Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Přiřazovací úloha v hypergrafech

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2023 Terezie Lejbová

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2022/2023

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Terezie LEJBOVÁ**
Osobní číslo:	**A21B0063P**
Studijní program:	**B0541A170007 Matematika a její aplikace**
Téma práce:	**Přiřazovací úloha v hypergrafech**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s problematikou párování v grafech a hypergrafech, polytopem párování, frakcionálním párováním.
2. Zpracujte přehledně problematiku párování v bipartitních a obecných grafech a hypergrafech z pohledu strukturálního, algoritmického a z pohledu výpočetní složitosti.
3. Problematiku párování v hypergrafech srovnejte s problematikou na grafech.
4. Studujte existenci a vlastnosti párování ve vybraných třídách grafů a hypergrafů.

Rozsah bakalářské práce:	**20-50 stran**
Rozsah grafických prací:	**dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce:	**tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory, Springer 2008.
- G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization, Wiley, 1999.
- P. E. Haxell, A Condition for Matchability in Hypergraphs, Graphs and Comb. 11 (1995), 245-248.
- R. Borndörfer, O. Heismann, The Hypergraph Assignment Problem, Discrete Optimization, 15 (2015), 15-25.
- Další literatura bude upřesňována průběžně.

Vedoucí bakalářské práce:	**Doc. Ing. Roman Čada, Ph.D.** Katedra matematiky
Datum zadání bakalářské práce:	**3. října 2022**
Termín odevzdání bakalářské práce:	**24. května 2023**

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
L.S.

Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 3. října 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

V Plzni dne 23. května 2023

. . . .
Terezie Lejbová

Abstrakt

Dokument popisuje rozdíly mezi párováním v neorientovaných grafech a neorientovaných hypergrafech.

Úvodní kapitola slouží jako seznámení se základními pojmy teorie grafů, s úlohou matematické optimalizace a s výpočetní složitostí. Kapitola druhá se zabývá studiem neorientovaných neohodnocených grafů. Setkáme se v ní s několika větami, které hovoří o existenci a vlastnostech párování v neorientovaných grafech a ukážeme si, že výsledky těchto vět jsou ekvivalentní. Třetí kapitola nám podobným způsobem přiblíží problematiku párování v neorientovaných neohodnocených bipartitních hypergrafech. Definujeme zde několik nových pojmů a opět formulujeme větu, která hovoří o existenci párování v bipartitních hypergrafech a která zobecňuje jednu z vět, se kterou jsme se setkali v kapitole druhé. Na příkladu si ukážeme, že podmínku této věty už nelze zeslabit.

Závěrem, pro srovnání problematiky párování v grafech a hypergrafech, volíme přiřazovací úlohu. Pracujeme zde nejen se slovní formulací, ale také s formulací pomocí lineárního programování. Porovnáváme způsoby řešení obou úloh, včetně časové složitosti.

Klíčová slova: graf • hypergraf • párování • přiřazovací úloha

Abstract

This document describes the differences between matching in undirected graphs and matching in undirected hypergraphs.

The introductory chapter serves as an introduction to the basic terms of graph theory, to the mathematical optimization problem and computational complexity. Chapter two deals with the study of undirected unweighted graphs. In it, we will encounter several theorems that talk about the existence and properties of pairing in undirected graphs, and we will show that the results of these theorems are equivalent. In a similar way, the third chapter will approach the problem of matching in undirected unweighted bipartite hypergraphs. Here we define several new terms and again formulate a theorem that speaks about the existence of pairings in bipartite hypergraphs. This theorem generalizes one of the theorems we encountered in chapter two. Using an example, we will show that its condition can not be weakened.

Finally, to compare the problem of matching in graphs and hypergraphs, we choose the assignment problem. We work here not only with verbal formulation, but also with formulation using linear programming. We compare the methods of solving both problems, including the time complexity.

Keywords: graph • hypergraph • matching • assignment problem

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala doc. Ing. Romanu Čadovi, Ph.D. za odborné vedení práce, cenné rady, věcné připomínky a za vstřícnost při konzultacích.
Děkuji také své rodině a příteli za podporu a vytváření přívětivého prostředí pro studium.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Teorie grafů je jednou z nejmladších matematických disciplín. Za jejího zakladatele je považován švýcarský matematik a fyzik Leonhard Paul Euler, který roku 1736 vyřešil úlohu sedmi mostů města Královce, přičemž nahlížel na tento problém z úplně jiné perspektivy, než bylo do té doby zvykem. V současné době je teorie grafů významnou součástí diskrétní matematiky a s její pomocí dokážeme řešit veliké množství praktických úloh, například hledání optimální cesty, rozvoz zboží, elektrifikaci oblastí, průtok vodovodním potrubím aj. Významnou skupinu úloh tvoří i úlohy párovací - právě těmi se budeme v rámci celé práce zabývat.

Cílem úvodní kapitoly je seznámit čtenáře se základy teorie grafů, což zásadně přispěje k pochopení studovaných témat kapitol následujících. Budeme se s nimi totiž průběžně setkávat nejen při formulaci stěžejních vět, ale také při zavádění nových pojmů. Dozvíme se navíc, co je to optimalizační úloha a jak klasifikovat algoritmy na základě jejich časové či paměťové náročnosti. Těchto znalostí využijeme výhradně v kapitole čtvrté, kde si představíme několik způsobů, kterými lze řešit jeden konkrétní typ párovací úlohy - přiřazovací úlohu.

1.2 Základní pojmy

Abychom si mohli blíže představit problematiku párování v grafech, bipartitních i obecných, musíme se nejprve seznámit s několika základními pojmy teorie grafů a jejich značením.

Znalost těchto pojmů nám zároveň umožní i snazší orientaci v úvodu do problematiky párování v hypergrafech, jelikož jejich značná část tam má svou analogii.

Nejprve se však krátce zastavíme u množin a množinových operací. Ačkoli se jedná o něco, co s teorií grafů zdánlivě nesouvisí, postupně se ukáže, že vztah těchto dvou oblastí je ve skutečnosti velmi úzký.

Definice v této sekci jsou převzaty z [6], [12], [16], [17], [22], [32].

Definice 1.2.1. Mějme množiny X a Y. Řekneme, že X je *podmnožinou* Y, pokud platí: $\forall x \in X \Rightarrow x \in Y$. Značíme $X \subseteq Y$.

Pokud navíc platí, že $X \neq Y$, jedná se o *vlastní podmnožinu*. Značíme $X \subset Y$.

Značení 1.2.1. *Systém všech k-prvkových podmnožin množiny X značíme* $\binom{X}{k}$.

Značení 1.2.2. *Množinu všech podmnožin množiny X značíme $P(X) = 2^X$ a nazýváme ji potenční množinou.*

Kartézským součinem množin X a Y se rozumí množina všech uspořádaných dvojic (x, y) takových, že $x \in X$ a $y \in Y$. Značíme jej $X \times Y$.

Definice 1.2.2. Mějme množiny X a Y. *Binární relací* z množiny X do množiny Y nazveme podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$.

Definice 1.2.3. Relace $f \subset X \times Y$, pro kterou platí, že $\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in f$ se nazývá *zobrazení množiny* X *do množiny* Y. Značíme $f : X \to Y, y = f(x)$.

Definice 1.2.4. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je *prosté*, jestliže $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definice 1.2.5. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je zobrazením množiny X *na* množinu Y, jestliže $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

Definice 1.2.6. *Bijekcí* nazveme zobrazení, které je zároveň prosté i na.

Pojmem *graf* v matematice rozumíme dvojici množin - množiny vrcholů a množiny spojnic těchto vrcholů, kterým říkáme hrany. Zpravidla rozlišujeme dva typy grafů - orientované a neorientované (viz obrázek 1.1).

(a) Orientovaný graf (má všechny hrany orientované).

(b) Neorientovaný graf (má všechny hrany neorientované).

Obrázek 1.1: Rozdíl mezi orientovaným a neorientovaným grafem.

V této práci se budeme zabývat grafy neorientovanými, uvedeme tedy formální definici:

Definice 1.2.7. *Neorientovaný graf* je trojice $G = (V, E, \epsilon)$ tvořená neprázdnou konečnou množinou V, jejíž prvky nazýváme *vrcholy*, konečnou množinou E, jejíž prvky nazýváme *neorientovanými hranami* a prostým zobrazením $\epsilon : E \to \binom{V}{2}$, které přiřazuje každé hraně grafu dvouprvkovou množinu vrcholů $\{x, y\}$ a které nazýváme *vztahem incidence*.

Pokud bude zobrazení ϵ v grafu G zřejmé, budeme graf značit pouze $G = (V, E)$.

Všimněme si, že neorientovaným hranám jsou přiřazovány neuspořádané dvojice $\{x, y\}$ - jedná se totiž o symetrické spojení dvou *krajních* vrcholů x, y a nezáleží tedy na pořadí jejich zápisu.

Na rozdíl od toho, u orientovaných hran musíme dodržet konkrétní pořadí zápisu krajních vrcholů - tvoří dvojice uspořádané (x, y). Je to dáno tím, že jeden z krajních vrcholů je vždy *počáteční* a druhý *koncový* a hrana vede od počátečního vrcholu k tomu koncovému.

V orientovaných grafech se mohou navíc vyskytovat i tzv. *smyčky* (x, x), neboli hrany vedoucí z jednoho vrcholu do toho samého. U neorientovaných grafů smyčky neuvažujeme. Množina $\{x, x\}$ totiž není dvouprvková, ale jednoprvková $\{x\}$, což je spor s výše uvedenou definicí vztahu incidence.

Od této chvíle budeme pojmem *graf* vždy myslet *neorientovaný graf*.

Následující soubor definic má pro tuto práci veliký význam. S pomocí několika pojmů, kterými jsou například podgraf a faktor, budeme totiž schopni naformulovat stěžejní pojmy druhé kapitoly: párování, perfektní párování a největší párování.

Definice 1.2.8. Pojmem *stupeň (valence) vrcholu* označujeme počet hran, které incidují s daným vrcholem. Značíme jej $d(v)$.

Definice 1.2.9. Pokud s vrcholem v v grafu G neinciduje žádná hrana, nazveme jej *izolovaným vrcholem*. Platí tedy, že $d(v) = 0$.

Definice 1.2.10. *Regulární (pravidelný) graf* je takový graf, jehož všechny vrcholy mají stejný stupeň. Regulární graf s vrcholy stupně k se nazývá *k-regulární*.

Definice 1.2.11. Graf G' je *podgrafem* grafu G, jestliže $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.

Definice 1.2.12. Graf G' je *indukovaným podgrafem* grafu G jestliže $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.

Definice 1.2.13. Graf G' je *faktorem* grafu G, jestliže $V(G') = V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.

Definice 1.2.14. Regulární podgraf stupně 1 grafu G se nazývá *párování* v grafu G.

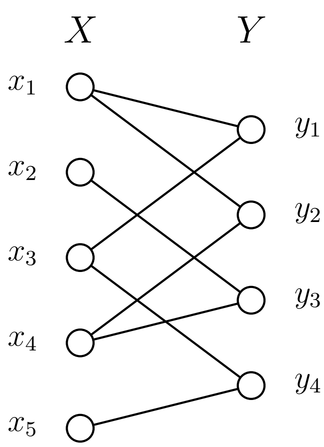
Regulární faktor stupně 1 grafu G se nazývá *perfektní párování* v grafu G.

Párování v grafu G mající největší možný počet hran, se nazývá *největší párování* v grafu G.

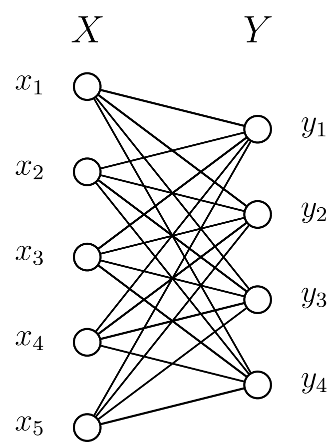
Vzhledem ke skutečnosti, že se ve druhé kapitole budeme, v souvislosti s párováním, zabývat nejen grafy obecnými, ale rovněž grafy bipartitními (obrázek 1.2), musíme si i takovýto graf formálně nadefinovat.

Definice 1.2.15. *Bipartitní graf* je takový graf G, pro jehož množinu vrcholů platí $V(G) = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$. Jinými slovy se jedná o disjunktní sjednocení dvou neprázdných množin X, Y, přičemž každá hrana bipartitního grafu má jeden krajní vrchol v X a druhý v Y.

Bipartitní graf nazveme *úplný*, pokud každá dvojice vrcholů $x \in X, y \in Y$ je spojena právě jednou hranou. Úplný bipartitní graf, pro jehož partity platí $|X| = m, |Y| = n$, značíme $K_{m,n}$ (obrázek 1.3).



Obrázek 1.2: Bipartitní graf.



Obrázek 1.3: Úplný bipartitní graf $K_{5,4}$.

V závěru této sekce se přesuneme k pojmům, s nimiž se znovu setkáme při formulaci Bergeho věty a Hallovy věty. Cesta a kružnice v grafu konkrétně dají vznik střídavým cestám a kružnicím, okolí množiny je nedílnou součástí Hallovy podmínky.

Definice 1.2.16. Mějme grafy G, G'. Zobrazení $f : V(G) \to V(G')$ nazveme *homomorfizmus* grafu G do G', jestliže platí: $\{u, v\} \in E(G) \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(G')$.

Značení 1.2.3. *Cestu délky $n \geq 0$ označíme P_n a platí:* $V(P_n) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $E(P_n) = \{i, i+1\}, i = 1, \ldots, n-1$.

Z cesty P_n lze vytvořit kružnici C_n přidáním hrany $\{1, n\}$.

Definice 1.2.17. Nechť G je graf, $u, v \in V(G)$ jsou dva jeho vrcholy a $f : P_n \to G$ je homomorfizmus, kde $V(P_n) = \{0, 1, \ldots, n\}$, $f(0) = u$ a $f(n) = v$. Potom podgraf $f(P_n)$ se nazývá *sled* mezi u a v. Je-li navíc f prosté, pak P_n nazýváme *cestou* mezi u a v.

Definice 1.2.18. Jestliže pro každé $u, v \in V(G)$ existuje sled mezi u a v v G, řekneme, že G je *souvislý graf*. Maximální souvislé podgrafy grafu (ve smyslu inkluze) G se nazývají *komponenty grafu G*.

Definice 1.2.19. *Okolím vrcholu v* v grafu $G = (V, E)$ nazveme množinu $N(v)$, pro kterou platí: $N(v) = \{u \in V | \{u, v\} \in E\}$.

Definice 1.2.20. *Okolím množiny S* v grafu $G = (V, E)$ nazveme množinu $N(S)$, pro kterou platí: $N(S) = \{u \in V \setminus S | \exists v \in S : \{u, v\} \in E\}$.

Značení 1.2.4. *Mějme graf G, vrchol $v \in V(G)$ a hranu $e \in E(G)$. Graf $H_1 = (G - v)$ vznikne z grafu G odstraněním vrcholu v a všech hran s ním incidentních.*

Stejným způsobem můžeme z grafu odstranit i množinu vrcholů $S \subseteq V(G)$. Graf $H_2 = (G - S)$ tedy neobsahuje žádný z vrcholů množiny S, ani hrany s těmito vrcholy incidentní.

Graf $H_3 = (G - e)$ vznikne z grafu G odstraněním hrany e.

1.3 Optimalizace

Tato sekce byla vypracována s využitím [9], [15] , [23], [28]. Zmiňovaná témata jsou podrobněji rozebrána také například v [14], [36].

Úlohou *matematické optimalizace*, nebo také jen úlohou *optimalizace*, budeme v této práci rozumět úlohu ve tvaru:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) \\ &\text{za podmínky} f_i(x) \leq b_i, i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ nazveme *vektorem neznámých*, funkci $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *účelovou funkcí*, funkce $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$ nazveme *omezeními* a konstanty $b_1, \ldots, b_n$ *limitami*, nebo také *mezemi* této úlohy.

Cílem je nalézt *vektor řešení* $x^* \in \mathbb{R}^n$, který má nejmenší celkovou hodnotu ze všech vektorů splňujících dané podmínky: $\forall z : f_1(z) \leq b_1, \ldots, f_n(z) \leq b_n : f_0(z) \geq f_0(x^*)$. Řešení optimalizační úlohy tedy odpovídá volbě, která má ze všech možností minimální náklady v souladu s uvedenými požadavky.

Optimalizační úloha se nazývá úlohou *lineárního programování (LP)*, pokud všechny funkce $f_0, f_1, \ldots, f_n$ jsou lineární. Jinými slovy splňují: $f_i(\alpha x + \beta y) = f_i(\alpha x) + f_i(\beta y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$.

1.3.1 Lineární programování

Přejděme rovnou k základní formulaci úlohy lineárního programování:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \\ &\text{za podmínky} Ax \leq b \end{aligned} \tag{1.2}$$

Lineární funkce $c^T x$ je opět účelovou funkcí, vektor $x \in \mathbb{R}^n$ vektorem neznámých, vektor $c \in \mathbb{R}^n$ nazýváme *vektorem (koeficienty)* účelové funkce. Matice $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n, vektor $b \in \mathbb{R}^n$ nese název *vektor pravých stran*.

Cílem je minimalizovat (najít vektor řešení x^*, který minimalizuje) účelovou funkci za daných podmínek. Minimalizační úlohu lze převést na maximalizační úlohu změnou znaménka účelové funkce.

Úlohu lineárního programování bohužel nelze řešit analyticky, existuje však několik účinných metod. Jednou z nich je například *simplexový algoritmus*.

Pokud $x \in \mathbb{Z}^n$, pak se jedná o úlohu *celočíselného lineárního programování (také ILP - zkratka anglického termínu "integer linear programming")*.

1.4 Výpočetní složitost

Tato sekce byla vypracována s využitím [8], [30], [31], [37]. Zmiňovaná témata jsou podrobněji rozebrána také v [2].

Výpočetní složitost je způsob klasifikace algoritmů na základě jejich paměťové nebo časové náročnosti při řešení na počítači. Zkoumá způsob změny chování algoritmu v závislosti na změně velikosti či počtu vstupních dat. Jedna z možných interpretací je pomocí tzv. *$\mathcal{O}$-notace*, kterou značíme symbolem $\mathcal{O}$.

Definice 1.4.1. $\mathcal{O}(f(n))$ označíme *množinu všech funkcí* $g(n)$, pro které platí: $\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$: $g(n) \leq c \cdot f(n)$.

Následně si představíme i odlišnou formulaci téhož, ve které se také setkáváme s novým pojmem *limes superior*, neboli s největším hromadným bodem dané posloupnosti. Jinými slovy se jedná o hodnotu, ke které se zkoumaná posloupnosti blíží (nebo jí dokonce nabývá), ale překročí ji pouze v konečně mnoha případech:

- $g \preceq f \iff \lim\sup_{n\to\infty} \frac{g(n)+1}{f(n)+1} < \infty$.

  Všimněme si, že $g \in \mathcal{O}(f) \iff g \preceq f$.

Funkce g, patřící do $\mathcal{O}(f)$, tedy nerostou rychleji než libovolný násobek funkce f. Právě tento vztah značí $g \preceq f$.

$\mathcal{O}$-notace navíc zanedbává všechny násobící i přičítané konstanty funkcí g, a proto je velice užitečným nástrojem k analýze časové a paměťové složitosti algoritmů.

1.4.1 Třídy problémů P a NP

Než se budeme zabývat samotnými třídami složitosti, musíme nejprve najít vhodný abstraktní model pro samotný výpočet, popsaný algoritmem. Pro tuto práci volíme *počítač s libovolným přístupem (také RAM - zkratka anglického termínu "random access machine")*, jehož popis je sice komplikovanější než např. u Turingova stroje, ale ve výsledku je mnohem bližší reálnému počítači.

Počítač s libovolným přístupem se skládá z *procesoru* a *paměti*, sestávající z neomezeného počtu buněk (označených indexem), do kterých lze navíc vkládat neomezeně veliká čísla vyjádřená binárně. Je řízen programem, který se skládá ze sekvence instrukcí s jedinečným pořadovým číslem. Procesor může provádět limitované množství odlišných instrukcí - pro jednoduchost se předpokládá, že každá instrukce proběhne v konstantním čase.

Úloha zařazení problému do nějaké třídy složitosti je vlastně úlohou zkoumání příslušnosti slova do nějakého jazyka.

Algoritmus je konečný soubor pravidel, které je potřeba dodržovat při řešení nějakého problému. Proces aplikace těchto pravidel na nějaká vstupní data může mít několik možných výsledků:

1. Skončí úspěšně po konečném počtu kroků, čímž se vstupní data změní na ta výstupní, řešící danou instanci problému.
2. Skončí neúspěšně odmítnutím vstupu.
3. Neskončí, algoritmus běží věčně.

Abecedou nazveme konečnou neprázdnou množinu písmen nebo symbolů, značíme ji Σ.

Abeceda ve tvaru $\Sigma = \{0, 1\}$ nese název *binární abeceda.*

Slovem nazveme konečnou posloupnost prvků abecedy Σ. Množinu všech slov značíme Σ^*. *Jazykem* nad abecedou Σ nazveme množinu $L \subseteq \Sigma^*$.

Vstupními daty úlohy pak máme na mysli jedno konkrétní slovo (posloupnost). *Velikost vstupních dat* označuje počet prvků této posloupnosti.

Instancí problému nazveme konkrétní množinu přípustných vstupních dat. Taková množina může být konečná i nekonečná a obecně k ní může existovat i několik sad správných výstupních dat.

Problémy jsou *zakódovány* do instance nad binární abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ do tzv. *binárního řetězce.*

Rozhodovací problém je problém, jehož instance připouští pouze odpovědi ANO a NE (výstupními daty jsou 1 a 0).

Nyní můžeme přejít ke třídě složitosti P, která zahrnuje všechny problémy deterministicky řešitelné v polynomiálním čase.

Deterministický algoritmus vždy ze stejných vstupních podmínek svým během vytvoří stejné výsledky.

Definice 1.4.2. Rozhodovací problém patří do třídy složitosti P, pokud pro jeho řešení existuje deterministický algoritmus pracující v čase $\mathcal{O}(n^k)$, kde n je velikost vstupních dat, k je konstanta nezávislá na n.

Pro mnoho problémů praktického významu se však zatím nepodařilo vyvinout žádný algoritmus, pracující v deterministicky polynomiálním čase. Právě tyto, hůře řešitelné, problémy řadíme do třídy složitosti NP - třídy problémů řešitelných v nedeterministicky polynomiálním čase.

Nedeterministický algoritmus se v některých krocích může libovolně rozhodnout pro některé z několika různých možných pokračování.

Definice 1.4.3. Rozhodovací problém patří do třídy NP, pokud pro jeho řešení existuje nedeterministický algoritmus pracující v čase $\mathcal{O}(n^k)$, kde n je velikost vstupních dat, k je konstanta nezávislá na n.

Definice 1.4.4. Mějme dva rozhodovací problémy X_1, X_2 a vstupní data a problému X_1. Problém X_1 je *polynomiálně převoditelný* na problém X_2, pokud existuje funkce f (vyhodnotitelná v polynomiálním čase) taková, že $X_1(a) = X_2(f(a))$.

To tedy znamená, že vstup pro problém X_1 je možné díky funkci f převést na vstup pro problém X_2 a problém X_1 je následně možné vyřešit algoritmem řešícím X_2.

Definice 1.4.5. Řekneme, že problém X_2 je NP-*těžký*, pokud problém X_1 je polynomiálně převoditelný na problém X_2, $\forall X_1 \in$ NP.

Definice 1.4.6. Řekneme, že problém X_2 je NP-*úplný*, pokud X_2 je NP-těžký a zároveň $X_2 \in$ NP.

Na závěr je ještě potřeba zdůraznit, že při zkoumání příslušnosti problému do některé ze tříd složitosti musí jít vždy o rozhodovací problém. Optimalizační problémy je tedy nejprve nutno vhodně převést do tvaru rozhodovací úlohy.

Kapitola 2

Párování v grafech

2.1 Motivace

Každý z nás jistě intuitivně chápe pojem *párování*, jako rozdělení nějakých objektů (či osob) do dvojic, za splnění předem známých, pro daný případ specifických, podmínek.

Vrcholy grafu tedy reprezentují dané objekty (osoby) a párování je množina takových hran grafu, že žádné dvě z nich nemají společný vrchol. Pokud existuje vrchol, který neinciduje s žádnou z hran párování, nazveme jej *volným vrcholem*. Co se podmínek kladených na dané párování týče, zpravidla se zabýváme třemi typy úloh:

1. Hledání největšího párování v grafu (co do počtu hran).
2. Hledání nejlevnějšího největšího párování v ohodnoceném grafu.
3. Hledání nejdražšího párování v ohodnoceném grafu (součet cen hran).

Úloha o nejlevnějším největším párování je velice častá v aplikacích, jejím speciálním případem je tzv. přiřazovací úloha, ve které je však nutné se omezit na grafy úplné bipartitní. V těch pak hledáme nejlevnější perfektní párování (pokrývající všechny vrcholy grafu, tzn. žádný vrchol není volný).

Díky úzkému vztahu bipartitního párování s toky v sítích, jsou algoritmy i samotná teorie pro párování v bipartitnách grafech navíc podstatně jednodušší, než v obecném případě. Na to, jak spolu tyto dvě oblasti přesně souvisí a jaký to pro nás má význam, se více zaměříme v poslední kapitole.

Úlohu o nejlevnějším největším párování lze změnou cen převést na úlohu o nejdražším párování, která je ze všech tří úloh tou nejobecnější, viz [17].

Cílem této práce ovšem není podrobně rozebrat všechny výše zmiňované případy. Zaměříme se zde pouze na párování v grafech neorientovaných, abychom mohli získané informace následně vhodným způsobem srovnat s párováním v neorientovaných hypergrafech. Tato kapitola konkrétně obsahuje několik stěžejních vět, které nám blíže představí elementární vlastnosti neorientovaných grafů (bipartitních i obecných) a podmínky pro existenci párování v nich.

Zajímavým vyústěním celé kapitoly je fakt, že průběžně získávané výsledky vět o bipartitních grafech jsou ekvivalentní, a najdeme i jistou souvislost s výsledkem věty u grafů obecných.

2.2 Párování v bipartitních grafech

Jak jsme si již představili v úvodu, bipartitní graf je specifický tím, že jeho množina vrcholů je disjunktním sjednocením dvou neprázdných množin, mezi nimiž vedou všechny hrany grafu. Z tohoto popisu automaticky plyne, že i hrany hledaného párování vedou vždy mezi zmiňovanými partitami.

Definice v této sekci jsou převzaty z [11], [12], [17], [22], [26], [28], [32], [38].

2.2.1 Hallova věta

Hallova věta je matematické tvrzení, které roku 1935 dokázal anglický matematik Philip Hall. Ačkoli se můžeme setkat se dvěma, zdánlivě odlišnými, formulacemi této věty, získané výsledky jsou ekvivalentní.

Z formulace věty pomocí teorie grafů získáváme nutnou a postačující podmínku pro existenci párování v bipartitním grafu, jež plně pokrývá jednu z partit.

Kombinatorická formulace věty udává nutnou a postačující podmínku pro existenci systému navzájem různých reprezentantů v systému podmnožin.

Dříve než si obě znění věty představíme, je však potřeba nadefinovat několik dalších pojmů potřebných pro formulaci Bergeho věty. Ta nejenže nám představí nutnou a postačující podmínku pro existenci největšího párování v grafu, ale následně nám dokonce vypomůže při důkazu samotné Hallovy věty.

Definice 2.2.1. Nechť G je graf a M párování v G. Řekneme, že párování M *pokrývá vrchol* x, jestliže je x obsažen v nějaké hraně M.

Definice 2.2.2. Nechť G je graf, M párování v G a P cesta v G ($E(M) \neq \emptyset, E(P) \neq \emptyset$). Řekneme, že cesta P je *střídavá (alternující)* vzhledem k M, jestliže její hrany střídavě jsou a nejsou v párování M.

Definice 2.2.3. *Střídavá (alternující)* kružnice vzhledem k párování M je kružnice, jejíž hrany střídavě leží a neleží v párování M.

Střídavá kružnice má vždy sudý počet hran.

Pomocí střídavých cest a kružnic lze párování snadno měnit. Je-li E množina hran tvořících střídavou cestu nebo kružnici vzhledem k párování M, nové párování M' vytvoříme takto:

- jestliže $e \in E$, pak $e \in M' \Leftrightarrow e \notin M$,
- jestliže $e \notin E$, pak $e \in M' \Leftrightarrow e \in M$.

Takovou změnu párování budeme nazývat *změnou podél střídavé cesty* nebo *kružnice.*

Definice 2.2.4. Nechť G je graf, M párování v G a P cesta v G. Řekneme, že cesta P je M*-rozšiřující*, jestliže P je střídavou cestou vzhledem k M a oba její koncové vrcholy nejsou pokryty párováním M.

Koncové vrcholy cesty P nejsou pokryty párováním zevnitř ani zvnějšku.

Věta 2.2.1 ([17]). *Nechť G je graf a M_1 libovolné párování v G. Pak pro každé párování M_2 v grafu G existuje soustava vrcholově disjunktních střídavých cest a střídavých kružnic taková, že změnami podél všech těchto cest a kružnic lze z párování M_1 získat párování M_2.*

Důkaz. Uvažujme faktor $G' = (V, E')$ grafu $G = (V, E)$, kde $E' = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$. Jinými slovy G' obsahuje pouze ty hrany grafu G, které leží právě v jednom z obou párování.

Pro každý vrchol $v \in V$ pak nastane jedna z následujících možností:

1. Jestliže v není pokryt párováním M_1 ani M_2, je izolovaným vrcholem v G'.
2. Je-li v pokryt pouze jedním z párování M_1, M_2, má v G' stupeň 1.
3. Je-li v pokryt v párováních M_1 i M_2 stejnou hranou, pak tato hrana neleží v G', a vrchol v je tedy v G' izolovaným vrcholem.
4. Je-li v pokryt v párováních M_1 a M_2 různými hranami $e_1 \in M_1$ a $e_2 \in M_2$, pak $e_1, e_2 \in G'$ a stupeň vrcholu v je roven 2.

Pro každý vrchol grafu G' tedy platí, že jeho stupeň je roven nejvýše dvěma. Z toho plyne, že v grafu G' můžeme nalézt pouze komponenty následujících tří typů:

1. izolovaný vrchol,
2. kružnice sudé délky, jejíž hrany střídavě leží v M_1 a M_2,

3. cesta, jejíž hrany střídavě leží v M_1 a M_2 a jejíž krajní vrcholy jsou různé (každý z nich je pokryt jedním z párování).

Komponenty souvislosti grafu G' přímo určují střídavé cesty a kružnice. Změnou párování M_1 podél všech těchto cest a kružnic dostaneme párování M_2. $\square$

Neexistence M-rozšiřující cesty v grafu G je tedy nutnou podmínkou pro to, aby párování M bylo největší. Díky následující větě však zjistíme, že se zároveň jedná o podmínku postačující.

Ačkoli se tímto problémem zabýval i například Petersen (již roku 1891), nebo Kőnig (roku 1931), věta byla dokázána až v roce 1957 francouzským matematikem Claude Jacques Bergem.

Věta 2.2.2 (Berge, 1957 [5])**.** *Párování M je největším párováním v grafu G, právě když v G neexistuje M-rozšiřující cesta.*

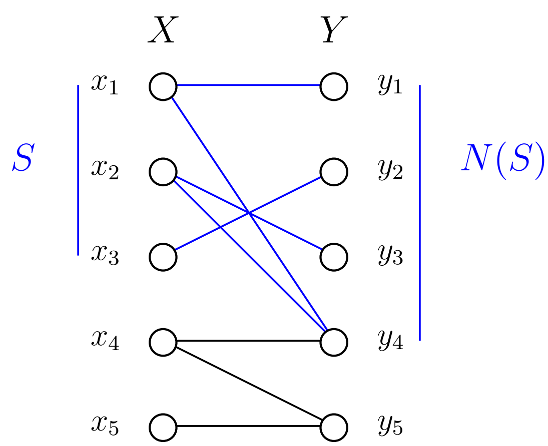
Důkaz. Je-li párování M v grafu G největší, pak v G nemůže existovat M-rozšiřující cesta. Kdyby totiž existovala, mohli bychom podél ní párování zvětšit.

Jestliže naopak párování M není největší, vezměme nějaké největší párování v G a označme jej M_1. Podle věty 1.1.1 existuje soustava střídavých cest a kružnic taková, že změnami podél nich získáme párování M_1 z párování M. Jelikož $|M_1| > |M|$, musí některá z těchto změn zvětšovat párování a musí tedy být změnou podél střídavé cesty s volnými krajními vrcholy. $\square$

Závěrem se dostáváme k oběma formulacím Hallovy věty:

Věta 2.2.3 (Hall, 1935 [20])**.** *Bipartitní graf $G = (V, E)$, s partitami X a Y, má párování pokrývající všechny vrcholy z X, právě když pro každou množinu vrcholů $S \subseteq X$ je $|N(S)| \geq |S|$.*

Podmínka $|N(S)| \geq |S|$ se nazývá Hallova (znázorněna na obrázku 2.1).



Obrázek 2.1: Bipartitní graf splňující Hallovu podmínku. Zvýrazněno pro $S = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Důkaz. Nechť M je největší párování v grafu G nepokrývající X. Pak najdeme množinu $S \subseteq X$ takovou, že pro ni platí Hallova podmínka. Mezi všemi vrcholy v G dosažitelnými z $u \in X$ M-střídavou cestou, označíme S ty, které se nachází v partitě X a T ty, které se nachází v partitě Y. Tedy platí, že $u \in S$.

Nyní tvrdíme, že M spojuje T s $S \setminus \{u\}$. M-střídavé cesty se z vrcholu u dostávají do Y po hranách mimo párování M a vrací se zpět do X po hranách patřících do M. Proto každý vrchol z $S \setminus \{u\}$ je dosažitelný hranou v M z vrcholu v T.

Jelikož neexistuje žádná M-rozšiřující cesta, každý vrchol z T je nasycený, tedy M-střídavá cesta, dosahující vrcholu $y \in T$, se rozšiřuje přes M až k vrcholu S. Tyto hrany M tvoří bijekci z T do $S \setminus \{u\}$ a proto můžeme psát $|T| = |S \setminus \{u\}|$.

Z párování mezi T a $S \setminus \{u\}$ plyne, že $T \subseteq N(S)$. Ve skutečnosti platí dokonce $T = N(S)$. Předpokládejme, že $y \in Y - T$ má souseda $v \in S$. Hrana vy nemůže patřit do M, protože u je nenasycená hrana a zbytek S je spojen s T párováním M. Přidáním hrany vy do M-střídavé cesty, která dosahuje vrcholu v, tedy vznikne M-střídavá cesta dosahující vrcholu y. To ale odporuje tomu, že $y \notin T$ a z toho důvodu hrana vy nemůže existovat.

Pro námi zvolené $T = N(S)$ a S jsme dokázali, že $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$. To je ovšem spor s předpokladem, že platí Hallova podmínka. □

Systému konečných neprázdných množin $S_1, S_2, \ldots, S_n, n \geq 1$ je přiřazen *systém navzájem různých reprezentantů*, pokud existuje množina $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ navzájem různých prvků taková, že $s_i \in S_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$.

Věta 2.2.4 (Hall, 1935 [20])**.** *Systému $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ konečných neprázdných množin je přiřazen systém navzájem různých reprezentantů $\iff$ $\forall k, 1 \leq k \leq n$: sjednocení libovolných k těchto množin obsahuje alespoň k prvků.*

2.2.2 Kőnigova věta

Kőnigova věta, dokázána roku 1931 maďarským matematikem Dénesem Kőnigem, je tvrzení z oblasti teorie grafů, popisující vztah mezi perfektním párováním a minimálním vrcholovým pokrytím v bipartitním grafu.

Stejného roku došel ke stejnému výsledku, nezávisle na Kőnigovi, i maďarský matematik Eugene Egerváry. Z toho důvodu je tato věta často označována za Kőnigovu-Egerváryho větu.

Definice 2.2.5. Mějme graf G. *Číslem hranové nezávislosti* $\alpha'(G)$ grafu G nazveme počet hran největšího párování v G.

Definice 2.2.6. Mějme graf G. *Vrcholovým pokrytím* grafu G nazveme množinu $A \subseteq V(G)$, pro kterou platí, že obsahuje alespoň jeden koncový vrchol každé hrany.

Definice 2.2.7. Mějme graf G bez izolovaných vrcholů. *Hranovým pokrytím* grafu G nazveme množinu $B \subseteq E(G)$, pro kterou platí, že každý vrchol $v \in V(G)$ inciduje s nějakou z hran této množiny.

Definice 2.2.8. Minimální mohutnost vrcholového pokrytí v grafu G nazveme *vrcholové pokrývací číslo* a značíme $\beta(G)$. Minimální mohutnost hranového pokrytí v grafu G (bez izolovaných vrcholů) nazveme *hranové pokrývací číslo* a značíme $\beta'(G)$.

Věta 2.2.5 (Kőnig, 1931 [24])**.** *Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf s partitami X a Y. Počet hran v největším párování v grafu G je roven* $\min_{S \subseteq X} (|X \setminus S| + |N(S)|)$.

Následuje ekvivalentní formulace Königovy věty přes pokrývající množiny.

Věta 2.2.6 (Kőnig, 1931 [24])**.** *Nechť G je bipartitní graf. Pak $\beta(G) = \alpha'(G)$.*

2.2.3 Dilworthova věta

V matematice, v oblastech teorie uspořádání a kombinatoriky, hovoří *Dilworthova věta* o jedné z vlastností částečně uspořádaných množin. Tvrzení dokázal roku 1950 americký matematik Robert Palmer Dilworth.

Definice 2.2.9. *Částečně uspořádaná množina (také POSET - zkratka anglického termínu "partially ordered set")* je množina P s binární relací $\leqslant$ taková, že platí:

1. $x \leqslant x \; \forall x \in P$ (reflexivita),
2. $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z \; \forall x, y, z \in P$ (tranzitivita),
3. $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (antisymetrie).

Jestliže $\forall x, y \in P$ platí, že $x \leqslant y \vee y \leqslant x$, pak částečné uspořádání nazveme *lineárním uspořádáním.*

Pokud je podmnožina P lineárně uspořádaná, nazýváme ji *řetězec. Antiřetězec* je soubor prvků, kde žádné dva nejsou porovnatelné.

Věta 2.2.7 (Dilworth, 1950 [18])**.** *Nechť P je částečně uspořádaná konečná množina. Minimální počet m disjunktních řetězců, které dohromady obsahují všechny prvky P, se rovná maximálnímu počtu M prvků v antiřetězci P.*

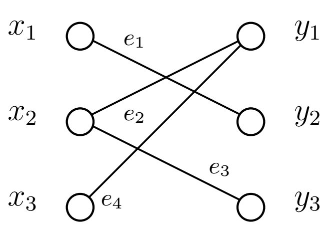
2.2.4 Ekvivalence Hallovy, Kőnigovy a Dilworthovy věty

Abychom si dokázali lépe představit, k čemu dochází v rámci důkazů ekvivalence těchto vět, bude nejprve výhodné si zde uvést jeden ze způsobů, kterým lze grafy reprezentovat pomocí matic. Tím již zmiňovaným (a taktéž v praxi velice často využívaným) způsobem, je reprezentace grafu pomocí matice incidence (viz obrázek 2.2). Obecně se jedná o matici velikosti $n \times m$, kde počet řádků (n) představuje počet vrcholů grafu a počet sloupců (m) představuje počet hran grafu. V případě, že některý z vrcholů grafu inciduje s některou z hran, na příslušné pozici v matici se vyskytuje jednička, v opačném případě nula.

Definice 2.2.10. Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf. Matice $A(G)$ typu n/m definovaná předpisem

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže vrchol } v_i \in V \text{ inciduje s hranou } e_i \in E, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \tag{2.1}$$

se nazývá *(vrcholově-hranová) incidenční matice* grafu G.



$$A(G) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Obrázek 2.2: Neorientovaný bipartitní graf G a jeho vrcholově-hranová incidenční matice.

Parciální transverzálou nazveme množinu všech jedniček v matici takových, že neleží ve stejném řádku ani sloupci.

Reprezentujeme-li tedy bipartitní graf G incidenční maticí $A(G)$, pak podle Kőnigovy věty platí, že maximální velikost parciální transverzály v $A(G)$ je rovna minimálnímu počtu řádků/sloupců potřebných pro pokrytí všech jedniček $A(G)$. Při důkazu využíváme získaných poznatků z Hallovy věty, a tedy platí, že Hallova věta implikuje Königovu. Zbývá dokázat opačnou implikaci.

Předpokládejme tedy, že v bipartitním grafu G platí Hallova podmínka. Chceme ukázat, že v tomto grafu existuje párování pokrývající jednu z partit. Pokud si tento graf opět vyjádříme maticově, pomocí matice incidence $A(G)$, zjistíme, že podmínky Königovy věty jsou splněny. Jinými slovy, v grafu G existuje párování pokrývající jednu z partit.

Hallova věta $\Leftrightarrow$ *Kőnigova věta.*

Podobně lze dokázat, že Kőnigova věta implikuje Dilworthovu, a Dilworthova věta implikuje Hallovu. V rámci těchto dvou důkazů definujeme částečně uspořádanou množinu P a pracujeme se skutečností, že počet disjunktních řetězců pokrývajících P je roven počtu hran v párování.

Závěr: *Hallova věta* $\Leftrightarrow$ *Kőnigova věta* $\Leftrightarrow$ *Dilworthova věta.*

2.3 Párování v obecných grafech

Tato sekce byla vypracována s využitím [12], [32]. Seznámíme se v ní s rozšířenou verzí Hallovy věty pro obecné grafy.

2.3.1 Tutteova věta

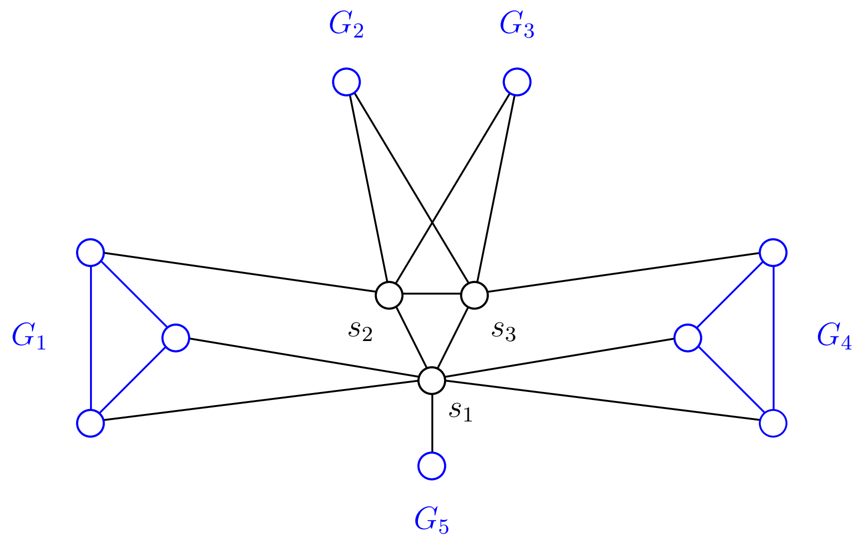
Tutteova věta, pojmenována po britském matematikovi Williamu Thomasi Tutteovi, popisuje vlastnosti konečných grafů s perfektním párováním.

Lichá komponenta je komponenta mající lichý počet vrcholů.

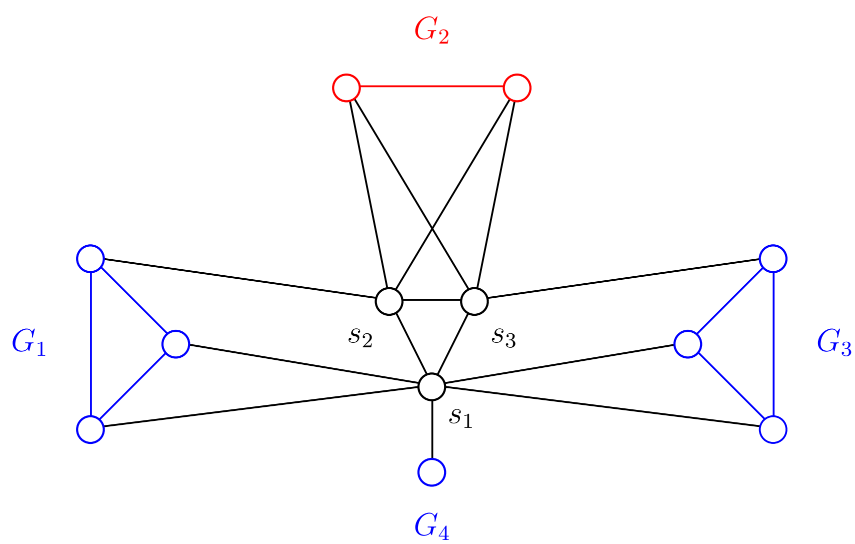
Počet lichých komponent grafu G značíme $k_o(G)$.

Věta 2.3.1 (Tutte [35]). *Graf G má perfektní párování* $\Leftrightarrow k_o(G-S) \leq |S|\ \forall S \subset V(G)$.

Rozdíl mezi grafem, který má perfektní párování a grafem, který jej nemá, můžeme vidět na obrázcích 2.3 a 2.4. Vrcholy s_1, s_2, s_3 jsou vrcholy množiny S.



Obrázek 2.3: Graf, který nemá perfektní párování. Nesplnění podmínky ($k_o(G-S) > |S|$) znázorněno pro jednu konkrétní množinu $S \subset V(G)$.



Obrázek 2.4: Graf, který má perfektní párování. Splnění podmínky ($k_o(G-S) = |S|$) znázorněno pro jednu konkrétní množinu $S \subset V(G)$. Červeně je označena sudá komponenta v $G-S$.

V rámci důkazu Tutteovy věty pracujeme se získanými výsledky věty Hallovy.

Kapitola 3

Párování v hypergrafech

3.1 Motivace

Z hlediska struktury je tato kapitola téměř shodná s kapitolou předchozí. Obsahuje navíc sekci se základními pojmy, ve které se vyskytuje analogie k většině grafových pojmů, se kterými jsme se seznámili již v úvodu.

Hypergraf je zobecněním pojmu graf. Hranám hypergrafu budeme říkat hyperhrany a od hran grafu se liší tím, že mohou spojovat více jak dva vrcholy. Mohou samozřejmě také býti orientované, ale to v této práci uvažovat nebudeme.

Pojem *párování v hypergrafech* je rozšířením, pro nás již známého, pojmu *párování v grafech*, kterému byla věnována celá předchozí kapitola. V tomto, hypergrafovém, případě však párování není tím, co si většina z nás představuje. Vrcholy opět reprezentují nějaké konkrétní objekty (osoby), ale není naším cílem je rozdělovat do dvojic, nýbrž do libovolně velikých skupin, přičemž každý objekt (osoba) je součástí právě jedné z těchto skupin.

Stejně jako v předchozí kapitole se seznámíme i se základní větou, zobecňující Hallovu větu z grafů, hovořící o párování v bipartitních hypergrafech a řekneme si více o možnosti případného zeslabení, či zesílení její podmínky.

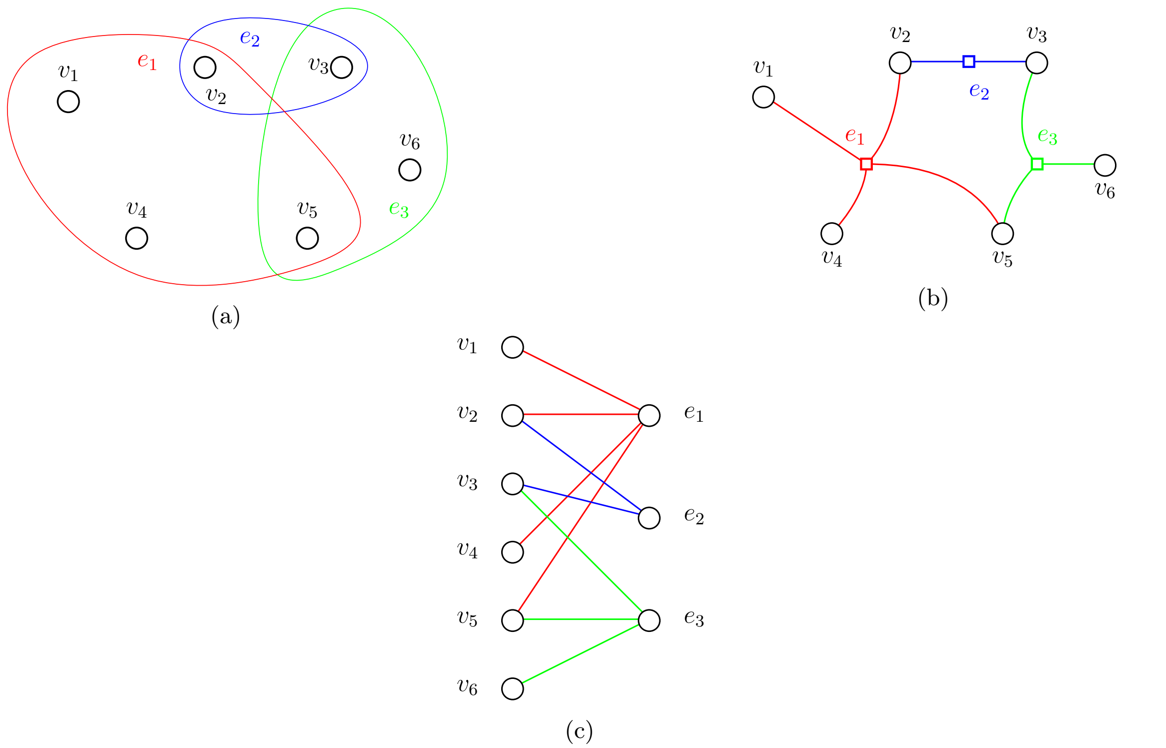
3.2 Základní pojmy

Definice v této sekci jsou převzaty z [7], [10], [15], [21].

Definice 3.2.1. *Hypergrafem* nazveme dvojici $H = (V, E)$ takovou, že $E \subseteq 2^V$. Množinu V nazveme *množinou vrcholů* a množinu E *množinou hyperhran.*

Počet vrcholů, se kterými hyperhrana $e \in E$ inciduje, nazveme *velikost hyperhrany*, značíme ji $|e|$. Předpokládáme, že $|e| \geq 2$, pro $|e| = 1$ máme smyčku v H.

Hypergraf můžeme graficky reprezentovat několika různými způsoby (viz obrázek 3.1). Prvním způsobem, který je vhodný pro hypergrafy s menším počtem hyperhran, je množinové znázornění pomocí Vennových diagramů - obrázek 3.1a. S vyšším počtem zakreslovaných hyperhran však klesá i přehlednost tohoto grafického znázornění. Pro tyto případy je vhodná reprezentace z obrázku 3.1b, kdy každé hyperhraně přiřadíme vrchol (standardně se jedná o vrchol jiného tvaru či zbarvení, než u původních vrcholů hypergrafu) a s ním pak hranou spojujeme vrcholy původního hypergrafu (v případě incidence). Posledním způsobem, který zde budeme využívat, je tzv. *Königova reprezentace* pomocí bipartitního grafu - obrázek 3.1c. Jedna partita grafu obsahuje všechny vrcholy hypergrafu, v druhé partitě se nachází vrcholy představující všechny jeho hyperhrany. Mezi dvěma vrcholy tohoto bipartitního grafu vede hrana právě tehdy, když vrchol inciduje s příslušnou hyperhranou.



Obrázek 3.1: Různé grafické reprezentace téhož hypergrafu.

Hlavní roli v této práci zahrají hypergrafy bipartitní.

Definice 3.2.2. *Bipartitní hypergraf* je takový hypergraf H, jehož množina vrcholů $V(H)$ je disjunktním sjednocením dvou neprázdných množin X, Y. Pro množinu hyperhran platí $E \subseteq 2^{X \cup Y}$. Předpokládáme, že množiny vrcholů mají stejnou velikost $|X| = |Y|$ a že každá hyperhrana $e \in E$ obsahuje stejný počet vrcholů z množin X a Y, neboli $|e \cap X| = |e \cap Y| > 0$.

Definice 3.2.3. Hypergraf H nazveme *r-uniformní*, pokud $\forall e \in E : |e| = r$.

Definice 3.2.4. Mějme hypergraf H a vrchol $v \in V(H)$. Pojmem *stupeň vrcholu* označujeme počet hyperhran, obsahujících vrchol v. Značíme jej $d(v)$.

Definice 3.2.5. Pokud vrchol v v hypergrafu H neobsahuje žádná hyperhrana, nazveme jej *izolovaným vrcholem*. Platí tedy, že $d(v) = 0$.

Definice 3.2.6. Hypergraf H nazveme *r-regulární*, pokud $\forall v \in V : d(v) = r$.

Následuje několik definic, které nám přiblíží pojem párování v hypergrafech.

Definice 3.2.7. Hypergraf $H' = (V', E')$ je *podhypergrafem* hypergrafu $H = (V, E)$, jestliže $V' \subseteq V$ a $\forall e' \in E' \ \exists e \in E : e' = V' \cap e$.

Definice 3.2.8. Hypergraf $H' = (V', E')$ je *indukovaným podhypergrafem* hypergrafu $H = (V, E)$, jestliže $V' \subseteq V$ a $E' = \{\forall e \in E : V(e) \cap V' \neq \emptyset$ *a platí, že* $|e| = 1 \vee |V(e) \cap V'| \geq 2\}$.

Definice 3.2.9. Mějme hypergraf $H = (V, E)$. *Párováním* nazveme množinu vzájemně disjunktních hyperhran.

Definice 3.2.10. *Největším párováním* v hypergrafu H nazveme párování s největším počtem hyperhran. Jeho velikost označíme $v(H)$.

Definice 3.2.11. Mějme hypergraf $H = (V, E)$. *Transverzálou* nazveme množinu $T \subseteq V$, pro kterou platí, že $\forall e \in E : T \cap E \neq \emptyset$, nejmenší velikost transverzály označíme $\tau(H)$.

3.3 Podmínky pro existenci párování v hypergrafech

Tato sekce byla vypracována s využitím [1], [21]. Budeme v ní pracovat s hypergrafy $H = (V, E)$, které vyhovují následující podmínce:

($*$) V je konečná množina a platí, že je disjunktním sjednocením množin X a Y. Zároveň $\forall e \in E : |e \cap X| = 1$ a $|e \cap Y| \leq r - 1$, kde $r \geq 2$ je předem dané celé číslo.

Pro podmnožinu $S \subseteq X$ označíme $E_S = \{F \subseteq Y : \{s\} \cup F \in E$, pro nějaké $s \in S\}$ a vytvoříme hypergraf $H_S = (Y, E_S)$.

3.3.1 Věta Haxellové

Následující věta je hypergrafovou analogií věty Hallovy, hovořící o existenci perfektního párování v bipartitních hypergrafech. Podmínku formulovala a větu dokázala roku 1995 kanadská matematička Penelope Evelyn Haxell.

Věta 3.3.1 (Haxell, 1995 [21])**.** *Pokud hypergraf $H = (V, E)$ splňuje podmínku ($*$) a zároveň $\tau(H_S) > (2r - 3)(|S| - 1)$ $\forall S \subseteq X$, pak $v(H) = |X|$.*

V případě volby $r = 2$, dochází k redukci věty 3.3.1 na větu 2.2.3 *(Hallovu)*. 2-uniformní hypergraf splňující podmínku ($*$) je totiž bipartitním grafem, v němž existuje párování pokrývající všechny vrcholy partity X, právě když $\tau(H_S) > (|S| - 1)$ $\forall S \subseteq X$, kde $\tau(H_S)$ je okolím množiny S v grafu G. Přeznačením $t(H_S)$ na $|N(S)|$ dostáváme $|N(S)| > (|S| - 1)$ a protože jistě platí $|S| > (|S| - 1)$, získáváme *Hallovu podmínku*: $|N(S)| \geq |S|$.

Následující příklad dokazuje, že nelze nalézt slabší podmínky pro větu 3.3.1. Převzat je taktéž z [21].

Příklad 3.3.1. *Nechť $r \geq 2$, $X = \{x_0, x_1\}$ a $Y = \{y_ij : 1 \leq i, j \leq r - 1\}$. Množina hran E je sjednocením množin E_0 a E_1, kde:*

- $E_0 = \{\{x_0, y_{i1}, \ldots, y_{i(r-1)}\}, 1 \leq i \leq r - 1\}$ *a*
- $E_1 = \{\{x_1, y_{1j_1}, y_{2j_2}, \ldots, y_{(r-1)j_{r-1}}\} : j_k \in \{1, ..., r - 1\}$ *pro* $k = 1, 2, \ldots, r - 1\}$.

Pak $H = (X \cup Y, E)$ splňuje podmínku ($*$) a má takovou vlastnost, že $\tau(H_S) \geq (2r - 3)(|S| - 1)$ $\forall S \in X$, ale $v(H) < |X|$.

Takto definovaný bipartitní hypergraf má jistě $2 + (r - 1)^2$ vrcholů a $r - 1 + (r - 1)^{(r-1)}$ hyperhran. Splnění všech podmínek si ukážeme pro několik konkrétních hodnot parametru r:

Pro $r = 2$:

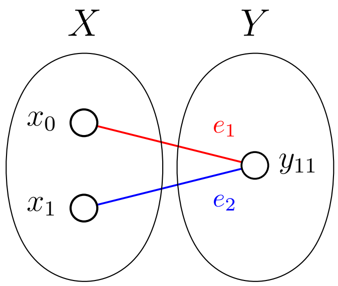
- $E_0 = \{x_0, y_{11}\}$
- $E_1 = \{x_1, y_{11}\}$

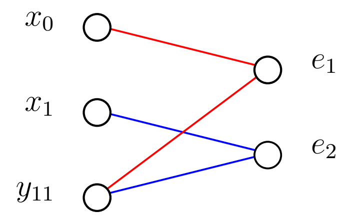
1. Podmínka ($*$) je splněna: $\forall e_i \in E : |e_i \cap X| = 1 \wedge |e_i \cap Y| = 1; i = 1, 2$.
2. Pro $S = \{x_0\}$ nebo $S = \{x_1\}$ ($|S| = 1$) je $\tau(H_S) \geq 0$ splněno triviálně.

   Pro $S = \{x_0, x_1\}$ ($|S| = 2$) je $\tau(H_S) \geq 1$ splněno, protože y_{11} je jediným vrcholem hypergrafu H_S.

   Všimněme si navíc, že platí přímo rovnost $\tau(H_S) = 1$.
3. Největší párování má velikost $v(H) = 1$, protože v hypergrafu nenalezneme 2 či více párově disjunktních hran (viz obrázek 3.2), $|X| = 2$.

   Platí tedy $v(H) < |X|$.





Obrázek 3.2: Dvě reprezentace bipartitního hypergrafu pro $r = 2$.

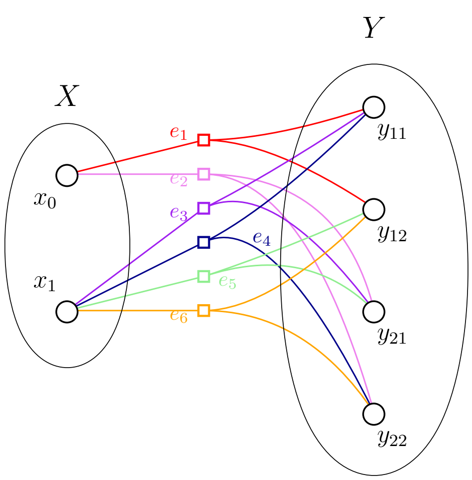
Pro $r = 3$:

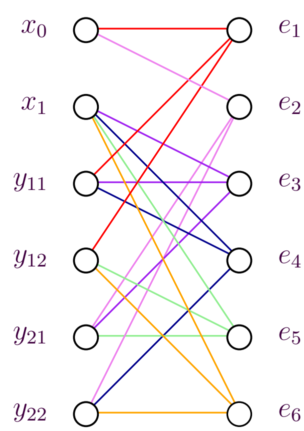
- $E_0 = \{\{x_0, y_{11}, y_{12}\}, \{x_0, y_{21}, y_{22}\}\}$
- $E_1 = \{\{x_1, y_{11}, y_{21}\}, \{x_1, y_{11}, y_{22}\}, \{x_1, y_{12}, y_{21}\}, \{x_1, y_{12}, y_{22}\}\}$

1. Podmínka $(*)$ je splněna: $\forall e_i \in E : |e_i \cap X| = 1 \wedge |e_i \cap Y| = 2; i = 1, \ldots, 6$.
2. Pro $S = \{x_0\}$ nebo $S = \{x_1\}$ je $\tau(H_S) \geq 0$ splněno triviálně.

   Pro $S = \{x_0, x_1\}$ je $\tau(H_S) \geq 3$ splněno, protože každý vrchol $y_{ij}; i, j = 1, 2$ hypergrafu H_S leží právě ve 3 hyperhranách a zároveň $|e_k| = 2; k = 1, ..., 6$. Nelze tedy vybrat takové dva vrcholy y_{ij}, aby společně ležely ve všech 6 hyperhranách (viz obrázek 3.3).

   Stejně jako v předchozím příkladě platí přímo rovnost $\tau(H_S) = 3$.
3. Ze stejných důvodů jako v předchozím příklade platí $v(H) < |X|$.





Obrázek 3.3: Dvě reprezentace bipartitního hypergrafu pro $r = 3$.

Pro $r = 4$:

- $E_0 = \{\{x_0, y_{11}, y_{12}, y_{13}\}, \{x_0, y_{21}, y_{22}, y_{23}\}, \{x_0, y_{31}, y_{32}, y_{33}\}\}$
- $E_1 = \{\{x_1, y_{1j_1}, y_{2j_2}, y_{3j_3}\} : j_k \in \{1, 2, 3\}$ pro $k = 1, 2, 3\}$

1. Podmínka $(*)$ je splněna: $\forall e_i \in E : |e_i \cap X| = 1 \wedge |e_i \cap Y| = 3; i = 1, \ldots, 30$.

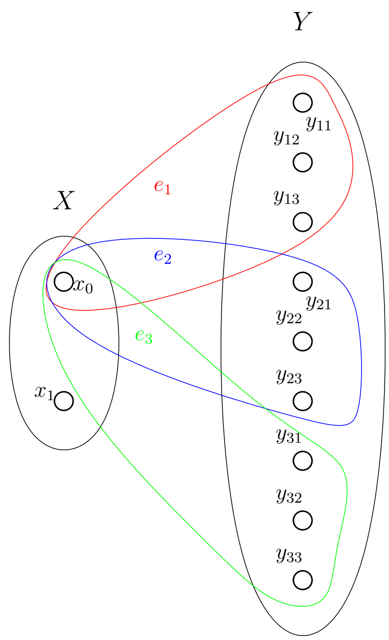
2. Pro $S = \{x_0\}$ nebo $S = \{x_1\}$ je $\tau(H_S) \geq 0$ splněno triviálně.

   Pro $S = \{x_0, x_1\}$ je $\tau(H_S) \geq 5$ také splněno.

   Ověření: Na obrázku 3.4 vidíme, že množina hyperhran E_0 rozdělila vrcholy $y_{ij}; i, j = 1, 2, 3$ do trojic. Každý vrchol y_{ij} hypergrafu H_S leží právě v 10 hyperhranách, přičemž jedna z těchto hyperhran je společná pouze pro danou trojici. Přidáme-li tedy do transverzály například trojici vrcholů y_{11}, y_{12}, y_{13}, bude obsažena ve 28 ze 30 hyperhran hypergrafu H_S, neboli ve všech, kromě hyperhran e_2, e_3. Pro získání nejmenší transverzály musíme tedy přidat ještě jeden vrchol z každé této hyperhrany (z každé další trojice vrcholů).

   Opět platí přímo rovnost $\tau(H_S) = 5$.

3. Ze stejných důvodů jako v předchozích příkladech platí $v(H) < |X|$.



Obrázek 3.4: Bipartitní hypergraf pro $r = 4$. Znázorněna pouze množina hyperhran $E_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Zobecnění pro $r \in \mathbb{N}$:

1. Podmínka $(*)$ vždy splněna.

2. $\tau(H_S) \geq (2r - 3)(|S| - 1)$

   Pro $S = \{x_0\}$ nebo $S = \{x_1\}$ splněno triviálně.

   Pro $S = \{x_0, x_1\}$ pracujeme s faktem, že množina hyperhran E_0 rozdělí vrcholy partity Y (hypergtafu H_S) do $r - 1$ $(r - 1)$-tic. Každý vrchol hypergrafu H_S tedy leží v 1 hyperhraně společné pouze pro danou $(r-1)$-tici a v dalších $(r-1)^{r-2}$ hyperhranách (celkem $1 + (r-1)^{r-2}$). Přidáním jedné $(r-1)$-tice do transverzály tedy pokryjeme $1 + (r-1)^{r-1}$ hyperhran z celkového počtu $r - 1 + (r-1)^{r-1}$. Pro vytvoření nejmenjší transverzály je tedy potřeba pokrýt zbylých $(r-2)$ hyperhran. K tomu stačí přidat jeden vrchol z každé další $(r-1)$-tice.

   Získáváme: $\tau(H_S) = (r-1) + (r-2) = 2r - 3$, neboli taktéž přímo rovnost.

3. Nerovnost $v(H) < |X|$ vždy splněna.

Bohužel, pro hypergrafy splňující podmínku věty 3.3.1, není znám žádný polynomiální algoritmus pro nalezení perfektního párování. Existuje však pro silnější verzi této podmínky - viz následující věta.

Věta 3.3.2 ([1]). *Mějme r-uniformní bipartitní hypergraf $H = (V, E)$. Pro jakékoli $\epsilon > 0$ a $r \geq 2$ existuje algoritmus $\mathcal{A}(\epsilon, r)$ který nalezne, v čase polynomiálním ve velikosti vstupu, perfektní párování v H splňující $\tau(H_S) > (2r - 3 + \epsilon)(|S| - 1)\ \forall S \in X$.*

Více o rozšíření Hallovy a Kőnigovy věty na jiné třídy hypergrafů nalezneme v [3], [4].

Kapitola 4

Porovnání problematiky párování v grafech a hypergrafech

Tuto, závěrečnou, kapitolu věnujeme srovnání dvou stežejních témat této práce - *párování v grafech* a *párování v hypergrafech.*

Zaměříme se na jeden konkrétní typ párovací úlohy - *přiřazovací úlohu*, jejímž cílem je nalezení perfektního párování s minimálními náklady v bipartitním (hyper)grafu. Úlohu pro obě oblasti vhodně naformulujeme slovně i pomocí celočíselného lineárního programování a následně porovnáme z pohledu algoritmického a z pohledu výpočetní složitosti.

4.1 Formulace úloh pomocí ILP

Tato sekce byla vypracována s využitím [1], [7], [14], [16], [17], [25], [31], [32], [34].

4.1.1 Přiřazovací úloha v grafech

Značení 4.1.1. *Mějme množinu X. Značením $\mathbb{R}^X(\mathbb{Z}^X)$ budeme myslet $\mathbb{R}^{|X|}(\mathbb{Z}^{|X|})$.*

Přiřazovací úloha v grafech je nejčastěji formulována takto: Máme n pracovníků a n pracovních pozic, přičemž známe náklady na vykonání daného úkolu daným pracovníkem. Cílem je přiřadit každému pracovníkovi úkol tak, aby celkové náklady byly minimální.

Na vstupu tedy máme úplný neorientovaný bipartitní graf $K_{n,n}$ s hranami s cenovým ohodnocením.

Problém 4.1.1 (Přiřazovací úloha v grafech)**.** *Vstupem je dvojice $(K_{n,n}, c_E)$, $K_{n,n}$ je úplný bipartitní graf, $c_E : E \to \mathbb{R}$ je cenová funkce. Výstupem je perfektní párování M s minimálními náklady.*

Pokud graf $G = (V, E)$ navíc reprezentujeme incidenční maticí A, můžeme přiřazovací úlohu v grafech formulovat pomocí ILP následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{e \in E} c_e x_e \\ &\text{za podmínky} Ax = \mathbf{1} \\ &x \in \{0,1\}^E \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde A je incidenční matice grafu G a $\mathbf{1}$ je vektor samých jedniček v $\mathbb{R}^V$.

Definice 4.1.1. Mějme matici $A = (a_{ij})$ typu m/n. Řekneme, že A je *totálně unimodulární*, pokud platí:

1. $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}; i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m,$
2. determinant každé čtvercové podmatice matice A je roven $-1, 0$ nebo 1.

Věta 4.1.1 ([14])**.** *Mějme graf G reprezentovaný incidenční maticí A. Pak A je totálně unimodulární právě tehdy, když G je bipartitní.*

Definice 4.1.2. Mějme graf G. *Frakcionálním párováním* nazveme funkci f, která přiřazuje každé hraně grafu číslo z intervalu $[0, 1]$. Pro každý vrchol v platí $\sum f(e) \leq 1$, přičemž součet probíhá přes všechny hrany incidentní s v.

Párování je tedy pouze speciálním případem frakcionálního párování, ve kterém je každé hraně přiřazena 0, nebo 1 - podle toho, zda se hrana v párování vyskytuje, nebo nikoli.

Definice 4.1.3. Mějme graf $G = (V, E)$. K podmnožině $F \subseteq E(G)$ můžeme přiřadit *charakteristický vektor* $i_F \in \{0, 1\}^{E(G)}$, pro který platí:

1. pokud $e \in F$, pak je na pozici e jednička,
2. pokud $e \notin F$, pak je na pozici e nula.

Pracovat zde budeme s charakteristickými vektory párování.

Definice 4.1.4. *Polytopem párování* grafu G nazveme konvexní obal charakteristických vektorů všech párování grafu G.

S tímto pojmem jsme se mohli poprvé setkat v článku Jacka Edmondse ([19]).

Jestliže G je bipartitní graf, pak polytop párování tohoto grafu je množina $\{x \in \mathbb{R}^E : Ax \leq 1, x \geq 0\}$, kde A je incidenční matice grafu G.

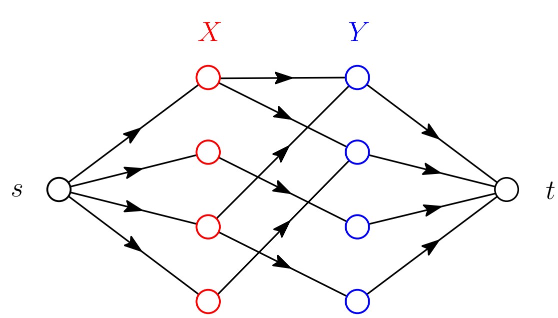
4.1.2 Řešení pomocí toků v sítích

Nyní si ukážeme, jak převést kteroukoli úlohu bipartitního párování na tok v síti.

Síť je orientovaný graf se dvěma speciálními vrcholy - *zdrojem* a *stokem*. Každá hrana sítě má nějakou kapacitu. *Tokem v síti* nazveme funkci, která každé hraně sítě přiřazuje nezápornou hodnotu (nepřekračující kapacitu hrany). Vstupní tok každého vrcholu (kromě zdroje a stoku) je navíc roven tomu výstupnímu. *Velikost toku* definujeme jako množství toku, které vzniká ve zdroji. *Maximálním tokem* nazveme takový tok, který má ze všech toků v dané síti největší velikost.

Mějme tedy neorientovaný bipartitní graf $G = (V, E)$ s partitami X a Y. V prvním kroku změníme neorientované hrany grafu G na orientované tak, že jejich krajní vrcholy rozdělíme na počáteční a koncové. Řekněme tedy, že všechny vrcholy partity X jsou počátečními vrcholy a všechny vrcholy partity Y těmi koncovými.

Do takto vzniklého orientovaného grafu následně přidáme dva nové vrcholy s *(tzv. umělý zdroj)* a t *(tzv. umělý stok)* a dalších $|X| + |Y|$ orientovaných hran - z vrcholu s do všech vrcholů partity X a ze všech vrcholů partity Y do vrcholu t (viz obrázek 4.1). Kapacity těchto přidaných hran jsou jednotkové. Výsledný graf označíme $G' = (V \cup s \cup t, E)$.



Obrázek 4.1: Graf G'. Kapacity hran nejsou uvedeny.

Pokud tento postup aplikujeme na úplný bipartitní graf $K_{n,n}$, můžeme pomocí toků v sítích vyřešit i přiřazovací úlohu hledáním maximálního toku. Každé hraně úplného bipartitního grafu je přiřazen buď nulový, nebo jednotkový tok, přičemž jednotkový tok odpovídá dvojici pracovník-úkol, kteří jsou si přiřazeni.

4.1.3 Přiřazovací úloha v hypergrafech

Přiřazovací úloha v hypergrafech je motivována aplikacemi při plánování oběhu lokomotiv, více ve článku [7]. Zobecňuje problém párování v bipartitních grafech na bipartitní hypergrafy. Na rozdíl od grafů mohou mít hypergrafy dosti složitou strukturu.

Z definice bipartitního hypergrafu víme, že hyperhrana inciduje se stejným počtem vrcholů v obou partitách.

Definice 4.1.5. Pro podmnožinu množiny vrcholů bipartitního hypergrafu $W \subseteq X \cup Y$ definujeme pojem *incidentní hyperhrany* jako množinu hyperhran, obsahujících alespoň jeden vrchol z obou množin W a $(X \cup Y)\backslash W$. Značíme $d(W) := \{e \in E : e \cap W \neq \emptyset, e\backslash W \neq \emptyset\}$.

Pro $W \subseteq X$ nebo $W \subseteq Y$ je vlastnost $e \in d(W)$ ekvivalentní s vlastností $e \cap W \neq \emptyset$.

Všimněme si dále, že pro vrchol v je tato definice definicí stupně vrcholu $d(v)$.

Definice 4.1.6. Mějme bipartitní hypergraf $H = (V, E)$. Podmnožinu množiny hyperhran tohoto hypergrafu $G \subseteq E$ nazveme *hyperpřiřazení*, pokud pro každý vrchol $v \in X \cup Y$ platí, že je obsažen v právě jedné hyperhraně $e \in G$.

Definice 4.1.7. *Cenová funkce* $c_S : S \to \mathbb{R}$ zobrazuje množinu S do reálných čísel. Pro $T \subseteq S$ platí: $c_S(T) := \sum_{s \in T} c_S(s)$.

Problém 4.1.2 (Přiřazovací úloha v hypergrafech)**.** *Vstupem je dvojice (H, c_E), $H = (V, E)$ je bipartitní hypergraf, $c_E : E \to \mathbb{R}$ je cenová funkce.*

Výstupem je buď hyperpřiřazení G^* hypergrafu H s minimálními náklady, tedy $c_E(G^*) = min\{c_E(G), G$ je hyperpřiřazení v $H\}$, nebo informace, že neexistuje žádné hyperpřiřazení.

Formulace pomocí ILP:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{e \in E} c_E(e) x_e \\
&\text{za podmínky} \sum_{d(v)} x_e = 1, \forall v \in V \\
&x \in \mathbb{Z}^E
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Definice 4.1.8. *Frakcionálním párováním* hypergrafu $H = (V, E)$ nazveme funkci $f : E \to \mathbf{R}^+$ takovou, že $\forall v \in V : \Sigma\{f(e) : v \in e\} \leq 1$.

Frakcionální párování v hypergrafech je analogií stejnojmenného pojmu z grafů. Párování je tedy opět pouze jeho speciálním případem.

Podobně jako v případě bipartitních grafů a toků, souvisí úlohy v bipartitních hypergrafech s tzv. *hypertoky.* Přiřazovací úlohu v hypergrafech lze převést na úlohu hledání optimálního hypertoku.

4.2 Srovnání úloh

Nyní, když máme všechny potřebné informace o obou úlohách, můžeme přejít k jejich srovnání. Sekce byla vypracována s využitím [7], [16], [17], [27], [29], [33].

Značení 4.2.1. *Mějme graf $G = (V, E)$. Velikost množiny vrcholů označíme n, velikost množiny hran označíme m.*

Pro neohodnocené i ohodnocené bipartitní grafy, splňující Hallovu podmínku, je známa celá řada polynomiálních algoritmů pro nalezení perfektního párování.

Historicky prvním a zároveň stále nejvíce používaným algoritmem pro hledání perfektního párování s minimálními náklady je Maďarská metoda (časová složitost $\mathcal{O}(n^2 m)$). Dalšími algoritmy jsou například: Gabowův, založený na škálování (časová složitost $\mathcal{O}(n^{3/4} m \log U)$), nebo Gabow-Tarjanův (časová složitost $\mathcal{O}(n^{1/2} m \log nU)$), U označíme cenu hrany, která má ze všech cen v grafu, v absolutní hodnotě, největší velikost.

Jak jsme však již předeslali v předchozí sekci, přiřazovací úlohu můžeme snadno převést na úlohu hledání maximálního toku v síti. Nejznámějšími algoritmy pro nalezení maximálního toku jsou: Ford-Fulkersonův (časová složitost $\mathcal{O}(nm)$ pro síť s jednotkovými kapacitami), Dinicův/Edmonds-Karpův (časová složitost $\mathcal{O}(n^2 m)$) a Metoda tří Indů (časová složitost $\mathcal{O}(n^3)$). V roce 2022 byl vyvinut nový algoritmus pro hledání maximálního a optimálního toku, pracující téměř v lineárním čase. Více ve článku [13].

Díky tomu, že je incidenční matice A grafu G totálně unimodulární, můžeme příslušnou úlohu ILP (4.1) řešit taktéž v polynomiálním čase (například metodami vnitřního bodu, nebo síťovou verzí simplexové metody - *network simplex*). Řešení této úlohy se navíc, díky totální unimodularitě A, shoduje s řešením příslušné reálné úlohy LP.

Situace v hypergrafech je ovšem odlišná.

Definice 4.2.1. Mějme bipartitní hypergraf $H = (V, E)$ s partitami X a Y. Hypergraf H nazveme *hypergraf s rozkladem*, jestliže je jeho množina vrcholů rozdělena na $p + q$ vzájemně disjunktních částí $X_1, \dots X_p$ a $Y_1, \dots Y_q$, přičemž velikost každé části je rovna nejvýše $d \in \mathbb{N}$. Hyperhrany spojují vždy jednu část z partity X s jednou částí z partity Y.

Věta 4.2.1 ([7]). *Přiřazovací úloha v hypergrafech je NP-těžká dokonce i pro hypergrafy s rozkladem, jejichž části mají velikost rovnu nejvýše 2.*

Polynomiální algoritmus není známý ani pro bipartitní hypergrafy splňující podmínku věty Haxellové. Na konci třetí kapitoly (viz věta 3.3.2) jsme si však ukázali silnější verzi této podmínky, pro kterou již polynomiální algoritmus nalezen byl, více ve článku [1].

Přiřazovací úlohu v hypergrafech lze řešit pomocí hypertoků a pomocí formulace ILP (4.2) - například metodou větví a mezí.

Kapitola 5

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře se zásadními rozdíly mezi přiřazovací úlohou v grafech a přiřazovací úlohou v hypergrafech.

Abychom mohli tyto dvě úlohy naformulovat a porovnat, museli jsme se nejprve seznámit s oběma zmiňovanými strukturami a problematikou párování v nich. Pro jednoduchost jsme se zaměřili na studium grafů a hypergrafů neohodnocených a využili jsme toho, že všechny získané informace o existenci a vlastnostech párování lze přenést na grafy a hypergrafy ohodnocené. Následně jsme obě přiřazovací úlohy naformulovali slovně i pomocí celočíselného lineárního programování, ukázali jsme si způsob, kterým je možné je řešit pomocí (hyper)toků a představili jsme si i několik konkrétních algoritmů. Mimo jiné jsme se seznámily i s frakcionálním párováním a polytopem párování.

Výsledek, ke kterému jsme postupným studiem této problematiky dospěli, je následující. Zatímco algoritmy, řešící úlohu v bipartitních grafech splňujících Hallovu podmínku, pracují v polynomiálním čase, úloha v bipartitních hypergrafech je NP-těžká i v případě, že platí podmínka věty Haxellové.

Literatura

[1] Chidambaram Annamalai, Finding perfect matchings in bipartite hypergraphs, Combinatorica 38 (6) (2018), 1285-1307

[2] S. Arora, B. Barak, Computational Complexity: A Modern Approach, Cambridge University Press, 2009

[3] Isabel Beckenbach, Dissertation: Matchings and Flows in Hypergraphs, Berlin, 2018

[4] I. Beckenbach, R. Borndörfer, Hall's and König's theorem in graphs and gypergraphs, Discrete Mathematics, 341 (2018), 2753-2761

[5] Claude J. Berge (1957), "Two theorems in graph theory"*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43 (9): 842–844

[6] J.A.Bondy, U.S.R.Murty, Graph Theory, Springer 2008

[7] R. Borndörfer, O. Heismann, The hypergraph assignment problem, Discrete Optimization, 15 (2015), 15-25

[8] D. P. Bovet, P. Crescenzi, Introduction to the theory of complexity, Electronic edition 2006

[9] S. Boyd, L. Vandenberghe, Convex Optimalization, Cambridge University Press 2004

[10] Alain Bretto, Hypergraph theory, Springer 2013

[11] Thomas Britz, Presentation about *Aspects of Combinatorial Optimization*, Kumamoto University, 2011

[12] Gary Chartrand, Linda Lesniak, Ping Zhang, Graphs and digraphs, Taylor and Francis Group, LLC 2016

[13] L. Chen, R. Kyng, Y. P. Liu, R. Peng, M. P. Gutenberg, S. Sachdeva, Maximum Flow and Minimum-Cost Flow in Almost-Linear Time, IEEE 63rd Annual Symposium of FOCS, 2022

[14] M. Conforti, G. Cornuéjols, G. Zambelli, Integer Programming, Spriger International Publishing Switzerland 2014

[15] R. Čada, Poznámky k přednáškám z předmětu *Teorie sítí* (2021/22), ZČU Plzeň

[16] Jakub Černý, Základní grafové algoritmy, České vysoké učení technické v Praze, 2013

[17] Jiří Demel, Grafy a jejich aplikace, Elektronické vydání, 2019

[18] Robert P. Dilworth (1950), "A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets", *Annals of Mathematics* 51 (1): 161–166

[19] J. Edmonds, Paths, trees and flowers, Canadian J. of Math. 17 (1965), 449-467

[20] P. Hall, On representation of subsets. *J. London Math. Soc.* 10 (1935) 26-30

[21] P.E. Haxell, A condition for matchability in hypergraphs, Graphs and Combinatorics 11 (1995), 245-248

[22] P. Holub, Poznámky k přednáškám z předmětu *Diskrétní matematika* (2019/20), ZČU Plzeň

[23] P. Holub, Poznámky k přednáškám z předmětu *Úvod do teorie grafů* (2020/21), ZČU Plzeň

[24] D. König, Graphen und Matrizen. *Math. Lapok. 38* (1931) 116-119

[25] E. Lawler, Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Dover Publications, 1976

[26] J. H. van Lint, R.M. Wilson: Course in Combinatorics, Cambridge 2001

[27] Martin Mareš, Tomáš Valla, Průvodce labyrintem algoritmů, CZ.NIC, 1. vydání, Praha 2017

[28] G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey, Integer and Combinatorial Optimization, Wiley, 1999

[29] Ch. H. Papadimitriou, K. Steiglitz, Combinatorial optimization: Algorithms and Complexity, Dover Publications, 1982

[30] Jörg Rothe, Complexity Theory and Cryptology, Springer - Verlag Berlin Heidelberg 2005

[31] Z. Ryjáček (2004), Pracovní texty přednášek k předmětu *Teorie grafů a diskrétní optimalizace 1*, ZČU Plzeň

[32] Z. Ryjáček (2016), Pracovní texty přednášek k předmětu *Teorie grafů a diskrétní optimalizace 2*, ZČU Plzeň

[33] H. A. B. Saip, C. L. Lucchesi, Matching Algorithms for Bipartite Graphs, Relatório Técnico DCC, 1993

[34] Edward R. Scheinerman, Daniel H. Ullman, Fractional Graph Theory, John Wiley and sons, 2008

[35] W. T. Tutte, A short proof of the factor theorem for finite graphs. *Canad. J. Math.* 6 (1954) 347-352

[36] Robert J. Vanderbei, Linear Programming, Fourth Edition, Springer Science+Business Media New York 2014

[37] L. Váša, Prezentace k přednáškám z předmětu *Počítače a programování 2* (2020/21), ZČU Plzeň

[38] Douglas B. West, Introduction to Graph Theory, Pearson College Div; Subsequent edition (September 1, 2000)