K_2}{K_1} \bar{x}_1^2 + x_2^r. \end{aligned}$$

Pro stavy ležící mimo podprostor \mathcal{R} musíme tedy přistoupit k bang-off-bang strategii, kdy se minimálním nebo maximálním přípustným řízením snažíme dosáhnout minimální nebo maximální hodnoty stavového omezení, na které se držíme nulovým akčním zásahem, dokud nedosáhneme přepínací křivky. Na té aplikujeme opět opačný mezní zásah. Bang-off-bang strategie řízení je pro ilustraci znázorněna na obr. 5.15b).

Kompletní časově optimální strategii řízení u^* pro D-I systém (3.1) s omezeními (3.2) je možné vyjádřit jako [8, 48, 73] (vztah je uveden s dovysvětlujícími komentáři)

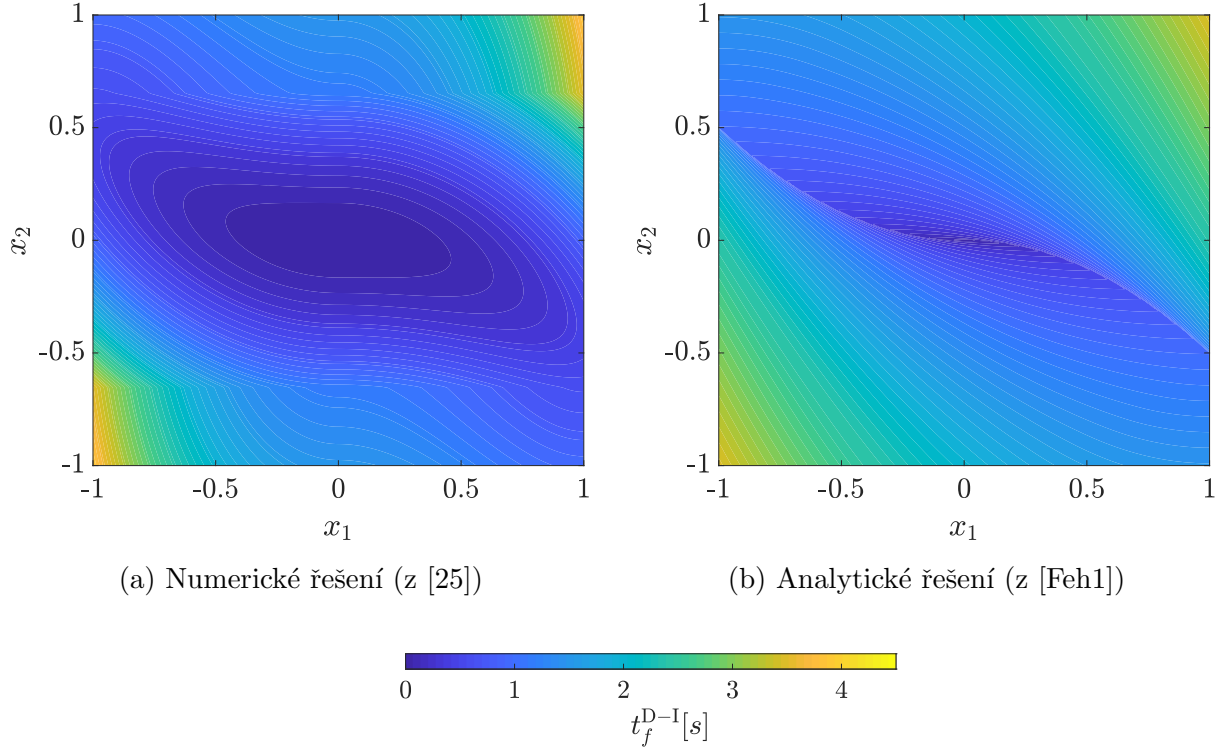
$$u_t^* = \begin{cases} 1, & \text{pokud } \underbrace{[x_1 \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle \wedge x_2 < x_2^s]}_{\text{pod přepínací křivkou}} \vee \underbrace{[x_1 \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle \wedge x_1 < x_1^r \wedge x_2 = |x_2^s|]}_{\text{na odpovídající části přepínací křivky}} \\ 0, & \text{pokud } \underbrace{(x_1 = -\bar{x}_1 \wedge x_2 \neq |x_2^s|)}_{\text{na dolním omezení}} \vee \underbrace{(x_1 = x_1^r \wedge x_2 = x_2^r)}_{\text{v referenčním stavu}} \\ & \vee \underbrace{(x_1 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \neq -|x_2^s|)}_{\text{na horním omezení}} \\ -1, & \text{pokud } \underbrace{[x_1 \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle \wedge x_2 > x_2^s]}_{\text{nad přepínací křivkou}} \vee \underbrace{[x_1 \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle \wedge x_1 > x_1^r \wedge x_2 = -|x_2^s|]}_{\text{na odpovídající části přepínací křivky}}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Máme-li k dispozici časově optimální strategii řízení zajišťující dosažení referenčního stavu v minimálním čase, je možné přikročit k určení T2G funkce ve smyslu (5.5). Tu odvodíme snadno přes výpočet časů přepnutí (viz příloha). Výsledný čas po dosažení požadované hodnoty je pak dán součtem těchto časů. Získáme tak následující T2G funkci D-I systému [Feh1]

$$t_f^{\text{D-I}}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{cases} \frac{-K_2(x_1 + x_1^r) + 2\sqrt{K_2^2 x_1^2 - K_1 K_2 \left(\frac{K_2}{2K_1} (x_1^2 - (x_1^r)^2) + x_2 - x_2^r \right)}}{K_1 K_2}, & \text{pokud } A \wedge (x_2 \leq x_2^s) \wedge (x_2 \geq x_2^l), & (5.10a) \\ \frac{\bar{x}_1 - x_1 - x_1^r}{K_1} + \frac{x_1^2 + (x_1^r)^2}{2K_1 \bar{x}_1} + \frac{x_2^r - x_2}{K_2 \bar{x}_1}, & \text{pokud } A \wedge (x_2 \leq x_2^s) \wedge (x_2 < x_2^l), & (5.10b) \\ \frac{K_2(x_1 + x_1^r) + 2\sqrt{K_2^2 x_1^2 + K_1 K_2 \left(\frac{K_2}{2K_1} (-x_1^2 + (x_1^r)^2) + x_2 - x_2^r \right)}}{K_1 K_2}, & \text{pokud } A \wedge (x_2 > x_2^s) \wedge (x_2 \leq x_2^u), & (5.10c) \\ \frac{\bar{x}_1 + x_1 + x_1^r}{K_1} + \frac{x_1^2 + (x_1^r)^2}{2K_1 \bar{x}_1} + \frac{x_2 - x_2^r}{K_2 \bar{x}_1}, & \text{pokud } A \wedge (x_2 > x_2^s) \wedge (x_2 > x_2^u), & (5.10d) \\ p, & \text{jinak,} & (5.10e) \end{cases}$$

kde A reprezentuje podmínku $x_1^r \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle \wedge x_2^r \in \mathbb{R} \wedge x_1 \in \langle -\bar{x}_1, \bar{x}_1 \rangle$ a parametr $p \in \mathbb{R}_{>0}$ je konstanta penalizující překročení stavového omezení. Předpokládejme dále s ohledem na

pozdější využití volbu $p = \infty$, tzn. tvrdé omezení. Příklad analyticky odvozené T2G funkce D-I systému v porovnání s tím, jaký výsledek poskytne numerické řešení diskutované v [25], je pak ilustrován na obr. 5.16.



Obrázek 5.16: T2G funkce D-I systému ($K_1 = K_2 = \bar{x}_1 = 1$ a $x_1^r = x_2^r = 0$).

Analyticky odvozenou T2G funkcí D-I systému $t_f^{\text{D-I}}$ lze aproximovat skutečný čas ustálení t_f v terminální ztrátové funkci (5.4), a to v případě, že tato terminální ztrátová funkce bude využita přímo pro MPC D-I systému. Všimněme si, že analyticky odvozená T2G funkce, resp. terminální ztrátová funkce, která ji využívá, nezanáší do úlohy další parametry, jež by musel uživatel dále ladit. V MPC kritériu se i po jejím přičtení objevuje pouze jediný uživatelsky volitelný parametr c určující penalizaci ztrát s ohledem na kvalitu řízení.

5.2.2 Aproximace času ustálení elektromotorů

V případě dalších zde diskutovaných systémů lze tvrdit, že získat přímo pro ně T2G funkci by bylo nesmírně komplikované. Navíc, jak víme, zjednodušená numerická řešení vedou obvykle na funkce s větším množstvím uživatelsky volitelných parametrů, což případný MPC návrh značně degraduje při porovnání s jinými metodami automatického řízení. Proto u elektromotorů s výhodou využijeme toho, že je lze, jak bylo ukázáno, radit do třídy systémů s D-I dynamikou.

Namísto přímého odvození T2G funkce se tak u elektromotorů spokojíme s tím, že skutečný čas ustálení t_f v terminální ztrátové funkci (5.4) u nich bude aproximován T2G funkcí D-I systému dávající do souvislosti elektrický moment motoru a úhlovou rychlost, tj.

dvě veličiny elektromotorů, jejichž vzájemný vztah lze aproximativně popsat D-I dynamikou a to jako $x_1 \approx Te$ a $x_2 \approx \omega$. Motivování úvahami z [25] pak můžeme časové konstanty D-I modelu dynamiky mezi momentem a rychlostí odvodit přímo ze stavového modelu a matematického popisu pro elektrický moment příslušného elektromotoru. V případě hypotetického stejnosměrného elektromotoru tak získáváme ze vztahů (3.3b) a (3.3e) za předpokladu, že časová derivace proudu závisí pouze na vstupním napětí a že pro zátěžový moment platí $T_L = 0$, následující aproximace časových konstant

$$K_1 \approx \frac{K_e U_{K,\max}}{L_K}, \quad (5.11a)$$

$$K_2 \approx \frac{1}{J_m} \quad (5.11b)$$

a pro PMSM ze vztahů (3.7b) a (3.7f) za obdobných předpokladů včetně předpokladu $L_d \approx L_q$ následující aproximace časových konstant [25],[Feh1, Feh2]

$$K_1 \approx \frac{k_p p_p \Psi_{PM} U_{\max}}{L_q}, \quad (5.12a)$$

$$K_2 \approx \frac{p_p}{J}. \quad (5.12b)$$

Dále je třeba vyjádřit omezení na elektrický moment T_e , tj. \bar{T}_e . U hypotetického stejnosměrného motoru je toto omezení zřejmé a je dáno kombinací vztahu pro elektrický moment (3.3e) a proudového omezení (3.4a) jako

$$\bar{x}_1 \approx \bar{T}_e \triangleq K_e \cdot I_{K,\max} \quad (5.13)$$

Pro PMSM je pak v [Feh1, Feh2] toto omezení odvozeno z omezení na proudy s předpokladem znalosti aktuálního proudu jako

$$\bar{x}_{1,t} \approx \bar{T}_{e,t} \triangleq k_p p_p \left[(L_d - L_q) i_{d,t} \sqrt{I_{\max}^2 - i_{d,t}^2} + \Psi_{PM} \sqrt{I_{\max}^2 - i_{d,t}^2} \right]. \quad (5.14)$$

5.2.3 Terminální ztrátová funkce v kritériu prediktivního řízení

Nyní již máme k dispozici vše pro to, abychom mohli zformulovat MPC kritérium s navrženou terminální ztrátovou funkcí (5.4) pro systémy s D-I dynamikou a omezeními. Vzhledem k již několikrát zmíněnému požadavku na co nejrychlejší generování akčního zásahu, omezme se při této formulaci na velmi krátký prediktivní horizont $N = 1$. Potom je příslušné kritérium obecně dáno jako

$$J_k^{k+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = l(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + l_f(\mathbf{x}_{k+1}), \quad (5.15)$$

kde ztrátová a terminální ztrátová funkce s aproximací času ustálení pomocí T2G funkce pro D-I systém s omezeními jsou voleny s ohledem na řízený systém. Pro námi uvažované příklady tak MPC kritérium (5.15) nabývá následující podoby:

- dvojitý integrátor:

$$J_k^{k+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = |x_{2,k+1} - x_2^r| + c \cdot x_{1,k+1}^2$$

$$+ \left(\frac{|x_{2,k+1} - x_2^r|}{2} + c \cdot \bar{x}_1^2 \right) \frac{t_f^{\text{D-I}} \left(\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} \right)}{T_s}, \quad (5.16)$$

kde časové konstanty, omezení a referenční stav pro T2G volíme přirozeně přímo ze systému (3.1) s ohledem na omezení (3.2) popř. požadavků na chování uzavřeného systému,

- stejnosměrný motor:

$$J_k^{k+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = |\omega_{m,k+1} - \omega^r| + c \cdot i_{K,k+1}^2 + \left(\frac{|\omega_{m,k+1} - \omega^r|}{2} + c \cdot I_{K,\max}^2 \right) \frac{t_f^{\text{D-I}} \left(\begin{bmatrix} T_{e,k+1} \\ \omega_{m,k+1} \end{bmatrix} \right)}{T_s},$$

kde časové konstanty, omezení a referenční stav pro T2G volíme dle vztahů (5.11) a (5.13) a dle ω^r a T_e^r .

- synchronní motor s permanentními magnety:

$$J_k^{k+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = |\omega_{k+1} - \omega^r| + c \cdot (i_{d,k+1}^2 + i_{q,k+1}^2) + \left(\frac{|\omega_{k+1} - \omega^r|}{2} + c \cdot I_{\max}^2 \right) \frac{t_f^{\text{D-I}} \left(\begin{bmatrix} T_{e,k+1} \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix} \right)}{T_s}, \quad (5.17)$$

kde časové konstanty, omezení a referenční stav pro T2G volíme dle vztahu (5.12), časovou diskretizaci vztahu (5.14) a dle ω^r a T_e^r .

Kompletní MPC algoritmus na prediktivním horizontu $N = 1$ a navrženou aproximací dlouhého horizontu (MPC-T2G) lze shrnout následujícími třemi kroky [Feh1, Feh2]:

1. Získání aktuálního stavu systému s D-I dynamikou v čase k , tj. \mathbf{x}_k .
2. Hledání optimálního akčního zásahu \mathbf{u}_k^* řešením optimalizačního problému

$$\mathbf{u}_k^* = \arg \min_{\mathbf{u}_k} J_k^{k+1}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

s.t. model řízeného systému s D-I dynamikou a příslušná omezení.

3. Aplikování akčního zásahu \mathbf{u}_k^* a čekání na další okamžik vzorkování, kdy se opět vracíme k prvnímu kroku ($k = k + 1$).

Znovu poukažme rovněž na to, že u všech systémů s D-I dynamikou nepřidává terminální ztrátová funkce do MPC kritéria žádné další parametry, které by bylo třeba ladit.

5.3 Numerické experimenty

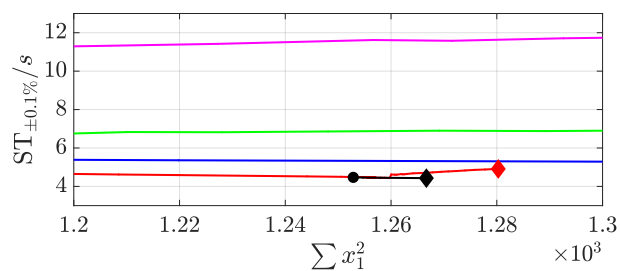
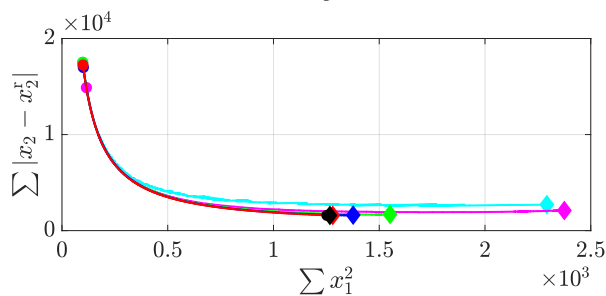
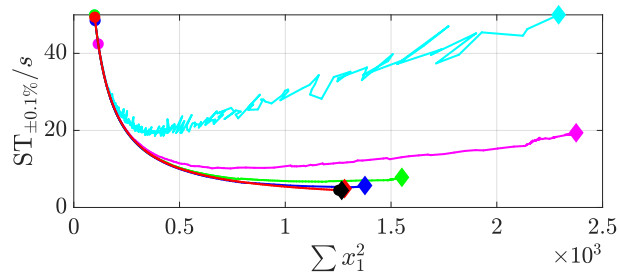
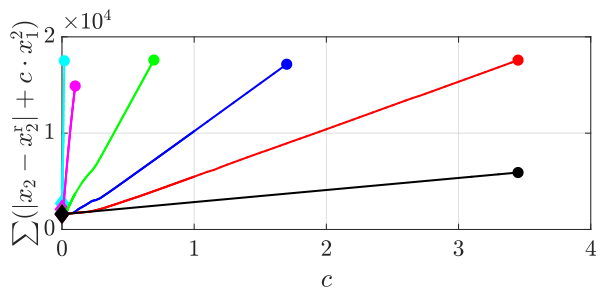
Podrobme nyní úvahy diskutované v rámci podkapitoly 5.2 vedoucí na návrh MPC-T2G přímému srovnání se závěry získanými analýzou chování MPC- N v podkapitole 5.1. K tomu opět mohou posloužit již (v podkapitole 5.1) formulované problémy 1-3 se všemi jejich vlastnostmi a přístupem k řešení.

Na obr. 5.17-5.19 vidíme, jak si MPC-T2G vede v porovnání s MPC- N při řešení problémů 1-3. Uživatelsky volitelný parametr byl pro MPC-T2G volen v rozsahu od 0 do maximální hodnoty tohoto parametru, pro nějž bylo MPC- N_{\max} schopno splnit požadavky kladené na daný problém (řešení pro větší hodnoty c na příkladu PMSM je možné zhlédnout v [Feh5]). Ihned tak můžeme pozorovat, že MPC-T2G skutečně velmi dobře aproximuje chování na dlouhém horizontu a to pro všechny problémy řízení systémů s D-I dynamikou včetně nelineárního PMSM v problému 3. Ve všech problémech reaguje MPC-T2G obdobně jako MPC- N o dlouhých prediktivních horizontech. To, že se pro zvolený interval uživatelsky volitelného parametru c nepohybuje ve větším intervalu celkových ztrát, rovněž odpovídá předpokládanému chování MPC- N o velmi dlouhém prediktivním horizontu, kde můžeme sledovat v grafech znázorňujících závislost hodnoty kritéria na uživatelsky volitelném parametru c tendenci klesat v směrnici právě s rostoucím prediktivním horizontem. Chování MPC-T2G spočívá v tom, že se snaží co nejvíce držet právě bodu, kde obdržíme minimální ST při co možná nejmenších ztrátách. To díky T2G funkci v terminální ztrátové funkci kritéria MPC-T2G (připomeňme, že u elektromotorů byl referenční elektrický moment v T2G funkci přirozeně volen jako $T_e^r = 0$).

Připomeňme však, že jsme si před vlastním návrhem terminální ztrátové funkce l_f , v úvodu kapitoly 5.2, jednoznačně definovali cíle, které by mělo krátkohorizontové MPC s ní v kritériu mít. Podívejme se tedy nyní na to, jak je MPC-T2G úspěšné právě při naplňování těchto cílů:

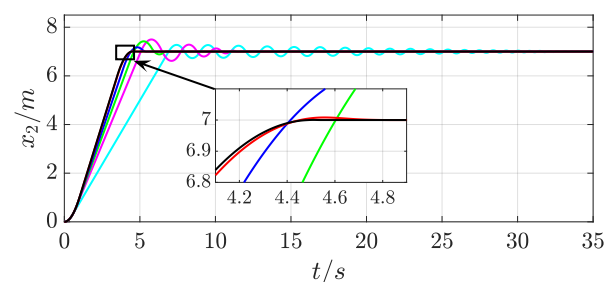
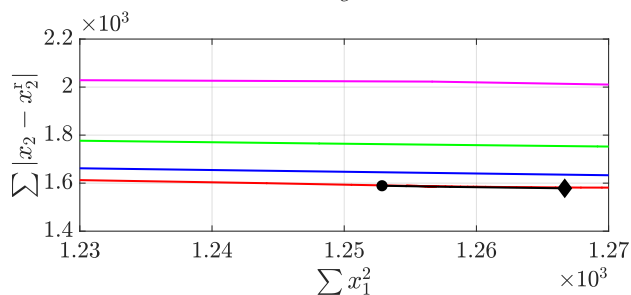
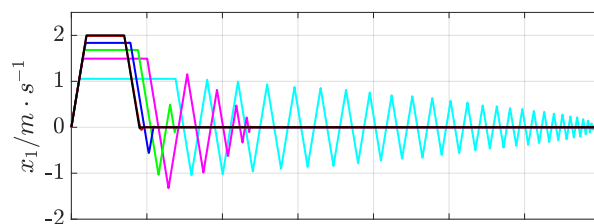
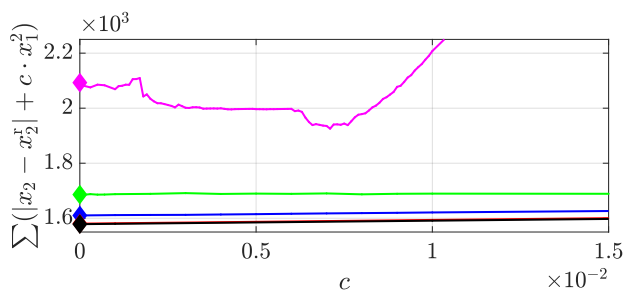
1. Provedené numerické řešení problémů 1-3 jednoznačně potvrdilo (viz obr. 5.17-5.19), že pro libovolnou volbu uživatelsky volitelného parametru c MPC-T2G
 - a) poskytuje menší poměr celkových ztrát a celkové odchylky penalizované L1 normou než MPC- N s krátkými horizonty,
 - b) poskytuje lepší poměr celkových ztrát a ST než MPC- N s krátkými horizonty,
 - c) vede k celkově rychlejšímu ustálení než MPC- N s krátkými horizonty. To je rovněž demonstrováno na obr. 5.20 zobrazujícího vybrané časové průběhy právě pro jednu konkrétní volbu c .
2. Provedené numerické řešení problémů 1-3 jednoznačně potvrdilo, že průměrný čas výpočtu akčního zásahu $\varnothing t$ se u MPC-T2G pohybuje v zajímavých hodnotách a to konkrétně mezi $\varnothing t$ pro MPC-1 s L1 normou a MPC-2 s L2 normou. U lineárních problémů 1-2 vykazuje o něco kratší čas $\varnothing t$, než je nutný pro výpočet akčního zásahu u MPC-2 s L2 normou - cca o 6%. U nelineárního problému 3 je to dokonce cca o 50%. Konkrétní hodnoty $\varnothing t$ obdržené pro MPC-T2G dokumentuje tabulka 5.5.

Jinými slovy - numerické experimenty potvrdily, že navržená terminální ztrátová funkce (5.4), resp. krátkohorizontové MPC-T2G, kde tato ztrátová funkce supluje dlouhohorizontovou informaci, splňuje bez výjimky všechny požadavky, které jsme před jejím návrhem na ni kladli.



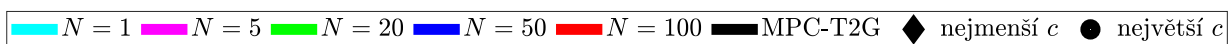
(a) Kvalita s měnícím se c (kritérium, odchylka, ztráty)

(b) Kvalita s měnícím se c (ST, ztráty)

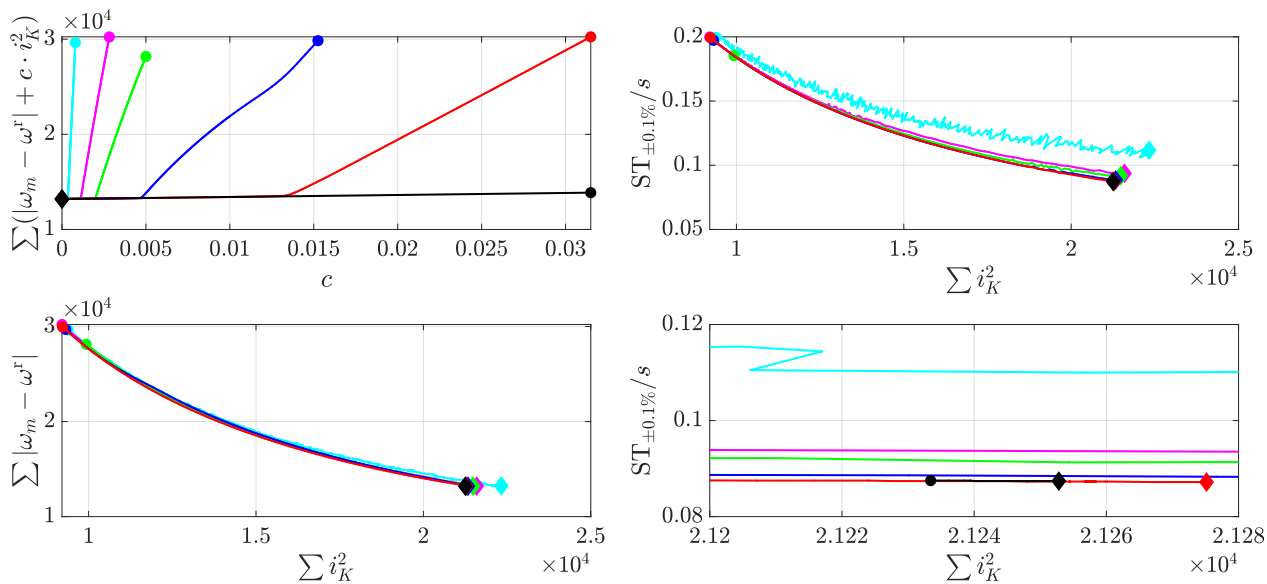


(c) Grafy (a) v detailu

(d) Časový průběh pro fixní ztráty $\sum x_1^2 = 1260 \pm 10$

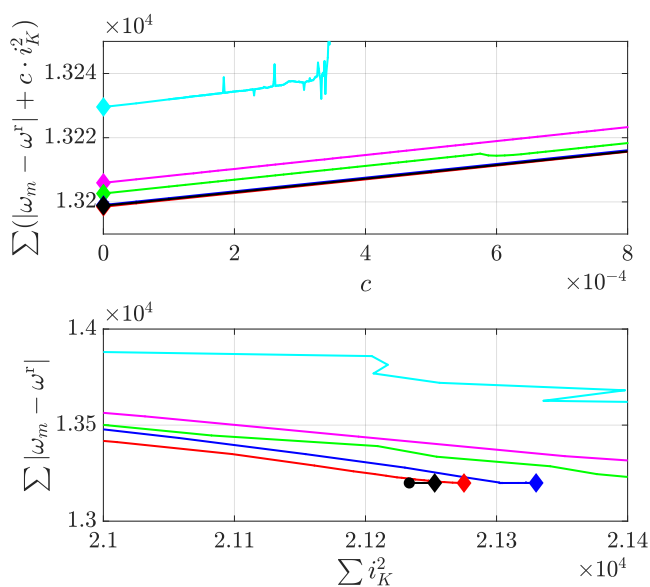


Obrázek 5.17: Problém 1 - analýza chování systému řízeného navrženým MPC-T2G.

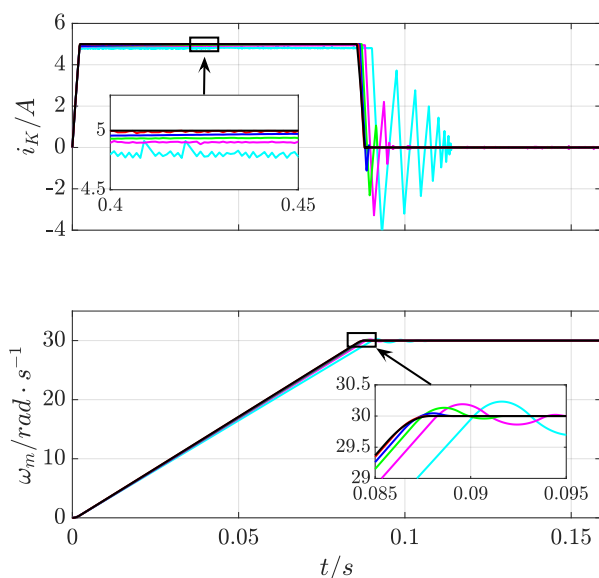


(a) Kvalita s měnícím se c (kritérium, odchylka, ztráty)

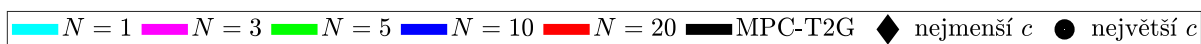
(b) Kvalita s měnícím se c (ST, ztráty)



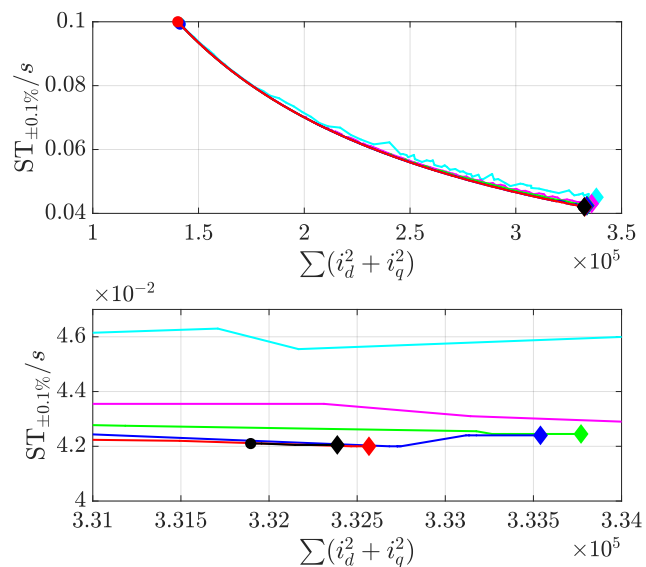
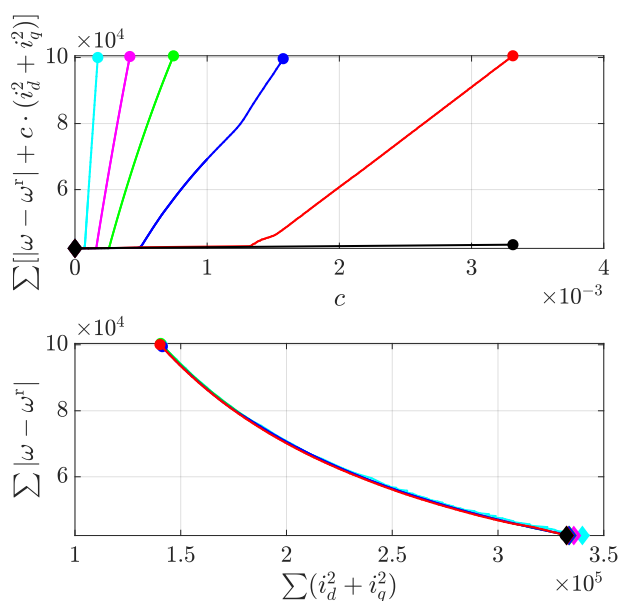
(c) Grafy (a) v detailu



(d) Časový průběh pro fixní ztráty $\sum x_1^2 = 21240 \pm 10$

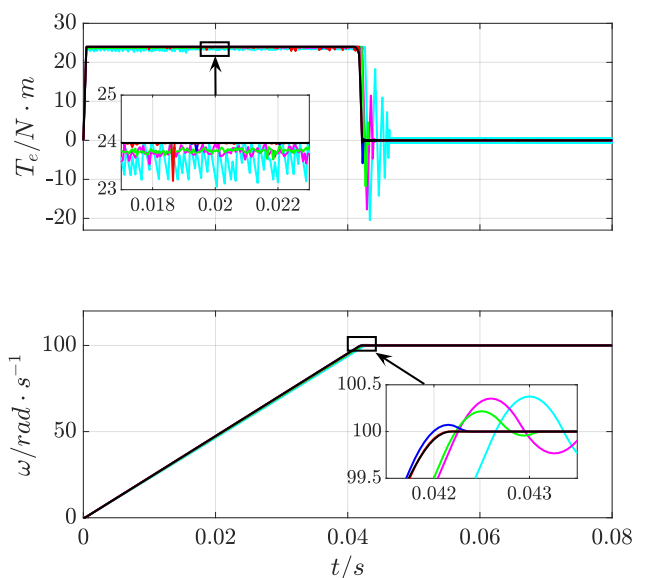
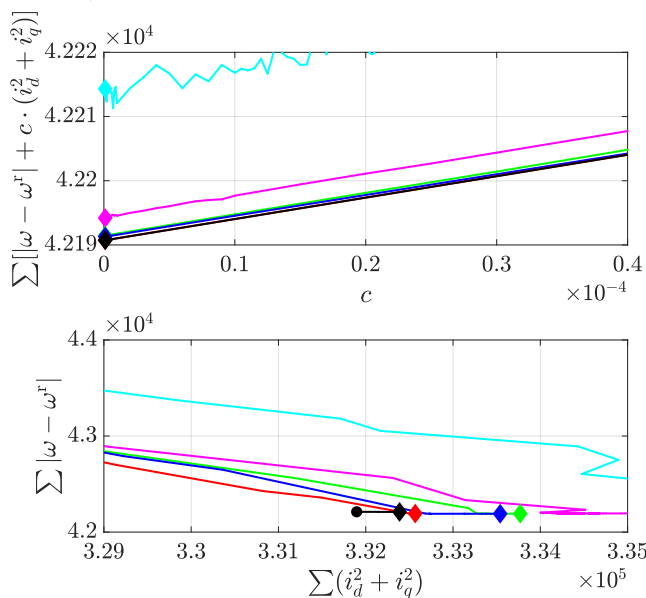


Obrázek 5.18: Problém 2 - analýza chování systému řízeného navrženým MPC-T2G.



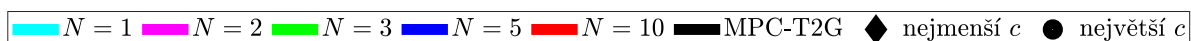
(a) Kvalita s měnicím se c (kritérium, odchylka, ztráty)

(b) Kvalita s měnicím se c (ST, ztráty)

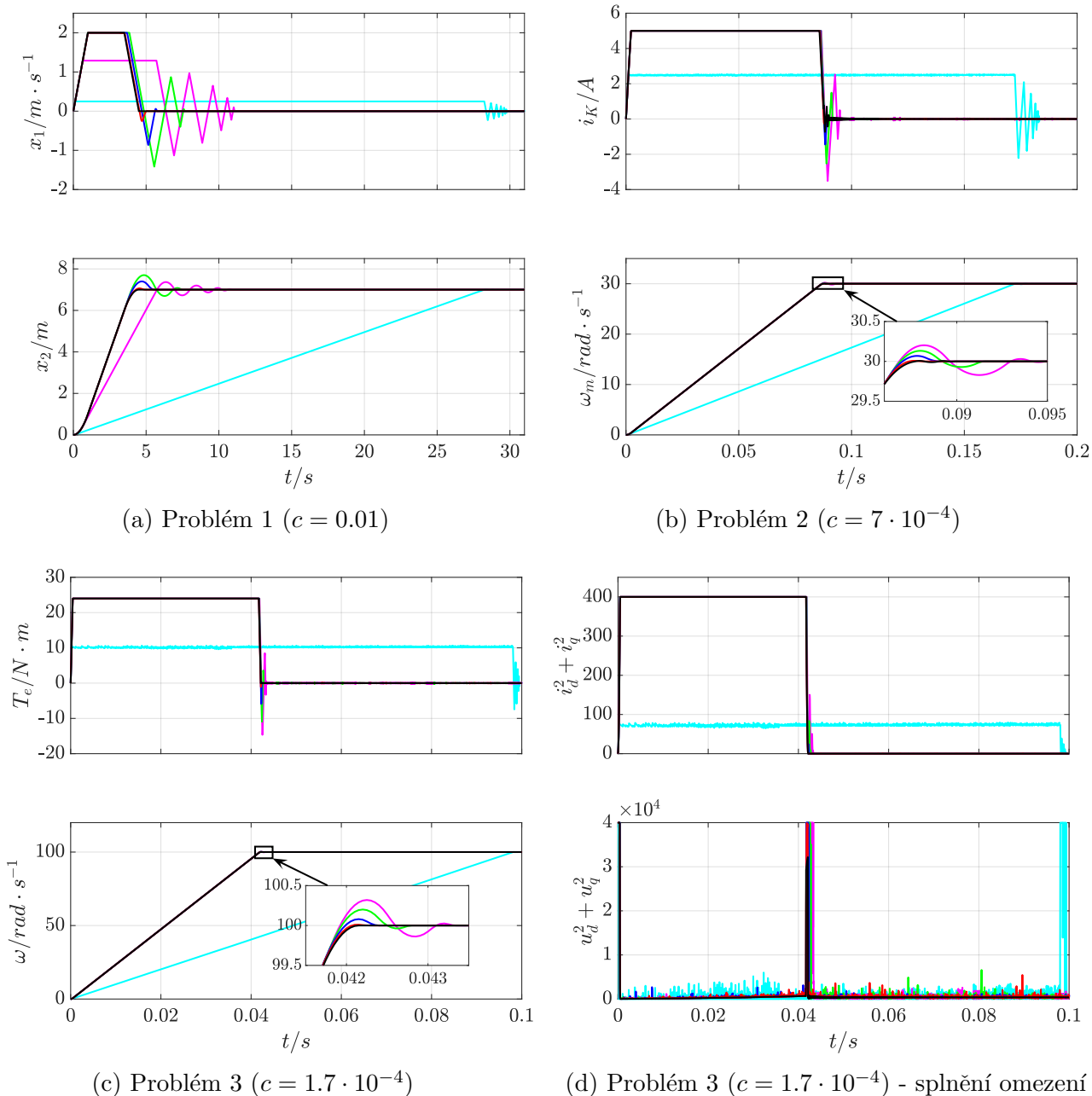


(c) Grafy (a) v detailu

(d) Časový průběh pro fixní ztráty $\sum x_1^2 = 3.321 \cdot 10^5 \pm 100$



Obrázek 5.19: Problém 3 - analýza chování systému řízeného navrženým MPC-T2G.



Obrázek 5.20: Vybrané časové průběhy pro fixní uživatelsky volitelný parametr c (značení odpovídá příslušným obr. 5.17-5.19).

MPC-T2G	Problém 1	Problém 2	Problém 3
$\varnothing t/s$	0.0197	0.0301	0.0451

Tabulka 5.5: Průměrné časy určení optimálního akčního zásahu pro jeden okamžik vzorkování $\varnothing t$ pro MPC-T2G.

5.4 Shrnutí

V rámci kapitoly 5 byla nejprve provedena analýza chování systémů s D-I dynamikou a omezeními řízených pomocí MPC- N s L1 a L2 normou penalizující odchylku od referenčního stavu ve ztrátové funkci MPC kritéria. Experimentálně se zde prokázalo, že pokud je v případě L1 normy volen dostatečně dlouhý prediktivní horizont MPC- N , má chování řízeného systému atraktivní vlastnosti, které souvisí především s rychlejším náběhem systému s D-I dynamikou do požadovaného stavu při splnění všech omezení na řízený systém kladených. Jak bylo ale rovněž zmíněno - právě uvažování dlouhého horizontu s sebou přináší možné problémy pro využití tohoto MPC přístupu v praktických aplikacích, kde je rychlost výpočtu akčního zásahu stěžejní. Z tohoto důvodu se kapitola dále věnovala možné aproximaci dlouhého prediktivního horizontu návrhem vhodné terminální ztrátové funkce.

Před vlastním návrhem terminální ztrátové funkce byly zformulovány jasné požadavky, které by měla tato funkce naplnit po jejím přidání do MPC kritéria s velmi krátkým horizontem (z praktických důvodů byl uvažován prediktivní horizont $N = 1$). K návrhu terminální ztrátové funkce pak bylo využito předpokladu znalosti časových průběhů systémů s D-I dynamikou a času ustálení (motivace pochází z [Feh2, Feh5]), jež byl poté aproximován T2G funkcí a to buď pro konkrétní systém (pokud odpovídal přímo D-I dynamice), nebo byl představen způsob, jakým aproximovat skutečnou T2G funkci systému obsahující vnitřní D-I dynamiku právě zmíněnou T2G funkcí D-I systému s omezeními, která byla získána analyticky. Právě analytický způsob odvození T2G funkce diskutovaný v [Feh1] vedl ve výsledku k získání takové terminální funkce, která do MPC kritéria nepřidává další uživatelsky volitelné parametry, jež by bylo třeba následně ladit. To lze, vzhledem ke konkurenčním přístupům, považovat rovněž za velkou výhodu.

Naplnění formulovaných požadavků pak bylo ověřeno numerickými experimenty. Ukázalo se, že všechny požadavky byly naplněny a to bez výjimky. Zajímavé vlastnosti mělo navržené MPC-T2G především v případě řízení PMSM vyznačujícího se nelineární dynamikou. MPC-T2G zde s sebou přineslo nejen evidentní kvalitativní zlepšení, ale i velkou výpočetní úsporu i vzhledem k MPC-2 s L2 normou, jež lze považovat při vhodném naladění za blízkého konkurenta MPC-T2G.

S ohledem na výše uvedené shrnutí, lze považovat první cíl disertační práce zformulovaný v kapitole 4 týkající se nalezení vhodné aproximace dlouhého horizontu kritéria prediktivního řízení pro třídu systémů s D-I dynamikou za splněný.

Kapitola 6

Návrh efektivního prediktivního řízení

Úvahy kapitoly 5 poskytly sice zajímavé závěry, nicméně stále jsme se zde pohybovali pouze na úrovni teoretické roviny. Proto by bylo zajímavé pokusit se nyní přenést nově nabyté poznatky do praxe a demonstrovat tak, jak úspěšné mohou být zmíněné úvahy při řešení reálných problémů. S ohledem na v práci diskutované systémy s D-I dynamikou, se úloha návrhu řízení PMSM s nelineární dynamikou a omezeními jeví jako dobrý kandidát pro toto rozšíření, neboť návrh efektivního MPC pro PMSM je, jak bude dále ukázáno, aktuální problém.

Připomeňme, že klasický přístup k řízení elektromotorů představuje obecně kaskádní regulace, kde je problém návrhu řízení dekomponován na řízení rychlostní, momentové a proudové smyčky řízených separátně PID regulátory [20, 46, 89]. To sice z principu přináší žádoucí velmi rychlé generování akčního zásahu, nicméně si s sebou nese také nevýhody klasické regulace. Za prvé - ladění regulátorů není jednoduché, protože je v nich značné množství uživatelsky volitelných parametrů a za druhé - interpretace cíle regulace je obvykle nejasná, protože zde není definováno zřetelné kritérium cíle řízení. Z tohoto důvodu moderní přístupy k řízení pracující přímo se stavovými modely elektromotorů a definují kritéria formulující cíle řízení, což ve výsledku vede k menšímu počtu uživatelsky volitelných parametrů, tj. k ne tak komplikovanému ladění, a k jasné interpretaci cíle popř. výsledků řízení.

Jak již víme - jednou z nejoblíbenějších technik moderní teorie řízení využívanou hojně pro regulaci elektromotorů je právě MPC díky svým předpokladům splnit veškerá omezení na úlohu kladená s relativně malými výpočetními nároky. Ovšem je nutné zmínit, že i přesto je obvykle nutné výpočetní nároky MPC dál snižovat, neboť pro řízení elektromotorů je nutné držet dostatečně krátkou periodu vzorkování (např. u PMSM je to méně než $150 \mu s$ [25, 66, 85]). To má za následek, že zde nelze uvažovat příliš dlouhé prediktivní horizonty. Z tohoto úhlu pohledu, by tak navržená terminální ztrátová funkce (resp. MPC-T2G) mohla přinést zajímavý prostor pro snížení výpočetního času.

V této kapitole tak shrňme základní přístupy k návrhu MPC pro PMSM a pokusme se k nim navrhnout konkurenceschopné efektivní MPC algoritmy založené na paralele D-I systému a PMSM.

6.1 Přístupy prediktivního řízení synchronního motoru s permanentními magnety

V literatuře se můžeme setkat s různými MPC přístupy k řízení PMSM jako např. momentové prediktivní řízení (v angl. *predictive torque control*) [29, 81, 90], proudové prediktivní řízení (v angl. *current torque control*) [81, 87] apod., které se liší různými přístupy k návrhu MPC kritéria, resp. ztrátové a terminální ztrátové funkce. Budeme-li se dále soustředit primárně na MPC přístupy, jež penalizují prostřednictvím ztrátových funkcí MPC kritéria úhlovou rychlost a proud PMSM k zajištění celkové efektivity, lze mezi úspěšné iniciální pokusy návrhu MPC řízení pro PMSM zařadit [66].

V [66] je MPC kritérium s krátkým prediktivním horizontem rozšířeno o terminální ztrátovou funkci obsahující další požadavky na budoucí (optimální) chování proudů formou odvozených křivek v prostoru proudů. Ačkoliv tento přístup přinesl spoustu zajímavých výsledků a získal si náležitou pozornost, v této rané fázi měl několik nedostatků. Za první nedostatek lze považovat příliš velké množství uživatelsky volitelných parametrů, který tak potenciální výhodu MPC oproti klasickým způsobům řízení značně snižuje, a druhý nedostatek spočívá v dramatické diskretizaci prostoru možných akčních zásahů uvažováním zařazení napěťového střídače (VSI) pro jeho generování. Zmíňme zde, že způsoby přístupu k MPC, kdy spojitá doména akčních zásahů je diskretizována do podoby diskrétní množiny akčních zásahů, se označují jako přístupy MPC s diskrétní konečnou doménou akčních zásahů (FCS-MPC) [77], a MPC navržené v [66] je tak typickým zástupcem FCS-MPC pro PMSM.

Nedostatky [66] byly eliminovány např. v [65, 69], kde se podařilo navrhnout efektivní MPC uvažující kompletní spojitou doménu akčních zásahů (CCS-MPC). Efektivního CCS-MPC zde bylo dosaženo kaskádní strukturou zahrnující PID regulátor pro poskytnutí referenčního momentu a MPC regulátor pro řízení momentu. Komplikovanou kaskádní strukturu se následně povedlo odstranit v [85], kde byl navržen efektivní CCS-MPC přístup k přímé regulaci úhlové rychlosti PMSM.

Jeden aspekt spojuje výše uvedené MPC přístupy k řízení PMSM dohromady. Ve ztrátové funkci MPC kritéria uvažují výhradně L2 normu. Jak však bylo ukázáno v kapitole 5, řízení s jinou normou může mít zajímavé vlastnosti a jak z této kapitoly rovněž víme, L1 norma v případě penalizace odchylky od požadované úhlové rychlosti se ve ztrátové funkci MPC kritéria perfektně hodí v případech, kdy žádáme co možná nejrychlejší a nejpřesnější průběh. Ačkoliv využití L1 normy pro MPC může vést při příliš krátkém prediktivním horizontu k problémům [37], zjistili jsme, že návrhem vhodné terminální ztrátové funkce zastupující chybějící dlouhohorizontovou informaci můžeme tyto nedostatky odstranit. K tomu jsme s výhodou využili paralely PMSM a D-I systému.

Kořeny zmíněné paralely lze vypořádat v [25]. V [25] bylo navrženo jednoduché FCS-MPC pro PMSM, kdy do MPC kritéria byla přiřazena numericky získaná a následně aproximovaná T2G funkce D-I systému s omezeními (viz podkapitola 5.2.1). Ačkoliv se jedná o ryze heuristický přístup, poskytla tato metoda zajímavé výsledky; nicméně její enormní nevýhodou je, že díky aproximaci T2G funkce, jež sama o sobě obsahuje velké množství volných parametrů, vede tento přístup na MPC o velkém množství uživatelsky volitelných parametrů. Tuto nevýhodu, jak již bylo nastíněno dříve, řeší do určité míry [Feh1], kde aproximovaná T2G funkce je nahrazena analyticky odvozenou T2G funkcí D-I systému s omezeními.

Prvotní pokus o interpretaci role T2G funkce v MPC kritériu, resp. v terminální ztrátové funkci, je uveden v [Feh2], kde se díky této interpretaci povedlo eliminovat počet uživatelsky volitelných parametrů na minimální hodnotu, tj. jeden uživatelsky volitelný parametr c , který vzájemně váží odchylku od požadované úhlové rychlosti a Jouleovy ztráty. Hypotetické ideje v [Feh2] daly rovněž vzniknout prvnímu efektivnímu CCS-MPC přístupu založeném na paralele PMSM a D-I systému v [Feh3] a rozšířeném v [Feh4]. Problém těchto přístupů však tkví v tom, že se zde stále uvažuje L2 norma ve ztrátové funkci a právě spojení L2 normy a T2G funkce není, jak již víme, přirozené. L2 norma se primárně nesoustředí na co nejrychlejší čas náběhu popř. na co nejpřesnější regulaci. L1 norma má z tohoto hlediska k časově-optimálnímu řízení daleko blíže.

Příklonem k L1 normě se tak u přístupů založených na paralele PMSM a D-I systému některé nežádoucí vlastnosti L2 normy značně redukuje. V [Feh5] se tak povedlo na základě přechodu k L1 normě dojít k zajímavému efektivnímu algoritmu CCS-MPC pro PMSM založeném právě na terminální ztrátové funkci (5.4), tj. sledujícímu chování MPC-T2G s MPC kritériem (5.17).

6.2 Efektivní prediktivní řízení založené na diskretizaci prostoru akčních zásahů

Dříve než přistoupíme k představení efektivního CCS-MPC algoritmu pro řízení PMSM plně založeném na paralele PMSM a D-I systému navrženém v [Feh5], je třeba zmínit, že prvním logickým krokem ke zrychlení výpočtu akčního zásahu pro možné reálné aplikace MPC-T2G by mohl být právě přechod do FCS-MPC módu. Tento přechod lze jednoduše zajistit, jak bylo uvedeno výše, uvažováním VSI pro generování akčního zásahu. Tento způsob generování vstupních vektorů PMSM lze popsat vztahem [25, 66]

$$\mathbf{u}_k = U_{\max} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta_k) & \sin(\vartheta_k) \\ -\sin(\vartheta_k) & \cos(\vartheta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_a \\ S_b \\ S_c \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

kde $S_x \in \{0, 1\}$, tj. prostor řízení je zde zúžen na sedm možných vstupních vektorů (6 aktivních a 2 nulové).

Kompletní FCS-MPC verze MPC-T2G algoritmu (FCS-MPC-T2G) by byla tak dána MPC-T2G algoritmem, kde se akční zásah volí jako vstupní vektor z množiny dané pro aktuální čas k vztahem (6.1), pro nějž kritérium (5.17) nabývá minimální hodnoty. Je tudíž zřejmé, že uvažováním VSI se obíráme o značnou část prostoru řízení, tj. musíme předpokládat, že regulace nebude tak efektivní. Z těchto důvodů se hledají efektivní CCS-MPC algoritmy s obdobnou výpočetní rychlostí akčního zásahu, které by byly schopné FCS-MPC přístup nahradit.

6.3 Efektivní prediktivní řízení založené na relaxaci problému

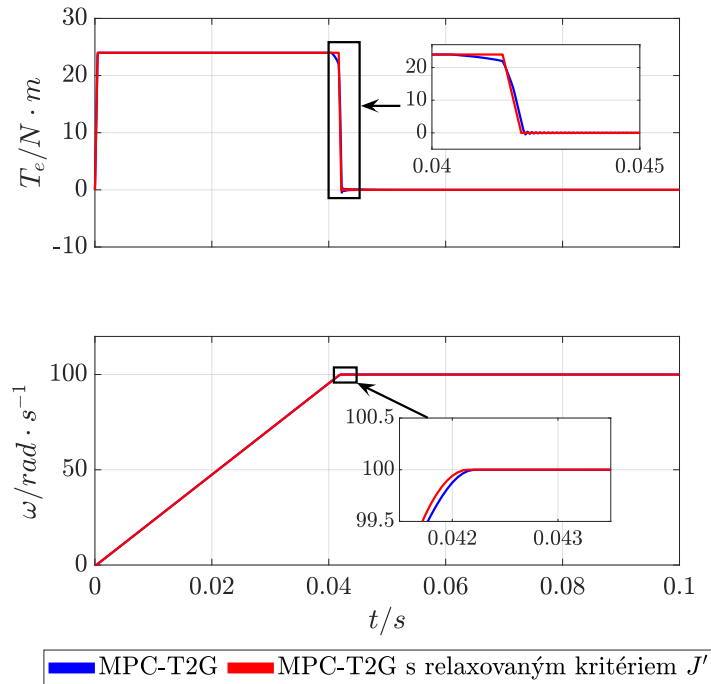
Popišme proto nyní CCS-MPC-T2G algoritmus popsaný v [Feh5]. Výchozím krokem pro odvození tohoto algoritmu je další relaxace problému, která spočívá de facto v dalším

zmenšení prediktivního horizontu, tj. připustíme, že $N = 0$. Potom MPC-T2G kritérium pro PMSM (5.17) přechází do podoby

$$J'(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \left(\frac{|\omega_{k+1} - \omega^r|}{2} + c \cdot I_{\max}^2 \right) \frac{{}^t\mathcal{D}^{-1} \left(\begin{bmatrix} T_{e,k+1} \\ \omega_{k+1} \end{bmatrix} \right)}{T_s}, \quad (6.2)$$

tj. v relaxovaném MPC-T2G kritériu J' zůstává pouze navržená terminální ztrátová funkce vyhodnocována pro predikci stavu v čase $k + 1$.

Na obr. 6.1 je ukázáno, jak se liší MPC-T2G a MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' pro konkrétní volbu uživatelsky volitelného parametru c . Uživatelsky volitelný parametr c byl vybrán jako maximální volený parametr v problému 3 (problém návrhu řízení pro PMSM) diskutovaném napříč kapitolou 5. V tomto naladění pozorujeme největší rozdíl mezi porovnávanými kritérii (celková regulační odchylka a Jouleovy ztráty činily u MPC-T2G s kompletním kritériem $\sum |\omega - \omega^r| = 4.2211 \cdot 10^4$ a $\sum (i_d^2 + i_q^2) = 3.3190 \cdot 10^5$, u MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' pak $\sum |\omega - \omega^r| = 4.2210 \cdot 10^4$ a $\sum (i_d^2 + i_q^2) = 3.3236 \cdot 10^5$). Vidíme tak, že MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' , kde má T2G dominantnější roli, logicky tíhne více k řešení s menším ST (ostatně jako MPC-T2G s kompletním kritériem a menší volbou c). Rozdíl mezi porovnávanými kritérii však i tak nelze považovat za nějak markantní.



Obrázek 6.1: Porovnání MPC-T2G a MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' pro konkrétní volbu uživatelsky volitelného parametru c .

Rovněž poukážme na to, že význam uživatelsky volitelného parametru c , resp. příslušného členu $c \cdot I_{\max}^2$ v relaxovaném kritériu (6.2), je spíše symbolický. V uvažovaném intervalu možné volby c (relativně malé hodnoty) totiž nějak víc nepřidává na významu členů kritéria ním násobených. Jinými slovy - MPC-T2G s relaxovaným kritériem J'

nikterak nezávisí na volbě uživatelsky volitelného parametru c , pokud jeho hodnotu volíme v nějakém smysluplném intervalu (např. podle toho, v jakých hodnotách je jej rozumné volit pro systémy řízené pomocí MPC- N a delším horizontu).

Díky tomuto faktu je možné numerickými simulacemi sledovat, jak probíhá generování akčního zásahu a případně tak zjistit, zda není možné způsob generování akčního zásahu podle MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' nějak vhodně vyjádřit popř. aproximovat. Ukazuje se, že generování akčního zásahu pro PMSM řízeného MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' probíhá ve třech různých scénářích, které lze charakterizovat následovně:

- a) Ve scénáři A dochází k tomu, že stavové omezení PMSM nemá žádný efekt na řešení příslušného optimalizačního problému (minimalizace relaxovaného kritéria J' s ohledem na systém a omezení). V takovém případě dochází vždy k aplikaci akčního zásahu v podobě vektoru vstupního napětí s maximální možnou velikostí.
- b) Ve scénáři B je již nutné brát stavové omezení na zřetel. V takovém případě pro optimální akční zásah platí, že přivede stav PMSM na toto omezení.
- c) Ve scénáři C již je potřeba vybrat takový vektor vstupního napětí, jenž umožní PMSM zpomalovat tak, aby co možná nejrychleji a nejpresněji dorazil do referenčního stavu.

Pro přiblížení jsou scénáře A-C v prostoru vstupního napětí ilustrovány na obr. 6.2. Jak je z obr. 6.2 dále patrné, v prostoru vstupního napětí leží optimální akční zásah na jedné ze tří možných křivek, které jsou dány tím, do jakého stavu na nich ležící akční zásah PMSM přivede - křivka \mathcal{A} (na napěťové omezení), křivka \mathcal{B} (na stavovém omezení) a křivka \mathcal{C} (na křivku, kde moment a rychlost leží na přepínací křivce (5.6) T2G funkce (5.10)). To jinými slovy znamená, že by optimalizační proces mohl být redukován z hledání optimálního akčního zásahu minimalizující relaxované kritérium (6.2) přes celou 2D doménu danou napěťovým omezením (3.15b) na pouhé hledání akčního zásahu podél odpovídající křivky. Díky dominantnímu postavení T2G funkce v relaxovaném kritériu by pak navíc mohlo stačit vyhodnocovat místo celého kritéria pouze odpovídající větve T2G funkce (5.10).

Pro další postup tak bude klíčové nějak vyjádřit tvar jednotlivých křivek ve scénářích. K tomu využijeme následující aproximativní diskretizovaný model PMSM s předpokladem $L_d \approx L_q$ získaný ze stavového modelu PMSM (3.7)

$$i_{d,k+1} = \left(1 - \frac{R_s T_s}{L_d}\right) i_{d,k} + \frac{L_q T_s}{L_d} i_{q,k} \omega_k + \frac{T_s}{L_d} u_{d,k} = C_{1,k} + C_{2,k} u_{d,k}, \quad (6.3a)$$

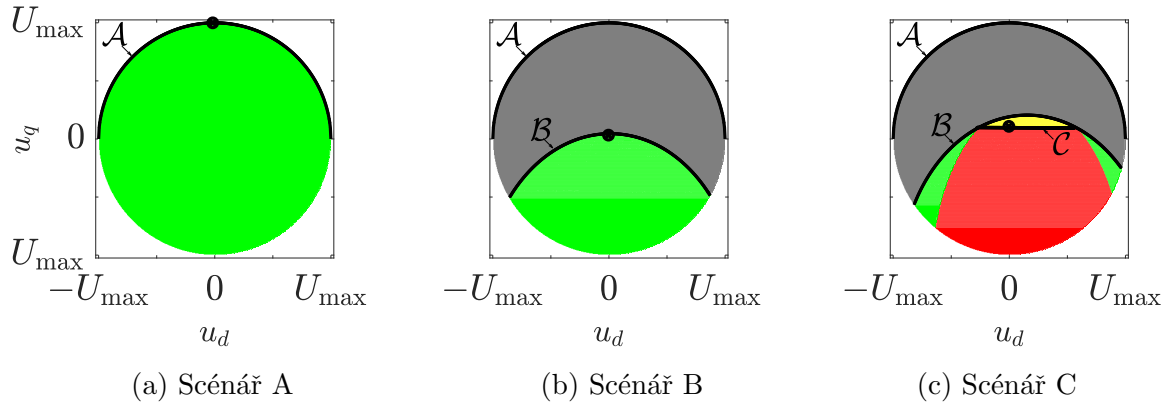
$$i_{q,k+1} = \left(1 - \frac{R_s T_s}{L_q}\right) i_{q,k} - \frac{\Psi_{PM} T_s}{L_q} \omega_k - \frac{L_d T_s}{L_q} i_{d,k} \omega_k + \frac{T_s}{L_q} u_{q,k} = C_{3,k} + C_{4,k} u_{q,k}, \quad (6.3b)$$

$$\begin{aligned} \omega_{k+1} = & \omega_k + \frac{k_p p_p^2 \Psi_{PM} T_s}{J} i_{q,k} - \frac{p_p T_s}{J} T_{L,k} + \frac{k_p p_p^2 \Psi_{PM} T_s^2}{2JL_q} (-R_s i_{q,k} - \Psi_{PM} \omega_k - L_d i_{d,k} \omega_k) \\ & + \frac{k_p p_p^2 \Psi_{PM} T_s^2}{2JL_q} u_{q,k} = C_{5,k} + C_{6,k} u_{q,k} \end{aligned} \quad (6.3c)$$

$$\vartheta_{k+1} = \vartheta_k + T_s \omega_k, \quad (6.3d)$$

$$T_{L,k+1} = T_{L,k}, \quad (6.3e)$$

$$T_{e,k+1} = k_p p_p \Psi_{PM} i_{q,k+1} = k_p p_p \Psi_{PM} (C_{3,k} + C_{4,k} u_{q,k}) = C_{7,k} + C_{8,k} u_{q,k}, \quad (6.3f)$$



Obrázek 6.2: Optimalizační scénáře pro $\omega_k < \omega^r$: puntík značí optimální akční zásah a barvy indikují, do jaké části T2G funkce (5.10) přivede MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' stav PMSM (červená - (5.10a), zelená - (5.10b), žlutá - (5.10c) a šedá - (5.10e)).

kde zavedení na aktuálním stavu závislých parametrů $C_{1,\dots,8}$ pomůže následně vyjádřit zřetelněji podobu jednotlivých křivek. Zmíňme, že uvažování přesnějšího modelu PMSM by ve výsledku vedlo k výpočetně složitějšímu odvození křivek (např. pro jejich určení by bylo třeba řešit, místo kvadratických, kvartické rovnice apod.), což by se neprodleně odrazilo i na příliš velké výpočetní složitosti výsledného CCS-MPC algoritmu.

S ohledem na volbu modelu (6.3) můžeme scénáře A-C a odpovídající křivky \mathcal{A} - \mathcal{C} formulovat jako:

- a) Ve scénáři A hledáme optimální akční zásah na křivce \mathcal{A} . Tu lze jednoduše vyjádřit z napěťového omezení PMSM (3.15b) jako

$$\mathcal{A}: u_{q,k} - s\sqrt{U_{\max}^2 - u_{d,k}^2} = 0,$$

kde parametr $s \in \{-1, 1\}$ rozhoduje o znaménku optimálního akčního zásahu na základě aktuální a požadované úhlové rychlosti jako

$$s = \text{sgn}^-(\omega_k - \omega^*) \triangleq \begin{cases} +1, & \text{pokud } \omega_k - \omega^* \leq 0, \\ -1, & \text{pokud } \omega_k - \omega^* > 0. \end{cases}$$

Korektní postup získání optimálního akčního zásahu v tomto scénáři by byl, jak jsme nastínili dříve, hledat optimální bod podél křivky \mathcal{A} pro odpovídající část T2G funkce (5.10); nicméně z důvodu zjednodušení a co možná nejrychlejšího generování optimálního akčního zásahu zde předpokládejme akční zásah ve formě vektoru vstupního napětí s maximální složkou v ose q , tj. jako $\mathbf{u}_k^* = [0, s \cdot U_{\max}]^T$.

- b) Ve scénáři B hledáme optimální akční zásah mezi takovými akčními zásahy, které přivedou v dalším časovém kroku stav PMSM na stavové omezení, tj. mezi akčními zásahy ležícími na křivce \mathcal{B} , již lze vyjádřit ze stavového (proudového) omezení (3.15a) na základě aproximativního modelu (6.3) jako

$$\mathcal{B}: u_{q,k} - \frac{1}{C_{4,k}} \left(s\sqrt{-(C_{2,k}u_{d,k} + C_{1,k})^2 + I_{\max}^2} - C_{3,k} \right) = 0.$$

Při hledání samotného optimálního akčního zásahu podél křivky \mathcal{B} na odpovídající části T2G funkce (5.10), což je větev T2G funkce (5.10b) nebo (5.10d) v závislosti na pozici aktuální a referenční úhlové rychlosti, lze pak s výhodou využít znalosti, že na omezení platí $T_{e,k+1} = \bar{T}_{e,k+1}$. To způsobí, že se určité členy v odpovídající větvi T2G funkce (5.10b) nebo (5.10d) pokrátí. Potom pro optimální akční zásah u_d^* musí platit

$$\frac{\partial}{\partial u_{d,k}} \bigg|_{u_{d,k}=u_{d,k}^*} \left(\frac{T_{e,k+1}}{2K_1} + s \frac{\omega^* - \omega_{k+1}}{K_2 T_{e,k+1}} \right) = 0. \quad (6.4)$$

Pro upřesnění připomeňme, že ve vztahu (6.4) je napětí u_d skutečně jedinou proměnou, neboť dosazujeme za napětí u_q ve vztazích pro predikci elektrického momentu a úhlové rychlosti z aproximativního modelu (6.3) křivku \mathcal{B} . Rovnice (6.4) tak představuje polynomiální rovnici vysokého řádu, jejíž analytické řešení je s ohledem na požadavek co možná nejmenší výpočetní náročnosti příliš komplikované. Naštěstí tvar T2G funkce garantuje, že tento polynom bude mít pouze jeden kořen v intervalu možných akčních zásahů u_d a z tohoto důvodu může být pro vlastní řešení rovnice (6.4) využit jednoduchý numerický algoritmus jako např. metoda půlení intervalu (bisekce) [9, 58].

- c) Ve scénáři C hledáme optimální akční zásah mezi zásahy, které dovedou stav PMSM na přepínací křivku, tj. leží na křivce \mathcal{C} . Křivku \mathcal{C} lze získat dosazením odpovídajících stavů z aproximativního modelu (6.3) do přepínací křivky T2G funkce (5.6) jako

$$\mathcal{C}: \quad u_{q,k} \pm \sqrt{\frac{K_1}{K_2 C_{8,k}^2} \left(\frac{2(C_{5,k} - \omega^*)}{s'} - \frac{2C_{6,k}C_{7,k}}{C_8 s'} + \frac{K_1 C_{6,k}^2}{K_2 C_{8,k}^2} \right)} + \frac{C_{7,k}}{C_{8,k}} - \frac{K_1 C_{6,k}}{K_2 C_{8,k}^2 s'} = 0,$$

kde znaménková funkce s' je dána jako

$$s' = \text{sgn}(C_{7,k} + C_{8,k} u_{q,k}). \quad (6.5)$$

Hledání optimálního akčního zásahu podél křivky \mathcal{C} na odpovídajících větvích T2G funkce není nutné, jelikož, jak je vidět ze vztahu pro křivku \mathcal{C} , napětí u_q je konstanta nezávislá na napětí u_d . V takovém případě je přirozenou volbou optimálního napětí $u_d^* = 0$. Problémem však je, jak vlastně určit hodnotu znaménkové funkce (6.5), neboť tato funkce závisí právě na napětí u_q . Rovněž je nutné nějak stanovit znaménko před odmocninou ve vztahu pro křivku \mathcal{C} . Vše dohromady nám dává celkem čtyři možné kandidáty optimálního akčního zásahu. Jako optimální vstupní napětí u_q^* ze zmíněných čtyř tak budeme volit takové, jež společně s nulovým napětím u_d^* minimalizuje relaxované kritérium (6.2).

Víme-li, jak se chovat v rámci jednotlivých scénářů A-C, je ještě nutné určit, jak poznat, jaký konkrétní scénář má být právě aplikován čili jakým způsobem přepínat mezi

scénáři. Jak je možné vidět na obr. 6.2, klíčové pro toto přepínání je sledovat pozici extrému křivky \mathcal{B} , tj. u_q^{\max} vyjádřitelného jako

$$u_{q,k}^{\max} = \frac{1}{C_{4,k}} (sI_{\max} - C_{3,k}), \quad (6.6)$$

vůči ostatním křivkám. Pokud pro tento extrém bude platit, že $u_q^{\max} \notin \langle -U_{\max}, U_{\max} \rangle$, lze předpokládat, že optimální akční zásah leží na křivce \mathcal{A} , a je tudíž aplikován scénář A. Pokud je křivka \mathcal{C} v závislosti na znaménku s pod nebo nad extrémem u_q^{\max} , znamená to, že je již možné přivést vhodným akčním zásahem PMSM stav na přepínací křivku, tj. dochází k aplikaci scénáře C. Ve všech ostatních případech se držíme scénáře B.

Konkrétní podobu právě představeného efektivního CCS-MPC algoritmu založeném na MPC-T2G (CCS-MPC-T2G) vystihuje v pseudokódu vyjádřený algoritmus 1.

Algoritmus 1 Navržený efektivní CCS-MPC-T2G algoritmus.

```

vstup stav PMSM  $\mathbf{x}_k$ 
výstup optimální akční zásah  $\mathbf{u}_k^*$ 
1: spočítej  $C_{(1,\dots,8),k}$ , urči  $\mathcal{C}$ , prepínací_krivka  $\leftarrow$  false,
    $s \leftarrow \text{sgn}^-(\omega_k - \omega^*)$ 
2: pokud  $(\mathcal{C} \leq (6.6) \text{ a } \mathcal{C}^2 \leq U_{\max}^2 \text{ a } s = 1)$  nebo  $(\mathcal{C} > (6.6) \text{ a } \mathcal{C}^2 \leq U_{\max}^2 \text{ a } s = -1)$  potom
3:   prepínací_krivka  $\leftarrow$  true
4: jinak
5:   prepínací_krivka  $\leftarrow$  false
6: konec pokud
7: pokud prepínací_krivka = false potom
8:   pokud  $s \times (6.6) < U_{\max}$  potom
9:      $u_{d,k}^* \leftarrow$  bisekce rovnice (6.4)
10:     $u_{q,k}^* \leftarrow \mathcal{B}$ 
11:     $\mathbf{u}_k^* = [u_{d,k}^*, u_{q,k}^*]^T$ 
12:   jinak
13:      $\mathbf{u}_k^* = [0, sU_{\max}]^T$ 
14:   konec pokud
15: jinak
16:    $u_{d,k}^* \leftarrow 0$ 
17:    $u_{q,k}^* \leftarrow \mathcal{C}$ 
18:    $\mathbf{u}_k^* = [u_{d,k}^*, u_{q,k}^*]^T$ 
19: konec pokud
20: vrať  $\mathbf{u}_k^*$ 
    
```

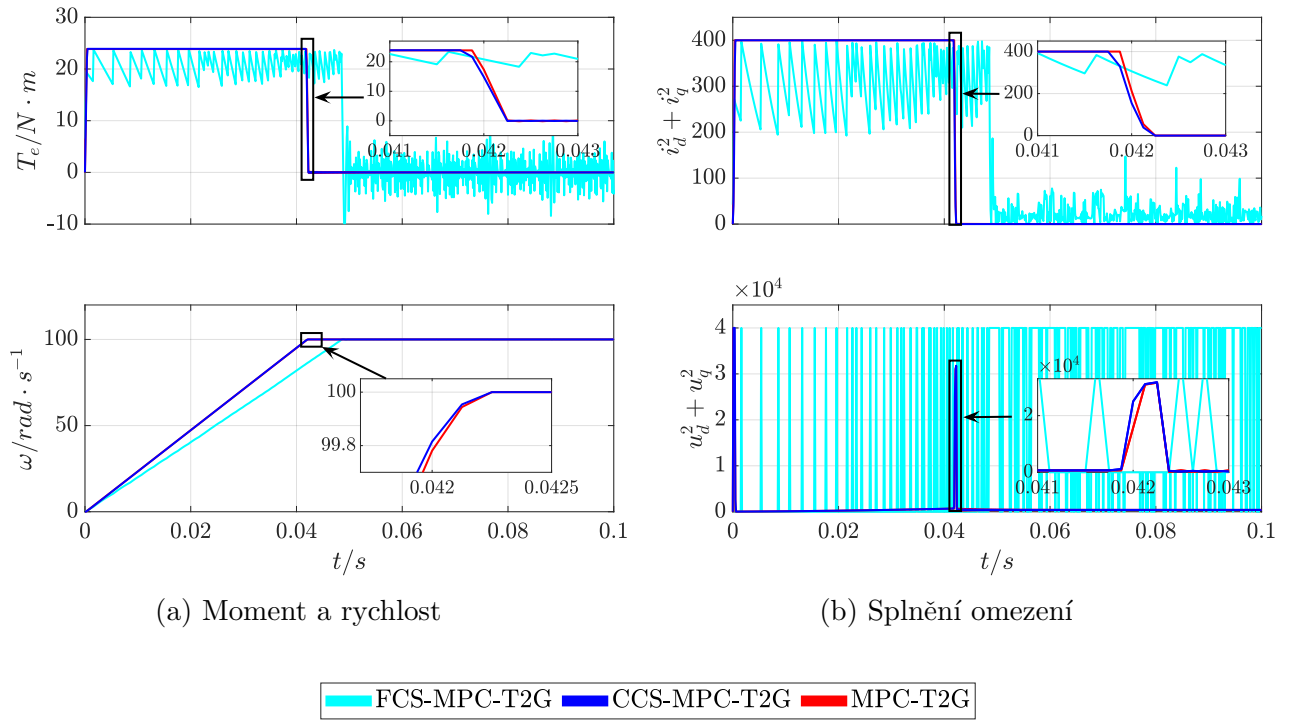
6.4 Experimenty

Proveďme nyní s navrženými efektivními MPC algoritmy pro řízení PMSM založenými na principech MPC-T2G několik experimentů, abychom se blíže přesvědčili o jejich kvalitě a možnostech praktického využití. K tomu opět předpokládejme, že řešíme problém 3 definovaný v rámci kapitoly 5, tj. požadujeme, aby PMSM s parametry uvedenými v tabulce 5.3 dosáhl referenční rychlosti $\omega^r = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

6.4.1 Numerické experimenty

Pro následující experimenty využijme opět stejné výpočetní prostředí i hardware jako v případě kapitoly 5.

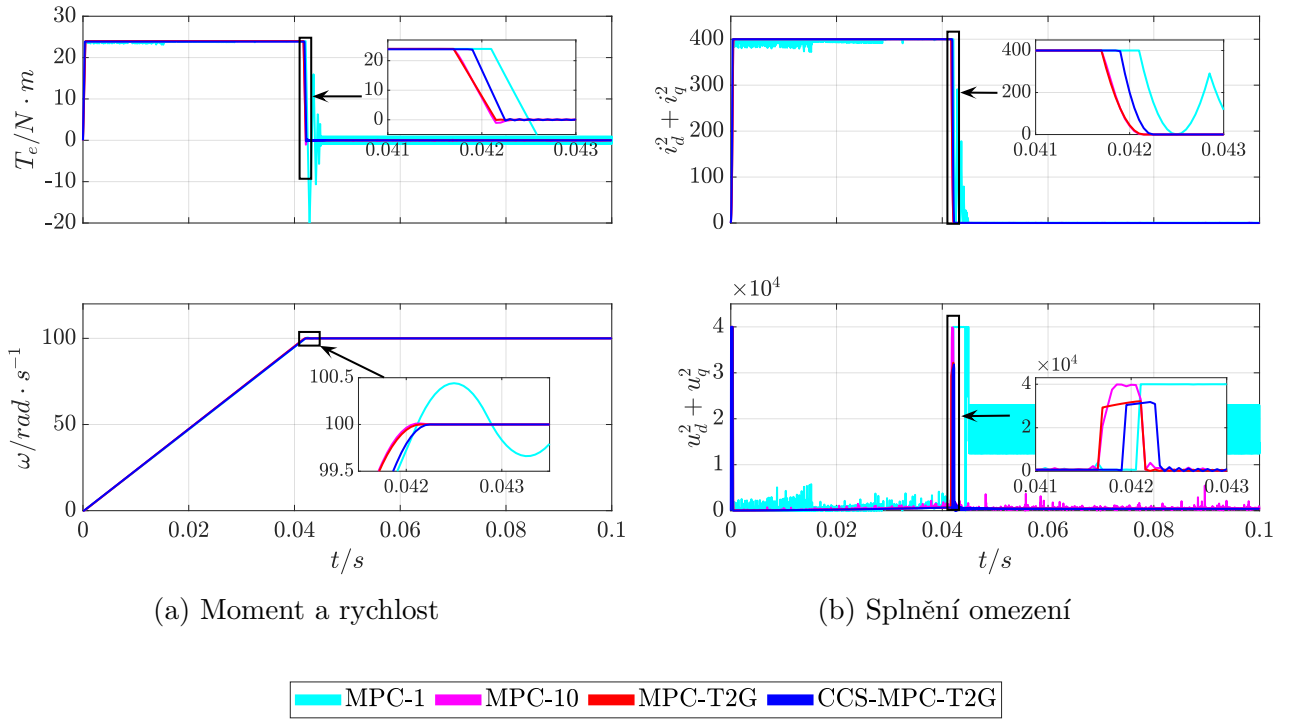
V prvním experimentu porovnejme přímo FCS-MPC a CCS-MPC verzi MPC-T2G. Na obr. 6.3 jsou zobrazeny časové průběhy těchto numericky efektivních přístupů. Uživatelsky volitelný parametr byl pro experiment volen jako $c = 1 \cdot 10^{-4}$. Jak však víme, pro uvažované rozmezí uživatelsky volitelných parametrů je CCS-MPC-T2G verze k ladění imunní. Abychom však opět demonstrovali rozdíl CCS-MPC-T2G oproti původnímu neefektivnímu MPC-T2G i s pro experiment zvoleným uživatelsky volitelným parametrem (připomeňme, že největší možný rozdíl byl demonstrován na obr. 6.1), je na obr. 6.3 ukázán i časový průběh PMSM řízeného MPC-T2G s odpovídajícím laděním.



Obrázek 6.3: Vybrané časové průběhy PMSM řízeného navrženým efektivním FCS-MPC-T2G a CCS-MPC-T2G a původním MPC-T2G.

Z obr. 6.3 je tak ihned patrná menší efektivita FCS-MPC-T2G přístupu, která však platí pro všechny FCS-MPC přístupy globálně, a tudíž ji šlo předpokládat. Průměrný čas výpočtu optimálního akčního zásahu FCS-MPC-T2G v jednom časovém kroku Δt činil $1.7601 \cdot 10^{-4} s$, pro CCS-MPC-T2G byl průměrný čas výpočtu Δt dokonce o něco menší a to $1.3043 \cdot 10^{-4} s$. Oba přístupy tak z výpočetního hlediska můžeme považovat za nenáročné a jsou tak vhodnými kandidáty pro praktické využití.

V rámci druhého experimentu se zaměříme na to, jak velkou kvalitu z různých hledisek ztratíme nebo získáme, upřednostníme-li CCS-MPC-T2G před MPC-T2G s různě dlouhým prediktivním horizontem, potažmo před MPC-T2G. Jelikož lze předpokládat, že CCS-MPC-T2G se bude držet v bodě s malým ST, jak bylo ostatně zmíněno při relaxaci kritéria MPC-T2G před vlastním návrhem CCS-MPC-T2G, naladíme uživatelsky volitelný parametr c u ostatních zkoumaných algoritmů tak, aby pro něj PMSM dosáhl v tomto naladění minimálního ST. Časový vývoj takových MPC algoritmů ilustruje obr. 6.4. Kvalitu pak můžeme odečíst z tabulky 6.1.



Obrázek 6.4: Vybrané časové průběhy PMSM řízeného navrženým efektivním CCS-MPC-T2G, vybranými MPC- N a původním MPC-T2G.

Algoritmus	MPC-1	MPC-10	MPC-T2G	CCS-MPC-T2G
$\varnothing t/s$	0.0291	0.5080	0.0451	$1.3043 \cdot 10^{-4}$
$\sum \omega - \omega^r $	$4.2492 \cdot 10^4$	$4.2193 \cdot 10^4$	$4.2210 \cdot 10^4$	$4.2236 \cdot 10^4$
$\sum (i_d^2 + i_q^2)$	$3.3700 \cdot 10^5$	$3.3257 \cdot 10^5$	$3.3236 \cdot 10^5$	$3.3321 \cdot 10^5$
$ST_{0.1\%/s}$	0.04420	0.04220	0.04220	0.04225

Tabulka 6.1: Kvalitativní porovnání mezi CCS-MPC-T2G, vybranými MPC- N a původním MPC-T2G.

Především z tabulky 6.1 je patrné, že byť MPC- N o delším horizontu, popř. MPC-T2G, poskytuje o něco rychlejší čas náběhu při menší celkové odchylce a Jouleových ztrátách, je to zejména čas výpočtu, kde si z logických důvodů vede CCS-MPC-T2G o mnoho lépe, než MPC- N i už tak jeho nároky značně zmenšující MPC-T2G. V případě, že nás tedy zajímá při řízení PMSM obdržení minimálního ST při minimálních ztrátách, což se díky blízkosti L0 a L1 normy prakticky rovná podmínce minimální celkové odchylky penalizované L1 normou a minimálním Jouleovým ztrátám, představuje algoritmus CCS-MPC-T2G zajímavou reálně implementovatelnou možností, jak k tomuto řešení přistoupit. Nuance mezi CCS-MPC-T2G a MPC- N o delším horizontu, potažmo mezi CCS-MPC-T2G a MPC-T2G, jsou způsobeny samozřejmě značnou aproximací, která byla pro odvození algoritmu CCS-MPC-T2G využita.

Ve třetím experimentu porovnejme CCS-MPC-T2G s alternativními CCS-MPC přístupy uvedenými v literatuře jako např. [69, 85] označenými dále jako Preindl2015 a Šmídl2018. Připomeňme však, že je toto porovnání nutné brát s rezervou. Alternativní

přístupy jsou ve většině případů založené na L2 normě ve ztrátové funkci MPC kritéria a mají tak jiné předpoklady. Spíše než o konkrétní hodnoty nám jde zde tak o to poukázat na konkrétní trendy různých CCS-MPC přístupů. Na obr. 6.5 je zachyceno porovnání CCS-MPC-T2G s Preindl2015 a Šmídl2018, které byly naladěné tak, aby poskytly, stejně jako CCS-MPC-T2G, co možná nejmenší ST.

Z obr. 6.5 je patrné, že oba alternativní přístupy mají problém s prudkým brzděním PMSM, které CCS-MPC-T2G využívá k tomu, aby co nejrychleji a nejpresněji dosáhl požadovaných otáček. Preindl2015 dokonce vykazuje mírný překmit. Asi největší rozdíl na hrubé aproximaci založeného CCS-MPC-T2G od ostatních zde diskutovaných přístupů (nejen alternativních CCS-MPC přístupů) se pak projevuje hlavně v odlišném průběhu proudů. Při porušení podmínky $L_d = L_q$ totiž dochází k tomu, že ostatní přístupy negenerují zpočátku napětí tak, jak to aproximativně navrhuje scénář A, a to přidat maximální napětí do osy q . Přesto je algoritmus CCS-MPC-T2G úspěšný, neboť si díky akčním zásahům v podobě většího vstupního napětí dokáže pomoci právě razantnějším brzděním před nájezdem do požadované úhlové rychlosti (toto chování lze přisoudit scénáři C) a adekvátně zmenšovat proud v ose d (díky scénáři B).

Ostatní ukazatele kvality uvedené v tabulce 6.2 je nutné brát, jak bylo nastíněno výše, s rezervou. Asi nejdůležitějším ukazatelem v tabulce 6.2 je tak určitě průměrný čas výpočtu $\varnothing t$, který se u všech v tabulce zmíněných CCS-MPC přístupů příliš neliší, což ukazuje, že CCS-MPC-T2G má potenciál být implementován v reálném prostředí. Zmiňme také, že nezanedbatelnou vlastností CCS-MPC-T2G oproti alternativním CCS-MPC přístupům je, že zde není žádný uživatelsky volitelný parametr. Případný uživatel tak dostává do rukou algoritmus, který mu zajistí relativně rychlý nájezd PMSM na požadované otáčky za relativně malých Jouleových ztrát bez nutnosti dalšího ladění.

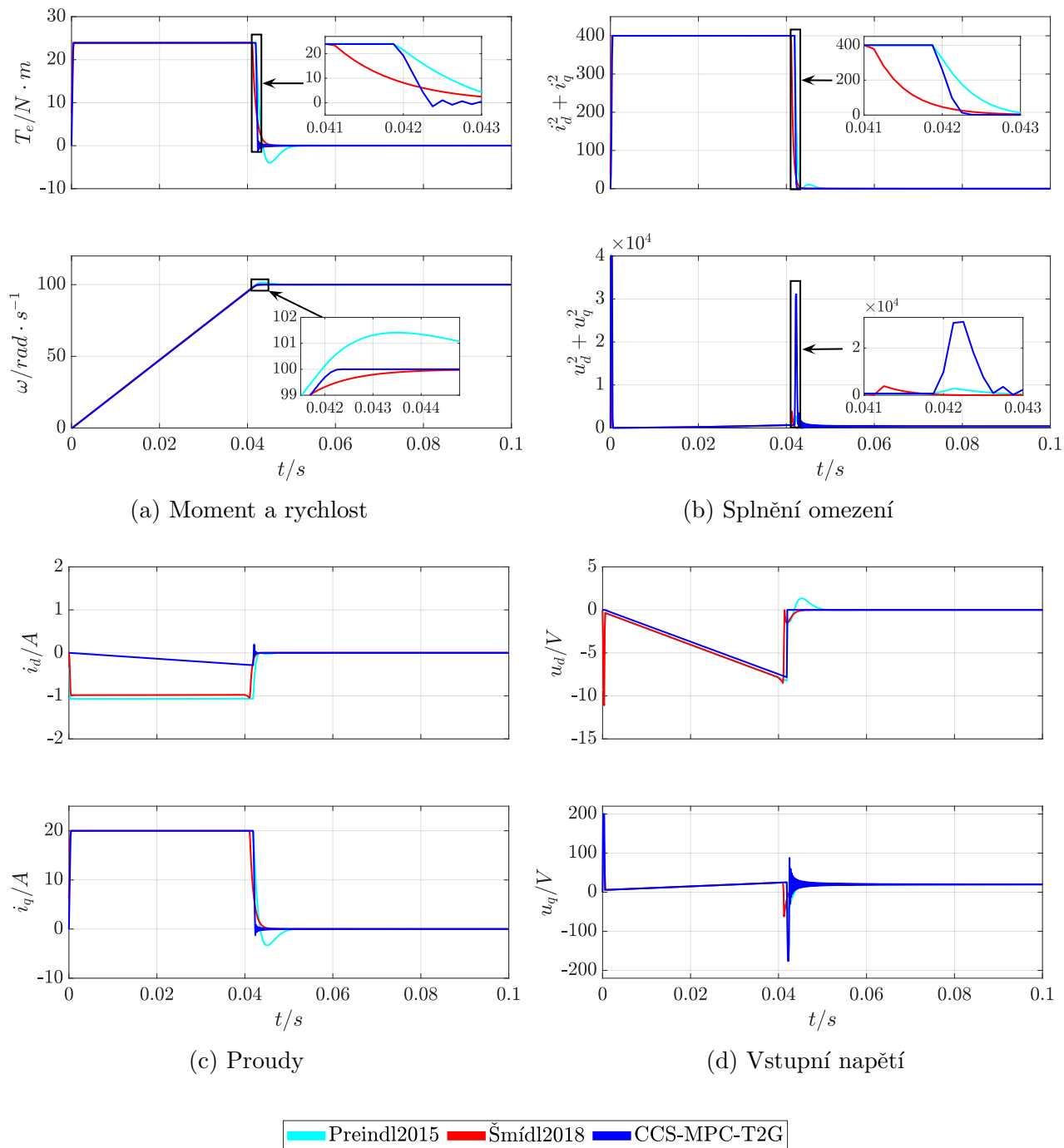
Algoritmus	Preindl2015	Šmídl2018	CCS-MPC-T2G
$\varnothing t/s$	$1.2241 \cdot 10^{-4}$	$1.5139 \cdot 10^{-4}$	$1.3043 \cdot 10^{-4}$
$\sum \omega - \omega^r $	$4.2349 \cdot 10^4$	$4.2274 \cdot 10^4$	$4.2236 \cdot 10^4$
$\sum (i_d^2 + i_q^2)$	$3.3621 \cdot 10^5$	$3.3193 \cdot 10^5$	$3.3321 \cdot 10^5$
$ST_{0.1\%}/s$	0.04900	0.04390	0.04225

Tabulka 6.2: Kvalitativní porovnání mezi CCS-MPC-T2G, Preindl2015 a Šmídl2018.

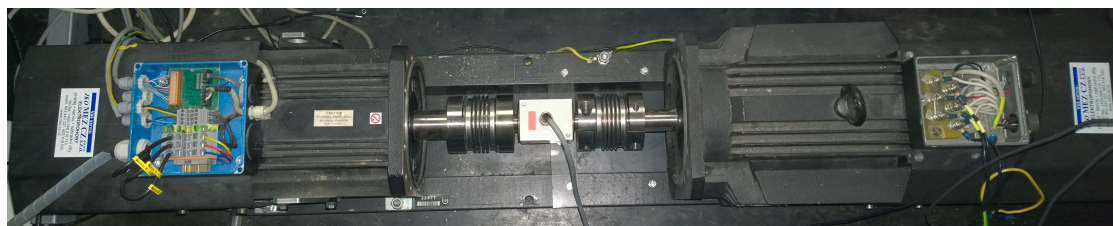
6.4.2 Experiment s reálným strojem

Po potvrzení vhodnosti využití CCS-MPC-T2G pro praktické aplikace prostřednictvím numerických simulací byl CCS-MPC-T2G testován na fyzickém PMSM především jako demonstrace toho, že jeho výpočetní nároky skutečně dovolují nasazení tohoto algoritmu v reálných podmínkách. K demonstraci byl použit laboratorní prototyp PMSM jmenovitého výkonu $10.7 [kW]$ s parametry odpovídajícími parametrům v tabulce 5.3. Algoritmus CCS-MPC-T2G byl implementován na signálovém procesoru Texas Instruments® TMS320F28335. Laboratorní vybavení je ilustrováno na obr. 6.6.

Pro účely názorné demonstrace byl cíl řízení laboratorního PMSM ještě rozšířen i o nájezd na reverzní referenční úhlovou rychlost ($\omega^r = -100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Kompletní výsledek experimentu si je možné prohlédnout ve formě záznamu z osciloskopu na obr. 6.7. Názorně tak vidíme, že navržený efektivní CCS-MPC-T2G algoritmus může být skutečně



Obrázek 6.5: Vybrané časové průběhy PMSM řízeného navrženým efektivním CCS-MPC-T2G a alternativními efektivními CCS-MPC přístupy Preindl2015 a Šmídl2018.



Obrázek 6.6: Laboratorní prototyp PMSM jmenovitého výkonu 10.7 [kW] (levý stroj) mechanicky spojený s indukčním strojem o jmenovitém výkonu 14.5 [kW], který je možné využít pro simulaci zatížení (pravý stroj).

nasazen v reálném prostředí, kde dokáže kvalitě kompenzovat případné nepřesnosti v odhadu stavu díky svému původu v MPC. Zmiňme, že výpočetní čas na použitém hardwaru činil $12.8 \mu s$ a to včetně sběru a zpracování (filtrace) dat.

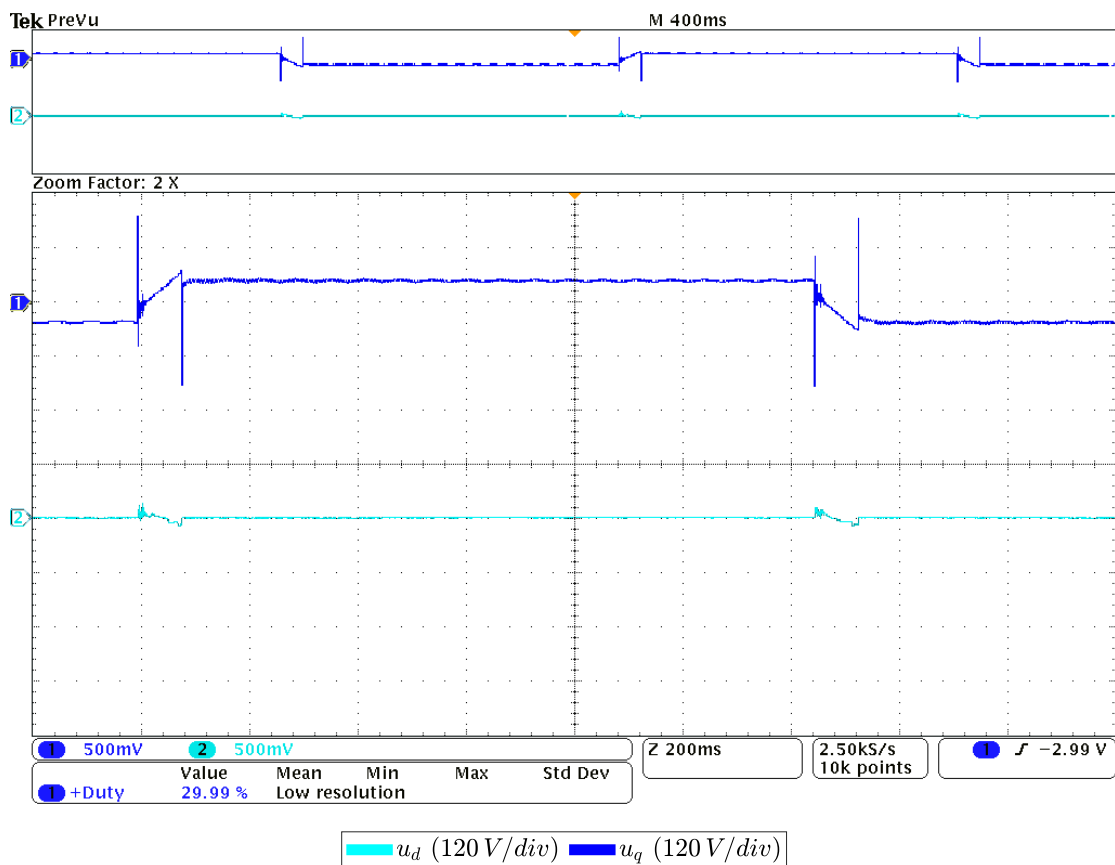
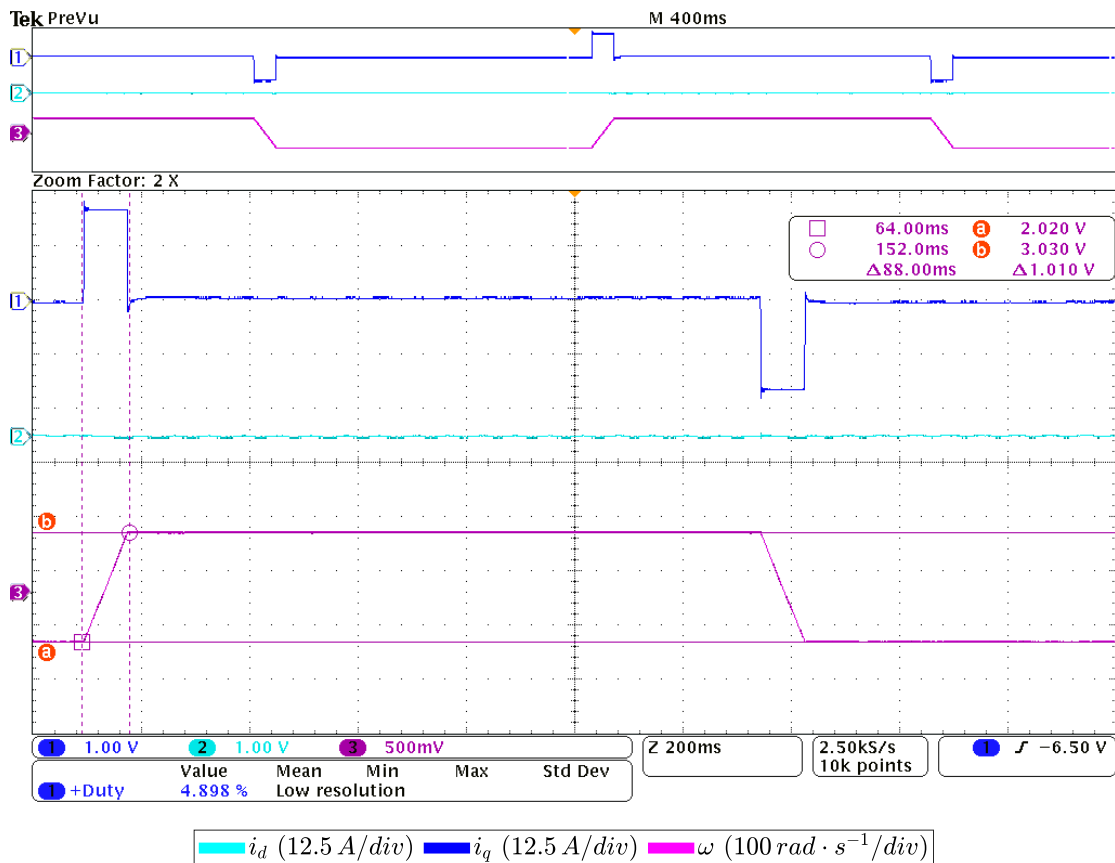
6.5 Shrnutí

V kapitole 6 byla věnována pozornost návrhu MPC pro PMSM. Ukázali jsme, že MPC představuje zajímavou alternativu ke klasickým přístupům řízení tohoto druhu elektromotoru, jejíž výhody lze spatřit především v jasně interpretovatelném cíli řízení a redukci nároků na uživatele kladených ve formě menšího počtu uživatelsky volitelných parametrů, jež je nutné ladit. Ačkoliv se tak zdá MPC přístup jako výborný kandidát pro regulaci PMSM, existuje zde jedna velká překážka, se kterou se je nutné nějak vypořádat, a to nutnost uvažovat malé periody vzorkování.

V kapitole 6 bylo k návrhu MPC pro PMSM s výhodou využito poznatků kapitoly 5, jež se zabývala návrhem terminální ztrátové funkce pro systémy s D-I dynamikou umožňující dodat některé zajímavé vlastnosti MPC s dlouhým horizontem do MPC kritéria s velmi krátkým prediktivním horizontem. Značná výpočetní úspora, která díky navrženému MPC-T2G přístupu vznikla, slíbila zajímavé výsledky i v případě nasazení obdobného přístupu na problém řízení PMSM, tedy systému s nelineární dynamikou, jehož část ale lze, jak bylo diskutováno v kapitolách předešlých, aproximovat D-I dynamikou.

Ačkoliv MPC-T2G s sebou přineslo značnou výpočetní úsporu, pro návrh MPC pro PMSM použitelného v praxi bylo přece jen nutné výpočetní nároky ještě snížit. K tomu bylo přistoupeno dvěma způsoby - buď diskretizací domény akčních zásahů při uvažování VSI pro generování konečné množiny akčních zásahů, z níž je optimální akční zásah vybírán dle MPC-T2G kritéria, tj. FCS-MPC přístup, nebo návrhem efektivního CCS-MPC algoritmu na základě relaxace MPC-T2G kritéria a sledováním scénářů, které se při generování akčního zásahu podle tohoto relaxovaného kritéria pravidelně střídají. Především návrh efektivních CCS-MPC přístupů představuje, jak bylo naznačeno, velmi aktuální směr ve vývoji MPC algoritmů pro řízení PMSM. Výsledný CCS-MPC-T2G algoritmus byl proto srovnán s CCS-MPC přístupy řízení PMSM vystavenými na jiných principech, aby se ukázalo, že je skutečně jejich zajímavou alternativou. Mezi největší výhody CCS-MPC-T2G algoritmu lze zařadit jeho jednoduchost. Případný uživatel s ním dostává do rukou jednoduše implementovatelný algoritmus bez nutnosti ladění dalších uživatelsky volitelných parametrů, jenž mu zajistí rychlý a přesný nájezd PMSM na požadované otáčky při relativně malých Jouleových ztrátách.

Aplikací navrženého CCS-MPC-T2G na laboratorním PMSM v reálných podmínkách se podařilo naplnit i poslední část druhého cíle této disertační práce. Druhý cíl disertační práce spočívající v návrhu efektivního MPC použitelného v praktických aplikacích lze tak považovat za splněný.



Obrázek 6.7: Časový průběh laboratorního PMSM řízeného navrženým CCS-MPC-T2G.

Kapitola 7

Zobecnění návrhu prediktivního řízení

Doposud byla uvažována u všech představených systémů s D-I dynamikou, pro něž jsme se snažili navrhnout výpočetně nenáročný MPC, pouze symetrická omezení. Samotný návrh terminální ztrátové funkce tak nativně předpokládal symetrická omezení, resp. v ústředním bodě návrhu terminální ztrátové funkce MPC kritéria reprezentovaného T2G funkcí D-I systému byl uvažován pouze D-I systém (3.1) se symetrickými omezeními (3.2). Pro některé úlohy však nemusí být takový předpoklad dostatečný (např. rychlost či zrychlení vozíku jsou omezeny nesymetricky).

Následující kapitola se proto zabývá možností rozšíření stávajícího návrhu terminální ztrátové funkce MPC kritéria se ztrátovou funkcí založenou na L1 normě pro penalizaci odchylky stavu odpovídajícího poloze D-I systému. V první řadě je zde představena T2G funkce D-I systému s nesymetrickými omezeními a dále je zde diskutován vliv jejího použití v terminální ztrátové funkci. Možnosti předpokládat nesymetrická omezení je pak s výhodou využito pro rozšířenou aproximaci nelineárního modelu PMSM, která posouvá možnosti samotné regulace PMSM.

7.1 Time-to-go funkce dvojitého integrátoru pro nesymetrická omezení

Předpokládejme nyní problém (5.5) s.t. (3.1) a omezení, která nyní nově uvažujeme jako

$$x_1 \in \langle \underline{x}_1, \bar{x}_1 \rangle, \underline{x}_1 \in \mathbb{R}_{<0}, \bar{x}_1 \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (7.1a)$$

$$x_2 \in \langle \underline{x}_2, \bar{x}_2 \rangle, \underline{x}_2, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}, \underline{x}_2 < \bar{x}_2, \quad (7.1b)$$

$$u \in \langle \underline{u}, \bar{u} \rangle, \underline{u} \in \mathbb{R}_{<0}, \bar{u} \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (7.1c)$$

tj. hledíme T2G funkci $t_f^{\text{D-I}}$ definovanou jako

$$t_f^{\text{D-I}}(\mathbf{x}) = \min T \quad (7.2)$$

s.t. (3.1), (7.1),

Omezení (7.1) v paralele s jednoosým vozíkem tak představují situaci, kdy je možné brzdit i zrychlovat na nějakém vymezeném intervalu, avšak s různou minimální (maximální) hodnotou.

V [Feh6] bylo demonstrováno analytické řešení výše uvedeného problému (7.2) stojící na obdobných principech jako odvození T2G funkce pro omezení symetrická. V první řadě je třeba opět určit časově optimální trajektorii řízení ve fázovém prostoru. Tu lze i v tomto „nesymetrickém případě“ charakterizovat jako typu bang-(off)-bang. Prvním důležitým milníkem pro stanovení časově optimální trajektorie řízení je tak znovu stanovení přepínací křivky, již lze vyjádřit pro uvažovaný nesymetrický případ omezení jako

$$\mathcal{S} : x_2 = \begin{cases} \frac{K_2}{2K_1\bar{u}} (x_1^2 - (x_1^r)^2) + x_2^r, & \text{pokud } x_1 \in \langle \underline{x}_1, x_1^r \rangle, \\ \frac{K_2}{2K_1\underline{u}} (x_1^2 - (x_1^r)^2) + x_2^r, & \text{pokud } x_1 \in \langle x_1^r, \bar{x}_1 \rangle. \end{cases}$$

Na tomto místě se hodí též připomenout, že při uvažování libovolného konstantního akčního zásahu $u_c \in \mathbb{R}_{-\{0\}}$ se uzavřený D-I systém ve fázovém prostoru pohybuje po parabolické křivce $x_2 = \frac{K_2}{2K_1u_c} (x_1^2 - x_{1,0}^2) + x_{2,0}$. Přepínací křivka \mathcal{S} tak opět zastupuje body fázového prostoru, ze kterých je referenční stav přímo dosažitelný aplikací minimálního nebo maximálního možného akčního zásahu.

Jak rovněž víme z diskuze o časově optimální trajektorii D-I systému se symetrickými omezeními, je dále nutné vytyčit oblast, kde je dostatečné uvažovat pouze bang-bang řízení. Pro uvažovaný nesymetrický případ leží tato oblast mezi hraničními křivkami \mathcal{U}_1 a \mathcal{L}_1 , jež zastupují hraniční trajektorii směřující do průniku přepínací křivky a stavového omezení a jsou dány jako

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 : x_2 &= \frac{K_2}{2K_1\underline{u}} (\bar{x}_1^2 - (x_1^r)^2) - \frac{K_2}{2K_1\bar{u}} (\bar{x}_1^2 - x_1^2) + x_2^r, \\ \mathcal{L}_1 : x_2 &= \frac{K_2}{2K_1\bar{u}} (\underline{x}_1^2 - (x_1^r)^2) - \frac{K_2}{2K_1\underline{u}} (\underline{x}_1^2 - x_1^2) + x_2^r. \end{aligned}$$

Připomeňme, že pokud leží aktuální stav D-I systému nad přepínací křivkou \mathcal{S} a pod hraniční křivkou \mathcal{U}_1 , potom časově optimální strategie řízení spočívá v přepnutí mezi minimálním a maximálním možným akčním zásahem při dosažení přepínací křivky ($\underline{u} \rightarrow \bar{u}$). Pokud naopak leží aktuální akční zásah pod přepínací křivkou \mathcal{S} a nad hraniční křivkou \mathcal{L}_1 , lze časově optimální strategii vyjádřit jako $\bar{u} \rightarrow \underline{u}$.

Pro zbylou množinu stavů D-I systému, ze kterých je možné dojít při splnění nesymetrických omezení (7.1) do referenčního stavu, platí, že v nich časově optimální strategii řízení představuje bang-off-bang strategie. Tato množina stavů je shora a zdola vytyčena hraničními křivkami \mathcal{U}_2 a \mathcal{L}_2 , jež je možné vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 : x_2 &= \begin{cases} \bar{x}_2, & \text{pokud } x_1 \in \langle \underline{x}_1, 0 \rangle, \\ \frac{K_2}{2K_1\underline{u}} x_1^2 + \bar{x}_2, & \text{pokud } x_1 \in \langle 0, \bar{x}_1 \rangle, \end{cases} \\ \mathcal{L}_2 : x_2 &= \begin{cases} \frac{K_2}{2K_1\bar{u}} x_1^2 + \underline{x}_2, & \text{pokud } x_1 \in \langle \underline{x}_1, 0 \rangle, \\ \underline{x}_2, & \text{pokud } x_1 \in \langle 0, \bar{x}_1 \rangle. \end{cases} \end{aligned}$$

Pokud tak leží aktuální stav D-I systému nad přepínací křivkou \mathcal{S} , nad hraniční křivkou \mathcal{U}_1 a pod hraniční křivkou \mathcal{U}_2 , spočívá časově optimální strategie řízení v přepnutí mezi minimálním možným a nulovým akčním zásahem na stavovém omezení \underline{x}_1 a mezi nulovým a maximálně možným akčním zásahem na přepínací křivce ($\underline{u} \rightarrow 0 \rightarrow \bar{u}$). Pokud leží aktuální stav D-I systému pod přepínací křivkou \mathcal{S} , pod hraniční křivkou \mathcal{L}_1 a nad hraniční

křivkou \mathcal{L}_2 , představuje naopak časově optimální strategii $\bar{u} \rightarrow 0 \rightarrow \underline{u}$ s nulovým akčním zásahem drženým na stavovém omezení \bar{x}_1 .

Kompletní časově optimální strategie řízení D-I systému s nesymetrickými omezeními (7.1) je pak ve fázovém prostoru vyjádřitelná jako

$$u_t^* = \begin{cases} \underline{u}, & \text{pokud } (x_1 \in (\underline{x}_1, \bar{x}_1) \wedge x_2 > \mathcal{S}) \vee (x_1 \in (x_1^r, \bar{x}_1) \wedge x_2 = \mathcal{S}), \\ 0, & \text{pokud } (x_1 = \underline{x}_1 \wedge x_2 \neq \mathcal{S}) \vee (x_1 = \bar{x}_1 \wedge x_2 \neq \mathcal{S}) \vee \mathbf{x} = \mathbf{x}^r, \\ \bar{u}, & \text{pokud } (x_1 \in (\underline{x}_1, \bar{x}_1) \wedge x_2 < \mathcal{S}) \vee (x_1 \in (\underline{x}_1, x_1^r) \wedge x_2 = \mathcal{S}), \end{cases}$$

přičemž musí platit podmínka $\mathcal{L}_2 \leq x_2 \leq \mathcal{U}_2$. Právě uvedenou strategii řízení a to, jak se konkrétně projevuje postupné opouštění předpokladu symetrie u jednotlivých omezení, si je možné pro ilustraci prohlédnout na obr. 7.1.

Je-li k dispozici příslušná časově optimální strategie řízení, můžeme přikročit k určení samotné T2G funkce, již získáme výpočtem časů přepnutí. Výsledný čas pak bude dán, stejně jako v symetrickém případě, součtem těchto časů přepnutí. Pro jednotlivé strategie řízení tak získáváme následující časy

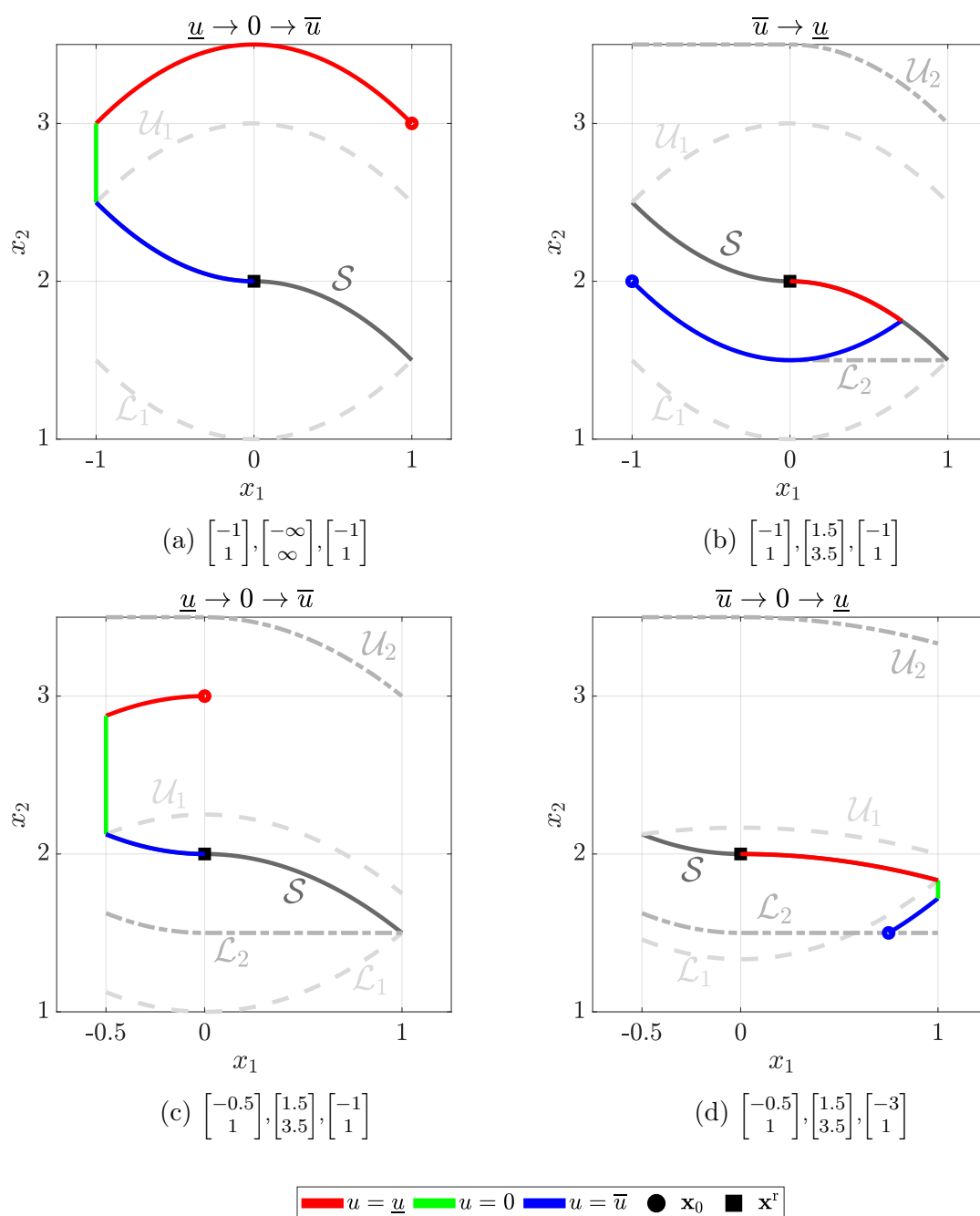
$$\begin{aligned} \underline{u} \rightarrow \bar{u} : t_f^{(1)} &= \frac{x_1^r \underline{u} - x_1 \bar{u} + (u - \bar{u}) \sqrt{\frac{K_2 \bar{u} x_1^2 - K_2 \underline{u} (x_1^r)^2 + 2K_1 \bar{u} \underline{u} (x_2^r - x_2)}{K_2 (\bar{u} - \underline{u})}}}{K_1 \underline{u} \bar{u}}, \\ \bar{u} \rightarrow \underline{u} : t_f^{(2)} &= \frac{x_1^r \bar{u} - x_1 \underline{u} + (u - \bar{u}) \sqrt{\frac{K_2 \underline{u} x_1^2 - K_2 \bar{u} (x_1^r)^2 + 2K_1 \bar{u} \underline{u} (x_2^r - x_2)}{K_2 (\underline{u} - \bar{u})}}}{K_1 \underline{u} \bar{u}}, \\ \underline{u} \rightarrow 0 \rightarrow \bar{u} : t_f^{(3)} &= \frac{\underline{x}_1 - x_1}{K_1 \underline{u}} + \frac{\underline{x}_1^2 - (x_1^r)^2}{2K_1 \bar{u} x_1} + \frac{x_2^r - x_2}{K_2 \underline{x}_1} - \frac{\underline{x}_1^2 - x_1^2}{2K_1 \underline{u} x_1} + \frac{x_1^r - \underline{x}_1}{K_1 \bar{u}}, \\ \bar{u} \rightarrow 0 \rightarrow \underline{u} : t_f^{(4)} &= \frac{\bar{x}_1 - x_1}{K_1 \bar{u}} + \frac{\bar{x}_1^2 - (x_1^r)^2}{2K_1 \underline{u} \bar{x}_1} + \frac{x_2^r - x_2}{K_2 \bar{x}_1} - \frac{\bar{x}_1^2 - x_1^2}{2K_1 \bar{u} \bar{x}_1} + \frac{x_1^r - \bar{x}_1}{K_1 \underline{u}}. \end{aligned}$$

Hledanou T2G funkci D-I systému s nesymetrickými omezeními (7.1) získáme díky znalosti toho, kde ve fázovém prostoru aplikujeme jakou časově optimální strategii řízení. T2G funkci lze tedy vyjádřit jako

$$t_f^{\text{D-I}}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{cases} t_f^{(1)}, & \text{pokud } A \wedge x_2 > \mathcal{S} \wedge x_2 \leq \mathcal{U}_1 \wedge x_2 \leq \mathcal{U}_2, \\ t_f^{(2)}, & \text{pokud } A \wedge x_2 \leq \mathcal{S} \wedge x_2 \geq \mathcal{L}_1 \wedge x_2 \geq \mathcal{L}_2, \\ t_f^{(3)}, & \text{pokud } A \wedge x_2 > \mathcal{S} \wedge x_2 > \mathcal{U}_1 \wedge x_2 \leq \mathcal{U}_2, \\ t_f^{(4)}, & \text{pokud } A \wedge x_2 \leq \mathcal{S} \wedge x_2 < \mathcal{L}_1 \wedge x_2 \geq \mathcal{L}_2, \\ p, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (7.4)$$

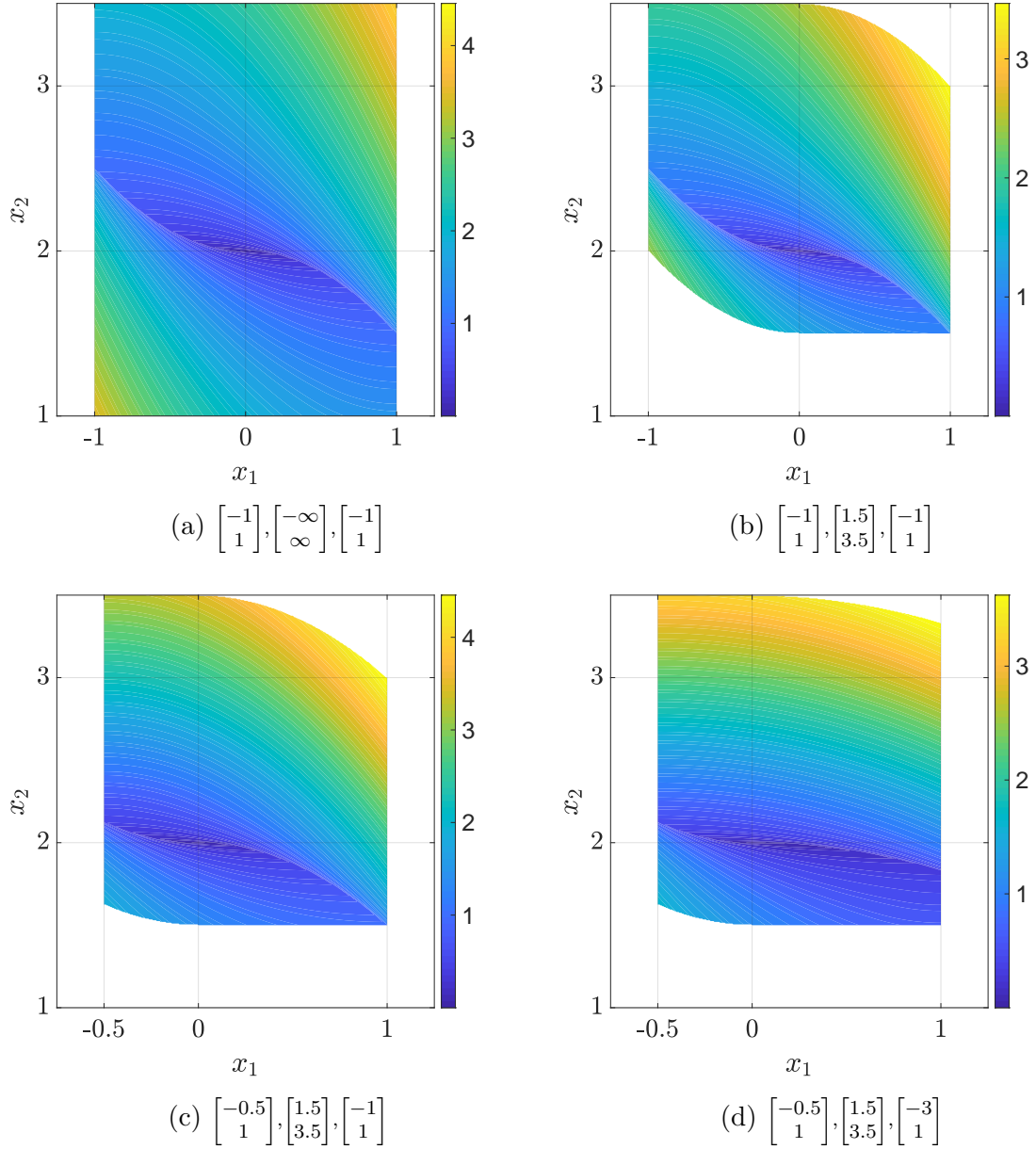
kde A zastupuje podmínku $x_1, x_1^r \in (\underline{x}_1, \bar{x}_1) \wedge x_2, x_2^r \in (\underline{x}_2, \bar{x}_2)$ a parametr $p \in \mathbb{R}_{>0}$ je opět konstanta penalizující překročení omezení (předpokládejme dále opět tvrdá omezení, tj. $p = \infty$). Příklady T2G funkce při postupném opouštění předpokladu symetrie jednotlivých omezení si je možné prohlédnout na obr. 7.2.

Zmiňme, že T2G funkce (7.4) zcela určitě není ještě s to pokrýt všechny možné požadavky, které na ni mohou být v praktických problémech kladeny. Jak uvidíme dále,



Obrázek 7.1: Časově optimální strategie řízení D-I systému ($K_1 = K_2 = 1$) při nesymetrických omezeních (omezení uvedena v pořadí $\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$).

někdy se může hodit např. předpokládat, že stav x_2 D-I systému není nějak omezený, ale na druhou stranu omezení akčního zásah může z nějakého důvodu splňovat, že jeho dolní i horní mez mají stejné znaménko, tj. $\text{sgn}(\underline{u}) = \text{sgn}(\bar{u})$. V takovém případě představuje pro stavy, z nichž můžeme dosáhnout referenčního stavu, časově optimální strategii řízení bang-bang strategie $\underline{u} \rightarrow \bar{u}$. T2G funkce (7.4) pak může být jednoduše rozšířena do po-



Obrázek 7.2: T2G funkce D-I systému ($K_1 = K_2 = 1$, $x_1^r = 0$ a $x_2^r = 2$) při nesymetrických omezeních (omezení uvedena v pořadí $\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$).

dooby

$$t_{f_e}^{\text{D-I}'}(\mathbf{x}) \triangleq \begin{cases} t_f^{\text{D-I}'}(\mathbf{x}), & \text{pokud } \text{sgn}(\underline{u}) \neq \text{sgn}(\bar{u}), \\ t_f^{(5)}, & \text{pokud } \underline{u}, \bar{u} > 0 \wedge \underline{x}_1 \leq x_1 < x_1^r \leq \bar{x}_1 \wedge \underline{x}_2^u \leq x_2^r \leq \bar{x}_2^u, \\ t_f^{(6)}, & \text{pokud } \underline{u}, \bar{u} > 0 \wedge \underline{x}_1 \leq x_1 < x_1^r \leq \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2^u \leq x_2^r \leq \underline{x}_2^u, \\ t_f^{(7)}, & \text{pokud } \underline{u}, \bar{u} < 0 \wedge \underline{x}_1 \leq x_1^r < x_1 \leq \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2^u \leq x_2^r \leq \underline{x}_2^u, \\ t_f^{(8)}, & \text{pokud } \underline{u}, \bar{u} < 0 \wedge \underline{x}_1 \leq x_1^r < x_1 \leq \bar{x}_1 \wedge \underline{x}_2^u \leq x_2^r \leq \bar{x}_2^u, \\ \infty, & \text{jinak,} \end{cases} \quad (7.5)$$

kde časy $t_f^{(5-8)}$ jsou dány jako

$$t_f^{(5)} = \frac{-x_{1,s} - x_1}{K_1 \underline{u}} + \frac{x_1^r + x_{1,s}}{K_1 \bar{u}}, \quad t_f^{(6)} = \frac{x_{1,s} - x_1}{K_1 \bar{u}} + \frac{x_1^r - x_{1,s}}{K_1 \underline{u}},$$

$$t_f^{(7)} = \frac{-x_{1,s} - x_1}{K_1 \bar{u}} + \frac{x_1^r + x_{1,s}}{K_1 \underline{u}}, \quad t_f^{(8)} = \frac{x_{1,s} - x_1}{K_1 \underline{u}} + \frac{x_1^r - x_{1,s}}{K_1 \bar{u}}$$

a kde hraniční křivky pro stavy, z nichž je možné dojít aplikací akčního zásahu do referenčního stavu, lze vyjádřit jako

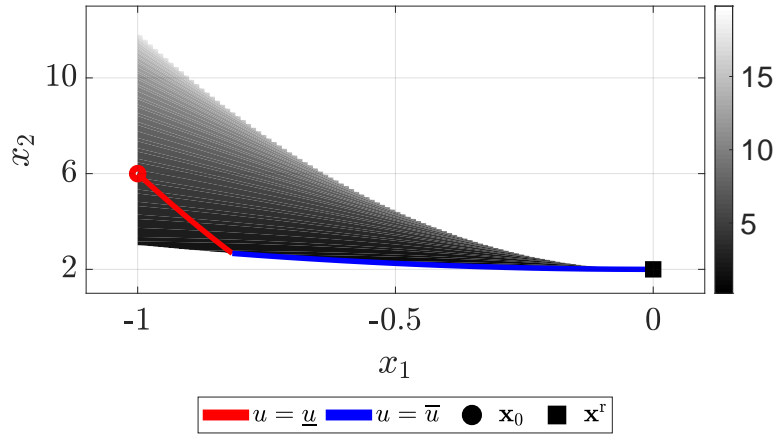
$$\underline{x}_2^u = \frac{K_2}{2K_1 \underline{u}} ((x_1^r)^2 - x_1^2) + x_2,$$

$$\bar{x}_2^u = \frac{K_2}{2K_1 \bar{u}} ((x_1^r)^2 - x_1^2) + x_2.$$

Důležitý stav (bod) ve fázovém prostoru, kde dochází k přepnutí mezi minimálním a maximálním možným akčním zásahem v časově optimální strategii pro $\text{sgn}(\underline{u}) = \text{sgn}(\bar{u})$ lze vyjádřit jako

$$x_{1,s} = \begin{cases} \sqrt{\frac{x_2^r - \frac{K_2(x_1^r)^2}{2K_1 \bar{u}} + \frac{K_2 x_1^2}{2K_1 \underline{u}} - x_2}{\frac{K_2}{2K_1 \underline{u}} - \frac{K_2}{2K_1 \bar{u}}}}, & \text{pokud } \underline{x}_2^u \leq x_2 \leq \bar{x}_2^u, \\ \sqrt{\frac{x_2^r - \frac{K_2(x_1^r)^2}{2K_1 \underline{u}} + \frac{K_2 x_1^2}{2K_1 \bar{u}} - x_2}{\frac{K_2}{2K_1 \bar{u}} - \frac{K_2}{2K_1 \underline{u}}}}, & \text{pokud } \bar{x}_2^u \leq x_2 \leq \underline{x}_2^u. \end{cases}$$

Příklad rozšířené T2G funkce 7.5 včetně vybrané časově optimální strategie je zobrazen na obr. 7.3.



Obrázek 7.3: Rozšířená T2G funkce D-I systému ($K_1 = K_2 = 1$, $x_1^r = 0$ a $x_2^r = 2$) při omezeních $\underline{x}_1 = -1$, $\bar{x}_1 = 1$, $\underline{u} = 0.05$ a $\bar{u} = 0.5$ včetně vybrané časově optimální strategie řízení.

7.2 Terminální ztrátová funkce při nesymetrických omezeních

Je zřejmé, že v případě nesymetrických omezení (stavových i akčního zásahu) D-I systému musí být v původní navržené terminální ztrátové funkci (5.4) pro MPC kritérium s L1 normou namísto původní T2G funkce (5.10) určené pro symetrická omezení aproximován skutečný minimální čas t_f , za který dosáhneme cílového stavu, T2G funkcí (7.4) uvažující omezení nesymetrická, popř., vyžaduje-li to řešená úloha návrhu MPC, nějakým jejím možným rozšířením (jako např. T2G funkce (7.5)). Otázkou rovněž je, jak se postavit při uvažování nesymetrických omezení k ostatním členům v navržené terminální ztrátové funkci (5.4). Především u členu $c \cdot \bar{x}_1$ reprezentujícího dlouhodobé chování ztrát jsme jasně předpokládali, že omezení stavu x_1 budou symetrická.

Vzhledem k tomu, jaké úlohy jsou napříč textem práce řešeny, uvažujme dále v případě nesymetrických omezení následující úpravu terminální ztrátové funkce pro MPC kritérium s L1 normou

$$l_f(\mathbf{x}) = \frac{|x_2 - x_2^r|}{2} \cdot \frac{t_f(\mathbf{x})}{T_s}, \quad (7.6)$$

kde skutečný minimální čas t_f aproximativně nahrazujeme T2G funkcí určenou pro nesymetrická omezení. V případě upravené terminální ztrátové funkce (7.6) tak využíváme již mnohokrát zmíněné skutečnosti podložené numerickými simulacemi v podkapitole 5.3 a to, že při uvažování uživatelsky volitelného parametru c v racionálním rozmezí (např. v rozmezí volby tohoto parametru vedoucím na smysluplné řešení při řízení systému pomocí MPC- N s dlouhým horizontem) je tento parametr malé číslo. Uživatelsky volitelný parametr c v terminální ztrátové funkci tak nemá příliš velký vliv na výslednou podobu vývoje řízeného systému pomocí MPC-T2G.

7.3 Rozšířená aproximace modelu synchronního motoru s permanentními magnety

Ačkoliv jsme ukázali, že aproximace chování PMSM modelem D-I systému může být užitečná, je nutné pamatovat na to, že se stále jedná o velmi hrubou aproximaci. To se projeví především tehdy, začneme-li od MPC-T2G vyžadovat specifitější požadavky, které klasické i alternativní MPC přístupy regulace PMSM běžně splňují.

Takovým požadavkem může být např. schopnost odbuzování (FW) PMSM [15, 68], kdy po dosažení jmenovité úhlové rychlosti lze dosáhnout vyšších otáček adekvátním zeslabováním magnetického toku permanentních magnetů (při zmenšení elektrického momentu). K tomu je nutné, aby tokotvorná složka v podobě proudu i_d byla nastavena tak, aby měla zápornou hodnotu a potlačovala indukované napětí, přičemž je rovněž žádoucí, aby momentotvorná složka představená proudem i_q byla co možná největší - k udržení co možná největšího elektrického momentu. V MPC přístupech založených na [66] je k FW přistoupeno právě určením optimálních křivek v prostoru proudů, po kterých by se měl proud pohybovat.

Paralela PMSM a jednoduchého D-I systému nám však neumožňuje nic podobného jako FW do MPC-T2G zakomponovat, neboť lineární struktura D-I modelu (3.1)

přirozeně v sobě nic jako FW neskrývá. Aby se MPC-T2G přiblížilo obdobným kvalitám jako u alternativních MPC přístupů řízení PMSM, byla v [Feh7] diskutována možnost nahrazení stávající lineární aproximativní struktury D-I modelu modelem s následující afinní strukturou

$$\frac{dx'_{1,t}}{dt} = D_{1,t} + D_2 u'_t, \quad (7.7a)$$

$$\frac{dx'_{2,t}}{dt} = D_{3,t} + D_4 x'_{1,t} \quad (7.7b)$$

s parametry $D_1, D_2, D_3, D_4 \in \mathbb{R}$. Pokud budeme, stejně jako u paralely s D-I modelem, předpokládat, že $x'_1 \approx T_e$ a $x'_2 \approx \omega$, aproximativní model s afinní strukturou (7.7) nám umožní přesněji vystihnout právě vztah mezi elektrickým momentem a úhlovou rychlostí PMSM. Obdobně jako v případě paralely s D-I modelem určíme parametry rozšířeného afinního modelu ze vztahů (3.7b) a (3.7f) a předpokladu $L_d \approx L_q$ jako

$$\begin{aligned} D_{1,t} &= \frac{k_p p_p \Psi_{PM}}{L_q} (-R_s i_{q,t} - \Psi_{PM} \omega_t - L_d \dot{i}_{d,t} \omega), \\ D_2 &= \frac{k_p p_p \Psi_{PM}}{L_q}, \\ D_{3,t} &= \frac{p_p}{J} T_{L,t}, \\ D_4 &= \frac{p_p}{J}. \end{aligned}$$

Vidíme tak, že v tomto případě se parametry aproximativního afinního modelu (7.7), jmenovitě D_1 a D_3 , mění v čase. Parametr D_1 navíc v sobě zahrnuje právě indukované napětí, které v paralele s jednoduchým D-I modelem (3.1) chybělo.

Pokud bychom dále sledovali dříve uvedený postup, měli bychom na tomto místě hledat T2G funkci pro rozšířený afinní model (7.7), jíž bychom následně aproximovali skutečný minimální čas ustálení PMSM v navržené terminální ztrátové funkci MPC kritéria s L1 normou. Pro její odvození si však můžeme pomoci transformací rozšířeného afinního modelu (7.7) do modelu D-I systému s lineární strukturou (3.1) v podobě

$$\begin{aligned} u_t &= u'_t - \frac{D_{1,t}}{D_2}, \quad x_{1,t} = x'_{1,t} - \frac{D_{3,t}}{D_4}, \quad x_2 = x'_2, \\ K_1 &= D_2, \quad K_2 = D_4. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Symetrická omezení D-I systému (3.2) se tak vlivem transformace (7.9) mění na omezení nesymetrická, tj.

$$x_{1,t} \in \langle \underline{x}_{1,t}, \bar{x}_{1,t} \rangle \quad \text{a} \quad u_t \in \langle \underline{u}_t, \bar{u}_t \rangle,$$

kde limitní hodnoty jsou pro PMSM dány vztahy

$$\begin{aligned} \underline{x}_{1,t} &= -\bar{T}_{e,t} + \frac{D_{3,t}}{D_4}, \quad \bar{x}_{1,t} = \bar{T}_{e,t} + \frac{D_{3,t}}{D_4}, \\ \underline{u}_t &= -\sqrt{U_{\max}^2 - u_{d,t}^2} + \frac{D_{1,t}}{D_2}, \quad \bar{u}_t = \sqrt{U_{\max}^2 - u_{d,t}^2} + \frac{D_{1,t}}{D_2}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Jinými slovy - lze zde s výhodou využít T2G funkci D-I systému s nesymetrickými omezeními (konkrétně rozšířenou T2G funkci (7.5), jelikož nelze předpokládat po celou

dobu platnost podmínky $\sqrt{U_{\max}^2 - u_d^2} \geq |\frac{D_1}{D_2}|$). Názorně tak máme možnost sledovat, že i v případech řízení komplikovanějších systémů s určitou částí, kterou lze popsat D-I dynamikou, a s „klasickými“ symetrickými omezeními, se může T2G funkce D-I systému s nesymetrickými omezeními hodit; např., jak jsme právě ukázali, při rozšíření aproximačního modelu.

Kompletní MPC algoritmus založený na paralele PMSM a rozšířeného aproximačního modelu s afinní strukturou (7.7) a rozšířené T2G funkci (7.5) (MPC-T2G-EXT) lze shrnout následujícími kroky:

0. Inicializace - výpočet konstantních parametrů D_2 a D_4 .
1. Získání aktuálního stavu PMSM v čase k , tj. \mathbf{x}_k .
2. Hledání optimálního akčního zásahu \mathbf{u}_k^* řešením optimalizačního problému

$$\mathbf{u}_k^* = \arg \min_{\mathbf{u}_k} \left[|\omega_{k+1} - \omega^r| + c_{\omega i} (i_{d,k+1}^2 + i_{q,k+1}^2) + \left(\frac{|\omega_{k+1} - \omega^r|}{2} \right) \frac{t_{fe}^{D-I}(\mathbf{x}_k)}{T_s} \right]$$

s.t. model PMSM (3.7) diskretizovaný vztahem (3.12) a omezení (3.15), kde parametry D_1 a D_3 určujeme v čase k a kde referenční stav T2G funkce je uvažován vlivem transformace jako $x_1^r = \frac{D_3}{D_4}$ a $x_2^r = \omega^r$. Hraníční hodnoty napětí v omezeních (7.10) jsou též uvažovány pro čas k .

3. Aplikování akčního zásahu \mathbf{u}_k^* a čekání na další okamžik vzorkování, kdy se opět vracíme k prvnímu kroku ($k = k + 1$).

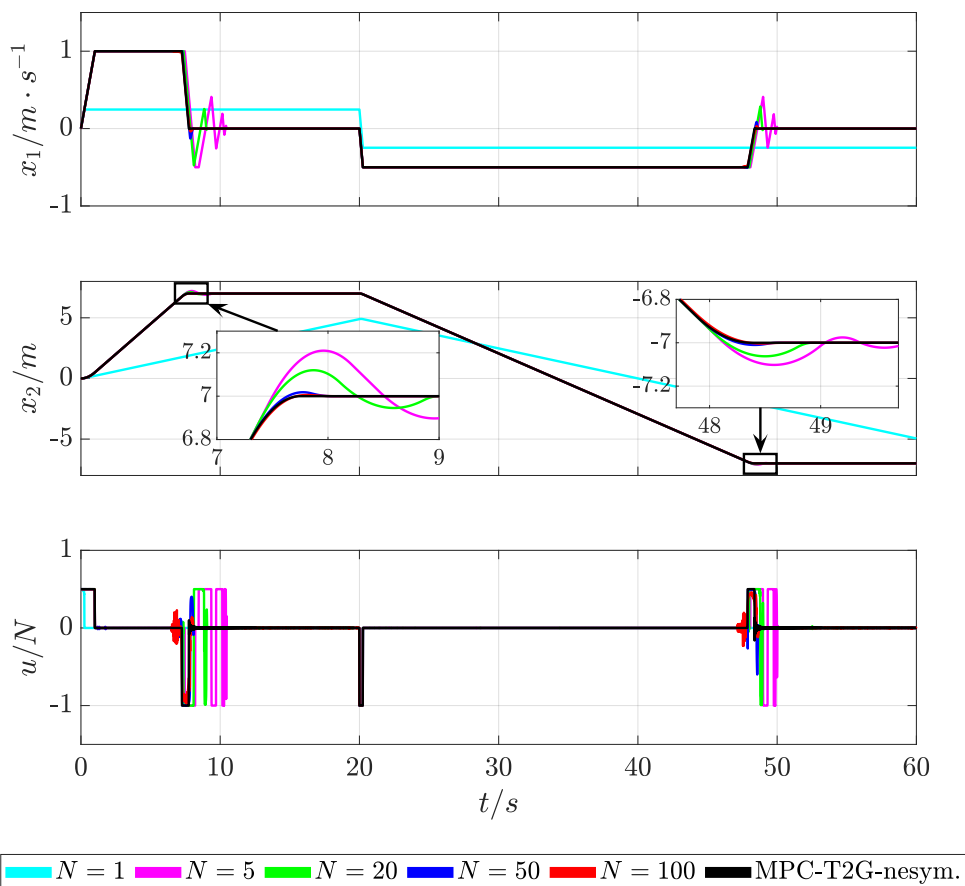
7.4 Numerické experimenty

Testujme nyní výše uvedené úvahy týkající se ať už rozšíření terminální ztrátové funkce pro úlohu návrhu MPC pro systém s D-I dynamikou při uvažování nesymetrických omezení, a nebo využití rozšířené terminální ztrátové funkce při uvažování aproximačního modelu u složitějšího systému s D-I dynamikou jako je PMSM.

Nejprve uvažujme obdobný problém jako problém 1 řešený v kapitole 5, tj. předpokládejme, že navrhujeme řízení pro D-I systém (jednoosý vozík), jehož parametry, až na omezení, jsou dány tabulkou 5.1 a kde ve ztrátové funkci kritéria (3.9) penalizujeme odchylku od referenční polohy L1 normou ($p = 1$). Dále předpokládejme, že v počáteční fázi se snažíme zastavit, stejně jako v problému 1, v poloze $x_2^* = 7$, ale v čase 20 s se náhle rozmyslíme a budeme požadovat zastavení v poloze $x_2^* = -7$ (o změně nevíme dopředu, tj. nezpracováváme ji do vlastní predikce; úloha sledování). V úloze rovněž uvažujeme, že maximální přípustná rychlost vozíku je v jednom směru větší než ve druhém a že vozík dokážeme zrychlit v jednom směru více (např. účinnost brzd vs. výkon motoru). Tato nesymetrická omezení jsou dána jako: $\underline{x}_1 = -0.5$, $\bar{x}_1 = 1$, $\underline{u} = -1$ a $\bar{u} = 0.5$.

Na obr. 7.4 si je možné prohlédnout řešení problému řízení jednoosého vozíku při nesymetrických omezení a fixním uživatelsky volitelném parametru c pomocí MPC- N o různé délce prediktivního horizontu a pomocí MPC-T2G, kde byla původní terminální ztrátová funkce v MPC-T2G kritériu (5.16) nahrazena terminální ztrátovou funkcí (7.6), kde se čas určuje pomocí T2G funkce (7.4) (na obr. 7.4 označena jako MPC-T2G-nesym.).

Vidíme tak, že i v případě rozšířené terminální ztrátové funkce lze očekávat, jak bylo ostatně ukázáno podrobněji v [Feh6], obdobné vlastnosti jako v případě původní terminální ztrátové funkce v MPC-T2G určené pro symetrické úlohy. I zde platí, že výpočetní nároky oproti MPC- N s delšími prediktivními horizonty jsou značně redukovány a že MPC-1 s navrženou terminální ztrátovou funkcí dokáže v mnohých aspektech zastoupit dlouhý prediktivní horizont. Zmíňme rovněž, že v [Feh6] byl v podmínkách nesymetrických omezení diskutován i hypotetický stejnosměrný motor jako další zástupce třídy systémů s D-I dynamikou.



Obrázek 7.4: Časový průběh systému jednoosého vozíku řízeného pomocí MPC- N a MPC-T2G-nesym. pro fixní uživatelsky volitelný parametr ($c = 0.01$).

Nyní ale odložme jednoduché příklady stranou a testujme navrženou rozšířenou aproximaci PMSM, tj. testujme navržený algoritmus MPC-T2G-EXT řešící reálný nedostatek MPC-T2G plynoucí z nedostatečného aproximativního modelu. Na obr. 7.5 vidíme odlišné chování PMSM odpovídajícího parametrům uvedeným v tabulce 5.3 (u FCS-MPC pouze pro účely názornější demonstrace zmenšena perioda vzorkování na $T_s = 20 \mu s$) řízeného pomocí MPC-T2G a rozšiřujícího MPC-T2G-EXT při nájezdu do referenční úhlové rychlosti $\omega^r = 750 \text{ rad} \cdot s^{-1}$ (vyšší úhlová rychlost než jmenovitá). Ihned si tak můžeme všimnout, že MPC-T2G po dosažení jmenovité rychlosti nedokáže pokračovat v zrychlování, zatímco MPC-T2G-EXT díky rozšířenému modelu umožňujícím FW (fun-

gujícími hlavně kvůli adekvátnímu přepočtu napěťových omezení) požadované úhlové rychlosti dosáhne a to jak v CCS-MPC režimu, tak i v FCS-MPC režimu. Jak dále vidíme, v CCS-MPC režimu se rozšířený navržený algoritmus MPC-T2G-EXT chová obdobně jako alternativní přístup Preindl2015 (z [66]), jenž byl opět naladěn tak, aby dosahoval zhruba stejný ST.

Jak bylo v textu práce mnohokrát zmíněno, MPC přístupy k řízení PMSM založené na [66] jsou v jádru navržené tak, aby sledovaly speciální křivky v prostoru proudů i_d , i_q vycházející ze stacionárního chování. Jmenovitě se jedná o tzv. MTPA křivku (z *angl. Maximum Torque Per Ampere*) udávající množinu bodů v prostoru proudů generující maximální možný elektrický moment s ohledem na proudové omezení (3.8a) danou vztahem [66, 67]

$$i_d + \frac{(L_d - L_q)}{\Psi_{PM}}(i_d^2 - i_q^2) = 0 \quad (7.11)$$

a FW křivku, jež zastupuje množinu bodů v prostoru proudů, které v ustáleném stavu splňují napěťové omezení (3.8b), popsanou

$$(R_s i_d - L_q \omega^r i_q)^2 + (R_s i_q + \Psi_{PM} \omega^r + L_d i_d \omega^r)^2 - U_{\max}^2 = 0. \quad (7.12)$$

U plné FW křivky (7.12) se pak v MPC přístupech založených na [66] ještě obvykle uvažuje $R_s \approx 0$, čímž získáme FW $_{R_s \approx 0}$ křivku v podobě [66, 68, 85]

$$\left(\frac{L_q i_q}{L_d}\right)^2 + \left(i_d + \frac{\Psi_{PM}}{L_d}\right)^2 - \left(\frac{U_{\max}}{\omega^r L_d}\right)^2 = 0. \quad (7.13)$$

Můžeme tak přímo porovnat navržené rozšířené MPC-T2G-EXT se základním principem hlavního proudu alternativních přístupů.

Na obr. 7.6 je tak zobrazen právě průběh proudů odpovídající výše popsané úloze nájezdu PMSM řízeného rozšířeným MPC-T2G-EXT nad jmenovitou úhlovou rychlost - opět v CCS-MPC i FCS-MPC režimu. Vidíme tak, že průběh proudů skutečně odpovídá optimálním křivkám (7.11)-(7.13), aniž bychom je předtím nějak do vlastního návrhu MPC-T2G-EXT nějak zakomponovali. Rovněž je na obr. 7.6 patrné splnění proudového (stavového) omezení (3.8a). Znovu také připomeňme, že, na rozdíl od alternativních přístupů, se i v MPC-T2G-EXT objevuje nadále pouze jeden uživatelsky volitelný parametr (c).

7.5 Shrnutí

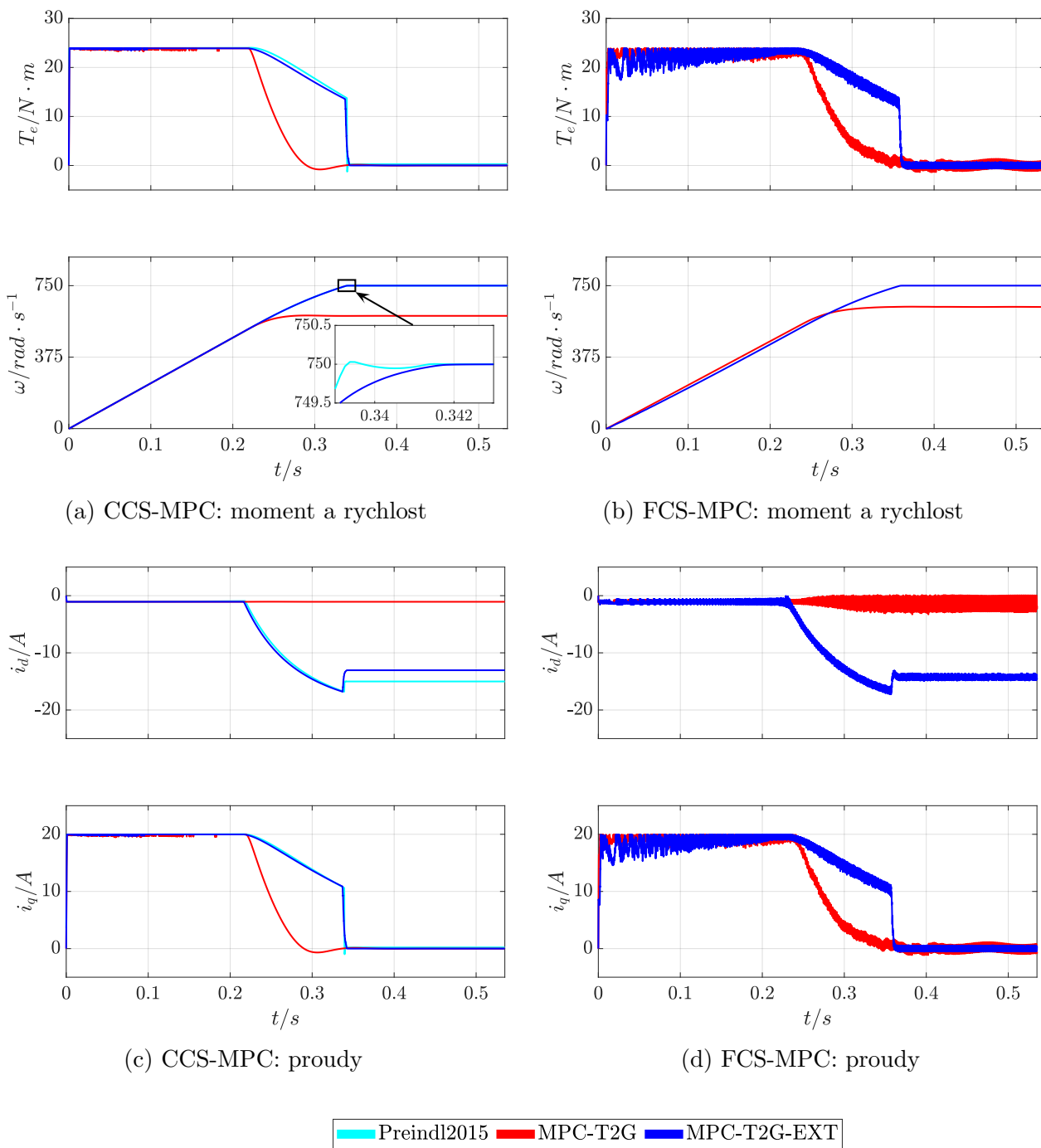
Kapitola 7 se soustředila na možnost zobecnění navrženého MPC pro třídu systémů s D-I dynamikou. Toto zobecnění se primárně týkalo opuštění předpokladu symetrických omezení, jež byla doposud napříč prací uvažována. V kapitole 7 bylo diskutováno, jak opuštění předpokladu symetričnosti ovlivní navržený MPC přístup a jakým způsobem je možné tento návrh upravit tak, aby dokázal pracovat i s omezeními nesymetrickými.

Kromě schopnosti vyřešit hypotetické úlohy, kde se namísto symetrických omezení začnou uvažovat ta nesymetrická, se zde naplno projevil význam tohoto zobecnění i pro velmi praktický problém FW u PMSM, kde rozšířením aproximativního modelu vztahu

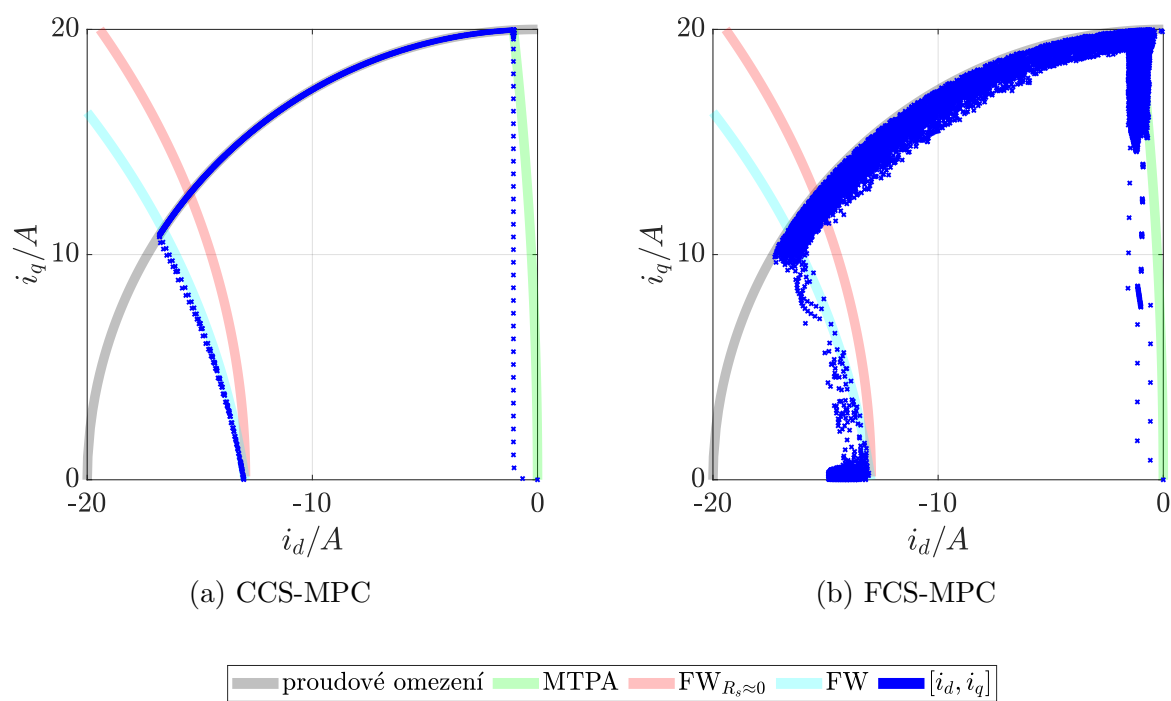
mezi elektrickým momentem a úhlovou rychlostí v kombinaci s terminální ztrátovou funkcí MPC kritéria pracující s nesymetrickými omezeními jsme s to dosáhnout vyšších otáček než jmenovitých.

Teoretické závěry byly podpořeny numerickými experimenty. V případě praktického problému řízení PMSM do vyšších otáček než jmenovitých bylo zkoumáno navržené rozšířené MPC-T2G-EXT jak v CCS-MPC, tak i ve výpočetně nenáročném FCS-MPC režimu a dále porovnáno s alternativními MPC přístupy k řízení PMSM. Ukázalo se, že MPC-T2G-EXT dosahuje FW díky rozšířenému aproximativnímu modelu, na rozdíl od alternativních přístupů, velmi přirozeným způsobem právě pomocí nesymetrických omezení akčního zásahu a elektrického momentu. Postupy založené na MPC-T2G tak tvoří zajímavou alternativu k dosavadním MPC přístupům k řízení PMSM.

Třetí a zároveň poslední cíl práce týkající se zobecnění návrhu prediktivního řízení pro nesymetrická omezení lze tak považovat za splněný.



Obrázek 7.5: Časové průběhy PMSM řízeného MPC-T2G a rozšířeným MPC-T2G-EXT v CCS-MPC i FCS-MPC podobě (v CCS-MPC pro porovnání i Preindl2015).



Obrázek 7.6: Průběh PMSM řízeného rozšířeným MPC-T2G-EXT v prostoru proudů.

Kapitola 8

Závěr

Tato disertační práce se věnovala aproximativnímu přístupu k MPC systémům s D-I dynamikou. Shrňme nyní její obsah a pokusme se zhodnotit její vlastní přínos či nastínit možné směry budoucího rozvoje.

8.1 Shrnutí práce a jejího přínosu

V první části práce byl čtenář uveden do problematiky MPC. Byla mu stručně představena historie MPC a předložen souhrn jeho aktuálních výzev a problémů podložený současnými vědeckými pracemi. Formulací základního konceptu MPC byl čtenář seznámen podrobněji se stěžejními pojmy a metodami MPC. K tomu bylo využito dnes již bohaté literatury zabývající se výhradně MPC. Čtenář tak zde mimo seznámení se s pojmy důležitými pro další úvahy v následujícím textu práce obdržel i dostatečný seznam studijního materiálu pro svůj další případný rozvoj v této oblasti moderní teorie řízení.

Dále byla v disertační práci zavedena třída systémů s D-I dynamikou. Čtenář byl seznámen se základní charakteristikou této třídy a byli mu představeni tři její konkrétní zástupci. Jednalo se o jednoosý vozík využitý jako příklad ryzího D-I systému, hypotetický stejnosměrný motor využitý jako příklad lineárního systému s vnitřní D-I dynamikou a PMSM využitý jako zástupce nelineárního systému s vnitřní D-I dynamikou. Jak bylo dále diskutováno, řízení těchto systémů není jednoduché, jelikož je třeba brát v úvahu jak omezení stavová, tak i omezení akčního zásahu, jež jsou obvykle dána fyzikálními limity. Z tohoto pohledu se tak MPC začalo jevit jako vhodný kandidát pro vlastní syntézu řízení.

Čtenář byl tudíž následně seznámen s možnou podobou MPC kritéria, resp. jeho ztrátové funkce. Ukázalo se, že na rozdíl od stavů ovlivněných přímým působením akčního zásahu odpovídajících stavu x_1 D-I systému, není u stavů odpovídajících stavu x_2 D-I systému, jež jsou na stavu x_1 přímo závislé, jasné, jakou formu jejich penalizace volit. Rovněž bylo zmíněno, že vzhledem k výpočetním nárokům, které se logicky projeví na rychlosti generování samotného akčního zásahu, je nutné uvažovat co možná nejmenší délku prediktivního horizontu.

Na základě výše uvedeného byly v práci definovány tři hlavní cíle. První cíl se týkal nalezení vhodné aproximace dlouhého horizontu MPC kritéria pro třídu systémů s D-I dynamikou. K tomu bylo třeba najít odpověď na otázku, jakým způsobem vlastně penalizovat stav odpovídající stavu x_2 D-I systému, resp. jeho odchylku od referenčního stavu. K tomu posloužila zevrubná analýza zkoumající vliv penalizace prostřednictvím

L1 a L2 normy, jež odhalila, že obvyklé nevýhody L1 normy jako je numerická nestabilita nebo menší kvalita v krátkých prediktivních horizontech jsou s rostoucím prediktivním horizontem potlačeny. Aproximace dlouhého horizontu MPC kritéria se ztrátovou funkcí založenou na L1 normě se tak zdála být zcela namístě. Autor si není po podrobném studiu problematiky vědom, že by někdy obdobná analýza vlivu prediktivního horizontu na kvalitu s ohledem na normu ve ztrátové funkci MPC kritéria vznikla, a považuje ji tudíž za jeden z unikátních příspěvků své disertační práce.

Pro aproximaci dlouhého horizontu byla hledána vhodná terminální ztrátová funkce, na kterou byly předem kladeny jasné požadavky, jež by měla po svém přidání do krátkohorizontového MPC kritéria splňovat. K návrhu této terminální ztrátové funkce bylo s výhodou využito předpokládaného časového průběhu systému s D-I dynamikou, jež evidentně, je-li řízen MPC s L1 normou o velmi dlouhém prediktivního horizontu, vykazuje. Ústředním bodem návrhu terminální ztrátové funkce se stala T2G funkce D-I systému s omezeními. Provedené numerické experimenty pak jasně demonstrovaly, že navržená terminální ztrátová funkce pro MPC kritérium s L1 normou, MPC-T2G, splňuje všechny požadavky na ní kladené. Autor na základě svých znalostí hodnotí návrh terminální ztrátové funkce opírající se o autorovy články [Feh2, Feh5] pro systémy s D-I dynamikou jako unikátní a přínosný. Především výpočetní úspora MPC-T2G při generování akčního zásahu vzhledem ke kvalitě řešení může být pro mnohé praktické aplikace zajímavá. Rovněž se autor doposud v literatuře neseťkal s analytickým určením T2G funkce D-I systému se symetrickými omezeními, které představil v [Feh1].

Druhým cílem práce byl návrh efektivního řízení použitelného v praktických aplikacích. Konkrétně se v tomto případě práce věnovala možnosti reálného využití MPC-T2G pro regulaci PMSM. Po studiu dostupné odborné literatury zabývající se MPC pro PMSM, bylo zřejmé, že je nutné v případě nasazení MPC-T2G v reálných podmínkách ještě snížit výpočetní nároky. K tomu bylo přistoupeno dvěma způsoby - diskretizací domény akčních zásahů přiřazením VSI pro generování konečné množiny akčních zásahů vedoucí na FCS-MPC-T2G a relaxací kritéria a následným odvozením scénářů optimálního postupu vedoucí na CCS-MPC-T2G. Zejména návrh efektivních CCS-MPC přístupů k řízení PMSM představuje, jak bylo diskutováno, velmi aktuální problém. Výsledný CCS-MPC-T2G byl proto srovnán s alternativními CCS-MPC přístupy a otestován v reálných podmínkách na laboratorním stroji. Návrh CCS-MPC-T2G vychází z autorových prací [Feh3]-[Feh5]. Autor spatřuje unikátnost svého řešení především v jiných základních pilířích jako je právě využití L1-normy ve ztrátové funkci MPC kritéria a aproximace chování PMSM zjednodušenou D-I dynamikou, na kterých je obecně MPC-T2G, na rozdíl od alternativních jemu známých MPC přístupů k řízení PMSM, vystaveno. Nespornou výhodou MPC-T2G je rovněž malý počet uživatelsky volitelných parametrů.

Třetí cíl se týkal možnosti zobecnění návrhu MPC. Konkrétně bylo zkoumáno, jak se projeví opuštění předpokladu symetričnosti omezení na navrženém MPC-T2G a jak lze MPC-T2G pro nesymetrická omezení upravit. Pro terminální ztrátovou funkci byla představena T2G funkce D-I systému s nesymetrickými omezeními. Ukázalo se také, že rozšíření T2G funkce o předpoklad nesymetrických omezení může mimo hypotetických příkladů vyřešit i reálný problém FW u PMSM, který v tradičním pojetí MPC-T2G nebylo díky paralele PMSM s příliš jednoduchým D-I systémem možné uskutečnit. Rozšířením aproximativního modelu byl získán MPC-T2G-EXT algoritmus, který, jak bylo potvrzeno prostřednictvím numerických simulací, FW umožňuje, a to jak v FCS-MPC,

tak i CCS-MPC režimu. Na rozdíl od alternativních MPC přístupů MPC-T2G-EXT v sobě FW obsahuje jako svou přirozenou součást a opět se v něm vyskytuje pouze jeden uživatelsky volitelný parametr dávající do vztahu nesouměřitelné fyzikální veličiny úhlovou rychlost a proud. Autor představil T2G funkci D-I systému s nesymetrickými omezeními ve své práci [Feh6] a není si vědom, že by byla doposud jinde v literatuře tato funkce zaznamenána. Autor zároveň hodnotí jako unikátní výsledek rozšíření MPC-T2G pro PMSM v podobě MPC-T2G-EXT navržený v [Feh7].

Z celkového hlediska a podle svého nejlepšího vědomí a svědomí tak autor považuje vytyčené cíle disertační práce za splněné.

8.2 Možnosti rozšíření

Autor předpokládá, že tato disertační práce je jen vstupní branou do problematiky MPC systémů s D-I dynamikou. Domnívá se, že paralely s D-I systémem, a tudíž v práci navržených aproximativních přístupů k MPC, je možné využít u celé řady dalších reálných systémů. Navržené aproximativní přístupy k MPC se mohou hodit především v úlohách, kde se jedná o co možná nejrychlejší a nejpřesnější regulaci, přičemž jsou v nich zakomponována jak omezení stavová, tak omezení akčního zásahu. Zároveň v nich jde i o co možná nejrychlejší generování akčního zásahu. Může se jednat např. o další typy motorů nebo různé pohybuující se objekty v prostoru.

Co se samotného obsahu práce týče, prostor pro rozšíření je možné spatřit např. v odvození výpočetně efektivní CCS-MPC verzi MPC-T2G-EXT algoritmu, která by rozšířila stávající CCS-MPC-T2G algoritmus o přímou možnost FW u PMSM. Další možné rozšíření vidí autor v hlubší analýze spolupráce navržených algoritmů a stavových estimátorů (rekonstruktorů) a to především v reálných úlohách.

Literatura

- [1] Antsaklis, P. J.; Michell, A. N.: *Linear systems*. Boston, MA.: Birkhäuser, 2006.
- [2] Aschepkov, L.: *Optimal control*. Cham, Switzerland: Springer, 2016.
- [3] Athans, M.; Falb, P. L.: *Optimal control: an introduction to the theory and its applications*. New York: Dover Publications, 2007.
- [4] Åström, K. J.; Murray, R.: *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. Princeton: Princeton, 2008.
- [5] Bar-Shalom, Y.; Tse, E.: Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, ročník 19, č. 5, 1974: s. 494–500.
- [6] Bertsekas, D. P.: *Dynamic programming and optimal control*. Massachusetts: Athena Scientific, 2000.
- [7] Boyd, S.; Vandenberghe, L.: *Introduction to applied linear algebra : vectors, matrices, and least squares*. Cambridge New York, NY: Cambridge University Press, 2018.
- [8] Bryson, A. E.; Ho, Y.-C.: *Applied optimal control*. Washington: John Wiley & Sons, 1975.
- [9] Burden, R. L.; Faires, J. D.; Burden, A. M.: *Numerical analysis*. Boston: Cengage Learning, 2016.
- [10] Camacho, E. F.; Bordons, C.: *Model Predictive Control*. New York: Springer, 2004.
- [11] Cao, G.; Lai, E. M.-K.; Alam, F.: Gaussian process model predictive control of unknown non-linear systems. *IET Control Theory & Applications*, ročník 11, č. 5, 2017: s. 703–713.
- [12] Clarke, D. W.; Mohtadu, C.; Tuffs, P. S.: Generalized predictive control - part I. The basic algorithm. *Automatica*, ročník 23, č. 2, 1987: s. 137–148.
- [13] Cortés, P. C.; Kazmierkowski, M. P.; Kennel, R. M.; aj.: Predictive Control in Power Electronics and Drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 55, č. 12, 2008: s. 4312–4324.
- [14] Cutler, C. R.; Ramaker, B. C.: Dynamic matrix control - a computer control algorithm. *Automatic control conference, San Francisco*, 1980.

- [15] Černý, O.: *Výzkum perspektivních metod mikroprocesorového řízení pro trakční synchronní motor s permanentními magnety*. Univerzita Pardubice: Disertační práce, 2009.
- [16] Černý, O.; Doleček, R.; Novák, J.: Synchronní motory s permanentními magnety pro trakční pohony kolejových vozidel. *Vědeckotechnický sborník ČD*, ročník 29, 2010.
- [17] Darby, M. L.; Harmse, M.; Nikolaou, M.: MPC: Current Practice and Challenges. *IFAC Proceedings Volumes*, ročník 42, č. 11, 2009: s. 86–98.
- [18] Diehl, M.: *Encyclopedia of Systems and Control*, kapitola Optimization Algorithms for Model Predictive Control. London: Springer-Verlag, 2014.
- [19] Diehl, M.; Ferreau, H. J.; Haverbeke, N.: *Efficient Numerical Methods for Nonlinear MPC and Moving Horizon Estimation*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.
- [20] de Doncker, R.; Pulle, D. W. J.; Veltman, A.: *Advanced electrical drives: analysis, modeling, control*. Dordrecht: Springer, 2011.
- [21] Dötlinger, A.; Kennel, R. M.: Near time-optimal model predictive control using an L1-norm based cost functional. *2014 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2014: s. 3504–3511.
- [22] Forbes, M. G.; Patwardhan, R. S.; Hamadah, H.; aj.: Model Predictive Control in Industry: Challenges and Opportunities. *9th International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, 2015.
- [23] Forsgren, A.; Gill, P. E.; Wong, E.: Primal and dual active-set methods for convex quadratic programming. *Math. Program., Ser. A*, ročník 159, 2016: s. 469–508.
- [24] Franklin, G. F.; Powell, J. D.; Workman, M. L.: *Digital control of dynamic systems*. 3rd ed. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley, 1998.
- [25] Fuentes, E.; Kalise, D.; Rodríguez, J.; aj.: Cascade-Free Predictive Speed Control for Electrical Drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 61, č. 5, 2014: s. 2176–2184.
- [26] Fuentes, E. J.; Silva, C. A.; Yuz, J. I.: Predictive Speed Control of a Two-Mass System Driven by a Permanent Magnet Synchronous Motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 59, č. 7, 2012: s. 2840–2848.
- [27] García, C. E.; Prett, D. M.; Morari, M.: Model predictive control: Theory and practice-A survey. *Automatica*, ročník 25, č. 3, 1989: s. 335–348.
- [28] Geyer, T.: *Model predictive control of industrial power electronics*. Chichester, West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons, 2016.
- [29] Geyer, T.; Papafotiou, G.; Morari, M.: Model Predictive Direct Torque Control - Part I: Concept, Algorithm, and Analysis. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 56, č. 6, 2009: s. 1894–1905.

- [30] Grüne, L.; Pannek, J.: *Nonlinear model predictive control: theory and algorithms*. New York: Springer, 2011.
- [31] Havlena, V.; Štěcha, J.: *Moderní teorie řízení*. Praha: ČVUT, 1999.
- [32] Hinde, R. F.; Cooper, D. J.: A pattern-based approach to excitation diagnostics for adaptive process control. *Chemical Engineering Science*, ročník 49, č. 9, 1994: s. 1403–1415.
- [33] Hu, S.; Gao, Z.: A Discrete Time Optimal Control Solution for Hard Disk Drives Servo Design. *2007 IEEE 22nd International Symposium on Intelligent Control*, 2007: s. 289–295.
- [34] Jerez, J. L.; Kerrigan, E. C.; Constantinides, G. A.: A condensed and sparse QP formulation for predictive control. *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011: s. 5217–5222.
- [35] Kalman, R. E.: Contributions to the theory of optimal control. *Bulletin de la Societe Mathematique de Mexicana*, ročník 5, 1960: s. 102–119.
- [36] Kalman, R. E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of ASME, Journal of Basic Engineering*, ročník 87, 1960: s. 35–45.
- [37] Karamanakos, P.; ; Geyer, T.; aj.: On the choice of norm in finite control set model predictive control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, ročník 33, č. 8, 2018: s. 7105–7117.
- [38] Karamanakos, P.; Liegmann, E.; Geyer, T.; aj.: Model Predictive Control of Power Electronic Systems: Methods, Results, and Challenges. *IEEE Open Journal of Industry Applications*, ročník 1, 2020: s. 95–114.
- [39] Kocijan, J.; Murray-Smith, R.; Rasmussen, C. E.; aj.: Gaussian Process Model Based Predictive Control. *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, 2004: s. 2214–2219.
- [40] Krajánek, V.: *Návrh synchronního motoru s permanentními magnety pro pohon elektromobilu*. ZČU v Plzni: Diplomová práce, 2016.
- [41] Krishnan, R.: *Electric motor drives: modeling, analysis, and control*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2001.
- [42] Kwon, W. H.; Han, S.: *Receding horizon control*. London: Springer, 2005.
- [43] Kwon, W. H.; Pearson, A. E.: A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear discrete time system. *Technická zpráva*, Brown Univ., Div. Eng., 1977.
- [44] Kwon, W. H.; Pearson, A. E.: A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, ročník 22, č. 5, 1977: s. 838–842.

- [45] Lee, E. B.; Markus, L.: *Foundations of optimal control theory*. New York: Wiley, 1967.
- [46] Leonhard, W.: *Control of electrical drives*. Power systems, Berlin ; New York: Springer, 2001.
- [47] Ljung, L.: *System identification: theory for the user. 2nd ed.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- [48] Locatelli, A.: *Optimal Control of a Double Integrator*. New York: Springer, 2017.
- [49] López, C. P.: *MATLAB Optimization Techniques*. Berkeley, CA: Apress, 2014.
- [50] Maciejowski, J. M.: *Predictive control: with constraints*. New York: Prentice Hall, 2002.
- [51] Marler, R. T.; Arora, J. S.: Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Struct Multidisc Optim*, ročník 26, č. 6, 2004: s. 369–395.
- [52] Mayne, D. Q.: Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, ročník 50, č. 12, 2014: s. 2967–2986.
- [53] Mayne, D. Q.; Michalska, H.: Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, ročník 35, č. 7, 1990: s. 814–824.
- [54] Mayne, D. Q.; Rawlings, J. B.; Rao, C. V.; aj.: Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, ročník 36, č. 6, 2000: s. 789–814.
- [55] Melichar, J.: *Lineární systémy 1*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2011.
- [56] Mousavi, M. A.; Heshmati, Z.; Moshiri, B.: A new predictive motion control of a planar vehicle under uncertainty via convex optimization. *21st Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE)*, 2013.
- [57] Mousavi, M. A.; Moshiri, B.; Heshmati, Z.: A new predictive motion control of a planar vehicle under uncertainty via convex optimization. *International Journal of Control, Automation and Systems*, ročník 15, č. 1, 2017: s. 129–137.
- [58] Nocedal, J.; Wright, S. J.: *Numerical optimization*. New York: Springer, 2006.
- [59] Norambuena, M.; Garcia, C.; Rodriguez, J.: The Challenges of Predictive Control to reach acceptance in the Power Electronics Industry. *7th Power Electronics, Drive Systems & Technologies Conference*, 2016.
- [60] Novák, J.: Uplatnění synchronních strojů v dopravní technice. *Elektro*, ročník 6, č. 8, 2006.
- [61] Ogata, K.: *Modern control engineering. 5th ed.* Boston: Prentice Hall, 2010.
- [62] Peng, Z.; Yang, Y.: Time optimal control with a class of dependent input constraints. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, 2010: s. 1663–1667.

- [63] Pillay, P.; Krishnan, R.: Modeling, simulation, and analysis of permanent-magnet motor drives, Part I: the permanent-magnet synchronous motor drive. *IEEE Transactions on Industry Applications*, ročník 25, č. 2, 1989: s. 265–273.
- [64] Pontryagin, L. S.: *The mathematical theory of optimal processes*. New York: Gordon and Breach, 1986.
- [65] Preindl, M.: Robust Control Invariant Sets and Lyapunov-Based MPC for IPM Synchronous Motor Drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 63, č. 6, 2016: s. 3925–3933.
- [66] Preindl, M.; Bolognani, S.: Model Predictive Direct Speed Control with Finite Control Set of PMSM Drive Systems. *IEEE Transactions on Power Electronics*, ročník 28, č. 2, 2013: s. 1007–1015.
- [67] Preindl, M.; Bolognani, S.: Model Predictive Direct Torque Control With Finite Control Set for PMSM Drive Systems, Part 1: Maximum Torque Per Ampere Operation. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, ročník 9, č. 4, 2013: s. 1912–1921.
- [68] Preindl, M.; Bolognani, S.: Model Predictive Direct Torque Control With Finite Control Set for PMSM Drive Systems, Part 2: Field Weakening Operation. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, ročník 9, č. 2, 2013: s. 648–657.
- [69] Preindl, M.; Bolognani, S.: Optimal State Reference Computation With Constrained MTPA Criterion for PM Motor Drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, ročník 30, č. 8, 2015: s. 4524–4535.
- [70] Propoi, A. I.: Application of linear programming methods for the synthesis of automatic sampled-data systems. *Avtomat. i Telemekh.*, ročník 24, 1963: s. 912–920.
- [71] Qin, S. J.; Badgwell, T. A.: A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, ročník 11, č. 7, 2003: s. 733–764.
- [72] Rao, C. V.: Sparsity of Linear Discrete-Time Optimal Control Problems With 11 Objectives. *IEEE Transactions on Automatic Control*, ročník 63, č. 2, 2018: s. 513–517.
- [73] Rao, V. G.; Bernstein, D. S.: Naive control of the double integrator. *IEEE Control Systems Magazine*, ročník 21, č. 5, 2001: s. 86–97.
- [74] Rawlings, J. B.; Mayne, D. Q.: *Model predictive control: theory and design*. Madison, Wis.: Nob Hill Pub., 2009.
- [75] Richalet, J.; Rault, A.; Testud, J. L.; aj.: Model predictive heuristic control: applications to industrial processes. *Automatica*, ročník 14, č. 5, 1978: s. 413–428.
- [76] Rodríguez, J.; Cortés, P.: *Predictive control of power converters and electrical drives*. Chichester, West Sussex, UK Hoboken, N.J: IEEE/Wileys, 2012.
- [77] Rodríguez, J.; Kazmierkowski, M. P.; Espinoza, J. R.; aj.: State of the Art of Finite Control Set Model Predictive Control in Power Electronics. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 9, č. 2, 2013: s. 1003–1016.

- [78] Romero, L. E.; Pozo, D. F.; Rosales, J. A.: Quadcopter stabilization by using PID controllers. *Maskana*, ročník 5, 2016: s. 175–186.
- [79] Santín, I.; Pedret, C.; Vilanova, R.: *Control and Decision Strategies in Wastewater Treatment Plants for Operation Improvement*. Cham, Switzerland: Springer, 2017.
- [80] Sarafini, T.; Zanghirati, G.; Zanni, L.: Gradient projection methods for quadratic programs and applications in training support vector machines. *Optimization Methods and Software*, ročník 20, 2005: s. 353–378.
- [81] Siami, M.; Khaburi, D. A.; Rivera, M.; aj.: An Experimental Evaluation of Predictive Current Control and Predictive Torque Control for a PMSM Fed by a Matrix Converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 64, č. 11, 2017: s. 8459–8471.
- [82] Sousa, L. C.; Ayala, H. V.: Nonlinear Model Approximation Methods for Off-road Vehicle Path Tracking with MPC. *Congresso Brasileiro De Automática*, ročník 2, č. 1, 2020.
- [83] Šimandl, M.: *Identifikace systémů a filtrace*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001.
- [84] Šmídl, V.: *Statistical Methods for Sensorless Control of PMSM Drives*. ZČU v Plzni: Habilitační práce, 2012.
- [85] Šmídl, V.; Janouš, Š.; Adam, L.; aj.: Direct Speed Control of a PMSM Drive Using SDRE and Convex Constrained Optimization. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 65, č. 1, 2018: s. 532–542.
- [86] Tůma, F.: *Teorie řízení. 5., dopl. vyd.* Plzeň: Západočeská univerzita, 2009.
- [87] Türker, T.; Buyukkeles, U.; Bakan, A. F.: A Robust Predictive Current Controller for PMSM Drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 63, č. 6, 2016: s. 3906–3914.
- [88] Vahala, M.: *Duální bezsenzorové řízení synchronních elektrických pohonů*. ČVUT v Praze: Diplomová práce, 2012.
- [89] Wang, L.: *PID and predictive control of electrical drives and power converters using MATLAB/Simulink*. Solaris South Tower, Singapore: IEEE, Wiley, 2015.
- [90] Wang, Y.; Wang, X.; Xie, W.; aj.: Deadbeat Model-Predictive Torque Control With Discrete Space-Vector Modulation for PMSM Drives. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, ročník 64, č. 5, 2017: s. 3537–3547.
- [91] Xi, Y.-G.; Li, D.-W.; Lin, S.: Model Predictive Control - Status and Challenges. *Acta Automatica Sinica*, ročník 39, č. 3, 2013: s. 222–236.
- [92] Zhang, Z.; An, D. U.; Kim, H.; aj.: Comparative Study of Matrix Exponential and Taylor Series Discretization Methods for Nonlinear ODEs. *Simulation Modelling Practice and Theory*, ročník 17, 2009: s. 471–484.
- [93] Engineering - Wikipedia. [online]. Dostupné z <<https://en.wikipedia.org/wiki/Engineering>>.

Publikace autora

- [Feh1] Fehér, M.; Straka, O.; Šmídl, V.: Constrained time-optimal control of double-integrator system and its application in MPC. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series*, ročník 783, č. 1, 2017.
- [Feh2] Fehér, M.; Straka, O.; Šmídl, V.: Efficient MPC for Permanent Magnet Synchronous Motor. *IEEE 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, 2017: s. 36–41.
- [Feh3] Fehér, M.; Straka, O.; Šmídl, V.; aj.: Constrained Time-Optimal Control of PMSM with Continuous Control Domain. *4th IEEE Symposium on Predictive Control of El. Drives and Power Electronics (PRECEDE)*, 2017.
- [Feh4] Fehér, M.; Straka, O.; Šmídl, V.: Oscillation Reduction for Time-Optimal Control of Permanent Magnet Synchronous Motor. *Proceedings of 14th International Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD)*, 2017.
- [Feh5] Fehér, M.; Straka, O.; Šmídl, V.: Model predictive control of electric drive system with L1-norm. *European Journal of Control*, ročník 56, 2020: s. 242–253.
- [Feh6] Fehér, M.; Straka, O.: Time-to-go function of double-integrator system with asymmetrical constraints. *2020 European Control Conference (ECC)*, 2020: s. 178–183.
- [Feh7] Fehér, M.; Straka, O.; Šmídl, V.: Field-weakening in L1-norm based predictive control of permanent magnet synchronous motor. *European Journal of Control*, zasláno/v recenz. řízení.

Ostatní publikace autora

- [Fehost1] Fehér, M.; Šimandl, M.; Punčochář, I.: Use of Multiple Model Change Detection for Crack Detection in Euler-Bernoulli Beam. *20th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 2015.

Seznam obrázků

1.1	Schéma MPC.	4
2.1	Rozdíl mezi explicitním a MPC použitím DP.	19
3.1	Paralela D-I modelu s jednoosým vozíkem.	26
3.2	Stejnoseměrný motor řízený do kotvy.	27
3.3	Konstrukce PMSM (jádro ilustrací převzato z [88]).	28
5.1	Problém 1 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c (krátké horizonty): celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c	40
5.2	Problém 1 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c (delší horizonty): celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c	41
5.3	Problém 1 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N v závislosti na délce prediktivního horizontu N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou.	42
5.4	Problém 1 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N pro nejmenší a největší volbu uživatelsky volitelného parametru c a naladění tohoto parametru poskytující minimální celkovou odchylku.	43
5.5	Problém 2 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c	45
5.6	Problém 2 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N v závislosti na délce prediktivního horizontu N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou.	46
5.7	Problém 3 - vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : celková hodnota kritéria a poměr mezi jednotlivými složkami kritéria s rostoucím c	47
5.8	Problém 3 - vybrané časové průběhy řízeného systému pomocí MPC- N v závislosti na délce prediktivního horizontu N při ztrátové funkci kritéria s L1 a L2 normou.	48

5.9	Problém 3 - časové průběhy Jouleových ztrát odpovídající příkladům řízených systémům na obr. 5.8.	49
5.10	Vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L1 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : poměr celkových ztrát a získaného ST s rostoucím c	50
5.11	Vliv délky prediktivního horizontu N v MPC- N při ztrátové funkci kritéria s L2 normou a při změně uživatelsky volitelného parametru c : poměr celkových ztrát a získaného ST s rostoucím c	51
5.12	Porovnání výkonu L1 a L2 normy ve ztrátové funkci kritéria MPC- N pomocí dosaženého ST pro vybrané prediktivní horizonty N včetně ilustračních časových průběhů.	53
5.13	Ilustrace požadovaného chování systému s D-I dynamikou řízeného MPC-1 s terminální ztrátovou funkcí l_f , jejíž podobu hledáme.	55
5.14	Předpokládané časové průběhy systému s D-I dynamikou v aktuálním časovém okamžiku k s ohledem na délku prediktivního horizontu.	56
5.15	Časově optimální strategie řízení D-I systému ($K_1 = K_2 = \bar{x}_1 = 1$).	58
5.16	T2G funkce D-I systému ($K_1 = K_2 = \bar{x}_1 = 1$ a $x_1^r = x_2^r = 0$).	60
5.17	Problém 1 - analýza chování systému řízeného navrženým MPC-T2G.	64
5.18	Problém 2 - analýza chování systému řízeného navrženým MPC-T2G.	65
5.19	Problém 3 - analýza chování systému řízeného navrženým MPC-T2G.	66
5.20	Vybrané časové průběhy pro fixní uživatelsky volitelný parametr c (značení odpovídá příslušným obr. 5.17-5.19).	67
6.1	Porovnání MPC-T2G a MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' pro konkrétní volbu uživatelsky volitelného parametru c	72
6.2	Optimalizační scénáře pro $\omega_k < \omega^r$: puntík značí optimální akční zásah a barvy indikují, do jaké části T2G funkce (5.10) přivede MPC-T2G s relaxovaným kritériem J' stav PMSM (červená - (5.10a), zelená - (5.10b), žlutá - (5.10c) a šedá - (5.10e)).	74
6.3	Vybrané časové průběhy PMSM řízeného navrženým efektivním FCS-MPC-T2G a CCS-MPC-T2G a původním MPC-T2G.	77
6.4	Vybrané časové průběhy PMSM řízeného navrženým efektivním CCS-MPC-T2G, vybranými MPC- N a původním MPC-T2G.	78
6.5	Vybrané časové průběhy PMSM řízeného navrženým efektivním CCS-MPC-T2G a alternativními efektivními CCS-MPC přístupy Preindl2015 a Šmídl2018.	80
6.6	Laboratorní prototyp PMSM jmenovitého výkonu 10.7 [kW] (levý stroj) mechanicky spojený s indukčním strojem o jmenovitém výkonu 14.5 [kW], který je možné využít pro simulaci zatížení (pravý stroj).	81
6.7	Časový průběh laboratorního PMSM řízeného navrženým CCS-MPC-T2G.	83
7.1	Časově optimální strategie řízení D-I systému ($K_1 = K_2 = 1$) při nesymetrických omezeních.	87
7.2	T2G funkce D-I systému ($K_1 = K_2 = 1$, $x_1^r = 0$ a $x_2^r = 2$) při nesymetrických omezeních.	88
7.3	Rozšířená T2G funkce D-I systému ($K_1 = K_2 = 1$, $x_1^r = 0$ a $x_2^r = 2$) včetně vybrané časově optimální strategie řízení.	89

- 7.4 Časový průběh systému jednoosého vozíku řízeného pomocí MPC- N a MPC-T2G-nesym. pro fixní uživatelsky volitelný parametr ($c = 0.01$). . . . 93
- 7.5 Časové průběhy PMSM řízeného MPC-T2G a rozšířeným MPC-T2G-EXT v CCS-MPC i FCS-MPC podobě (v CCS-MPC pro porovnání i Preindl2015). 96
- 7.6 Průběh PMSM řízeného rozšířeným MPC-T2G-EXT v prostoru proudů. . . 97

Seznam tabulek

5.1	Parametry uvažovaného jednoosého vozíku.	37
5.2	Parametry uvažovaného stejnosměrného motoru.	37
5.3	Parametry uvažovaného PMSM.	38
5.4	Průměrné časy určení optimálního akčního zásahu pro jeden okamžik vzorkování δt pro MPC- N	52
5.5	Průměrné časy určení optimálního akčního zásahu pro jeden okamžik vzorkování δt pro MPC-T2G.	68
6.1	Kvalitativní porovnání mezi CCS-MPC-T2G, vybranými MPC- N a původním MPC-T2G.	78
6.2	Kvalitativní porovnání mezi CCS-MPC-T2G, Preindl2015 a Šmídl2018. . .	79

Příloha

Výpočet časů přepnutí pro time-to-go funkci (5.10)

Předpokládejme, že se D-I systém nachází ve stavu $[x_1, x_2]^T$. Potom z dynamiky D-I systému (3.1) lze získat integrací přepis pro stavy tohoto D-I systému v nějakém následujícím časovém okamžiku t_x za předpokladu aplikace konstantního akčního zásahu u jako

$$x_{1,t_x} = x_1 + K_1 u t_x, \quad (\text{p.1a})$$

$$x_{2,t_x} = x_2 + \frac{K_1 K_2 u}{2} t_x^2 + K_2 x_1 t_x. \quad (\text{p.1b})$$

Z časově optimální strategie řízení (5.9) víme, že pokud platí $A \wedge (x_2 \leq x_2^s) \wedge (x_2 \geq x_2^l)$, je časově optimální strategií řízení bang-bang strategie s tím, že nejprve aplikujeme maximální možný akční zásah s ohledem na omezení (3.2b), tj. $u = 1$, a to až do času přepnutí t_p , kdy stav systému dosáhne příslušné části přepínací křivky (5.6). Platí tedy

$$x_{2,t_p} = -\frac{K_2}{2K_1} \left(x_{1,t_p}^2 - (x_1^r)^2 \right) + x_2^r.$$

Dosazením za $[x_{1,t_p}, x_{2,t_p}]^T$ ze vztahů (p.1) s $u = 1$ získáme kvadratickou rovnici, z níž je možné určit čas t_p v podobě

$$x_2 + \frac{K_1 K_2}{2} t_p^2 + K_2 x_1 t_p = -\frac{K_2}{2K_1} \left((x_1 + K_1 t_p)^2 - (x_1^r)^2 \right) + x_2^r. \quad (\text{p.2})$$

Reálný nezáporný kořen kvadratické rovnice (p.2)

$$t_p = \frac{-K_2 x_1 + \sqrt{K_2^2 x_1^2 - K_1 K_2 \left(\frac{K_2}{2K_1} (x_1^2 - (x_1^r)^2) + x_2 - x_2^r \right)}}{K_1 K_2}$$

představuje právě čas přepnutí t_p . Poté se již držíme přepínací křivky aplikací akčního zásahu s nejmenší možnou velikostí, tj. $u = -1$, po čas dojezdu t_d , dokud D-I systém nedorazí do referenčního stavu $[x_1^r, x_2^r]^T$. Pro referenční stav x_1^r tak platí (viz rovnice (p.1a))

$$x_1^r = x_1 + K_1 t_p - K_1 t_d. \quad (\text{p.3})$$

Čas dojezdu t_d lze tak vyjádřit ze vztahu (p.3) jako

$$t_d = \frac{x_1 - x_1^r}{K_1} + t_p$$

a hledaný celkový minimální čas t_f , za který dosáhneme ze stavu $[x_1, x_2]^T$ splňujícího podmínku $A \wedge (x_2 \leq x_2^s) \wedge (x_2 \geq x_2^l)$ referenčního stavu čili příslušná větev T2G funkce (5.10a) je dán/a součtem dílčích přepínacích časů t_p a t_d jako

$$t_f = t_p + t_d = \frac{-K_2(x_1 + x_1^r) + 2\sqrt{K_2^2 x_1^2 - K_1 K_2 \left(\frac{K_2}{2K_1} (x_1^2 - (x_1^r)^2) + x_2 - x_2^r \right)}}{K_1 K_2}.$$

Obdobný postup určení minimálního času bychom volili i pro případ splnění podmínky $A \wedge (x_2 > x_2^s) \wedge (x_2 \leq x_2^u)$ (větev T2G funkce (5.10c)), kde opět postačuje bang-bang strategie řízení pro zajištění časové optimality, s adekvátním nastavením znamének u akčních zásahů a přepínací křivky.

V oblastech, kde podle časově optimální strategie řízení (5.9) využíváme bang-off-bang strategii řízení je nutné určit celkem dva časy přepnutí t_{p1} (čas dosažení omezení z aktuálního stavu) a t_{p2} (čas dosažení přepínací křivky z počátku nájezdu na omezení) a dojezdový čas t_d . Např. pro aktuální stav ležící v oblasti dané podmínkou $A \wedge (x_2 \leq x_2^s) \wedge (x_2 < x_2^l)$ postupujeme při výpočtu minimálního času t_f , ze který dosáhneme referenčního stavu (větev T2G funkce (5.10b)) následovně.

Víme, že v dané oblasti nejprve aplikujeme maximální možný akční zásah, tj. $u = 1$, po takový čas t_{p1} , dokud nedorazíme na příslušné stavové omezení (3.2a) (v tomto případě \bar{x}_1). Přepínací čas t_{p1} je tak možné získat jednoduchým dosažením odpovídajících hodnot do rovnice (p.1a) jako

$$\bar{x}_1 = x_1 + K_1 t_{p1} \Rightarrow t_{p1} = \frac{\bar{x}_1 - x_1}{K_1}.$$

Dosáhl-li řízení D-I systém stavového omezení, přepínáme akční zásah na $u = 0$. Přepis pro vývoj stavu x_2 (p.1b) se tak v tomto případě mění na

$$x_{2,t_x} = x_{2,t_{p1}} + K_2 \bar{x}_1 t_x, \quad (\text{p.4})$$

kde hodnotu $x_{2,t_{p1}}$ lze opět určit dosažením odpovídajících hodnot do rovnice (p.1b). Získáme tak rovnici pro $x_{2,t_{p1}}$ v podobě

$$x_{2,t_{p1}} = x_1 + \frac{K_1 K_2}{2} t_{p1}^2 + K_2 x_1 t_{p1}.$$

V čase přepnutí t_{p2} musí být splněna rovnost vztahu (p.4) a odpovídající části přepínací křivky (5.6). Pro čas přepnutí t_{p2} tak platí

$$x_2 + \frac{K_2}{2K_1} (\bar{x}_1^2 - x_1^2) + K_2 \bar{x}_1 t_{p2} = -\frac{K_2}{2K_1} (\bar{x}_1^2 - (x_1^r)^2) + x_2^r. \quad (\text{p.5})$$

Řešením rovnice (p.5) získáme kýžený čas t_{p2} v podobě

$$t_{p2} = -\frac{\bar{x}_1}{K_1} + \frac{x_1^2 + (x_1^r)^2}{2K_1 \bar{x}_1} + \frac{x_2^r - x_2}{K_2 \bar{x}_1}.$$

Dále přepínáme na akční zásah s minimální velikostí, tj. $u = -1$, a dojíždíme do referenčního stavu. Čas dojezdu t_d tak získáme dosažením příslušných hodnot do vztahu (p.1a) jako

$$x_1^r = \bar{x}_1 - K_1 t_d \Rightarrow t_d = \frac{\bar{x}_1 - x_1^r}{K_1}.$$

Minimální čas t_f pro podmínku $A \wedge (x_2 \leq x_2^s) \wedge (x_2 < x_2^l)$ (větev T2G funkce (5.10b)) je dán součtem časů t_{p1} , t_{p2} a t_d čili

$$t_f = t_{p1} + t_{p2} + t_d = \frac{\bar{x}_1 - x_1 - x_1^r}{K_1} + \frac{x_1^2 + (x_1^r)^2}{2K_1\bar{x}_1} + \frac{x_2^r - x_2}{K_2\bar{x}_1}.$$

Obdobný postup určení minimálního času bychom opět volili s adekvátním nastavením znamének u akčních zásahů, přepínací křivky a stavového omezení i pro případ splnění podmínky $A \wedge (x_2 > x_2^s) \wedge (x_2 > x_2^u)$ (větev T2G funkce (5.10d)).