



Fakulta aplikovaných věd

Katedra mechaniky

Simulace proudění krve v idealizovaných modelech
patologicky poškozených cév s uvažováním
různých hemoreologických vlastností

Bakalářská práce

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Simulace proudění krve v idealizovaných modelech patologicky poškozených cév s uvažováním různých hemoreologických vlastností“ vypracovala sama s použitím uvedené literatury.

V Plzni, 31. 5. 2023

Kateřina Sůsová

Poděkování

Ráda bych tímto chtěla velmi poděkovat mé vedoucí bakalářské práce Ing. Aleně Jonášové, Ph.D., za spoustu času, nesmírnou dávku trpělivosti a cenné rady, které se mi dostaly při zpracování této práce.

Dále bych ráda poděkovala mé rodině a příteli za neustálou podporu v jakékoli podobě, nejen při tvorbě této práce.

Abstrakt

Hlavním cílem předložené bakalářské práce je provést podrobnou analýzu neneutonských efektů v případě ustáleného proudění lidské krve ve vybraných modelech cév. S ohledem na složité tokové vlastnosti krve, které jsou ovlivňovány celou řadou faktorů, je zde na tuto kapalinu nahlíženo jako na neneutonskou kapalinu vykazující pseudoplastické, popřípadě viskoelastické vlastnosti. Pro lepší pochopení studované problematiky a jasnější vymezení obou zmíněných vlastností jsou v práci popsány a v simulacích následně užity čtyři neneutonské konstitutivní modely: mocninový model, modifikovaný Crossův model, Carreauův model a Oldroyd-B model. Pro ověření správnosti programové implementace zmíněných modelů do prostředí výpočtového systému ANSYS Fluent jsou použity jak výsledky analytického řešení (přímý segment cévy), tak numerické výsledky publikované v odborné literatuře (přímý segment cévy se stenózou, cévní bifurkace).

Klíčová slova: ustálený tok krve, zobecněná newtonská kapalina, viskoelastická kapalina, Oldroyd-B model, zúžená céva

Abstract

The main aim of the bachelor thesis is to perform a detailed analysis of non-Newtonian effects in the case of steady flow of human blood in selected vessel models. With respect to the complex flow properties of blood, which are influenced by a number of factors, this liquid is viewed as non-Newtonian liquid exhibiting pseudoplastic or even viscoelastic properties. For a better understanding of the studied issue and a clearer definition of both mentioned properties, four non-Newtonian constitutive models are described in the thesis and subsequently used in the simulations: the power-law, the generalized Cross model, Carreau model and the Oldroyd-B. To verify the correctness of the program implementation of the mentioned models in the ANSYS Fluent computer environment, both the results of the analytical solution (straight segment of the vessel) and the numerical results published in the professional literature (straight segment of the vessel with stenosis, vascular bifurcation) are used.

Key words: steady blood flow, generalized Newtonian fluid, viscoelastic fluid, the Oldroyd-B model, vessel with stenosis

Obsah

Úvod	1
1 Modelování proudění lidské krve	3
1.1 Lidská krev	3
1.1.1 Složení krve	3
1.1.2 Tokové vlastnosti krve	4
1.2 Matematický popis proudění krve	6
2 Exkurz mezi neneutonské kapaliny	8
2.1 Neneutonské kapaliny	9
2.2 Modely pseudoplastických kapalin	12
2.3 Modely viskoelastických kapalin	13
3 Matematické modely užitě v práci	16
3.1 Reologické modely krve	16
3.1.1 Model newtonské kapaliny	16
3.1.2 Modely pseudoplastické kapaliny	16
3.1.3 Modely viskoelastické kapaliny	19
3.2 Přehled matematických modelů a jejich numerické řešení	23
3.2.1 Výsledný tvar matematických modelů	23
3.2.2 Implementace do výpočtového systému ANSYS Fluent	24
3.2.3 Nastavení řešiče ve výpočtovém systému ANSYS Fluent	25
3.2.4 Okrajové a počáteční podmínky	25
4 Výsledky numerických simulací	27
4.1 Příčný segment cévy	27
4.2 Trubice se stenózou	29
4.3 Bifurkace	37
Závěr	44
Použitá literatura	46
A Programové nadstavby v ANSYS Fluent	48
B Analytického řešení tvaru rychlostního profilu	49

Úvod

Možnosti současné medicíny jsou bezesporu na mnohem vyšší úrovni než před mnoha lety, a to především díky moderním technologiím, které ji posouvají nejen v oblasti diagnostiky, ale i v samotné léčbě pacientů. Kromě všeobecně známých diagnostických nástrojů, kam lze zařadit například zobrazovací metody založené na sonografii či výpočetní tomografii (*computed tomography*, CT), se lékařům v posledních letech začínají nabízet i možnosti spjaté s realizací počítačových simulací. Ačkoliv je začlenění tohoto typu diagnostických nástrojů do klinické praxe zatím stále na začátku, lze je bezpochyby označit za další krok ve vývoji moderní medicíny.

Jednou z možných oblastí, kde počítačové simulace mohou přispět k přesnější a s ohledem na pacienta i šetrnější diagnostice, je kardiovaskulární medicína. Konkrétně lze zmínit vývoj neinvazivních vyšetřovacích technik pro posouzení závažnosti patologických poškození cév¹, které jsou založeny na reálných geometriích cév získaných zobrazovacími metodami typu CT a datech z počítačových simulací proudění krve. Obecně lze říci, že diagnostické nástroje založené na řešení matematických modelů proudění krve mají cestu do klinické praxe otevřenou. Možnosti počítačových simulací jsou však daleko širší, neboť kromě aktuálního stavu dokáží poskytnout cenné informace i o dalším vývoji a průběhu onemocnění. To se týká například jednoho z nejrozšířenějších příčin kardiovaskulárních chorob – aterosklerózy, jejíž výskyt a rozsah bývá úzce spjat s charakterem protékající krve. To znamená, že čím více je v daném místě kardiovaskulárního systému proudění krve (hemodynamika) nerovnoměrné či jakkoliv narušené, např. v důsledku větvení cévy, tím je zde větší riziko rozvoje této choroby a s ním spojenými komplikacemi (nedokrvení tkání, trombóza, ...).

Kromě jedinečnosti hemodynamiky každého pacienta, která je určována geometrií cév a jejich případnými anatomickými anomáliemi, je věrohodnost výsledků numerických simulací ovlivněna i volbou matematického modelu proudění, zejména pak konstitutivním vztahem popisujícím tokové vlastnosti krve. Z tohoto důvodu je vhodné volbě reologického modelu věnovat náležitou pozornost tak, aby při následných numerických simulacích byla zachycena přítomnost neneutonských efektů a mohl být tak zohledněn jejich vliv na podobu modelované hemodynamiky.

Jelikož odborná literatura nabízí celou řadu různě složitých reologických modelů, které na lidskou krev nahlíží jako na neneutonskou kapalinu vykazující pseudoplastické, visko-

¹Výpočet tzv. virtuální frakční průtokové rezervy (*virtual fractional flow reserve*, vFFR) popsany např. v [1].

elastické či dokonce tixotropní chování [2]–[4], klade si předložená bakalářská práce za cíl seznámit se s hlavními typy konstitutivních modelů vhodných pro simulace proudění krve ve velkých a středně velkých cévách tak, jak jsou prezentovány v odborné literatuře. Pozornost je přitom zaměřena především na vybrané viskózní a viskoelastické modely a jejich programovou implementaci do výpočtového prostředí softwaru ANSYS Fluent.

V tomto smyslu je rovněž zvolena i struktura práce, která je rozdělena do čtyř kapitol. První kapitola je věnována popisu lidské krve a faktorům, které ovlivňují její tokové vlastnosti a vedou k jejímu zařazení jakožto neneutonské kapaliny.

Následující kapitola se zabývá jak obecným přehledem a klasifikací neneutonských kapalin, tak podrobnějším vymezením vlastností pseudoplastických a viskoelastických kapalin z pohledu reologie.

Pro potřeby numerických simulací, které budou hlavním výstupem práce, jsou ve třetí kapitole uvedeny jednak čtyři základní viskózní modely (newtonský, mocninový, modifikovaný Crossův, Carreauův) a jednak jsou na příkladu jednoduchých 1D kontinuí odvozeny matematické modely dvou nejznámějších viskoelastických modelů (Maxwellův, Oldroydův). Pro lepší přehlednost jsou dále v této kapitole uvedeny výsledné tvary všech matematických modelů proudění, pomocí nichž je krev v práci modelována jakožto newtonská, pseudoplastická či viskoelastická kapalina. V této návaznosti je zde rovněž nastíněna programová implementace příslušných konstitutivních modelů do výpočtového prostředí komerčního softwaru ANSYS Fluent a popsány použité okrajové a počáteční podmínky.

Poslední kapitola je věnována podrobné analýze numerických výsledků realizovaných pro dva základní typy cév – přímý segment a bifurkaci, přičemž v obou případech jsou uvažovány příslušné geometrie jak s poškozením (stenózou), tak bez něj. Pro úplnost dodejme, že volba obou geometrií není náhodná a odráží naši snahu verifikovat vyvinuté programové nadstavby prostřednictvím dat z analytických řešení a odborných publikací.

Předložená bakalářská práce je doplněna o dvě přílohy. V první je blíže popsán způsob vývoje programových nadstaveb v prostředí výpočtového systému ANSYS Fluent. Druhá příloha obsahuje podrobné odvození rychlostních profilů v rotačně symetrické trubici pro případ ustáleného laminárního proudění nestlačitelné newtonské, resp. neneutonské kapaliny.

1 Modelování proudění lidské krve

Proudění krve nejen v cévách lidského těla je ovlivněno mnoha faktory, mezi které patří zejména objemové zastoupení a charakter jednotlivých složek krve, geometrie cév, ale i teplota. Objasnění jejich reologického významu je předmětem této kapitoly, stejně tak jako uvedení do problematiky matematického modelování proudění krve ve velkých a středně velkých cévách.

1.1 Lidská krev

Krev je pro lidský organismus životně důležitá a vysoce specializovaná tekutá tkáň. Nepostradatelně plní nebo se alespoň částečně podílí na celé řadě funkcí – od transportu dýchacích plynů (kyslíku do tkání a oxidu uhličitého z tkání) a chemických látek (hormonů, živin apod.) až po udržování stálého vnitřního prostředí (tzv. homeostáza). Další důležitou roli hraje i v případě buněčného metabolismu, zástavy krvácení (koagulace), tvorbě obranných látek nebo termoregulace [4]. Proto mají jakékoli patologické změny, ať už v krvi samotné anebo v krevním oběhu (tj. srdci a cévách), rozsáhlé následky, kterým je zapotřebí předcházet.

Pro lepší pochopení faktorů, které krev ovlivňují, charakterizují její tokové vlastnosti a které je nutné zohlednit při modelování jejího proudění, je v následujících odstavcích uvedeno stručné shrnutí toho, co činí krev takovou jaká je a jak se její složení projevuje na jejím chování z hlediska mechaniky tekutin.

1.1.1 Složení krve

Krev je směs krevních elementů a tekuté složky. Ke krevním elementům, které tvoří okolo 37–54% objemového podílu krve, řadíme červené krvinky, bílé krvinky a krevní destičky [4].

Tekutou složkou je krevní plazma, která má nažloutlou barvu, a její hlavní funkcí je transport krevních částic a chemických látek (voda, hormony, tuky). Skládá se z vody (92%), organických látek (cukry, tuky, bílkoviny) a směsi anorganických látek (sodík, draslík, vápník, hořčík, železo atd.) [5]. Hodnota hustoty krevní plazmy se pohybuje okolo 1025 kg m^{-3} . Plazmu oddělenou od krevních částic lze považovat za newtonskou kapalinu s konstantní viskozitou.

Červené krvinky (*erythrocyty*) jsou bezjaderné buňky, které mají tvar bikonkávního disku. Obsahují červené krevní barvivo hemoglobin se železnatými ionty Fe^{2+} , které na

základě rozdílných parciálních tlaků v plicích a tkáních na sebe dokáže vázat dýchací plyny. Bikonkávní tvar červených krvinek a jejich schopnost deformovat se do různých tvarů jim dává skvělé předpoklady projít i těmi nejužšími kapilárami a transportovat dýchací plyny do všech tkání. Poškozené červené krvinky tuto schopnost ztrácejí, když např. v důsledku srpkovité anémie či abnormálních hodnot smykového napětí může dojít až k porušení elastické membrány a rozpadu buňky. Hematokrit vyjadřuje objemový podíl červených krvinek na celkovém objemu krve. Hodnota tohoto parametru je závislá na mnoha faktorech. Jako příklad lze zmínit pohlaví (muži: 39–49%, ženy: 35–46%), věk (předčasně narozené děti: 65–75%, novorozenci: 50–60%) či parciální tlak kyslíku v okolí (člověk žijící ve velmi vysoké nadmořské výšce: 60%) [4]. Hodnota hematokritu se ale může měnit i v krátkodobém měřítku, hlavně při extrémně stresových situacích nebo z důvodu patologických či psychosomatických procesů.

Bílé krvinky (*leukocyty*) jsou buňky s jádrem, které zajišťují obranyschopnost organismu proti cizorodým látkám a patogenům. Zdravý člověk má pět typů leukocytů a každý z nich je uzpůsoben na jiný typ imunitní reakce. Obecně mají menší deformovatelnost než červené krvinky. V aktivované formě při imunitní reakci dojde k proměně vnitřní struktury, což způsobí změnu mechanických vlastností (např. snížení schopnosti deformace). Objemový podíl bílých krvinek v krvi u zdravého člověka je zhruba 1%.

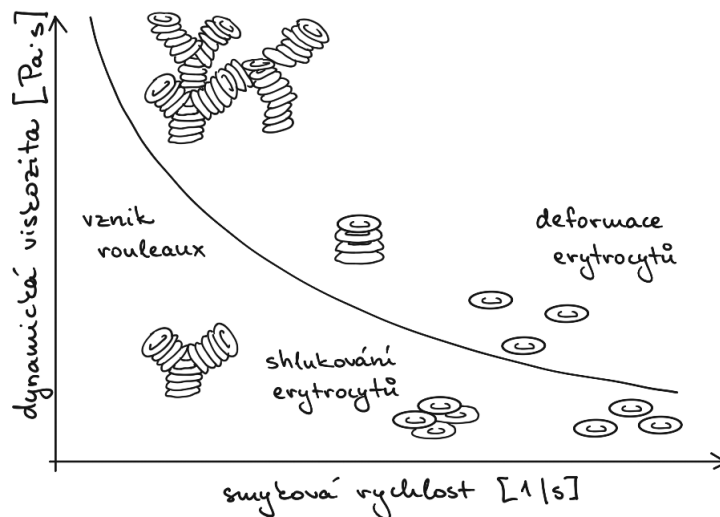
Krevní destičky (*trombocyty*) jsou bezjaderné úlomky větších buněk, které mají významnou úlohu při zástavě krvácení. Ve srovnání s červenými krvinkami je jejich množství v krvi malé, proto se na jejich reologických vlastnostech výrazněji nepodílí [6].

1.1.2 Tokové vlastnosti krve

S ohledem na výše uvedené skutečnosti týkající se složení krve a objemového složení jednotlivých složek není překvapující, že krev v cévách s průsvitem větším jak $500\ \mu\text{m}$ [4] je z pohledu mechaniky tekutin klasifikována jako nestlačitelná vazká kapalina patřící mezi hrubé disperzní soustavy. Vědní obor nazvaný hemoreologie studuje tokové vlastnosti krve a jejích složek jak v makroskopickém, tak i v mikroskopickém měřítku. Obecně se zabývá také interakcí krve s cévní stěnou nebo s jinými nebiologickými materiály jako například léky anebo cévními implantáty [4].

Krev jako celek vykazuje chování neneutonské kapaliny, jejichž viskozita (vnitřní tření) se v závislosti na různých faktorech mění. Jasnější klasifikaci lze učinit například v závislosti na velikosti cév, kterými krev protéká. Jak uvádí např. [3], [7], na krev lze nahlížet buď jako na pseudoplastickou, nebo viskoelastickou kapalinu. V prvním případě

se tak děje především ve velkých cévách a při ustáleném proudění, naopak viskoelasticita bývá průvodním jevem v cévách menšího průřezu. Hlavní podíl na těchto dvou základních klasifikacích mají především červené krvinky, zejména pak jejich schopnost se shlukovat (penízkovatět) a deformovat se působením vnějších sil (obr. 1).

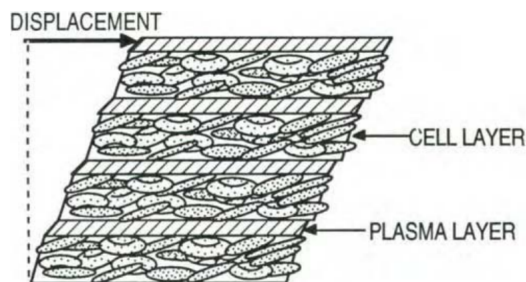


Obrázek 1: Ilustrace shlukování červených krvinek a tvorby tzv. rouleaux struktur v závislosti na hodnotách smykové rychlosti [4].

Při nízkých smykových rychlostech může docházet ke shlukování červených krvinek a vytváření struktur označovaných jako rouleaux (obr. 1), což je spjato s nárůstem celkové viskozity a akumulací elastické deformační energie² [7]. Čím jsou vznikající struktury složitější, tím celková viskozita roste, stejně tak jako množství nashromážděné energie. Takto proudí krev například v menších cévách, kde často dochází k vzájemné interakci mezi krvinkami, nebo v cévách, které jsou vlivem patologického onemocnění buď zúženy (stenózy), nebo rozšířeny (výdutě) s lokálním zpomalením či stagnací toku.

Opačné chování lze zaznamenat s nárůstem smykové rychlosti, kdy se dříve vytvořené rouleaux struktury rozpadají, což se projevuje postupným poklesem viskozity krve a uvolněním nahromaděné deformační energie. Po překročení určité, blíže nespecifikované, hodnoty smykové rychlosti pak dochází k rovnoměrnému rozptýlení červených krvinek, jejich natočení a protažení ve směru toku. Nastává tak situace, kdy krvinky klouzají po vrstvách krevní plazmy, což vede k dalšímu snížení odporu při proudění [4], viz obr. 2. Tento jev je častý především v cévách s velkým průřezem.

²Energie potřebná pro vratnou (elastickou) deformaci červených krvinek, jejíž míra je určena elastickými vlastnostmi buněčné membrány.



Obrázek 2: Ilustrace vzniku vrstev orientovaných červených krvinek (*cell layer*) klouzajících po vrstvách krevní plazmy (*plasma layer*) [2].

Jelikož viskoelastické chování se v případě lidské krve projevuje především při nízkých smykových rychlostech [7] anebo v menších cévách během diastolické fáze srdečního cyklu [3], bývá tato vlastnost při modelování proudění krve ve velkých a středně velkých cévách často zanedbávána. Při tomto předpokladu je krev modelována jako čistě pseudoplastická kapalina bez jakýchkoliv elastických vlastností. Zvolení tohoto typu kapaliny nabízí otázku, zdali zanedbání elastických vlastností na úkor těch viskózních nepovede k odlišným výsledkům realizovaných simulací a tudíž i závěrům. Z tohoto důvodu je vhodné se přítomností neneutonských efektů zabývat podrobněji.

1.2 Matematický popis proudění krve

Při modelování toku krve ve velkých a středně velkých cévách, kam patří například srdečnice (aorta) či karotické tepny, je obvyklé učinit několik zjednodušujících předpokladů. První a pravděpodobně nejdůležitější z nich se týká samotné krve, která je v této práci uvažována jako homogenní nestlačitelná vazká kapalina. K tomuto předpokladu je možné přistoupit díky zanedbatelným rozměrům krevních částic (μm) v porovnání s průsvity uvažovaných cév (mm) a vysokému podílu vody v krevní plazmě (92%). Druhým zjednodušením je označení proudění krve v příslušných cévách za izotermické a laminární. To je možné splnit v případě malého výseku kardiovaskulárního systému, kde nebude docházet k výrazným změnám teploty či výskytu turbulentních jevů. Posledním předpokladem je, že cévy budou v této práci modelovány výhradně jako nepropustné a nepoddajné, což je u cév poškozených aterosklerózou zajištěno z principu, neboť tvorba lézí bývá provázána ztrátou elasticity cévní stěny.

S ohledem na výše uvedené je možné proudění krve matematicky popsat rovnicí kontinuity a Navierovými-Stokesovými rovnicemi, které vyjadřují zákony zachování hmotnosti a hybnosti. V mechanice tekutin jsou obecně označovány pojmem nelineární systém

Navierových-Stokesových (NS) rovnic a pro laminární proudění nestlačitelné vazké kapaliny mají následující tvar [3], [7], [8]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{v } (0, \mathcal{T}) \times \Omega, \quad (1.2)$$

kde $(0, \mathcal{T})$, $\mathcal{T} > 0$ označuje časový interval a $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ výpočtovou oblast s hranicí $\partial\Omega = \partial\Omega_I \cup \partial\Omega_O \cup \partial\Omega_W$, kde $\partial\Omega_I$ odpovídá vstupu (*inlet*), $\partial\Omega_O$ výstupu (*outlet*) a $\partial\Omega_W$ nepoddajným stěnám (*walls*). Veličiny vystupující v rovnicích (1.1)–(1.2) zahrnují čas $t \in (0, \mathcal{T})$, vektor rychlosti $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ a Cauchyho tenzor napětí $\boldsymbol{\tau}$ (*total stress tensor*). Účinek vnějších objemových sil působících na proudící kapalinu zde není uvažován. Kromě výše uvedených parciálních diferenciálních rovnic je tento matematický model ještě doplněn o vhodné počáteční a okrajové podmínky.

Rozepsáním materiálové derivace na levé straně rovnice (1.2) a užitím známého konstitutivního vztahu $\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}$, kde p představuje tlak a \mathbf{T} disipační tenzor (*extra stress tensor*), lze systém NS rovnic (1.1)–(1.2) přepsat do následující podoby

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.3)$$

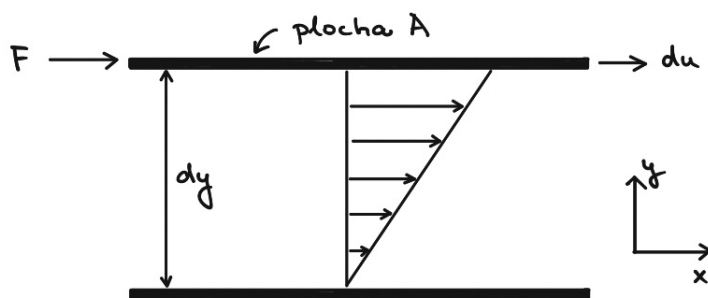
$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad \text{v } (0, \mathcal{T}) \times \Omega. \quad (1.4)$$

Tvar disipačního tenzoru \mathbf{T} v rovnici (1.4) je určen tím, zdali je krev modelována jako newtonská, pseudoplastická nebo viskoelastická kapalina. Proto před tím, než popíšeme příslušné viskózní a viskoelastické modely, které budou v této práci použity, je vhodné si v následující kapitole teorii neneutonských kapalin blíže popsat.

2 Exkurz mezi nenevtonské kapaliny

Reálné tekutiny lze rozdělit na dvě skupiny podle toho, zda splňují Newtonův zákon viskozity (2.1), či nikoliv. Z tohoto důvodu je zde vhodné si podstatu tohoto klíčového zákona reologie vysvětlit blíže a uvést ho do širší souvislosti nejen s ohledem na dříve popsané tokové vlastnosti krve.

Pro lepší názornost uvažujme případ Couettova proudění. Mějme vazkou kapalinu, která zcela vyplňuje mezeru o velikosti dy mezi dvěma rovnoběžnými deskami, každou o ploše A (obr. 3). Bude-li na horní plochu působit v tečném směru konstantní síla o velikosti F , která ji uvede do pohybu o rychlosti du , bude tento silový účinek následován vznikem charakteristického trojúhelníkového rychlostního profilu zobrazeném na obr. 3. Tento profil je důsledkem ulpívání kapaliny na stěně obou desek a existencí vnitřního tření, které lze vyjádřit skrz smykové (tečné) napětí τ_{xy} na rozhraní přilehlých a různě rychle se pohybujících vrstev kapaliny.



Obrázek 3: Schéma smykového toku.

Vztah, který popisuje lineární závislost smykového napětí na změně rychlosti kapaliny ve směru kolmém na směr pohybu, byl odvozen Isaacem Newtonem už v 17. století a je platný pro případ laminárního proudění nestlačitelné vazké kapaliny [9]

$$\frac{F}{A} = \tau_{xy} = -\eta \frac{du}{dy} = -\eta \dot{\gamma}, \quad (2.1)$$

kde η označuje dynamickou viskozitu a $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$ gradient rychlosti ve směru kolmém na směr pohybu, který budeme dále označovat jako smykovou rychlost.

Z (2.1) je patrné, že klíčovou veličinou ovlivňující míru vnitřního tření a tedy i tok kapaliny je její dynamická viskozita η , která bývá obecně proměnná v závislosti na okolní teplotě a tlaku. Vliv tlaku bývá většinou zanedbatelný. V případě newtonských kapalin, pro které platí lineární závislost (2.1) a mezi které řadíme i vodu, je viskozita funkcí pouze obou výše zmíněných fyzikálních veličin. To znamená, že v případě konstantní teploty

a tlaku lze viskozitu u tohoto typu kapalin považovat za fyzikální konstantu určenou pouze typem materiálu, pro který je vyjadřována. Příslušná toková křivka (reogram), vyjadřující závislost smykového napětí na smykové rychlosti, má pak podobu přímky, viz obr. 5. Naproti tomu dynamická viskozita nenevtonských kapalin, kam se řadí některé nátěrové hmoty, kečup nebo lidská krev, je nekonstantní a může být funkcí mnoha veličin od smykové rychlosti po čas. Reogramy tohoto typu kapalin mívají často nelineární průběh a nelze je tudíž popsat vztahem (2.1).

2.1 Nenevtonské kapaliny

Jak bylo zmíněno výše, reologické chování nenevtonských kapalin je ve srovnání s těmi newtonskými podstatně složitější. Jejich reogramy mají často podobu nelineárních křivek nebo neprochází počátkem souřadnicového systému. S ohledem na nekonstantní charakter jejich viskozit se při viskozimetrických měřeních stanovuje tzv. zdánlivá viskozita η_a , která se analogicky ke vztahu (2.1) vyjadřuje ve tvaru

$$\eta_a = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}, \quad (2.2)$$

resp. v podobě reologické rovnice jako

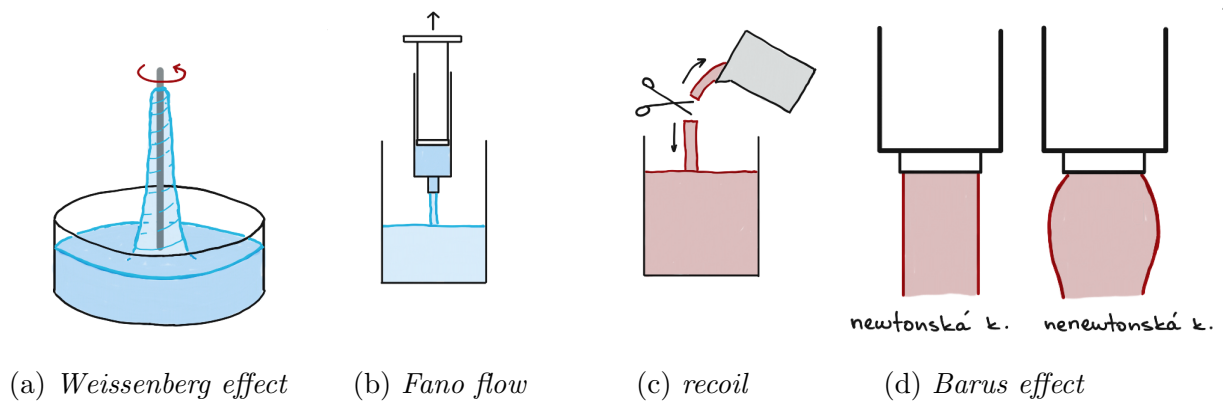
$$\tau = \eta_a(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}, \quad (2.3)$$

kde τ je smykové napětí. Jak je podrobně popsáno např. v [4], [9], hodnota zdánlivé viskozity η_a závisí kromě zmíněné teploty a tlaku také na hodnotě smykové rychlosti nebo na historii předchozích deformací (např. viskoelastické kapaliny). Proto i sebemenší změna geometrie oblasti, kterou nenevtonská kapalina protéká, může vést ke zcela odlišné podobě proudového pole.

Nenevtonské kapaliny se kromě proměnné viskozity odlišují i jistým neobvyklým chováním, které nebylo u newtonských kapalin nikdy pozorováno. Výčet těchto nenevtonských efektů je uveden např. v [10], [11], přičemž za ty nejtypičtější pro nenevtonské kapaliny lze označit např.:

- Weissenbergův efekt (*rod climbing effect*, obr. 4a) – při míchání je kapalina vytlačována vzhůru, namotává se a „šplhá“ po míchadle,
- Fanův tok (*Fano flow, tubeless siphon*, obr. 4b) – kapalina se brání přerušení proudu, např. při natahování kapaliny do stříkačky bude kapalina stále proudit i v případě, kdy otvor stříkačky bude už nad hladinou,

- efekt zpětného rázu (*recoil*, obr. 4c) – po náhlém přerušení působení vnějších sil dojde k „ucuknutí“ kapaliny v důsledku jejího (částečného) návratu do původního stavu, tj. jakýsi projev její (nedokonalé) paměti,
- Barussův efekt (*Baruss effect/die swell*, obr. 4d) – rozšíření proudu kapaliny při výtoku z trubice,
- Kayeův efekt (*Kaye effect*) – kapalina dopadající na hladinu se místo vmíchávání nebo lokálního hromadění na hladině odráží a vytváří sekundární proud,
- vliv smykové rychlosti – dochází k houstnutí/řídnutí kapaliny v důsledku působení vnějších sil (př. bramborový škrob rozpuštěný ve vodě),
- efekt otevřeného vedení (*open channel extensional flow*) – při vytvoření vedení ze stojící kádinky se kapalina sama vyprázdní i přes působící tíhovou sílu,
- vliv elektrického pole (*electrorheological fluids*) – suspenze obsahuje velice jemné částice, které reagují na přítomnost elektrického pole a mají schopnost zvýšit svou viskozitu až $10^5 \times$ (např. aktivní potlačení nežádoucích vibrací),
- viskoelastické chování – z pohledu reologie vykazuje kapalina jak vlastnosti vazké kapaliny, tak elastického tělesa.



Obrázek 4: Příklady vybraných nenevtonských efektů.

Některé z výše uvedených efektů jsou způsobené tím, že nenevtonské kapaliny vykazují nenulový rozdíl normálového napětí v případě jednoosého proudění. Jinak řečeno působíme-li na kapalinu v jednom směru, ta často začne reagovat i v dalším směru, nejčastěji v tom kolmém.

Obecně lze nenevtonské kapaliny rozdělit do tří skupin dle charakteru reologické rovnice (2.3), která jejich tokové vlastnosti nejlépe vystihuje [9]:

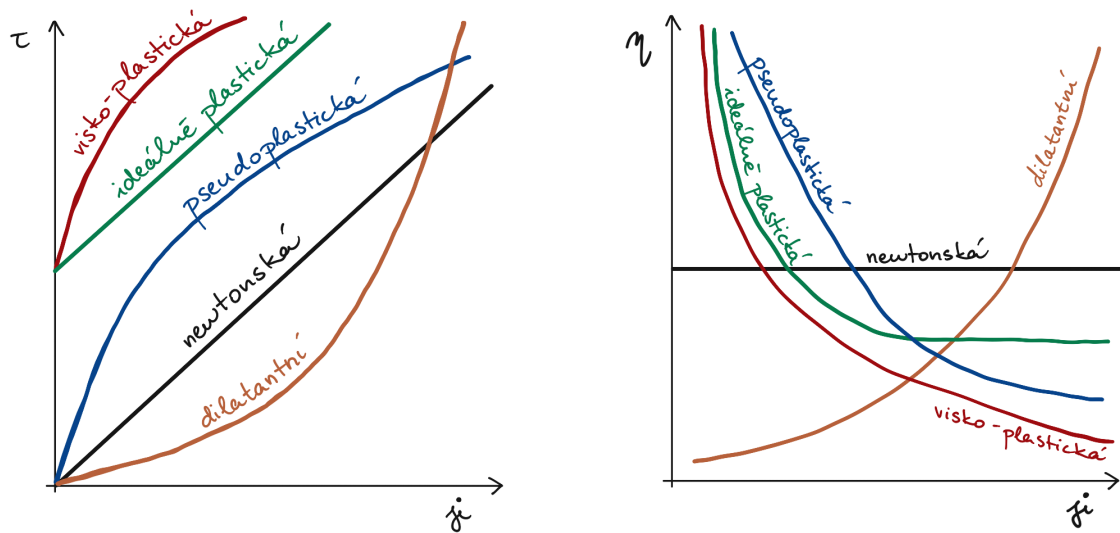
1. **Časově nezávislé nenevtonské kapaliny** neboli **zobecněné newtonské kapaliny** jsou takové kapaliny, u kterých je závislost smykového napětí na smykové rychlosti stejná v každém časovém okamžiku. Tuto závislost lze popsat jednoduchou reologickou rovnicí ve tvaru

$$\dot{\gamma} = f(\tau), \text{ resp. } \tau = f^{-1}(\dot{\gamma}). \quad (2.4)$$

Podle konstitutivního vztahu (2.4) lze kapaliny této skupiny rozdělit do tří podskupin [12], a to na **pseudoplastické** (zdánlivá viskozita klesá s rostoucí smykovou rychlostí), **viskoplastické** (mají nenulovou mez tečení, jejíž hodnota rozhoduje, jestli kapalina teče, nebo se plasticky deformuje jako tuhé těleso) a **dilatantní kapaliny** (zdánlivá viskozita se zvětšuje s rostoucí smykovou rychlostí). Oproti jiným nenevtonským kapalinám jejich reologické rovnice nezohledňují efekty týkající se paměti materiálu nebo elasticity. Jejich použití tedy není vhodné pro nestacionární proudění, při kterých se projevuje vliv předchozí deformace kapaliny, nebo pro úlohy proudění, ve kterých budou elastické vlastnosti hrát klíčovou roli [11].

2. **Časově závislé nenevtonské kapaliny** jsou skupinou kapalin s velice složitými reologickými vlastnostmi, které jsou kromě výše zmíněné smykové rychlosti ovlivněny i časovým průběhem smykového napětí a historií předchozích deformací, tj. projevuje se u nich paměť. Obecně je lze rozdělit do dvou podskupin [9], a to na kapaliny **tixotropní** (při zatížení konstantním tečným napětím jejich zdánlivá viskozita s časem klesá, při absenci zatížení mají tendenci se navrátit k původní struktuře a tudíž i k vyšší viskozitě) a **repektivní** (opačné chování než u tixotropních kapalin, tj. s časem dochází k nárůstu jejich zdánlivé viskozity). Reogramy takovýchto kapalin často bývají hysterezní smyčky, kdy vývoj smykového napětí při zvyšující se smykové rychlosti je rozdílný oproti případu, kdy dochází ke snižování této rychlosti.
3. **Viskoelastické kapaliny** projevují vlastnosti jak vazkých kapalin, tak elastických těles. Po ukončení působení zátěžových sil mají schopnost se částečně vrátit do nedeformovaného stavu. Z hlediska reologických vlastností mohou být popsány **lineárními** nebo **nelineárními** modely, více viz odstavec 2.3.

Reogramy a závislosti (zdánlivé) viskozity na smykové rychlosti newtonské kapaliny a vybraných zobecněných newtonských kapalin jsou zobrazeny na obr. 5.



Obrázek 5: Reogramy (vlevo) a průběhy zdánlivé viskozity (vpravo) newtonské a vybraných zobecněných newtonských kapalin.

Uvážíme-li přehled uvedený v první kapitole této práce v souvislosti s lidskou krví a jejími tokovými vlastnostmi, zaměříme se dále pouze na popis chování pseudoplastických a viskoelastických kapalin. Jejich vlastnosti budou rozvedeny v následujících dvou odstavcích.

2.2 Modely pseudoplastických kapalin

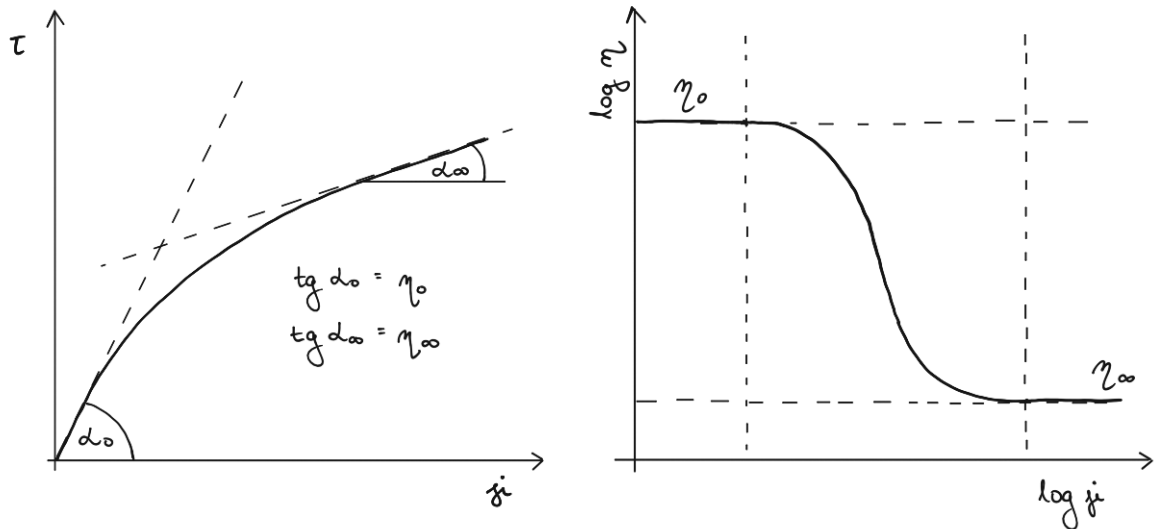
Pseudoplastické kapaliny se řadí mezi nejčastější zástupce časově nezávislých nenewttonských kapalin v praxi. Jako obecné příklady lze uvést nátěrové hmoty, lepidla, roztoky mýdel a detergentů [4]. Jejich charakteristickým rysem je, že jejich zdánlivá viskozita klesá s rostoucí smykovou rychlostí. Naopak v případě jak nízkých, tak velmi vysokých smykových rychlostech vykazuje většina těchto látek newtonské chování, tj. závislost smykového napětí na smykové rychlosti se stává lineární a jejich reogram prochází počátkem souřadnicového systému jako v případě newtonských kapalin. Z tohoto důvodu se pro vyjádření zdánlivé viskozity v těchto limitních stavech zavádí limitní hodnoty viskozity označované jako η_0 a η_∞ a definované jako [9], [12]

$$\eta_0 = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\tau}{\dot{\gamma}}, \quad (2.5)$$

$$\eta_\infty = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\dot{\gamma}}. \quad (2.6)$$

Jak je z předpisů (2.5) a (2.6) patrné, tyto hodnoty určují rozmezí, ve kterém se pohybuje hodnota zdánlivé viskozity ($\eta_0 > \eta_a > \eta_\infty$) [9], [12], viz obr. 6. Konstitutivní vztahy

navržené např. Malcomem M. Crossem, Pierrem J. Carreauem či Kazunorim Yasudou existenci těchto limitních hodnot zohledňují a berou v potaz jejich závislost na různých faktorech, jako např. na molekulární hmotnosti dané látky. Proto je obtížné určit obecně platné limitní hodnoty.



Obrázek 6: Tokové (vlevo) a viskózní (vpravo) křivky s limitními hodnotami η_0 a η_∞ pro dynamickou viskozitu.

2.3 Modely viskoelastických kapalin

Jak bylo zmíněno dříve, viskoelastické kapaliny představují komplexní systém, který v sobě sdružuje jak tokové vlastnosti vazkých kapalin, tak elastických těles. Pro lepší představu si v následujícím odstavci obecně popíšeme obě vlastnosti, které viskoelastické materiály v sobě spojují.

V klasické teorii pružnosti je smykové napětí přímo úměrné velikosti deformace a koeficientem úměrnosti se označuje Youngův modul pružnosti E . Dokonale pružné těleso se po skončení působení napětí navrátí do původního (nedeformovaného) tvaru za předpokladu, že hodnota smykového napětí nepřesáhne mez kluzu. Nastane-li tento případ, těleso se nenavrtí do původního tvaru a zůstane částečně zdeformované. V porovnání s tímto chováním je smykové napětí vazkých kapalin závislé na rychlosti deformace tak, jak bylo ukázáno na začátku této kapitoly prostřednictvím Newtonova zákona viskozity (2.1).

Mnoho materiálů projevuje jak viskózní, tak elastické vlastnosti v závislosti na okolnostech. Dokonale pružné těleso a naopak dokonale viskózní těleso jsou limitními případy viskoelastického chování. Odpověď viskoelastického materiálu na působící napětí nezávisí pouze na jeho struktuře, ale i na historii deformací, kterým byl materiál vystaven. Dis-

ponuje tedy určitou formou „tvarové“ paměti. Viskoelastická deformace je vratná, ale ne okamžitá, tj. vykazuje časovou závislost. Pro klasifikaci viskoelastických materiálů z hlediska jejich tokových vlastností se hlavně používají bezrozměrové hodnoty Debořina a Weissenbergova čísla včetně jejich vzájemné souvislosti (viz Pipkinův diagram na obr. 7). Jak ovšem uvádí např. [13], každé z těchto čísel, pokud je vzato samostatně, nedokáže plně charakterizovat danou látku z pohledu jejích viskoelastických vlastností. Proto je na tomto místě vhodné se oběma bezrozměrovým číslům věnovat trošku podrobněji.

Debořino číslo De vyjadřuje poměr mezi relaxační dobou kapaliny a dobou pozorování kapaliny neboli časovou proměnlivost proudění vzhledem k době, po kterou proudění pozorujeme. Matematicky lze vyjádřit Debořino číslo následujícím vztahem [11]

$$De = \frac{\lambda}{T}, \quad (2.7)$$

kde λ vyjadřuje relaxační čas a T dobu pozorování dané látky. Pokud je doba pozorování dlouhá v porovnání s relaxační dobou kapaliny, pak je Debořino číslo malé, což naznačuje, že element dané látky je schopen se rychle přizpůsobovat změnám působících sil a materiál se projevuje jako kapalina. Naopak pokud bude doba pozorování krátká a hodnota Debořina čísla tudíž vysoká, znamená to, že element se nedokáže dostatečně rychle přizpůsobit změnám působících sil a z pohledu pozorovatele se bude tento materiál jevit jako pevná látka. V limitních případech je tedy hodnota Debořina čísla u Newtonovy kapaliny rovna nule ($De = 0$) a v případě elastického tělesa má hodnotu jdoucí k nekonečnu ($De \rightarrow \infty$) [9], [11].

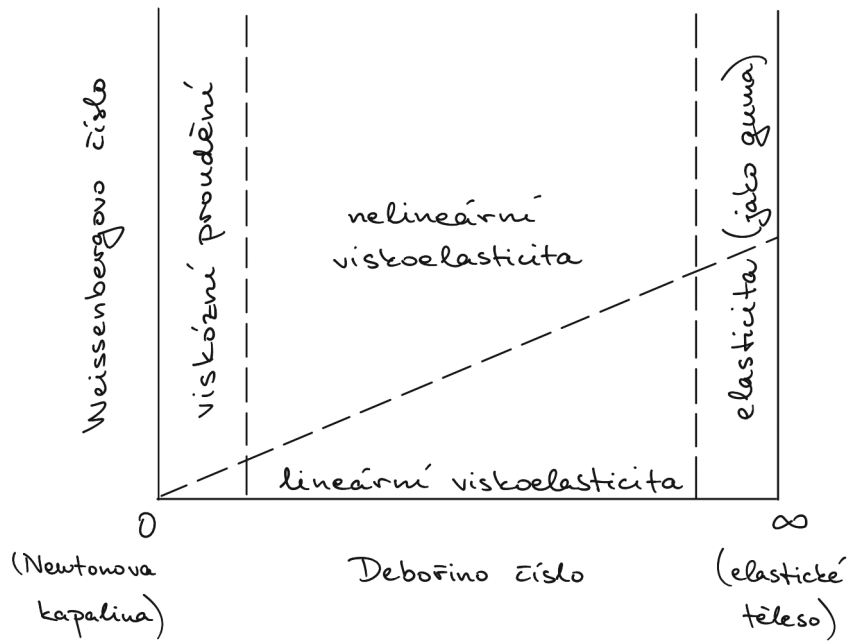
Weissenbergovo číslo Wi vyjadřuje poměr elastických a viskózních sil, jinak řečeno, která z obou složek je v daném materiálu převládající. Weissenbergovo číslo lze matematicky vyjádřit jako [13]

$$Wi = \frac{\tau_{xx} - \tau_{yy}}{\tau_{xy}} = \frac{2\lambda\eta\dot{\gamma}^2}{\eta\dot{\gamma}} = 2\lambda\dot{\gamma}, \quad (2.8)$$

kde $\dot{\gamma}$ představuje charakteristickou smykovou rychlost daného pohybu (proudění).

S ohledem na složité reologické vlastnosti většiny viskoelastických látek, které se v závislosti na podmínkách mohou blížit buď chování vazké kapaliny, nebo poddajného tělesa, není vždy volba vhodného konstitutivního vztahu lehká. Jistým pomocným nástrojem může být výše zmíněný Pipkinův diagram (obr. 7), který dává do souvislosti Debořino a Weissenbergovo číslo a vymezuje hranice mezi různými stavy a režimy proudění. Konkrétně chování Newtony kapaliny je vymezeno jedním bodem, a to počátkem zvoleného souřadnicového systému ($De = Wi = 0$). S rostoucí hodnotou Debořina čísla přecházíme postupně z oblasti viskózního proudění přes oblast viskoelastických látek až po čistě

elastické materiály. Naproti tomu hodnoty Weissenbergova čísla v Pipkinově diagramu vymezují platnost lineárních a nelineárních konstitutivních modelů. Například modely zobecněných newtonských kapalin, kam řadíme např. známý mocninový model, spadají v tomto případě do oblasti viskózního proudění, ale s nenulovými hodnotami Weissenbergova čísla.



Obrázek 7: Pipkinův diagram [11].

Charakteristickým znakem společným pro všechny konstitutivní modely popisující viskoelastické proudění je to, že vždy obsahují alespoň jeden časový parametr, který určitým způsobem podchycuje paměť modelované kapaliny. Tvar příslušného konstitutivního vztahu, a tedy i začlenění zmíněného parametru může být buď lineární, nebo nelineární, přičemž vhodnost se do jisté míry odvíjí od hodnoty Weissenbergova čísla, více viz [14].

Lineární viskoelastické modely, kam spadá např. známý Maxwellův model, lze použít za předpokladu lineární odezvy materiálu, což je splněno v případě malých deformací. Tyto modely jsou důležité jako základ pro tvorbu nelineárních viskoelastických modelů a určování jejich parametrů z experimentálních měření [14]. Naproti tomu v případě velkých deformací a v úlohách s vyšším Weissenbergovým číslem je vhodnější použít pro popis viskoelastického chování nelineární model. V tomto směru lze zmínit např. Phan Thienův-Tannerův model či Giesekusův model [3].

Na závěr této kapitoly uvedme, že se v této bakalářské práci budeme věnovat pouze lineárním, resp. kvazilineárním viskoelastickým modelům.

3 Matematické modely užité v práci

V porovnání s předchozí kapitolou, která byla věnována základní teorii neneutonských kapalin, je cílem této kapitoly představit konkrétní konstitutivní vztahy použité pro potřeby této bakalářské práce a uvést příslušné matematické modely proudění, které byly implementovány a numericky řešeny ve výpočtovém systému ANSYS Fluent.

3.1 Reologické modely krve

Odborná literatura nabízí celou řadu různě složitých matematických modelů pro vyjádření tokových vlastností krve [3], [4], [7], [15]. Ta je zde často popsána buď jako zobecněná newtonská kapalina vykazující pseudoplastické chování, nebo méně často jako viskoelastická kapalina. V souladu s tímto poznatkem a s odkazem na přehled uvedený v kapitole 1 jsou v této práci zvoleny reologické modely s parametry převzatými z příslušné literatury a vyjádřenými prostřednictvím disipačního tenzoru \mathbf{T} , jehož tvar určuje finální podobu systému Navierových-Stokesových rovnic (1.3)–(1.4).

3.1.1 Model newtonské kapaliny

Tento základní reologický model slouží v této práci jako referenční model, jehož hlavním úkolem je poskytnout náhled na výskyt a rozsah případných neneutonských efektů v modelovaných cévách. Disipační tenzor je v tomto případě dán konstitutivním vztahem

$$\mathbf{T} = 2\eta\mathbf{D}, \quad (3.1)$$

kde $\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$ je tenzor rychlosti deformace a η dynamická viskozita kapaliny, která v souladu s teorií uvedenou v kapitole 2 je konstantní a pro potřeby této práce volena jako $\eta = 3,6 \cdot 10^{-3}$ Pa s [7], resp. $\eta = 3,45 \cdot 10^{-3}$ Pa s [3] pro simulace proudění krve ve zúžené trubici, resp. bifurkaci.

3.1.2 Modely pseudoplastické kapaliny

Pro skupinu zobecněných newtonských kapalin, kam pseudoplastické kapaliny spadají, obecně platí, že jejich disipační tenzor \mathbf{T} je funkcí nejen tenzoru rychlosti deformace \mathbf{D} , ale i proměnné dynamické viskozity η , která nejčastěji závisí na smykové rychlosti $\dot{\gamma}$. Pak v analogii se vztahem (3.1) lze pro tuto skupinu neneutonských kapalin psát

$$\mathbf{T} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} = \eta(\dot{\gamma}) [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]. \quad (3.2)$$

S odkazem např. na [4] je smyková rychlost definována vztahem

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{D_{II}} = \sqrt{2 [\text{Tr}(\mathbf{D}^2) - (\text{Tr} \mathbf{D})^2]}, \quad (3.3)$$

kde D_{II} označuje druhý invariant tenzoru rychlosti deformace \mathbf{D} a $\text{Tr} \mathbf{D}$ jeho stopu. Jelikož krev v této práci modelujeme jako nestlačitelnou vazkou kapalinu, pro kterou platí rovnice kontinuity (1.3) a $\text{Tr} \mathbf{D} = 0$, lze obecný předpis (3.3) zjednodušit na tvar

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\text{Tr}(\mathbf{D}^2)}. \quad (3.4)$$

Pro numerické simulace realizované v této práci, které vycházejí z publikovaných prací [3] a [7], je funkce $\eta = \eta(\dot{\gamma})$ v (3.2) vyjádřena prostřednictvím následujících tří reologických modelů:

A) Mocninový model

Tento model, označovaný rovněž jako *power-law model*, bývá často výchozím modelem pro popis pseudoplastického chování mnoha zobecněných newtonských kapalin. Jeho aplikovatelnost je ovšem limitována na určitý interval hodnot smykové rychlosti $\dot{\gamma}$, neboť pro velmi vysoké, nebo naopak velmi nízké hodnoty nezohledňuje sklon těchto kapalin k newtonskému chování (viz odstavec 2.2) a dává obecně nereálné hodnoty viskozity. Uplatnění tak tento model nachází hlavně při analytickém řešení proudění v jednoduchých geometriích nebo jako nástroj pro ověření správnosti implementace vyvinutých výpočetních algoritmů v typových úlohách (tzv. *benchmark problems*) [1], [4], [9].

V této práci je užit předpis a parametry mocninového modelu inspirované prací [16]

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (3.5)$$

kde $K = 42 \text{ mPa s}^n$ je parametr konzistence a $n = 0,61$ index toku³. Průběh této funkce je znázorněn na obr. 8.

B) Modifikovaný Crossův model

V porovnání s mocninovým modelem je tento 5-parametrický model schopen zachytit newtonské chování v limitních hodnotách smykové rychlosti (2.5)–(2.6). To je dáno tím, že v souladu s tokovými a viskózními křivkami na obr. 6 respektuje logistický průběh

³Parametr vyjadřující míru odklonu od newtonského chování [9]: $n < 1$ (pseudoplastická kapalina), $n = 1$ (newtonská kapalina), $n > 1$ (dilatantní kapalina).

dynamické viskozity (*sigmoid curve*, obr. 8), což se odráží i na podobě samotného modelu z [7], [15]

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{\left[1 + (\lambda\dot{\gamma})^b\right]^a}, \quad (3.6)$$

kde $\eta_0 = 0,16 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, resp. $\eta_{\infty} = 0,0036 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ jsou asymptotické hodnoty viskozity při nulové, resp. nekonečně velké smykové rychlosti, $\lambda = 8,2 \text{ s}$ představuje relaxační čas a $a = 1,23$, $b = 0,64$ aproximační konstanty.

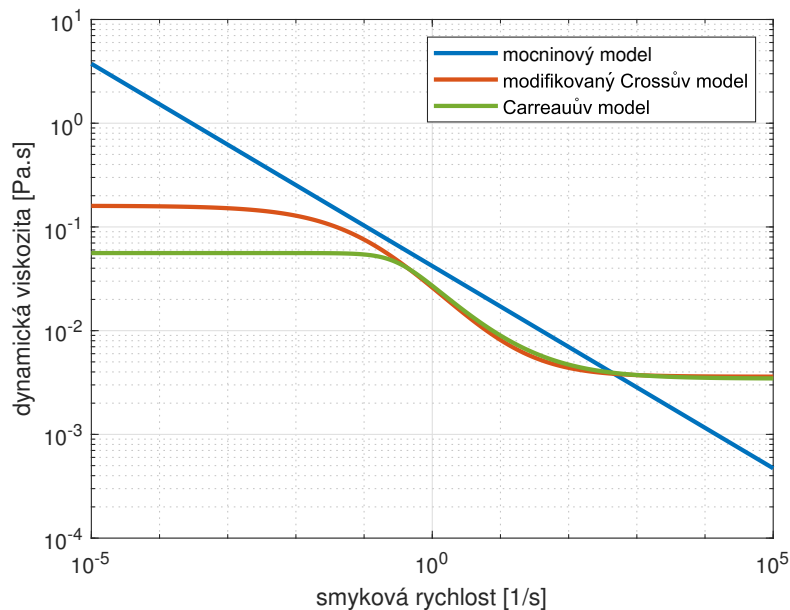
C) Carreauův model

Podobně jako výše uvedený Crossův model i tento 4-parametrický model zajišťuje logistický průběh dynamické viskozity jako funkce smykové rychlosti, čímž aproximuje newtonské chování pseudoplastických kapalin v limitních stavech (obr. 6).

V této práci je užit předpis a parametry převzaté z [3]

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{\left[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2\right]^{\frac{1-n}{2}}}, \quad (3.7)$$

kde $\eta_0 = 0,056 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, resp. $\eta_{\infty} = 0,00345 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ jsou asymptotické hodnoty viskozity při nulové, resp. nekonečně velké smykové rychlosti, $\lambda = 3,313 \text{ s}$ představuje relaxační čas a $n = 0,3568$ index toku (*power index*, [9]). Průběh této funkce je znázorněn na obr. 8.



Obrázek 8: Závislost dynamické viskozity na smykové rychlosti vyjádřená prostřednictvím vybraných reologických modelů.

3.1.3 Modely viskoelastické kapaliny

Jedním z nejjednodušších způsobů matematického popisu chování viskoelastického materiálu je kvalitativní popis založený na analogii s mechanickými soustavami [9]. Tohoto přístupu je využito i v této práci, kdy pro prvotní odvození dvou (kvazi-)lineárních viskoelastických modelů je přistoupeno k vhodné kombinaci lineárních pružin a tlumičů jejich paralelním anebo sériovým zapojením. V případě pružin se jedná o tzv. *Hookeovo elastické těleso* s charakteristickou hodnotou Youngova modulu pružnosti E , pro které v analogii s Hookeovým zákonem platí vztah

$$\tau = E e, \quad (3.8)$$

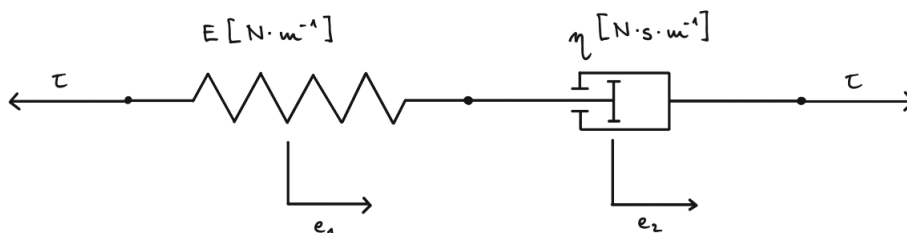
kde τ označuje napjatost a e deformaci elastického tělesa. Naproti tomu tlumiče reprezentují *viskózní Newtonovu kapalinu*, pro kterou v analogii s Newtonovým zákonem viskozity (2.1) platí

$$\tau = \eta \frac{de}{dt}, \quad (3.9)$$

kde $\frac{de}{dt} = \dot{e}$ je rychlost deformace a η dynamická viskozita kapaliny.

A) Maxwellův model

Jedná se o nejjednodušší lineární viskoelastický model, jehož chování lze z pohledu mechanických soustav reprezentovat sériově zapojenou pružinou a tlumičem s dílčími deformacemi e_1 a e_2 , obr. 9.



Obrázek 9: Schéma Maxwellova mechanického modelu.

Pro odvození matematického vztahu tohoto 1D kontinua se vychází z poznatku, že výsledná deformace e , resp. její rychlost \dot{e} je součtem obou zmíněných dílčích deformací, resp. jejich rychlostí, tj. platí

$$e = e_1 + e_2, \quad \text{resp.} \quad \frac{de}{dt} = \frac{de_1}{dt} + \frac{de_2}{dt}. \quad (3.10)$$

Dosazení časově zderivovaného předpisu pro Hookeovo těleso (3.8) a předpisu pro Newtonovu kapalinu (3.9) do vztahu (3.10)₂ vede na následující obyčejnou diferenciální rovnici

$$\left. \begin{aligned} \frac{de_1}{dt} &= \frac{1}{E} \frac{d\tau}{dt} \\ \frac{de_2}{dt} &= \frac{1}{\eta} \tau \end{aligned} \right\} \boxed{\lambda \frac{d\tau}{dt} + \tau = \eta \frac{de}{dt}}, \quad (3.11)$$

kde $\lambda = \eta/E$ je relaxační čas představující charakteristický parametr modelovaného viskoelastického chování (tj. poměr viskózních a elastických složek materiálu). Výsledná rovnice (3.11) představuje matematický model Maxwellova 1D kontinua, které v mnoha oblastech slouží ke studiu a ilustraci viskoelastického chování materiálů při malých deformacích [9]. Zobecněním vztahu (3.11) pro 3D kontinuum lze získat obecný, ale již nelineární tvar pro Maxwellův model viskoelastické kapaliny [7], [15]

$$\lambda \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} + \mathbf{T} = 2\eta \mathbf{D}, \quad (3.12)$$

kde $\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t}$ označuje konvektivní derivaci disipačního tenzoru \mathbf{T} , viz tabulka 1. V závislosti na typu konvektivní derivace se rozlišují modely Maxwell-A ($\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} = \overset{\Delta}{\mathbf{T}}$) a Maxwell-B ($\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} = \overset{\nabla}{\mathbf{T}}$), přičemž druhý model, často označovaný jako UCM (*upper convected Maxwell*) model, je typickým zástupcem nelineárních viskoelastických modelů.

Tabulka 1: Přehled konvektivních derivací užívaných v reologii [7].

označení derivace	definice
dolní konvektivní derivace	$\overset{\Delta}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} + (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{v})$
horní konvektivní derivace	$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{v})^T$

B) Oldroydův model

Jelikož viskoelastické chování reálných kapalin je do značné míry spjato s jejich pamětí, která se matematicky vyjadřuje zejména prostřednictvím derivací vyšších řádů ($\overset{\circ}{\mathbf{D}}$, $\overset{\circ}{\mathbf{D}}^2, \dots$) [8], je aplikovatelnost Maxwellova modelu omezena. Jistým zlepšením v tomto směru je proto jeho rozšíření, které roku 1950 publikoval britský matematik James G. Oldroyd a podle kterého nese své jméno – Oldroydův model.

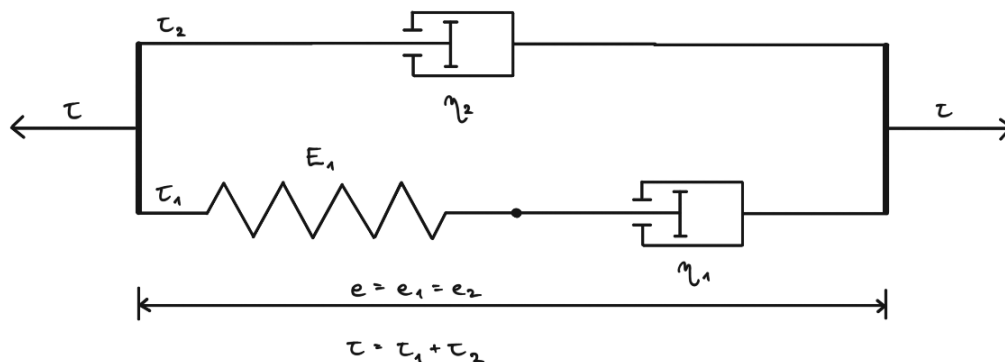
V analogii s mechanickými soustavami je tento viskoelastický model reprezentován paralelně zapojeným tlumičem a Maxwellovým modelem, obr. 10. S ohledem na typ za-

pojení obou prvků platí, že výsledná deformace, resp. jejich rychlosti jsou identické jejich dílčím hodnotám, tj.

$$e = e_1 = e_2, \quad \text{resp.} \quad \frac{de}{dt} = \frac{de_1}{dt} = \frac{de_2}{dt}. \quad (3.13)$$

Naopak v případě celkové napjatosti τ musí patrně platit

$$\tau = \tau_1 + \tau_2. \quad (3.14)$$



Obrázek 10: Schéma Oldroydova mechanického modelu.

S přihlédnutím k (3.13) a s užitím vztahů (3.9) a (3.11) lze dílčí napjatosti v jednotlivých větvích uvažovaného 1D kontinua vyjádřit jako

$$\tau_1 = \eta_1 \frac{de}{dt} - \frac{\eta_1}{E_1} \frac{d\tau_1}{dt}, \quad \tau_2 = \eta_2 \frac{de}{dt}. \quad (3.15)$$

Dosazením obou předpisů do (3.14) dostaneme

$$\tau = \eta \frac{de}{dt} - \lambda_1 \frac{d\tau}{dt}, \quad (3.16)$$

kde $\eta = \eta_1 + \eta_2$ je celková viskozita kapaliny a $\lambda_1 = \eta_1/E_1$ relaxační čas. Pro vyjádření napjatosti τ_1 na pravé straně rovnice (3.16) využijeme vztahů (3.14) a (3.15)₂, z nichž obdržíme $\tau_1 = \tau - \eta_2 \frac{de}{dt}$, pak můžeme (3.16) přepsat do následujícího tvaru

$$\tau = \eta \frac{de}{dt} - \lambda_1 \frac{d\tau}{dt} + \lambda_1 \eta_2 \frac{d^2e}{dt^2}. \quad (3.17)$$

Přeuspořádáním členů a zavedením parametru retardačního času $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_2 / (\eta_1 + \eta_2)$ dospějeme k výsledné podobě matematického modelu Oldroydova 1D kontinua

$$\lambda_1 \frac{d\tau}{dt} + \tau = \eta \left(\frac{de}{dt} + \lambda_2 \frac{d^2e}{dt^2} \right). \quad (3.18)$$

Podobně jako v případě Maxwellova modelu i zde zobecněním odvozeného vztahu (3.18) pro 3D kontinuum získáváme nelineární rovnici pro Oldroydův model viskoelastické kapaliny [7], [15]

$$\lambda_1 \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} + \mathbf{T} = 2\eta \left(\mathbf{D} + \lambda_2 \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} \right), \quad (3.19)$$

kde $\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t}$ označuje konvektivní derivaci disipačního tenzoru \mathbf{T} , viz tabulka 1. V reologii se rozlišují modely Oldroyd-A ($\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} = \overset{\Delta}{\mathbf{T}}$) a Oldroyd-B ($\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} = \overset{\nabla}{\mathbf{T}}$), přičemž druhý model je často volen pro numerické simulace proudění krve [3], [7], [15] a je tudíž užit i pro potřeby této bakalářské práce.

S ohledem na složitý charakter Oldroydova modelu (3.19) se pro jeho praktickou implementaci ve výpočetních algoritmech volí přístup v jistém smyslu vycházející z výše uvedené mechanické analogie. Jinak řečeno, v souladu se schématem na obr. 10 se disipační tenzor \mathbf{T} rozkládá na dvě části [8], [11]

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_s + \mathbf{T}_e, \quad (3.20)$$

kde \mathbf{T}_s odpovídá čistě viskózní složce/tlumiči (tzv. *solvent*) a \mathbf{T}_e reprezentuje viskoelastickou složku spjatou s Maxwellovým modelem (tzv. *elastic*). Pro viskózní složku lze v souladu s (3.15)₂ psát

$$\mathbf{T}_s = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (3.21)$$

kde se podoba pravé strany odvíjí od toho, je-li tato složka v práci modelována pro newtonskou (3.1) či pseudoplastickou (3.2) kapalinu. Konstitutivní vztah pro viskoelastickou část disipačního tenzoru \mathbf{T}_e lze odvodit dosazením rozkladu (3.20) do (3.19) a aplikací (3.21)

$$\lambda_1 2\eta_s \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} + \lambda_1 \frac{\delta \mathbf{T}_e}{\delta t} + 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}_e = 2\eta \left(\mathbf{D} + \lambda_2 \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} \right), \quad (3.22)$$

odkud po dosazení za celkovou viskozitu $\eta = \eta_s + \eta_e$, retardační čas $\lambda_2 = \lambda_1 \eta_s / \eta$ a jednoduchých matematických úpravách dostáváme

$$\lambda_1 \frac{\delta \mathbf{T}_e}{\delta t} + \mathbf{T}_e = 2\eta_e \mathbf{D}. \quad (3.23)$$

Konkrétně pro Oldroyd-B model, který je užit pro potřeby této práce, přechází vztah (3.23) do následující podoby

$$\lambda_1 \left[\frac{D\mathbf{T}_e}{Dt} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T}_e - \mathbf{T}_e \cdot (\nabla \mathbf{v})^T \right] + \mathbf{T}_e = 2\eta_e \mathbf{D}. \quad (3.24)$$

3.2 Přehled matematických modelů a jejich numerické řešení

S odkazem na výše zmíněné reologické modely, které jsou v této bakalářské práci použity pro numerické simulace proudění krve, je vhodné na tomto místě uvést výslednou podobu příslušných matematických modelů proudění a popsat způsob jejich implementace do výpočtového systému ANSYS Fluent.

3.2.1 Výsledný tvar matematických modelů

Jelikož numerické simulace realizované v této práci jsou inspirovány dvěma odbornými články [7] a [3], v rámci nichž je řešena úloha proudění buď ve zúžené trubici, nebo cévní bifurkaci, jsou níže, společně s modely proudění, prezentovány i dvě sady reologických parametrů. Pro lepší názornost je v následujícím přehledu užit tenzorový zápis systému Navierových-Stokesových rovnic (1.3)–(1.4) a příslušných reologických modelů ($i, j = 1, 2, 3$):

- Proudění newtonské kapaliny:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_j) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.26)$$

kde v_i je i -tá složka vektoru rychlosti \mathbf{v} odpovídající kartézské souřadnici x_i , p tlak, η konstantní dynamická viskozita krve a ρ její hustota, která v případě zúžené trubice, resp. bifurkace, má hodnotu $1\,050\text{ kg/m}^3$ [7], resp. $1\,056\text{ kg/m}^3$ [3].

- Proudění zobecněné newtonské kapaliny:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_j) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.28)$$

kde dynamická viskozita $\eta(\dot{\gamma})$ jako funkce smykové rychlosti $\dot{\gamma}$ je dána jedním z konstitutivních vztahů uvedených v odstavci 3.1.2, tj. (3.5), (3.6), resp. (3.7).

- Proudění viskoelastické kapaliny s pseudoplastickým chováním:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_j) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\eta(\dot{\gamma}) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + T_{ij}^{(e)} \right], \quad (3.30)$$

kde $T_{ij}^{(e)}$ je viskoelastická část disipačního tenzoru určená Oldroyd-B modelem (3.24)

$$\frac{\partial T_{ij}^{(e)}}{\partial t} + v_k \frac{\partial T_{ij}^{(e)}}{\partial x_k} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} T_{kj}^{(e)} - \frac{\partial v_j}{\partial x_k} T_{ik}^{(e)} + \frac{1}{\lambda_1} T_{ij}^{(e)} = \frac{\eta_e}{\lambda_1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.31)$$

Pro potřeby simulace proudění ve zúžené trubici má relaxační čas λ_1 hodnotu 0,06 s a dynamická viskozita viskoelastické složky η_e hodnotu $4 \cdot 10^{-4}$ Pa s [7], [15]. Jako model pseudoplastické kapaliny je užit modifikovaný Crossův model (3.6). V případě simulace proudění v bifurkaci je hodnota relaxačního času stejná jako u zúžené trubice, ale η_e je rovna hodnotě $4 \cdot 10^{-6}$ Pa s [3] a jako model pseudoplastické kapaliny je aplikován Carreauův model (3.7).

3.2.2 Implementace do výpočtového systému ANSYS Fluent

Pro numerické řešení matematických modelů shrnutých v předchozím odstavci jsou v této práci využity výpočetní možnosti komerčního softwaru ANSYS Fluent. Tento výpočetní systém, jehož algoritmy jsou založeny na metodě konečný objemů, umožňuje bez nutnosti programových doplňků řešit základní model proudění (3.25)–(3.26). U modelů spjatých s neneutonským chováním, ať už pseudoplastickým či viskoelastickým, je nutné příslušné reologické modely doprogramovat. V tomto smyslu umožňuje prostředí softwaru ANSYS Fluent nadefinovat vlastní programové nadstavby pomocí tzv. *user-defined functions* (UDF) a rozšířit základní model proudění o další pomocné rovnice pro tzv. *user-defined scalar* (UDS).

Formou UDF, psaných v programovacím jazyce C, byla v této práci například implementována funkce proměnné viskozity pseudoplastických kapalin. V případě pomocných rovnic pro UDS se k jejich implementaci přistoupilo u viskoelastických kapalin, u nichž bylo kromě rozšířeného systému Navierových-Stokesových rovnic (3.29)–(3.30) nutné řešit i rovnici pro viskoelastickou část disipačního tenzoru (3.31). Způsob programové implementace a přehled funkcí a příkazů definovaných v souladu s manuálem [17] jsou blíže popsány v příloze A této práce.

Vyvinuté programové nadstavby, které kromě výše zmíněných funkcí zahrnují i moduly pro předepsání okrajových podmínek či zdrojových členů, lze shrnout následovně:

- *inlet_velocity* – funkce pro předepsání parabolického rychlostního profilu na vstupu výpočetní oblasti Ω_I ,
- *Viscosity_power_law_model* – funkce proměnné viskozity definovaná prostřednictvím mocninového modelu (3.5),

- *Viscosity_Cross_model* – funkce proměnné viskozity definovaná prostřednictvím modifikovaného Crossova modelu (3.6),
- *Viscosity_Carreau_model* – funkce proměnné viskozity definovaná prostřednictvím Carreauova modelu (3.7),
- *zdroje_Navier_Stokes* – definice rozšířené pravé strany Navierových-Stokesových rovnic v případě viskoelastické kapaliny (3.30),
- *zdroje_UDS* – definice viskoelastických složek disipačního tenzoru T_{ij}^e v souladu s (3.31), viz příloha A.

3.2.3 Nastavení řešiče ve výpočtovém systému ANSYS Fluent

Pro numerické řešení matematických modelů proudění shrnutých v odstavci 3.2.1 je ve všech simulacích popsaných v této práci uplatněn přístup založený na metodě SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), více viz [17]. Co se týče diskretizace, je pro systém Navierových-Stokesových rovnic a případnou UDS rovnici užito upwind schéma druhého řádu přesnosti s jednotným časovým krokem $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s. Vzhledem k tomu, že se v této práci omezujeme na simulace ustáleného proudění krve, je zde vývoj numerického řešení sledován prostřednictvím časových průběhů vybraných tokových veličin, konkrétně jsou vykreslovány hodnoty minimálního tlaku a maximální rychlosti v celé výpočtové oblasti. V případě konvergence těchto hodnot je modelované proudění krve považováno za ustálené a výpočet ukončen.

3.2.4 Okrajové a počáteční podmínky

Pro simulaci proudění jak ve zúžené trubici, tak bifurkaci je pro potřeby této práce užít stejný typ okrajových podmínek. Konkrétně na vstupu výpočtové oblasti $\partial\Omega_I$ je předepsána Dirichletova okrajová podmínka pro rychlost v podobě plně vyvinutého (Poiseuilleova) rychlostního profilu, který lze matematicky vyjádřit předpisem

$$v_1^I(r) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right], \quad v_2^I = v_3^I = 0, \quad (3.32)$$

kde $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ představuje vzdálenost vstupního bodu ležícího v rovině \widehat{yz} od střednice, D je průměr vstupní cévy a u_{\max} maximální rychlost profilu. Tato rychlost je v případě zúžené trubice stanovena na základě známého objemového průtoku $Q = 0,5 \text{ cm}^3/\text{s}$ [15] jako

$$u_{\max} = 2 \frac{Q}{A} = 0,0332 \text{ m/s}, \quad (3.33)$$

kde $A = \pi D^2/4$ je plocha vstupu. Naproti tomu pro simulace proudění krve v modelech bifurkace je hodnota u_{\max} zadána jako $v_{\min} = 0,178$ m/s, resp. $v_{\max} = 1,038$ m/s, které představují minimální, resp. maximální hodnoty nestacionárního průběhu rychlosti publikovaného v referenčním článku [3]. Důvody vedoucí k volbě obou těchto hodnot jsou inspirovány tvrzením autorů článku, že pokud se objeví neneutonské efekty při vysokých rychlostech, pak se tyto efekty musí zákonitě projevit i při těch nižších. Proto naší snahou v této bakalářské práci bude, kromě jiného, ukázat rozsah neneutonských efektů při uvažování jak maximálního, tak minimálního toku.

Co se týče výstupů výpočtové oblasti $\partial\Omega_O$, je v souladu s články [7], [15] ve všech řešených úlohách předepsána homogenní Dirichletova okrajová podmínka pro tlak, tj. $p^O = 0$ Pa. V případě nepoddajných a nepropustných stěn $\partial\Omega_W$ je přijat předpoklad tzv. neskluzové podmínky (*no-slip condition*), tj. $\mathbf{v}^W = \mathbf{0}$. Poslední okrajová podmínka, kterou je v této práci nutné zmínit, souvisí s viskoelastickou částí disipačního tenzoru $T_{ij}^{(e)}$. Ta po vzoru článků [3], [7], [15] aplikuje homogenní Neumannovu okrajovou podmínku po celé hranici výpočtové oblasti $\partial\Omega$.

Jako počáteční podmínky jsou u všech simulací ustáleného proudění Newtonovy kapaliny voleny nulové hodnoty všech tokových veličin. Pro urychlení následných simulací s pseudoplastickými, resp. viskoelastickými kapalinami je přistoupeno k počátečním podmínkám vycházejícím z výsledků pro model newtonské kapaliny příslušného modelu cév.

4 Výsledky numerických simulací

V předchozích kapitolách bylo představeno rozdělení nenewtonských kapalin, popsány jednotlivé konstitutivní modely a uvedeny příslušné matematické modely proudění. Dále byl naznačen způsob jejich numerického řešení a implementace v softwaru ANSYS Fluent. Na to navážeme v této kapitole představením modelů cév, v rámci nichž je proudění krve modelováno, a analýzou získaných numerických výsledků při uvažování různých hemoreologických vlastností. Prvním uvažovaným modelem je přímý segment cévy, pak trubice se stenózou a posledním bifurkace ve dvou variantách.

4.1 Přímý segment cévy

Na modelu přímého segmentu cévy realizujeme dva výpočty, první s aplikací modelu newtonské kapaliny a druhý s použitím mocninového modelu (3.5). Výsledky z těchto simulací, konkrétně tvar plně vyvinutého rychlostního profilu pro případ ustáleného proudění, jsou porovnány s odvozenými analytickými řešeními. Rozměry trubice a některé použité parametry jsou převzaté z článku [7] (např. hodnota hustoty ρ). Průměr trubice má hodnotu 6,2 mm a délku 60 mm z důvodu dostatečného prostoru pro vyvinutí příslušných rychlostních profilů v rámci numerických simulací.

Geometrie a výpočetní síť pro simulace byly vytvořeny v programu Altair Hypermesh. Výpočetní síť se skládá z 1 194 173 prvků, což je dle našeho názoru dostatečné pro to, aby numerické výsledky byly porovnatelné s analytickým řešením. Na povrchu (jako *shell elements*) jsou použity prvky s tvarem pravoúhlého trojúhelníku (*R-tria elements*) a uvnitř trubice prvky tvaru čtyřstěnu. Pro dostatečné zachycení mezní vrstvy je v blízkosti stěn přistoupeno k zahuštění sítě v pěti řadách (index $k = 0, 1, 2, 3, 4$). Velikost prvků v těchto řadách je určena následujícím rekurentním předpisem:

$$y_{k+1} = y_k (1 + A), \quad (4.1)$$

kde y_k představuje velikost příslušné řady prvků s velikostí první řady volenou jako $y_0 = 0,02$ mm a růstovým koeficientem $A = 0,2$.

Okrajové a počáteční podmínky jsou použity v souladu s těmi uvedenými v odstavci 3.2.4, pouze s rozdílem okrajové podmínky předepsané na vstupu trubice $\partial\Omega_I$. Z důvodu ověření správnosti numerického řešení je zde totiž místo parabolického profilu předepsán profil obdélníkový s hodnotou rychlosti 0,662 m/s, která je stanovena na základě objemového průtoku $Q = 2$ cm³/s převzatého z [7].

Porovnání analytického řešení s numerickými výsledky

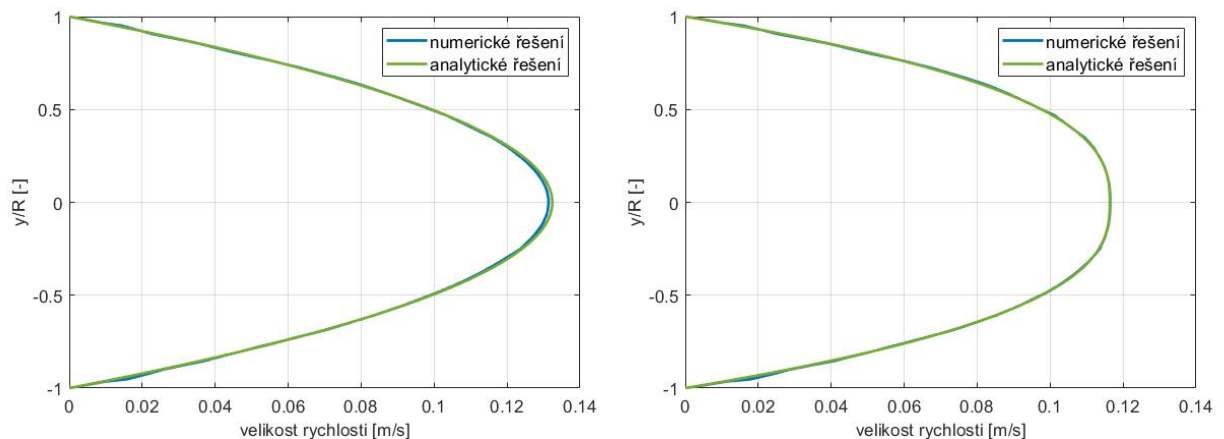
Pro verifikaci numerického řešení realizovaného v softwaru ANSYS Fluent jsou užity analyticky stanovené rychlostní profily pro ustálené proudění nestlačitelné newtonské, resp. zobecněné newtonské kapaliny v rotačně symetrické trubici. Jejich odvození lze nalézt v příloze B této práce. Konkrétně pro případ newtonské kapaliny má příslušný analytický vztah tvar

$$v(r) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right), \quad (4.2)$$

kde $v(r)$ je složka vektoru rychlosti ve směru trubice a r označuje vzdálenost od střednice. Při aplikaci mocninového modelu (3.5) pro případ zobecněné newtonské kapaliny je tvar analytického řešení následující:

$$v(r) = \frac{3n + 1}{\pi(n + 1)} \frac{Q}{R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right). \quad (4.3)$$

Na obr. 11a, resp. 11b, lze vidět porovnání vykreslených rychlostních profilů pro případ newtonské, resp. zobecněné newtonské kapaliny, přičemž výsledky numerického řešení jsou stanoveny na výstupu modelované trubice, tj. v místech, kde je proudění již plně vyvinuto. Vykreslené profily se od sebe téměř neliší ani v jednom případě, lze tudíž říci, že konstitutivní vztahy uvedené v kapitole 3 byly správně implementovány ve výpočtovém systému ANSYS Fluent a získané numerické řešení je dostatečně přesné.



(a) Model newtonské kapaliny.

(b) Mocninový model.

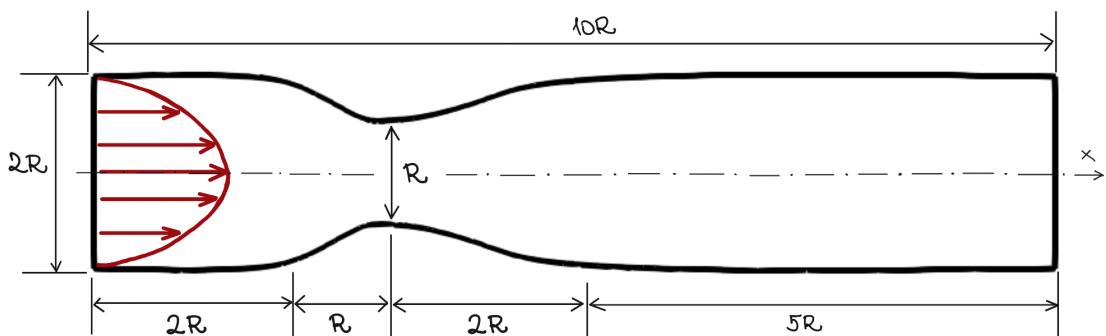
Obrázek 11: Porovnání numericky a analyticky stanovených rychlostních profilů u modelu newtonské kapaliny (vlevo) a mocninového modelu (vpravo).

V případě modelu newtonské kapaliny má rychlostní profil parabolický tvar. Oproti tomu rychlostní profil v případě mocninového modelu (zobecněné Newtonovy kapaliny)

má mírně zploštělý tvar. Nižší rychlost v okolí střednice u mocninového modelu lze odůvodnit vyšší hodnotou dynamické viskozity ve srovnání s modelem newtonské kapaliny ($3,6 \cdot 10^{-3}$ Pa·s). Dle numerických výsledků se hodnota smykové rychlosti v této oblasti pohybuje v rozmezí 0 až 10 s^{-1} , což u mocninového modelu odpovídá hodnotám dynamické viskozity 10^{-2} až $3 \cdot 10^{-2}$ Pa·s.

4.2 Trubice se stenózou

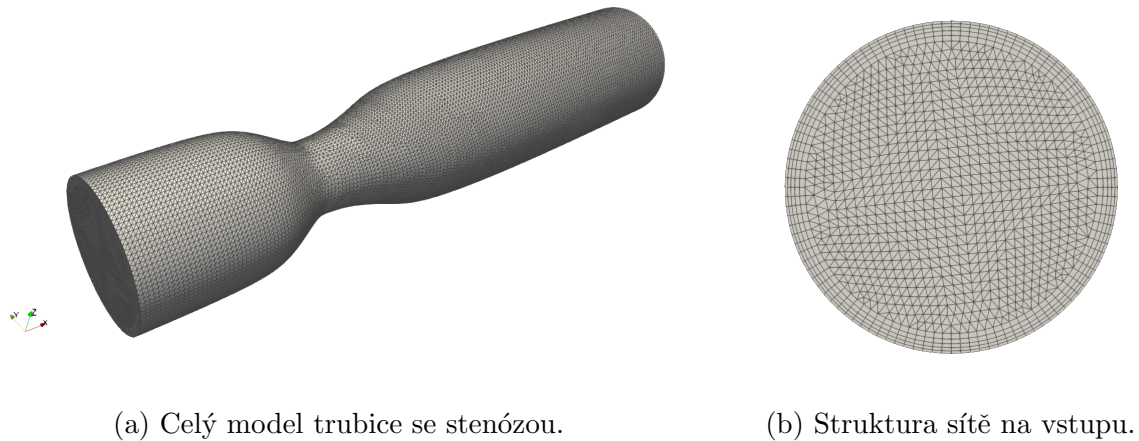
Na trojrozměrném modelu trubice se stenózou představíme čtyři numerické simulace s uvažováním vybraných konstitutivních modelů aproximujících tokové vlastnosti krve. Pro simulaci jsou použity tyto čtyři typy konstitutivních modelů: model newtonské kapaliny (dále značen jako NM), modifikovaný Crossův model (GNM), Oldroyd-B model (Old-B) a zobecněný Oldroyd-B model (GOld-B). Pro verifikaci vyvinutých programových nadstaveb jsou zde užita data z odborných článků [7], [15], ze kterých jsou převzaty rozměry modelu trubice se stenózou (obr. 12) a okrajové podmínky pro výpočet. Model je rotačně symetrický podle osy x s průměrem $D = 2R = 6,2$ mm (karotická tepna) a délkou $L = 10R = 31$ mm.



Obrázek 12: Rozměry modelu trubice se stenózou.

Geometrie s výpočetní sítí (obr. 13a) jsou vytvořeny v programu Altair HyperMesh analogickým způsobem jako model přímého segmentu cévy v odstavci 4.1. Výsledný počet prvků je 687 305, což je zhruba $10\times$ více než počet prvků použitých při výpočtu autory referenčního článku [7] (59 200 prvků tvaru šestistěnu). Mezní vrstva v blízkosti stěny, patrná na obr. 13b, je vytvořena podle stejného rekurentního předpisu (4.1) jako u přímého segmentu cévy, ale s jinými parametry, tzn. $y_0 = 0,05$ mm a $A = 0,2$.

V následujících dvou odstavcích je provedena verifikace námi vytvořeného kódu pro implementaci výše uvedených konstitutivních modelů do výpočtového softwaru ANSYS Fluent a následné vyhodnocení výsledků ze čtyř provedených simulací (NM, GNM, Old-B, GOld-B).



(a) Celý model trubice se stenózou.

(b) Struktura sítě na vstupu.

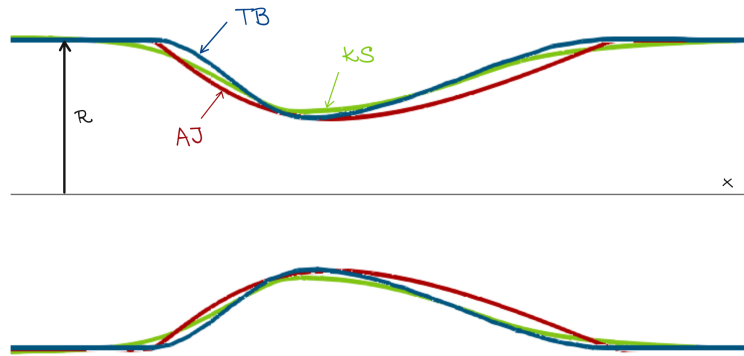
Obrázek 13: Model trubice se stenózou a vygenerované výpočetní sítě.

Verifikace kódu

Ověření správnosti implementace vyvinutých kódů je v této práci provedeno porovnáním spočtených dat s výsledky publikovanými v referenčních člancích [7], [15] a pro další nezávislý pohled i s výsledky simulací provedenými vedoucím této bakalářské práce. Verifikace je konkrétně realizována porovnáním průběhů tlaků a rychlostí stanovených podél střednice modelované trubice se stenózou.

Z důvodu nedostatečného popisu tvaru modelované stenózy v referenčních člancích [7], [15] je na tomto místě nutné zmínit, že geometrie zúžené trubice vytvořená pro potřeby této práce nebyla naprosto identická výchozímu modelu tak, jak to je patrné z obr. 14. Tyto geometrické odchylky se samozřejmě jistým způsobem projeví i na spočtených průbězích tlaku (obr. 15) a rychlosti ve směru osy x (obr. 16). Pro lepší orientaci a rozlišení mezi daty jsou v obr. 14–16 používány následující zkratky: KS – výsledky získané autorkou této bakalářské práce, TB – data publikovaná v [7], [15] a AJ – výsledky poskytnuté vedoucím této práce.

Jak je patrné z obr. 14, geometrie modelu trubice se stenózou použitá v této práci (KS – světle zelená) má pozvolnější náběh stenózy a nejmenší velikost zúžení v této oblasti. Oproti tomu geometrie vytvořená vedoucím práce (AJ – červená) má nejprudší náběh stenózy a i největší zúžení v této oblasti. Náběh zúžení v oblasti stenózy u modelu geometrie z referenčních článků (TB – modrá) je pozvolnější než u geometrie vytvořené vedoucím práce a následná oblast rozšiřování na původní průměr je velmi podobná geometrii uvažované v této práci.



Obrázek 14: Detailní pohled na oblast stenózy a její geometrii.

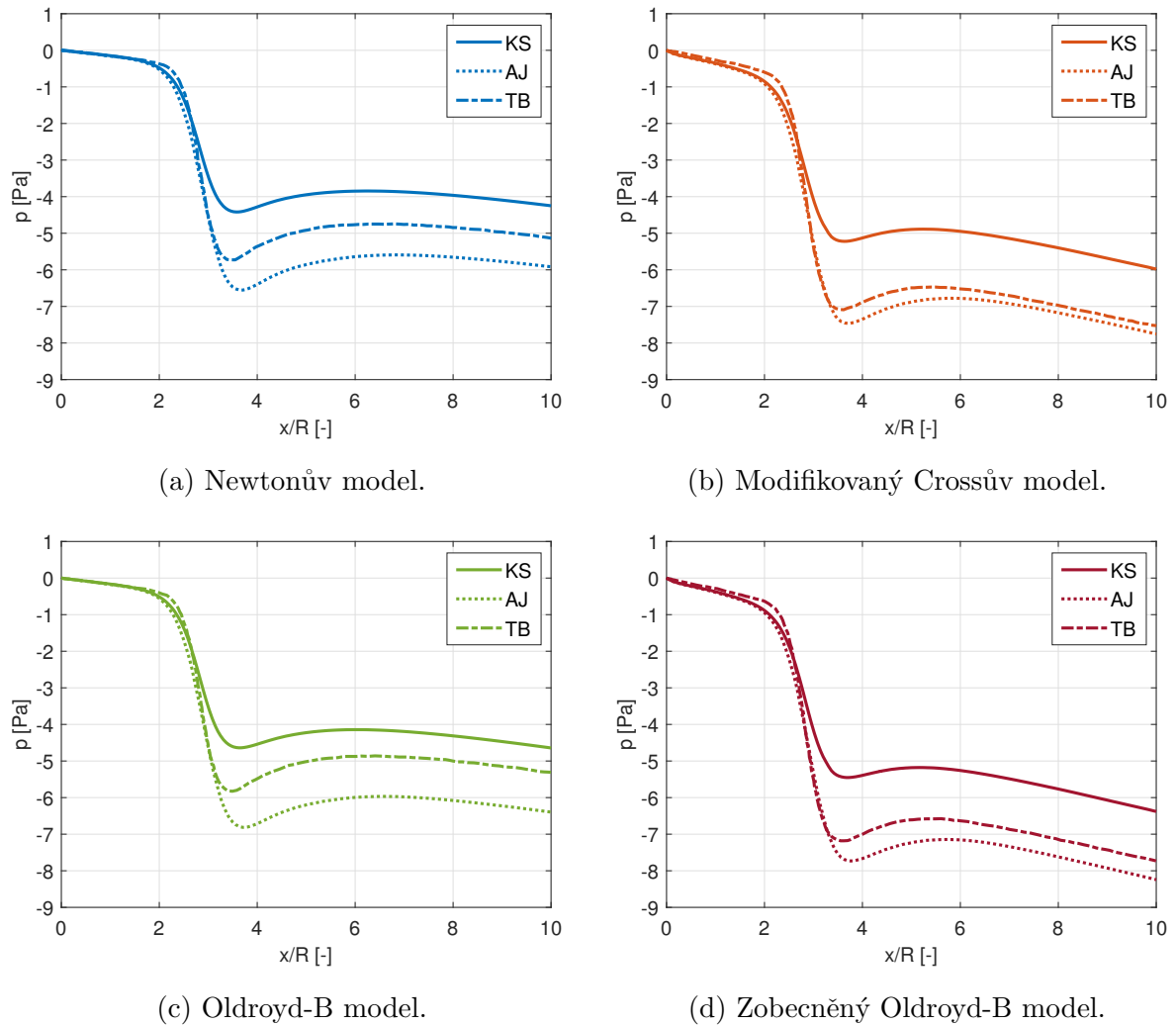
V případě porovnání průběhu jak tlaku, tak rychlosti v rámci řešení jednotlivých konstitutivních modelů lze říci, že jsou kvalitativně podobné a liší se pouze kvantitativně, což je s největší pravděpodobností způsobeno výše zmíněnými geometrickými rozdíly.

V souladu s vizualizací zvolenou v referenčních článcích [7], [15], bylo pro zobrazení průběhu tlaku podél střednice modelované trubice přistoupeno k přeškálování spočtených hodnot tak, aby vstupní tlak měl nulovou hodnotu. Přeškálování je provedeno pro každou sadu výsledků podle tohoto vztahu

$$p(x) = p_v(x) - p_0, \quad (4.4)$$

kde $p(x)$ je zobrazená hodnota tlaku ve vzdálenosti x od počátku trubice ve grafech na obr. 15, $p_v(x)$ je hodnota tlaku ve vzdálenosti x od počátku trubice stanovená v rámci jednotlivých simulací a p_0 je spočtená hodnota tlaku na vstupu $\partial\Omega_I$.

Porovnání průběhu tlaku pro všechny čtyři uvažované konstitutivní modely je znázorněno na obr. 15a–15d. V oblasti začátku stenózy ($x/R = 2$) dochází k výraznějšímu poklesu tlaku, který skončí po překonání nejužší části stenózy ($x/R = 3$). Tento průběh je rozdílný oproti tomu zaznamenanému v případě nezúžené trubice (odstavec 4.1), kde v souladu s teorií rovnoměrně klesal až k výstupu. Za oblastí s největším zúžením hodnota tlaku mírně vzroste a v rovném úseku cévy začne opět mírně klesat. Křivky vyjadřující průběh tlaku při střednici z výsledků simulací provedených v této práci mají nejnižší absolutní hodnoty, což je způsobeno pozvolnějším tvarem geometrie v oblasti stenózy než u zbylých dvou geometrií. Naproti geometrie vytvořená vedoucím práce má velmi strmý náběh v oblasti stenózy a největší zúžení v této oblasti, proto křivky vyjadřující průběhy tlaku z těchto simulací mají největší absolutní hodnotu. Zúžení v případě referenčních článků se svým vzhledem blíží geometrii modelu vytvořeného vedoucím práce (obr. 14), proto i příslušné průběhy tlaku mají blíže k těmto výsledkům.

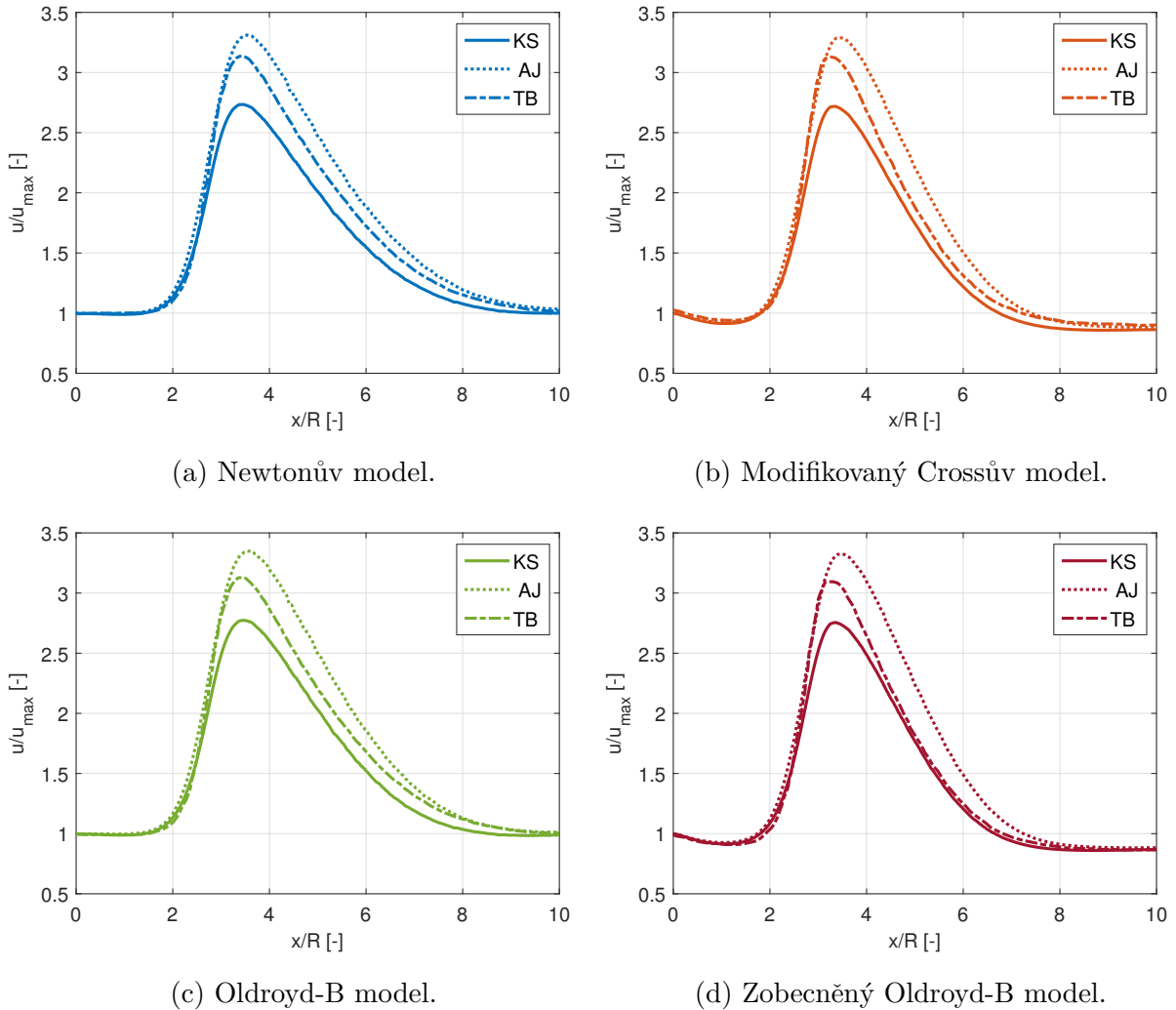


Obrázek 15: Průběh tlaku podél střednice trubice se stenózou.

Pro vizualizaci průběhu rychlosti ve směru osy x je v souladu s [7], [15] využito bezrozměrových hodnot, tzn. hodnoty rychlosti podél střednice jsou vyděleny maximální hodnotou rychlosti u_{max} předepsanou na vstupu trubice $\partial\Omega_I$, viz odstavec 3.2.4. Tyto průběhy rychlosti jednotlivých konstitutivních modelů jsou zobrazeny na obr. 16a–16d. Porovnáním obr. 15 a 16 lze říci, že výrazný pokles tlaku v oblasti stenózy je spjat výrazným zvětšením velikosti rychlosti tamtéž. Za touto oblastí se velikost rychlosti pozvolně vrací k hodnotě předepsané na vstupu trubice. Absolutní velikost rychlosti proudění v oblasti stenózy v případě geometrie modelu použitého v této práci je nejmenší z důvodu nejmenšího zúžení stenózy ve srovnání s ostatními geometriemi. Oproti tomu nejvyšší absolutní velikost rychlosti je u výsledků ze simulací realizovaných vedoucím práce, což je způsobeno výše zmíněným největším zúžením v oblasti stenózy.

Z výše provedené analýzy výsledků je patrné, že ačkoliv se v této práci nepodařilo dosáhnout kvantitativní shody s referenčními daty, kvalitativní podobnost průběhů tlaků

a rychlostí u všech čtyř uvažovaných konstitutivních modelů se zdá být dostatečná. Z tohoto důvodu lze konstatovat, že vyvinuté programové nadstavby implementované do výpočtového prostředí softwaru ANSYS Fluent se podařilo verifikovat a je tudíž možné je použít pro analýzu neneutonských efektů.



Obrázek 16: Porovnání závislosti rychlosti ve směru osy x při střednici.

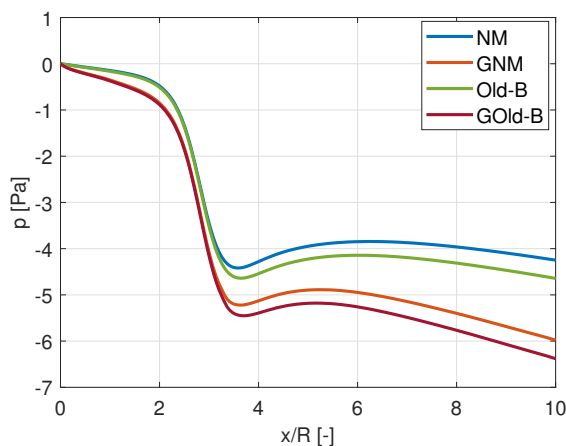
Analýza neneutonských efektů

V tomto odstavci přistoupíme k samotnému porovnání výsledků mezi jednotlivými konstitutivními modely uvedenými na začátku odstavce 4.2. Nejdříve porovnáme průběhy tlaku a rychlosti podél střednice tak, jak byly spočteny jednotlivými reologickými modely (obr. 17). Následně provedeme analýzu rozložení obou tokových veličin v podélném řezu trubici (obr. 18) a poskytneme podrobný náhled na rozdíly v rozložení rychlosti v případě vybraných konstitutivních modelů (obr. 19).

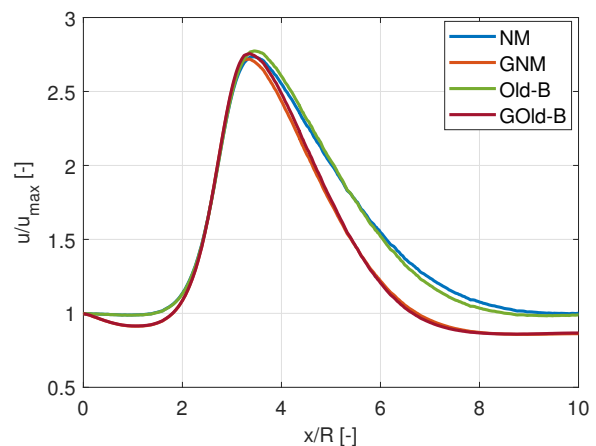
Průběh tlaku podél střednice lze vidět na obr. 17a. Pro zobrazení je aplikováno stejné

přeskálování pomocí vztahu (4.4) jako v předchozím odstavci. Z grafu je patrné, že pseudoplastické chování kapalin se projeví především za oblastí největšího zúžení a že celkově je tlaková ztráta větší v absolutní hodnotě ve srovnání s modely neuvažujícími toto chování. Naproti tomu viskoelastické chování kapalin se neprojevuje tolik jako ve srovnání s pseudoplastickým chováním, ale tento závěr může být limitován pouze pro případ ustáleného proudění, který je zde modelován. Závislost tlaku má podobný průběh v případě modelu newtonské kapaliny (NM) a Oldroyd-B modelu (Old-B), tj. při neuvažování proměnné viskozity, s rozdílem hodnot na výstupu zhruba 9%. To samé platí pro modifikovaný Crossův model (GNM) a zobecněný Oldroyd-B model (GOld-B), tj. při uvažování proměnné viskozity, kde se hodnota na výstupu liší o zhruba 7%.

Závislost x -ové složky vektoru rychlosti podél střednice je znázorněna na obr. 17b. Průběhy rychlostí stanovené pomocí jednotlivých konstitutivních modelů jsou opět uvedeny v bezrozměrovém tvaru jako v předchozím odstavci. V oblasti zúžení dochází k velkému nárůstu (více než $2,5\times$) velikosti rychlosti. Průběh rychlosti je velmi podobný u modelu newtonské kapaliny a Oldroyd-B modelu, resp. modifikovaného Crossova modelu a zobecněného Oldroyd-B modelu. Zaměříme-li se dále na hodnoty na začátku a konci trubice, lze si všimnout, že v případě absence pseudoplastického chování (NM a Old-B) se rychlosti liší minimálně. Jinými slovy řečeno, lze v jejich případě předpokládat, že na výstupu se nachází rychlostní profil parabolického tvaru. Naproti tomu u modifikovaného Crossova modelu (GNM) a zobecněného Oldroyd-B modelu (GOld-B) je patrný mírný pokles rychlosti, což naznačuje, že příslušný rychlostní profil bude mírně zploštělý, podobně jako ten na obr. 11b.



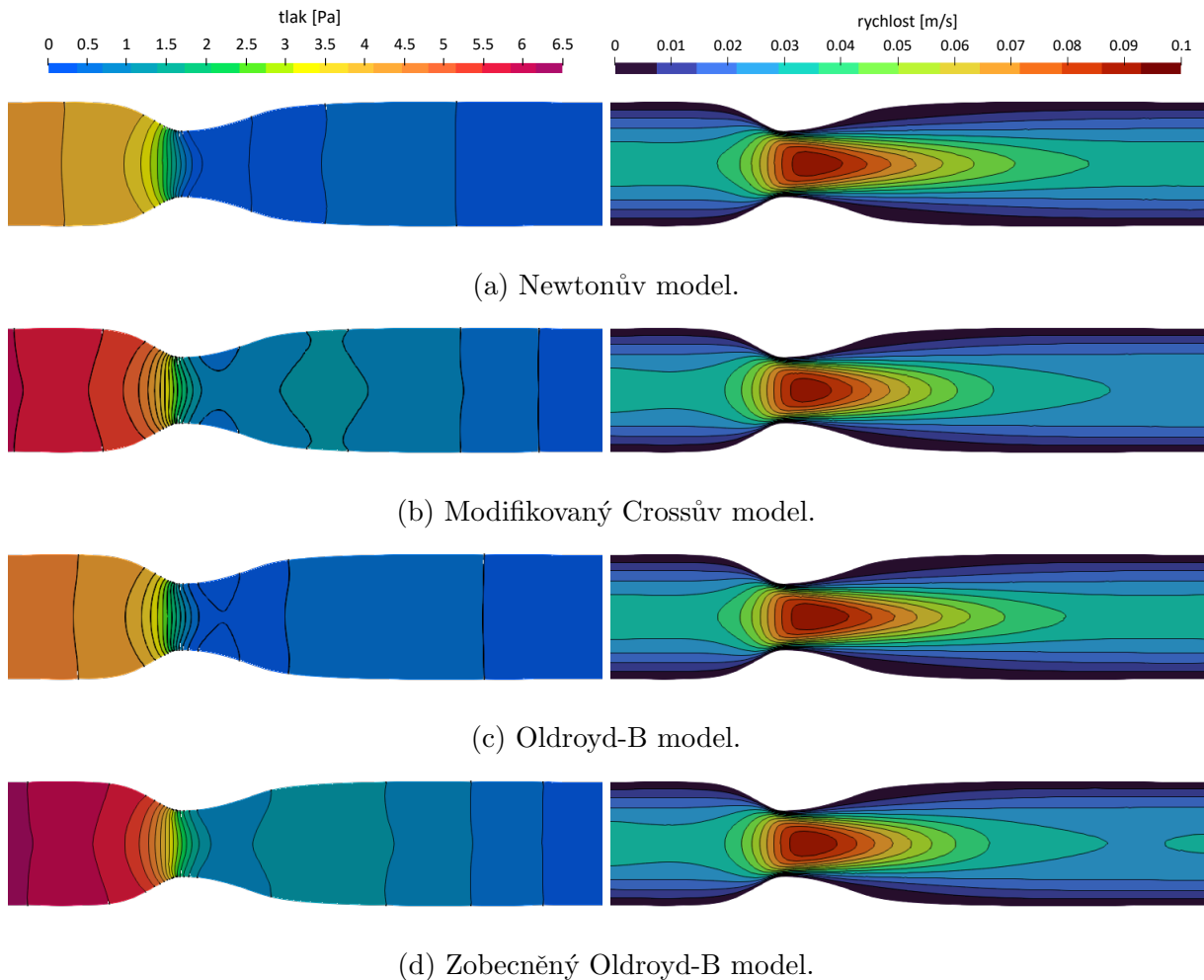
(a) Průběh tlaku.



(b) Průběh rychlosti.

Obrázek 17: Porovnání průběhu vybraných veličin podél střednice spočtených pomocí čtyř reologických modelů.

Na obr. 18 jsou zobrazeny rozložení tlaku a rychlosti v podélném řezu trubící, přičemž oproti dříve vykresleným průběhům jsou zde hodnoty obou tokových veličin znázorněny nepřeskálované a v rozměrovém tvaru.

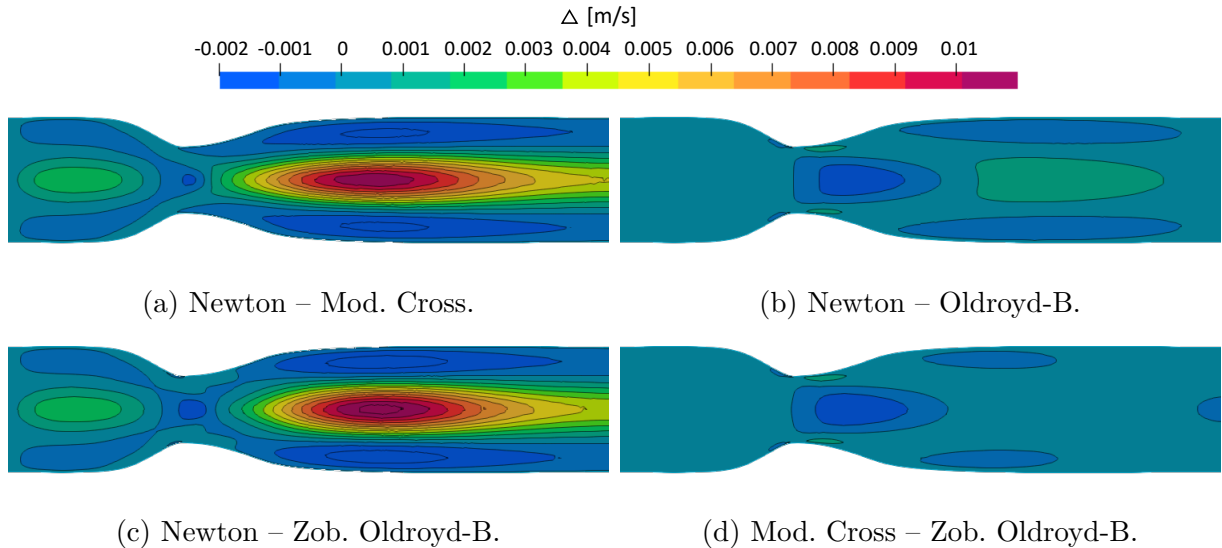


Obrázek 18: Porovnání rozložení tlaku a rychlosti v podélném řezu zúženou trubící.

Zaměříme-li se nejprve na hodnoty tlaku (levý sloupec obr. 18), lze si všimnout, že tak, jak bylo zmíněno u obr. 17a, je výsledný tlakový spád u modelů uvažující pseudoplastické chování vyšší než u zbylých dvou, které tuto vlastnost nezohledňují. Dále v souladu s principy mechaniky tekutin dochází v oblasti zúžení k rychlému poklesu tlaku.

Rozložení rychlosti v podélném řezu je zobrazeno na obr. 18 v pravém sloupci. Jak již bylo zmíněno výše v souvislosti s obr. 17a, je zde patrný výrazný nárůst rychlosti v oblasti zúžení, který se mírně liší mezi jednotlivými reologickými modely. Vrátime-li se k dříve zmíněnému tvaru rychlostního profilu na konci trubice, lze tuto charakteristiku proudění jistým způsobem vizualizovat v obr. 18 prostřednictvím různě širokých izoploch v oblasti výstupu. U modelu newtonské kapaliny a Oldroyd-B modelu si tak lze všimnout její konstantní šířky v okolí střednice. Naproti tomu analogická izočára rychlosti u modi-

fikovaného Crossova a zobecněného Oldroyd-B modelu je mírně užší, přičemž v oblasti za stenózou je potřeba delšího úseku pro její kompletní obnovu. Výše zobrazená rozložení rychlosti v podélném řezu jsou si vzájemně velmi podobná, proto pro lepší názornost jsou na obr. 19 znázorněny přímo jejich rozdíly u vybraných dvojic konstitutivních modelů.



Obrázek 19: Porovnání – rozdíly rychlostí mezi vybranými konstitutivními modely.

První dvojicí na obr. 19a je rozdíl rychlostí mezi modifikovaným Crossovým modelem a modelem Newtonovy kapaliny. Je zde vidět odchylka v okolí střednice před a za stenózou ve prospěch vyšší rychlosti u modelu newtonské kapaliny o zhruba 0,011 m/s. Naopak v oblasti za stenózou při stěně je rychlost u modifikovaného Crossova modelu o 0,002 m/s vyšší. Oba tyto postřehy potvrzují naši dřívější domněnku, že pseudoplastické chování kapaliny se zde projevuje zploštělým rychlostním profilem.

Další dvojicí zobrazenou na obr. 19b je rozdíl rychlostí Oldroyd-B modelu od modelu newtonské kapaliny, tj. neuvažuje se pseudoplastické chování. Zde je vidět, že zohlednění pouze viskoelastických vlastností v případě ustáleného proudění se nijak výrazněji neprojevuje na rozložení rychlosti. Konkrétně v oblasti stenózy je rychlost u Oldroyd-B modelu vyšší pouze o 0,002 m/s.

Třetí dvojicí na obr. 19c je rozdíl rychlosti zobecněného Oldroyd-B modelu od modelu newtonské kapaliny. Tak jako v případě první dvojice je i zde patrná odchylka ve velikostech rychlosti před a za stenózou v okolí střednice. Dominantním se zde proto opět jeví pseudoplastické chování.

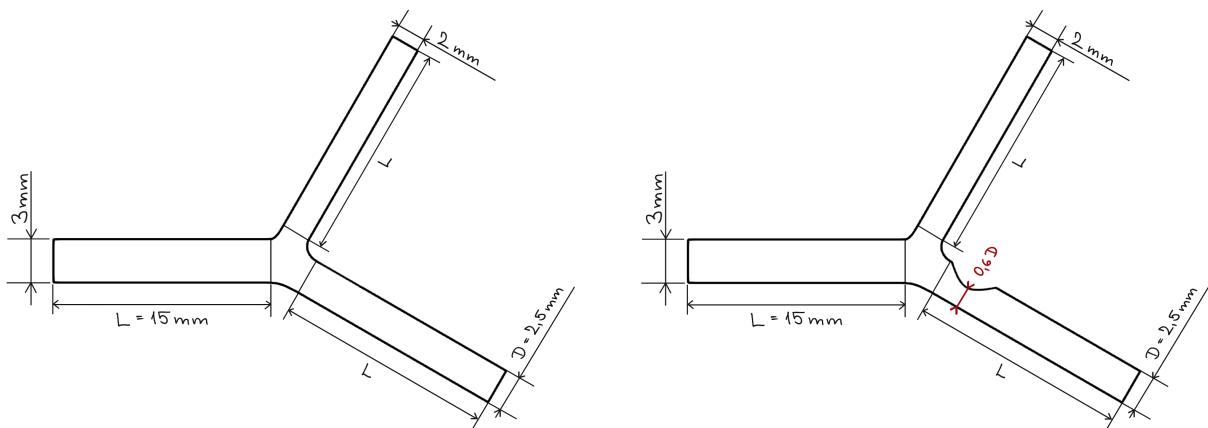
Poslední dvojicí zobrazenou na obr. 19d je rozdíl mezi velikostmi rychlostí modelu newtonské kapaliny a zobecněného Oldroyd-B modelu, tj. uvažuje se pseudoplastické chování.

Je zde opět patrné, že uvažování viskoelastického chování k pseudoplastickým vlastnostem nemá na podobu ustáleného proudění velký vliv, pouze zapříčiní mírný nárůst rychlosti v oblasti těsně za stenózou o 0,002 m/s.

4.3 Bifurkace

Na dvou trojrozměrných modelech cévní bifurkace, první nepoškozené a druhé se stenotickým zúžením na jedné z větví, je dohromady realizováno celkem 12 numerických simulací pro minimální v_{min} a maximální v_{max} tok krve, viz odstavec 3.2.4, a tři typy reologických modelů. V souladu s výchozím článkem [3] jsou v této práci použity tyto modely: model newtonské kapaliny, Carreauův model a zobecněný Oldroyd-B model. Na těchto geometriích už není použit čistě viskoelastický Oldroyd-B model, protože v předchozích numerických simulacích ve zúžené trubici se ukázalo, že použití Oldroyd-B modelu bez uvažování proměnné viskozity nemá na výslednou podobu proudového pole zásadní vliv.

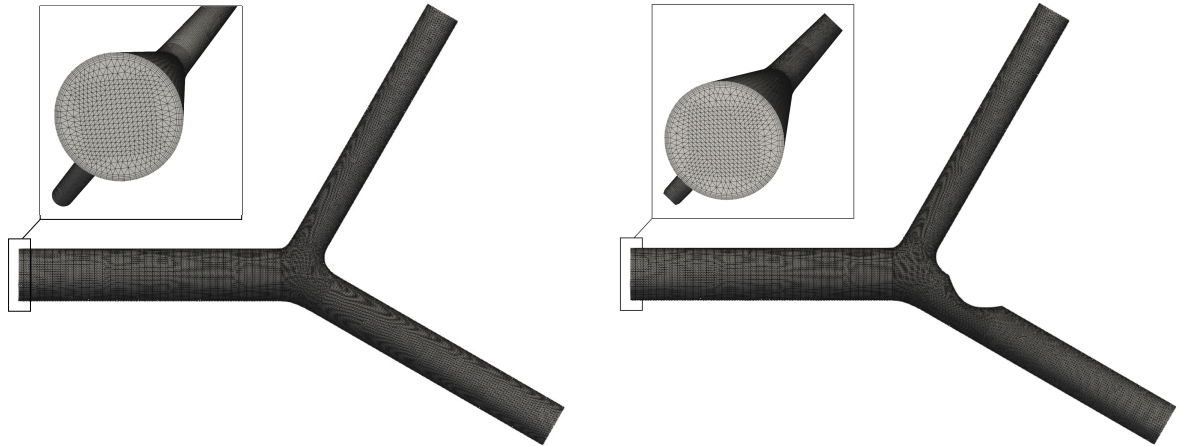
Rozměry jak poškozené, tak nepoškozené bifurkace jsou převzaty z článku [3] a jsou naznačeny na obr. 20. Model nepoškozené bifurkace se skládá z rovné trubice o průměru 3 mm a délce $L = 15$ mm (koronární tepna), která se dělí na dvě větve. Horní větev svírající úhel 60° s osou x má průměr 2 mm a délku L a dolní větev svírající úhel 30° s osou x má průměr $D = 2,5$ mm a rovněž délku L . Model bifurkace se stenózou je v dolní větvi za rozdělením zúžený o 40% průměru D .



Obrázek 20: Rozměry modelů nepoškozené (vlevo) a poškozené (vpravo) cévní bifurkace.

Geometrie a výpočetní sítě obou uvažovaných bifurkací, viz obr. 21, byly opět vytvořeny v programu Altair Hypermesh způsobem, který byl již dříve popsán v odstavci 4.1. Celkový počet prvků u modelu nepoškozené bifurkace má hodnotu 687 305 a u poškozené 725 609, což je více než dvojnásobek prvků použitých ve výchozím článku [3], kde autoři pracovali se sítí o 300 000 prvcích. Podobně jako v případě předchozích dvou modelů cév,

byl pro zahuštění sítě v blízkosti stěn (obr. 21 – detaily) použit rekurentní vztah (4.1) se stejnými parametry jako u modelu přímého segmentu tepny, tj. $y_0 = 0,02$ mm a $A = 0,2$.

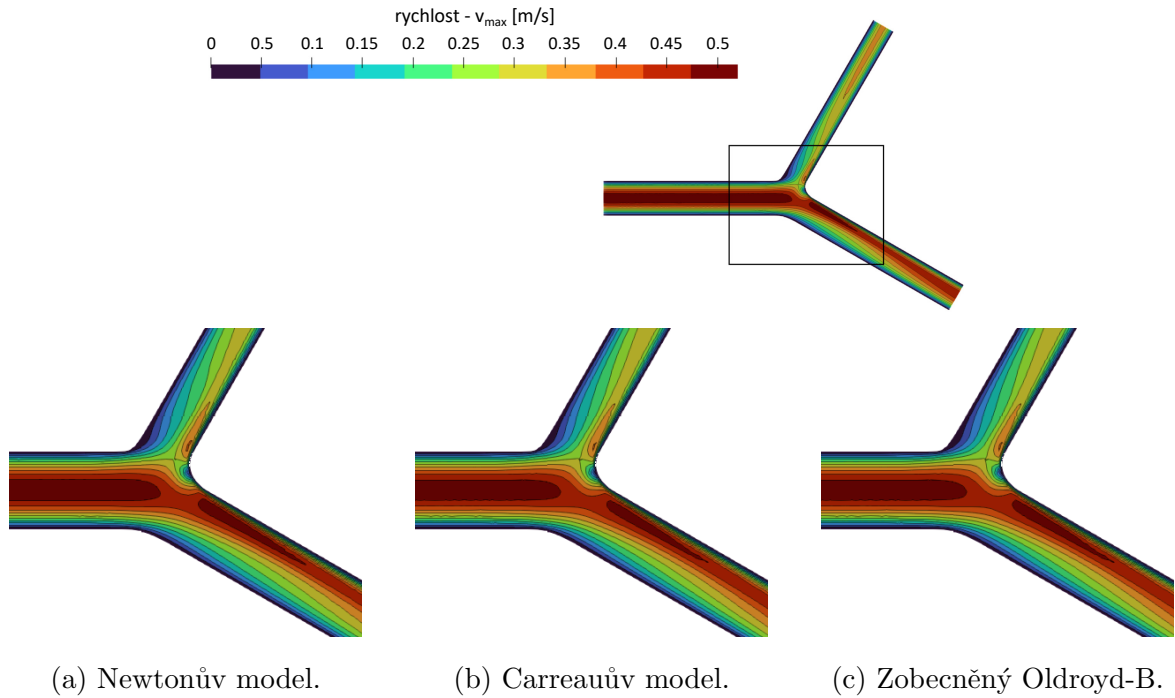
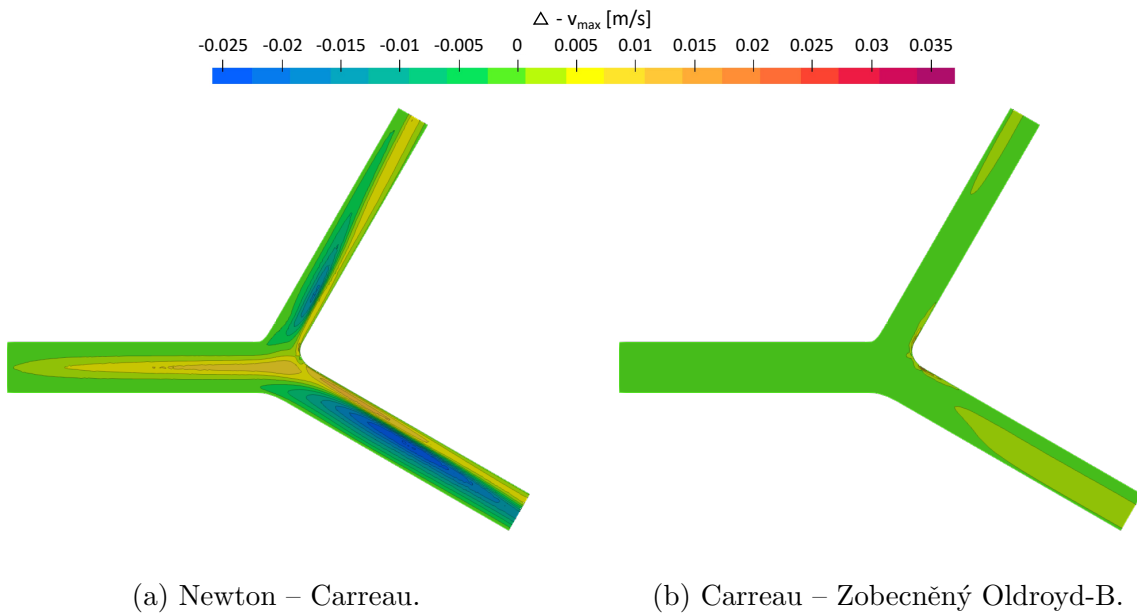


Obrázek 21: Výpočetní sítě nepoškozené (vlevo) a poškozené (vpravo) bifurkace s detailními pohledy na strukturu sítě na vstupu.

Analýza nenewtonských efektů

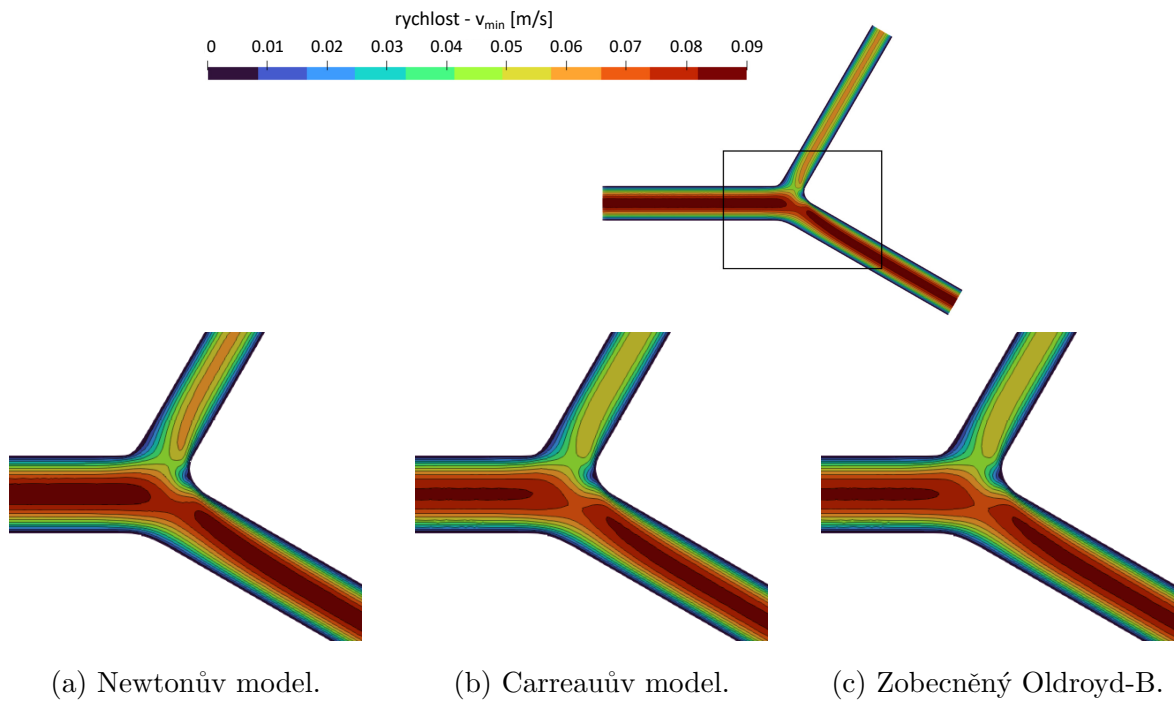
V předchozím odstavci byly představeny oba modely jak poškozené, tak nepoškozené bifurkace. V tomto odstavci na to navážeme analýzou výsledků z provedených simulací. Nejprve jsou prezentovány výsledky pro model nepoškozené bifurkace, počínaje těmi pro vstupní rychlost v_{max} , poté pro v_{min} . Analogickým způsobem jsou pak představeny výsledky pro model poškozené bifurkace. V případě těchto modelů budeme porovnávat rozložení rychlosti v podélném řezu a pro lepší vizualizaci jsou pod příslušnou sadou těchto rozložení zobrazeny rozdíly mezi rozloženími rychlosti dvou vybraných dvojic konstitutivních modelů: model newtonské kapaliny – Carreauův model a Carreauův model – zobecněný Oldroyd-B model.

Jako první popíšeme rozložení rychlosti u modelu nepoškozené bifurkace s velikostí v_{max} na vstupu, která jsou zobrazena na obr. 22 s příslušnými rozdíly na obr. 29. Rozmezí velikosti rychlosti se pohybuje od 0 do $v_{max} = 0,519$ m/s. Znázorněné izoplochy rychlosti vypadají kvalitativně velmi podobně, proto přistoupíme k popisu rozdílů rychlostí. První dvojice zobrazená na obr. 23a ukazuje, že proudění newtonské kapaliny vykazuje vyšší rychlost (o zhruba 0,010–0,015 m/s) v okolí střednice ve vstupní trubici oproti proudění s Carreauovým modelem. Po rozvětvení se situace obrací a rychlost v případě Carreauova modelu je v určitých oblastech větší až o 0,020–0,025 m/s. Z výsledků druhé dvojice zobrazené na obr. 23b je patrné, že uvažování viskoelastického chování nemá v případě tohoto typu proudění nijak výrazný vliv na podobu proudového pole.

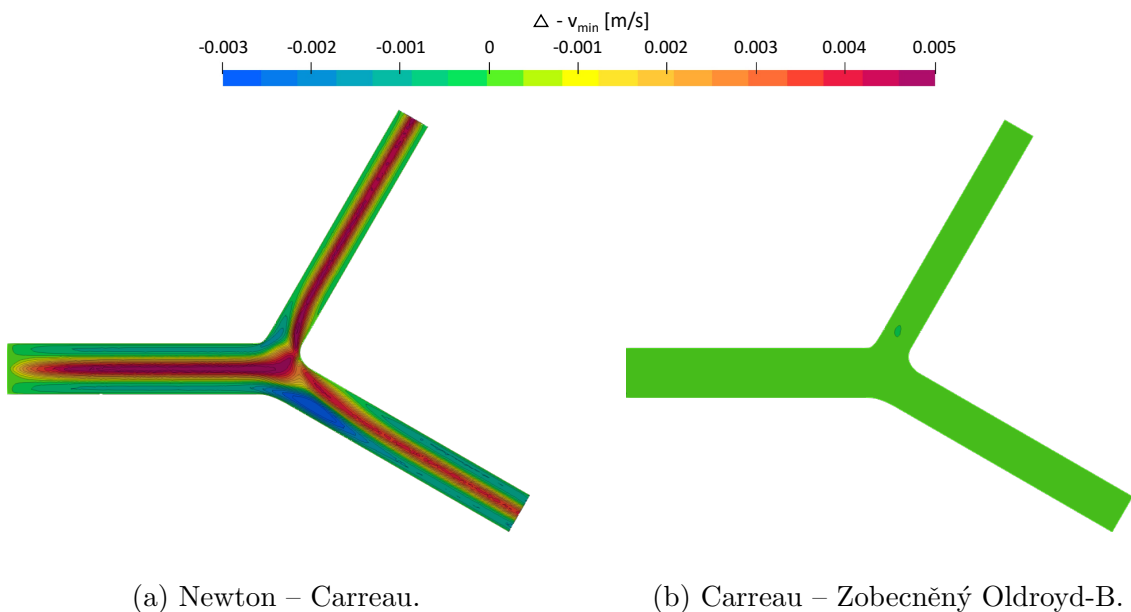
Obrázek 22: Podélný řez nepoškozenou bifurkací – v_{max} .Obrázek 23: Rozdíl rozložení rychlosti – nepoškozená bifurkace – v_{max} .

Jako další představíme rozložení rychlosti u modelu nepoškozené bifurkace s velikostí v_{min} na vstupu, která jsou zobrazena na obr. 24 s příslušnými rozdíly na obr. 25. Rozmezí velikosti rychlosti se pohybuje od 0 do $v_{min} = 0,089$ m/s. V tomto případě je viditelně větší rychlost toku u modelu newtonské kapaliny (zhruba o 0,005 m/s), a to jak ve vstupní trubici při střednici, tak po rozdělení v obou větvích než u zbylých dvou reologických modelů. V dolní větvi je v určité zóně rychlejší proudění v případě Carreauova modelu o 0,003 m/s. Rozdíl mezi Carreauovým a zobecněným Oldroyd-B modelem se opět nepro-

jevuje ve výsledcích, což je ovšem v rozporu s tvrzením uvedeným v odstavci 3.2.4 ohledně volby vstupních rychlostí. Konkrétně s odkazem na výchozí článek [3] bylo předpokládáno, že v případě pomalejšího toku krve budou její viskoelastické vlastnosti znatelnější. Na druhou stranu je ovšem nutné zmínit, že autoři [3] realizovali své simulace pro nestacionární proudění, a proto se jejich závěry nemusí shodovat s výsledky v této práci, kde jsme se omezili na případ stacionárního toku.

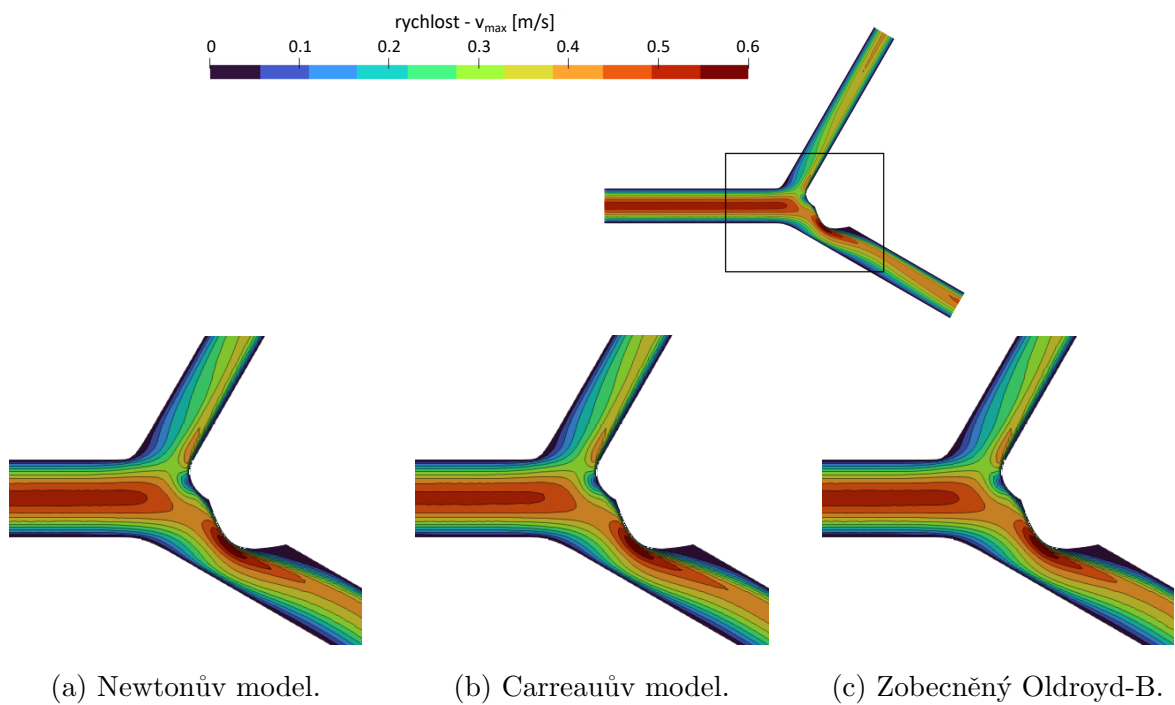


Obrázek 24: Podélný řez nepoškozenou bifurkací – v_{min} .

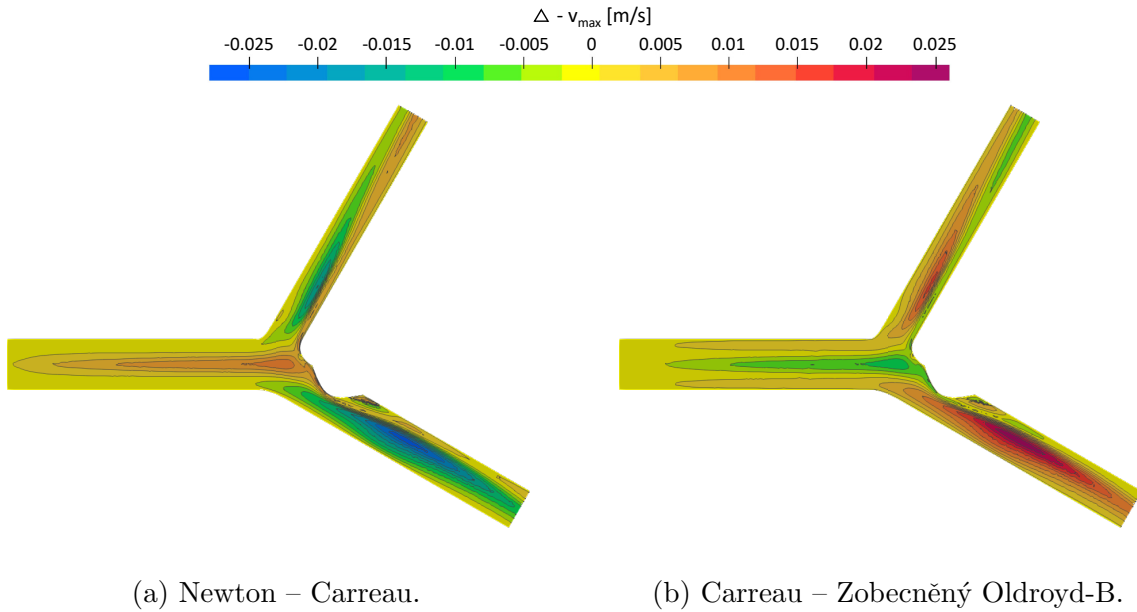


Obrázek 25: Rozdíl rozložení rychlosti – nepoškozená bifurkace – v_{min} .

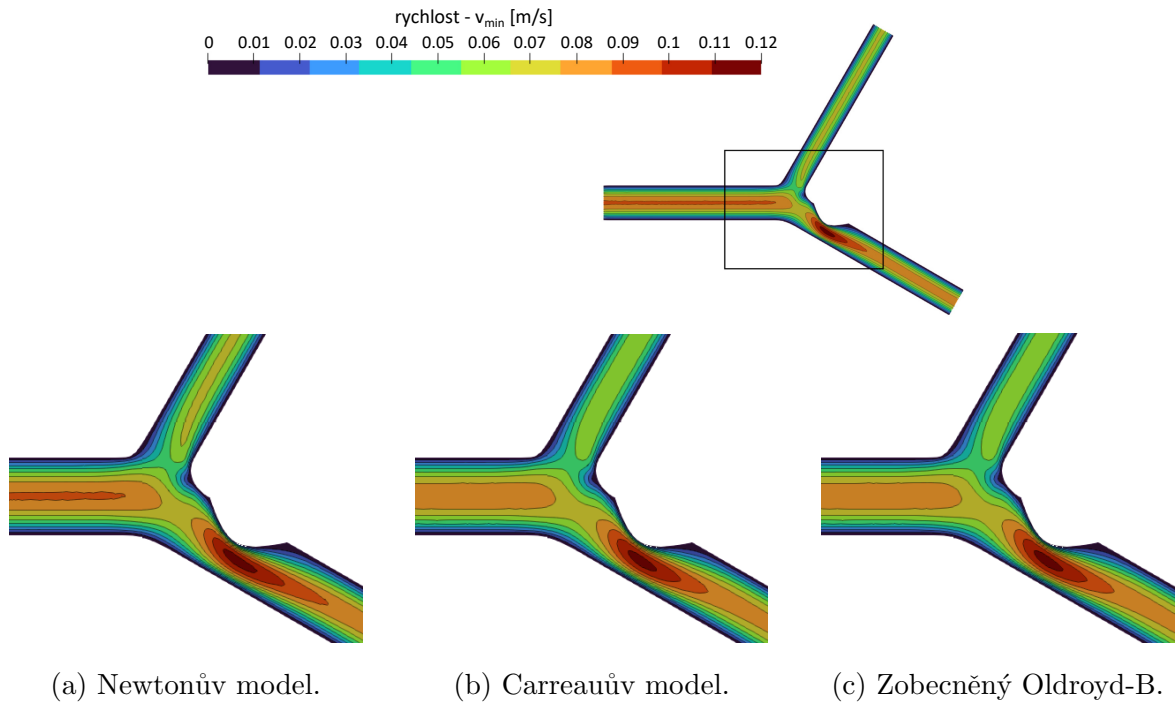
Zaměříme se dále na výsledky pro model poškozené bifurkace. Rozložení rychlosti pro sadu simulací pro vstupní rychlost v_{max} jsou zobrazena na obr. 26. U všech třech použitých reologických modelů se rozložení rychlosti jeví totožné. V oblasti zúžení dochází k významnému urychlení toku až na 0,6 m/s, což je v souladu s principy mechaniky tekutin. Rozdíly rozložení rychlosti jsou zobrazeny na obr. 27. V případě první dvojice (obr. 27a) je rychlost u modelu newtonské kapaliny při střednici větší o 0,01 m/s ve vstupní trubici, což již neplatí pro oblasti za rozvětvením, kde v obou větvích má vyšší hodnotu rychlosti proudění v případě Carreauova modelu. a to až o 0,025 m/s. U rozdílu rozložení rychlosti v případě druhé dvojice (obr. 27b) poprvé objevuje náznak viskoelastického chování. Ve vstupní oblasti je rychlost proudění u zobecněného Oldroyd-B modelu vyšší než v případě Carreauova modelu, a to o 0,0075 m/s. Za zúžením je rychlost vyšší o 0,025 m/s v případě Carreauova modelu, což značí dominantní vliv proměnné viskozity na úkor viskoelastických vlastností.



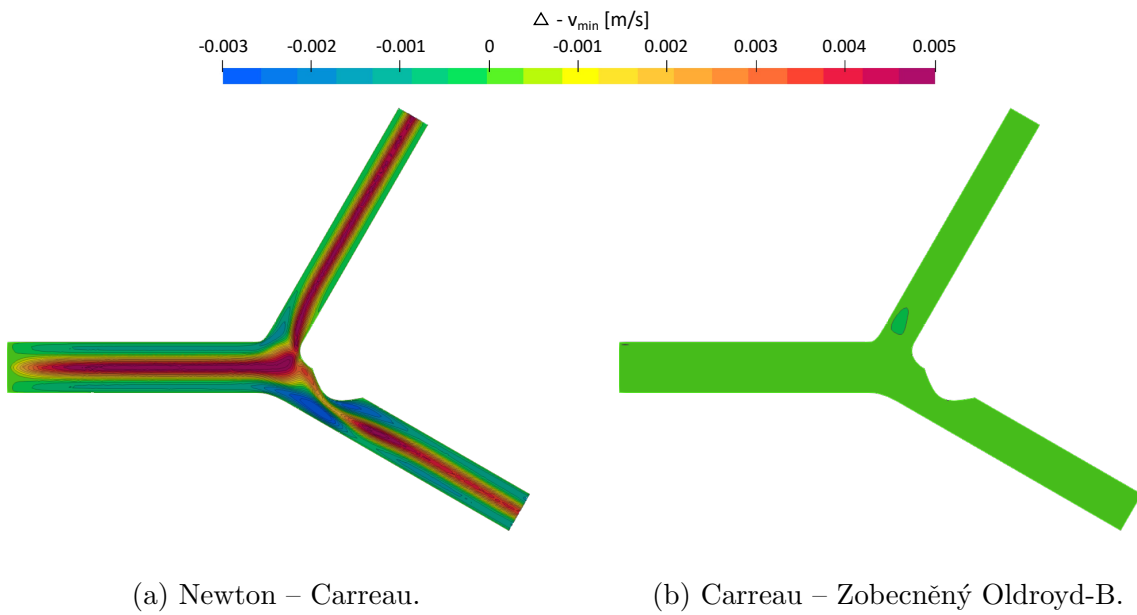
Obrázek 26: Podélný řez poškozenou bifurkací – v_{max} .

Obrázek 27: Rozdíl rozložení rychlosti – poškozená bifurkace – v_{\max} .

Rozložení rychlosti pro poslední sadu simulací pro vstupní rychlost v_{\min} jsou zobrazeny na obr. 28. Pro všechny tři reologické modely platí, že v oblasti zúžení dochází ke zrychlení toku až na 0,11 m/s, ovšem s rozdílným rozsahem. U modelů uvažující pseudo-plastické chování lze pozorovat rychlejší návrat k parabolickému rozložení rychlostí v oblasti za stenózou, což naznačuje přítomnost vyšších hodnot viskozity. Rozdíly rozložení rychlosti vybraných dvojic konstitutivních modelů jsou zobrazeny na obr. 29. V případě první dvojice (obr. 29a) je opět rychlost při střednici vyšší o 0,005 m/s v případě modelu newtonské kapaliny. Naproti tomu proudění v případě Caureauova modelu je rychlejší v recirkulačních zónách za rozdvojením a za zúžením. Podobně jako u modelu nepoškozené bifurkace se i u druhé dvojice (obr. 29b) neobjevují žádné výrazné neneutonské efekty spojené s viskoelastickým chováním, což je opět v rozporu s tvrzením uvedeným ve výchozím článku [3].



Obrázek 28: Podélný řez poškozenou bifurkací – v_{min} .



Obrázek 29: Rozdíl rozložení rychlosti – poškozená bifurkace – v_{min} .

Závěr

Hlavním cílem předložené bakalářské práce bylo analyzovat výsledky numerických simulací ustáleného proudění krve ve vybraných geometriích cév za účelem zjištění, které reologické modely jsou vhodné pro modelování ve středně velkých cévách. Pro lepší pochopení řešené problematiky byla proto na začátku této práce lidská krev charakterizována z několika různých pohledů. Nejdříve bylo popsáno složení krve, které následovalo jejím popisem z hlediska jejích tokových vlastností. Konkrétně bylo zjištěno, že krev v závislosti na vnějších okolnostech můžeme považovat za newtonskou, pseudoplastickou nebo viskoelastickou kapalinu. Na závěr první kapitoly byly uvedeny předpoklady a rovnice, pomocí kterých lze matematicky popsat laminární izotermické proudění krve jakožto homogenní nestlačitelné vazké kapaliny.

Ve druhé kapitole byla provedena klasifikace neneutonských kapalin, mezi které krev ve většině případů řadíme. Blíže pak byly popsány pseudoplastické a viskoelastické kapaliny, jejichž vybranými reologickými modely se tato práce podrobněji zabývá.

Ve třetí, poslední teoretické kapitole byly představeny konkrétní konstitutivní vztahy vybraných reologických modelů – tří modelů pseudoplastických kapalin (mocninový model, modifikovaný Crossův model a Carreauův model) a jednoho viskoelastického modelu (Oldroyd-B). Pro lepší přehlednost byly dále uvedeny výsledné tvary matematických modelů proudění při uvažování různých hemoreologických vlastností, naznačen způsob jejich implementace a řešení ve výpočtovém softwaru ANSYS Fluent včetně specifikace okrajových a počátečních podmínek.

V poslední kapitole, která je obsahově rozdělena na tři části, jsou představeny výsledky z provedených simulací ve třech idealizovaných modelech cév – přímém segmentu cévy, trubici se stenózou a cévní bifurkaci ve dvou variantách (poškozená/nepoškozená). První část se věnuje proudění krve v přímém segmentu cévy, kde byly porovnány numerické výsledky s analytickými předpisy pro rychlostní profil ustáleného proudění newtonské a neneutonské (mocninový model) kapaliny. Tímto způsobem byla ověřena správnost implementace obou zmíněných reologických modelů ve výpočtovém prostředí softwaru ANSYS Fluent. V druhé části, která zahrnovala výsledky získané pro model přímé cévy se stenózou, byly porovnány čtyři konstitutivní modely – model newtonské kapaliny, modifikovaný Crossův model, Oldroyd-B model a zobecněný Oldroyd-B model. Získané numerické výsledky ukázaly, že aplikací samotného Oldroyd-B modelu (tj. s předpokladem konstantní viskozity) se žádné výraznější neneutonské efekty v případě karotické tepny neprojeví. Naopak dominantní vlastností se zde ukázalo být pseudoplastické chování krve,

kdy v oblastech s nízkou smykovou rychlostí byl pozorován nárůst viskozity a s tím spojený pokles rychlosti. Poslední část se věnuje analýze výsledků získaných pro model cévní bifurkace s poškozenou (zúženou), resp. nepoškozenou větví. Pro numerické simulace zde byly aplikovány tři reologické modely – model newtonské kapaliny, Carreauův model a zobecněný Oldroyd-B. Podobně jako v případě trubice se stenózou i zde podrobná analýza výsledků neodhalila výraznější výskyt viskoelastických jevů. Neboli aplikace Oldroyd-B modelu v kombinaci s Carreauovým modelem pro viskozitu vedla k více méně identickým proudovým polím jako v případě, kdy byla krev modelována pouze jako pseudoplastická kapalina.

Z výše uvedeného se tedy zdá, že zohlednění viskoelastických vlastností při modelování proudění krve ve středně velkých cévách nemá příliš velký význam. Na druhou stranu je zde nutné připomenout, že veškeré simulace popsané v této bakalářské práci byly realizovány pro ustálené proudění. K rozdílným výsledkům, a tudíž i závěrům bychom mohli dospět v simulacích nestacionárního (pulzačního) proudění, protože viskoelastické kapaliny vykazují určitou formu tvarové paměti. Další variantou, která se po prostudování příslušné odborné literatury nabízí, je aplikace některého z nelineárních viskoelastických modelů – např. Phan Thienova-Tannerova modelu či Giesekusova modelu [3].

Použitá literatura

- [1] C. A. Taylor, T. A. Fonte a J. K. Min, “Computational Fluid Dynamics Applied to Cardiac Computed Tomography for Noninvasive Quantification of Fractional Flow Reserve: Scientific Basis,” *Journal of the American College of Cardiology*, roč. 61, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jacc.2012.11.083>.
- [2] G. B. Thurston, *Viscoelastic properties of blood and blood analogs*, 1. vydání. JAI Press Inc., 1996, ISBN: 1-55938-634-7.
- [3] S. Pinto, E. Romano, C. António, L. Sousa a C. Castro, “The Impact of Non-Linear Viscoelastic Property of Blood in Right Coronary Arteries Hemodynamics - A Numerical Implementation,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103477>.
- [4] J. Vimmr a A. Jonášová, *Krev a její tokové vlastnosti*, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky.
- [5] J. Motáň, *Základy anatomie a fyziologie pro studenty bioinženýrského směru*, 1997.
- [6] J. Křen, P. Janíček a J. Rosenberg, *Biomechanika*, 2. vydání. Západočeská univerzita, 2001, ISBN: 80-7082-365-8.
- [7] T. Bodnár a A. Sequeira, “Numerical Study of the Significance of the Non-Newtonian Nature of Blood in Steady Flow Through a Stenosed Vessel,” *Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, 2010. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-04068-9_6.
- [8] K. Perktold a M. Prosi, “Computational Models of Arterial Flow and Mass Transport,” 2003. DOI: [10.1007/978-3-7091-2542-7_2](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2542-7_2).
- [9] R. P. Chhabra a J. F. Richardson, *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications*, 2. vydání. Butterworth-Heinemann, 2001, ISBN: 978-0-7506-8532-0.
- [10] J. Málek, *Mechanika neneutonských tekutin*, 2011. URL: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~malek/new/images/Prednasky1_2_3_4_5.pdf.
- [11] N. Phan-Thien a N. Mai-Duy, *Understanding Viscoelasticity - An Introduction to Rheology*, 3. vydání. Springer International Publishing AG, 2017, ISBN: 978-3-319-62000-8.
- [12] R. Holubová, *Základy reologie a reometrie kapalin*, 1. vydání. Univerzita Palackého v Olomouci, 2014, ISBN: 978-80-244-4178-8.

- [13] R. Poole, “The Deborah and Weissenberg numbers,” *The British Society of Rheology - Rheology Bulletin*, roč. 53, 2012. URL: https://pcwww.liv.ac.uk/~robpoole/PAPERS/POOLE_45.pdf.
- [14] R. L. Thompson a C. M. Oishi, “Reynolds and Weissenberg numbers in viscoelastic flows,” *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2021, ISSN: 0377-0257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2021.104550>.
- [15] T. Bodnár, A. Sequeira a M. Prosi, “On the Shear-Thinning and Viscoelastic Effects of Blood Flow Under Various Flow Rates,” *Applied Mathematics and Computation*, 2011. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009630031000799X>.
- [16] N. Arada, M. Pires a A. Sequeira, “Viscosity effects on flows of generalized Newtonian fluids through curved pipes,” *Computers & Mathematics with Applications*, roč. 53, 2007. DOI: [10.1016/j.camwa.2006.02.036](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.02.036).
- [17] *ANSYS Fluent UDF Manual, Release 15*. 2013.
- [18] M. de’Michieli Vitturi, “Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates,” URL: https://demichie.github.io/NS_cylindrical/.

A Programové nadstavby v ANSYS Fluent

V odstavci 3.2.2 byl nastíněn princip implementace programových nadstavb do výpočtového systému ANSYS Fluent pomocí tzv. *user-defined functions* (UDFs) a *user-defined scalar* (UDS). V této příloze budou blíže představeny příkazy používané při tvorbě těchto nadstavb.

Tyto funkce se skládají z hlavičky ve tvaru `DEFINE_MACRONAME(name, passed-in variables)`, kde volíme předdefinované `MACRONAME` spolu s přidruženými `passed-in variables`, viz [17]. Variabilnost je pouze ve volbě `name`, podle kterého rozeznáváme tyto funkce ve výpočtovém softwaru ANSYS Fluent, a pak sekvenci vnitřních příkazů, které jsou více či méně specifické v závislosti na účelu nadstavby, pro více informací viz [17].

Pro účely této bakalářské práce byly použity tři `MACRONAME`:

- **PROFILE** – slouží pro předepsání komplexnějších Dirichletových okrajových podmínek (např. rychlostních profilů, teplotních závislostí, ...), v této práci je tato funkce použita pro předpis parabolického rychlostního profilu (3.32) na vstupu výpočetní oblasti Ω_I ,
- **PROPERTY** – slouží pro vlastní definici materiálu (př. proměnná hustota, smyková rychlost, tepelná vodivost, ...), v této práci je tato funkce použita pro předpis dynamické viskozity jako funkce smykové rychlosti dle vztahů (3.5)–(3.7),
- **SOURCE** – obecně slouží pro definici zdrojových členů v případě řešených matematických modelů, v této práci je tato funkce použita pro rozšířenou pravou stranu Navierových-Stokesových rovnic (3.30) a implementaci Oldroyd-B modelu (3.31); v obou případech jsou použity příkazy uvedené v tabulce 2, které slouží pro výpočet složek tenzoru rychlosti deformace D_{ij} a disipačního tenzoru T_{ij} , popř. jejich derivací.

Tabulka 2: Přehled vybraných příkazů použitých při implementaci [17].

příkaz	význam
<code>C_DUDX(c, t)</code>	derivace $\frac{dv_1}{dx_1} \equiv \frac{du}{dx}$
<code>C_DVDY(c, t)</code>	derivace $\frac{dv_2}{dx_2} \equiv \frac{dv}{dy}$
<code>C_DWDZ(c, t)</code>	derivace $\frac{dv_3}{dx_3} \equiv \frac{dw}{dz}$
<code>C_UDSI(c, t, i)</code>	složka symetrického disipačního tenzoru
<code>C_UDSI_G(c, t, i) [j]</code>	prostorová derivace složky disipačního tenzoru

B Analytického řešení tvaru rychlostního profilu

Pro verifikaci programových nadstaveb vyvinutých pro potřeby této práce byly v odstavci 4.1 použity dva analyticky stanovené předpisy (4.2)–(4.3) pro rychlostní profily ustáleného proudění nestlačitelné kapaliny v rotačně symetrické trubici. V rámci této přílohy jsou oba tyto předpisy odvozeny.

Model newtonské kapaliny

Uvažujeme ustálené (tj. plně vyvinuté) laminární izotermické proudění nestlačitelné kapaliny v trubici stálého průřezu s nepropustnými a nepoddajnými stěnami, neboli Hagen-Poiseuillovo proudění. Řídící rovnice lze vyvodit z Navierových-Stokesových rovnic pro proudění nestlačitelné kapaliny vyjádřených v cylindrických souřadnicích r, φ, z , viz např. [18], platných pro model newtonské kapaliny bez uvažování vnějších objemových sil

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \\ = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \\ = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

kde v_r, v_φ, v_z jsou složky vektoru rychlosti příslušné cylindrickým souřadnicím r, φ, z .

Za předpokladu stacionárního ($\frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$), plně vyvinutého ($\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$) a osově symetrického proudění je složka rychlosti ve směru osy rotační symetrie z závislá pouze na proměnné r , tzn. že platí

$$v_z = v_z(r), \quad v_r = v_\varphi = 0. \quad (\text{B.4})$$

Po zohlednění (B.4) je rovnice kontinuity (1.3) splněna automaticky a rovnice (B.1)–(B.3) se zjednoduávají na tvar

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right). \quad (\text{B.7})$$

Při uvažování trubice o vnitřním poloměru R musí být splněny následující okrajové podmínky:

$$v_z(R) = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r}(r = 0) = 0. \quad (\text{B.8})$$

Z rovnice (B.5) a (B.6) plyne, že tlak p je konstantní ve směru souřadnic r, φ , tzn. že není funkcí těchto souřadnic. Pro tlak p potom platí

$$p = p(z). \quad (\text{B.9})$$

Zderivujeme-li rovnici (B.7) parciálně podle z , dostaneme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = A_1 = \text{konst.}, \quad (\text{B.10})$$

$$p(z) = A_1 z + A_2. \quad (\text{B.11})$$

Předpokládáme, že $p(0) = p_1$ je hodnota tlaku na vstupu do trubice délky L , $p(L) = p_2$ je hodnota tlaku na výstupu z trubice a platí $p_2 < p_1$. Dosazením těchto okrajových podmínek do (B.11) zjistíme, že se tlak po délce trubice mění lineárně, tj.

$$p(z) = \frac{p_2 - p_1}{L} z + p_1 \quad \text{a} \quad \frac{dp}{dz} < 0. \quad (\text{B.12})$$

Rovnici (B.7) i s ohledem na (B.9) můžeme upravit na tvar

$$\frac{dp}{dz} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\eta r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}), \quad (\text{B.13})$$

kde smykové napětí τ_{rz} pro osově symetrické proudění lze vyjádřit jako [18]

$$\tau_{rz} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (\text{B.14})$$

Integrací rovnice (B.13) podle proměnné r dostaneme

$$\eta r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{dp}{dz} \frac{r^2}{2} + C,$$

odkud po jednoduché úpravě plyne

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dz} r + C_1. \quad (\text{B.15})$$

Aplikací okrajové podmínky (B.8)₂ můžeme určit integrační konstantu C_1

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}(r = 0) = 0 = C_1. \quad (\text{B.16})$$

Integrací rovnice (B.15) podle proměnné r a s uvědoměním (B.16) získáme

$$v_z(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} r^2 + C_2. \quad (\text{B.17})$$

Aplikací okrajové podmínky (B.8)₁ můžeme nyní určit integrační konstantu C_2 takto

$$v_z(R) = 0 = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} R^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} R^2. \quad (\text{B.18})$$

Po dosazení za integrační konstantu C_2 do vztahu (B.17) získáme výsledný analytický vztah pro složku rychlosti ve směru osy rotační symetrie trubice

$$\boxed{v_z(r) = \frac{1}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dz} \right) R^2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = \frac{1}{4\eta} \left(-\frac{dp}{dz} \right) (R^2 - r^2)}, \quad (\text{B.19})$$

který pro platí ustálené laminární proudění nestlačitelné newtonské kapaliny ve vodorovné osově symetrické trubici stálého průřezu s nepropustnými a nepoddajnými stěnami, přičemž tlakový gradient $\frac{dp}{dz}$ vyplývá ze vztahu (B.12).

Protože při numerické simulaci zadáváme jako okrajovou podmínku na vstupu do trubice rychlostní profil a nikoli tlak, stanovme ještě závislost tlakového gradientu $\frac{dp}{dz}$ na hodnotě objemového průtoku Q [m³/s]. Pro objemový průtok kapaliny plochou S platí

$$Q = \int_{(S)} dQ = \int_{(S)} v_z(r) dS = \int_0^R v_z(r) 2\pi r dr, \quad (\text{B.20})$$

kam dosadíme za $v_z(r)$ vztah (B.19) a zintegrujeme. Tedy

$$Q = \frac{\pi}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{R^4}{2} - \frac{\pi}{2\eta} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{R^4}{4}, \quad (\text{B.21})$$

odkud pro objemový průtok Q v uvažované trubici dostaneme

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(-\frac{dp}{dz} \right), \quad (\text{B.22})$$

což je známá Hagen-Poiseuillova formule. Z (B.22) vyjádříme tlakový gradient $\frac{dp}{dz}$, který dosadíme do rovnice (B.19) a pro složku rychlosti v_z získáme vztah

$$\boxed{v_z(r) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)}. \quad (\text{B.23})$$

Model nenewtonské kapaliny – mocninový model

Analogickým způsobem odvodíme analytický předpis pro složku rychlosti ve směru osy rotační symetrie trubice pro proudění nestlačitelné nenewtonské (resp. zobecněné newtonské) kapaliny, která se řídí mocninovým zákonem viskozity (3.5). Pro tento případ lze smykové napětí τ_{rz} pro osově symetrické proudění vyjádřit jako

$$\tau_{rz} = \left(K \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \right) \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (\text{B.24})$$

kde pro zdánlivou dynamickou viskozitu η_a nenewtonské kapaliny platí

$$\eta_a = K \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1}, \quad (\text{B.25})$$

přičemž zavedená absolutní hodnota ve vztahu (B.25) zaručuje, aby zdánlivá dynamická viskozita η_a kapaliny byla vždy kladná. Vztah (B.24) nyní dosadíme do vztahu (B.13)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(Kr \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \right) \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] = r \frac{dp}{dz}. \quad (\text{B.26})$$

Po integraci vztahu (B.26) podle proměnné r a jednoduché úpravě dostaneme

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{2K} \frac{dp}{dz} + D_1. \quad (\text{B.27})$$

Aplikací okrajové podmínky (B.8)₂ stanovíme integrační konstantu D_1

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}(r=0) = 0 = D_1. \quad (\text{B.28})$$

Nyní zavedeme znaménko derivace $\frac{\partial v_z}{\partial r}$ jako

$$\text{sgn} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\frac{\partial v_z}{\partial r}}{\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \frac{\partial v_z}{\partial r} > 0 \\ 0 & \text{pro } \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \\ -1 & \text{pro } \frac{\partial v_z}{\partial r} < 0 \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

a dosadíme jej do rovnice (B.27) s vědomím (B.28). Dostaneme

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{n-1} \text{sgn} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| = \frac{r}{2K} \frac{dp}{dz}, \quad (\text{B.30})$$

odkud zřejmě plyne

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| \text{sgn} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \left(\frac{1}{2K} \frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{B.31})$$

a protože hodnota derivace $\frac{dv_z}{dr}$ je v uvažované trubici **záporná**, lze absolutní hodnotu na levé straně rovnice (B.31) odstranit (pro $\frac{\partial v_z}{\partial r} < 0$ je $\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| = -\frac{\partial v_z}{\partial r}$) a s využitím znaménka (B.29) platí

$$-\frac{\partial v_z}{\partial r} (-1) \equiv \frac{\partial v_z}{\partial r} = \left(\frac{1}{2K} \frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{B.32})$$

Integrací rovnice (B.32) podle proměnné r získáme

$$v_z(r) = \left(\frac{1}{2K} \frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{r^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + D_2. \quad (\text{B.33})$$

Aplikací okrajové podmínky (B.8)₁ lze určit integrační konstantu D_2

$$\begin{aligned} v_z(R) = 0 &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2K} \frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}} + D_2 \\ \Rightarrow D_2 &= -\frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2K} \frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}} R^{\frac{n+1}{n}}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Po dosazení za D_2 do vztahu (B.33) získáme výsledný analytický předpis pro složku rychlosti ve směru osy rotační symetrie trubice

$$v_z(r) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{R^{n+1}}{2K} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad (\text{B.35})$$

$$v_z(r) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2K} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \left(R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad (\text{B.36})$$

který platí pro výše zmíněné předpoklady a pro tlakový gradient $\frac{dp}{dz}$ daný vztahem (B.12).

Tak jako v případě simulace proudění newtonské kapaliny, i zde zadáváme rychlostní profil na vstupu trubice a nikoliv tlak. Pro odvození příslušného předpisu vyjdeme ze vztahu (B.20), kam dosadíme za $v_z(r)$ vztah (B.36) a zintegrujeme

$$Q = \frac{2\pi n}{n+1} \left(\frac{1}{2K} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \int_0^R r \left(R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right) dr \quad (\text{B.37})$$

a po několika úpravách dojdeme ke vztahu

$$Q = \left(\frac{R^{3n+1}}{2K} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{n}} \frac{3\pi n^2 + \pi n - 2\pi n^2}{(n+1)(3n+1)}. \quad (\text{B.38})$$

Výsledný vztah pro objemový průtok Q nenewtonské kapaliny v uvažované trubici je

$$Q = \frac{\pi n}{3n+1} \left(\frac{R^{3n+1}}{2K} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{B.39})$$

odkud lze vyjádřit tlakový gradient $\frac{dp}{dz}$ ve tvaru

$$\left(-\frac{dp}{dz} \right) = \frac{2K}{R^{3n+1}} \left(\frac{3n+1}{\pi n} Q \right)^n. \quad (\text{B.40})$$

Po dosazení (B.40) do (B.36) a několika úpravách získáme pro složku rychlosti $v_z(r)$ vztah

$$v_z(r) = \frac{3n+1}{\pi(n+1)} \frac{Q}{R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right). \quad (\text{B.41})$$