FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Projektový přístup při výuce matematiky na střední škole

Diplomová práce

Plzeň, 2023

Alexandra Marešová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma *Projektový přístup při výuce matematiky na střední škole* vypracovala samostatně a s použitím uvedené literatury.

V Plzni dne .... Podpis ....

Abstrakt

Tato diplomová práce ukazuje možnou realizaci projektové výuky v rámci hodin matematiky na střední škole. Pomocí projektů se snaží žákům přiblížit využití matematického aparátu v reálném světě. V práci jsou dva kompletně připravené projekty a dalších několik rozpracovaných. Ty, které prošly pilotní realizací, jsou opatřeny didaktickými materiály pro úspěšnou přípravu před začátkem projektu a doplněny konkrétními výstupy žáků. Práce se rovněž zabývá mezipředmětovou spoluprací a v rámci projektových témat ukazuje, že propojení matematiky s dalšími předměty může přinést překvapivé výsledky. Na konci práce jsou formulované možné úpravy a návrhy pro další rozšíření nabízených projektů, případně doporučení pro jejich realizaci na různých typech středních škol.

Klíčová slova: projektová výuka, finanční matematika, grafy funkcí, GeoGebra, statistika, manipulace s daty

Abstract

This thesis presents the implementation of project-based learning within mathematics lessons at a secondary school. Through projects, it aims to familiarize students with the application of mathematical concepts in the real world. The thesis includes two fully prepared projects and several others in progress. The projects that underwent pilot implementation are accompanied by didactic materials for successful project preparation and supplemented with specific student outcomes. The thesis also explores interdisciplinary collaboration and demonstrates that integrating mathematics with humanities subjects can yield surprising results. At the end of the thesis, possible modifications and suggestions for further expanding the offered projects are formulated, along with recommendations for their implementation in different types of secondary schools.

Key words: evidence-based-teaching, financial mathematics, functions and graphs, GeoGebra, statistics, data manipulation

Poděkování

V první řadě děkuji RNDr. Světlaně Tomiczkové, Ph.D. za laskavé a podporující vedení po celou dobu vzniku mé práce. Na druhém místě si poděkování zaslouží moji žáci, kteří se zodpovědně zapojili do testování projektů. Největší vděčnost však patří mému manželovi a synům za obrovskou podporu, kterou mi dávali najevo celou dobu mého studia.

Obsah

Použité zkratky

RVP SOV	Rámcový vzdělávací program pro střední odborné vzdělávání
RVP G	Rámcový vzdělávací program pro gymnázia
ŠVP	Školní vzdělávací program
GFK	Gymnázium Františka Křižíka
ČSÚ	Český statistický úřad
SOČ	Středoškolská odborná činnost

Úvod

Matematika je obor, který si dokázal najít své místo snad ve všech odvětvích lidské činnosti. Přesto se opakovaně setkáváme s názorem, že se jedná o příliš „těžký předmět“, který není spojený s reálným světem. Nespokojenost lze vnímat i mezi žáky středních škol, kde bývá spojena s otázkou „*K čemu mi to bude?*“. Těžko odpovědět jednoznačně a snadno, nicméně analogií mezi matematikou a reálným světem je opravdu nespočet. Všechny úvahy spojené s názory společnosti o matematice mě přivedly až ke zkoumání způsobů výuky matematiky na středních školách. A nakonec k myšlence vytvořit pro žáky střední školy aktivity, které by jim pomohly propojit teorii s reálným světem.

Práce se věnuje projektové výuce matematiky na střední škole. První část čtenáře krátce seznámí s pojmem projektového vyučování a jeho specifiky. Dále se zde věnuji porovnání Rámcových vzdělávacích programů pro gymnázia a střední odborné vzdělávání ve vazbě na vzdělávací obsah spojený s matematikou.

Další stránky práce už jsou věnovány konkrétním projektům zaměřeným na různé tématické celky vyučované v jednotlivých ročnících gymnázia. Jedná se o témata finanční matematiky, funkcí a práce s grafem, geometrie v prostoru a statistiky. Cílem práce bylo zpracovat ucelený koncept, který by umožnil žákům matematiku „zažít“ , ne se ji pouze učit. Zároveň bylo mým úkolem alespoň jeden z navržených projektů otestovat, zhodnotit a formulovat doporučení pro další ročníky.

Celou prací se vine myšlenka na změnu a moje snaha „dělat věci jinak“. Většinu navržených projektů se budu snažit propojovat s dalšími předměty, k čemuž mě přivedla snaha motivovat, nabídnout něco nového a společně s tím rozvíjet klíčové kompetence žáků. Nicméně stále se snažím klást důraz na matematickou správnost a korektní použití matematického aparátu. S tím souvisí i poslední úkol, který jsem zadala sama sobě - během práce najít odpovědi alespoň na některé otázky žáků.

Kapitola 1

Projektová výuka a kurikulární dokumenty

Učitel k výkonu svého povolání potřebuje vhodný prostor, žáky, dostatečné znalosti ve svém oboru a metody. Právě výběr vhodné vyučovací metody může značně ovlivnit míru toho, co se žáci skutečně naučí. Znalost množství různorodých metod je rovněž dobrým předpokladem k tomu, aby učitel mohl vnímat aktuální dění ve třídě a dokázal na něj efektivně reagovat ([1], s. 144).

Projektová výuka se dostává po roce 1990 do českého školství a je vnímána jako inovativní metoda vyučování. Společně se změnami ve společnosti se ovšem mění i pohled na žáka. Do popředí se dostává komplexní rozvoj osobnosti dítěte (resp. dospívajícího) a upozaďuje se množství předávaných faktů. Společně s touto změnou dochází i k transformaci v pojetí role učitele, který se stává průvodcem a partnerem žáka na jeho cestě ke vzdělání. Pokud přijímáme uvedené změny, potom je projektová výuka jednou z možností, jak podpořit rozvoj klíčových kompetencí žáků. Důležitým předpokladem k zařazení projektové výuky je existence bezpečného prostředí ve školní třídě, které respektuje individualitu jednotlivých žáků a zároveň podporuje práci ve skupinách. V následujících odstavcích se budu odkazovat na publikaci Jany Kratochvílové *Teorie a praxe projektové výuky* ([2]), která se sice soustředí na primární vzdělávání, nicméně poznatky zde uvedené lze aplikovat i v kontextu prostředí středních škol.

Pokud bychom měli vymezit pojem „projekt" ve vazbě na výuku, můžeme se setkat s několika definicemi. Z historického hlediska je podle S. Velínského ([2], s. 34) projektem „*určitě a jasně navržený úkol, který můžeme předložit žáku tak, aby se mu zdál životně důležitý tím, že se blíží skutečné činnosti lidí v životě*". Někteří autoři vymezují projekt s důrazem na „podnik žáků", lze jej tedy chápat tak, že žák je tím, kdo řídí výběr tématu, průběh, zpracování i vlastní výstup. V této práci je projekt chápán v souladu s definicí J. Maňáka a V. Švece ([2], s. 36), kteří vnímají projekt následovně: „*Projekt je komplexní úkol (problém), spjatý s životní realitou, s nímž se žák identifikuje a přebírá za něj odpovědnost, aby svou teoretickou a praktickou činností dosáhl výsledného žádoucího produktu (výstupu) projektu, pro jehož obhajobu a hodnocení má argumenty, které vycházejí z nově získané zkušenosti.*"

Projektová výuka bývá někdy považována za metodu, někteří autoři ji řadí mezi alternativní výukové formy. A další ji charakterizují vymezením jejích typických znaků, jejichž analýzou se zabývala H. Grecmanová ([2], s. 40), která vnímá pojektové vyučování jako „*organizační formu, která je ve srovnání s frontálním vyučováním i jinými formami výuky významně komplexnější, protože projekty jsou složeny z četných rozmanitých fází, využívají všechny sociální formy a metody učení a zaměřují se na vysoce žádané oblasti učebních cílů*“. Právě zmíněné fáze projektu jsou nedílnou součástí k úspěšné realizaci. Představíme je ve zkrácené podobě oproti publikaci J. Kratochvílové ([2], s. 41-42).

1. **Plánování projektu**
   i) definování úkolu, problému
   ii) volba výstupu projektu
   iii) časové rozvržení projektu
   iv) určení prostředí k realizaci projektu
   v) vymezení účastníků projektu
   vi) promyšlení organizace projektu
   vii) zajištění podmínek pro realizaci
   viii) promyšlení hodnocení
2. **Realizace projektu**
3. **Prezentace výstupu**
4. **Hodnocení projektu**

G. Petty ([1], s. 296) se soustředí ještě na jeden krok projektového vyučování a tím je seznámení žáků se samostatnou prací (projektem). Zmiňuje, že „*podrobný obsah a kritéria hodnocení samostatné práce (projektu) musí žáci obržet písemně*“, a doplňuje body, které se mají v písemném zadání objevit:

- uvedení do situace,
- jasně stanovený cíl a smysl práce,
- přesně zadané úkoly,
- jasné stanovení, co bude hodnoceno (kritéria hodnocení),
- rozličné poznámky (konzultace, literatura, apod.),
- datum zadání práce a termín odevzdání.

Zároveň shrnuje, že při prvním zadání práce se zpravidla objevují nedostatky. Upozorňuje především na špatné pochopení práce ze strany žáků. Je důležité, aby při realizaci ve škole byl vyučující žákům k dispozici a sledoval, jakými způsoby se pouští do řešení zadaného problému. V případě nedorozumění tak může včas zasáhnout, vysvětlit nebo jinak formulovat požadavky na výstupy. Zamezí tak situaci, kdy žáci odevzdají špatně zpracované práce, na kterých strávili množství času, ale které není možné kladně hodnotit.

1.1 Skupinová práce

Práce na projektu se v obecné rovině odehrává dvěma způsoby. Buď je zaměřena na jednotlivce a jeho samostatné výstupy, nebo naopak vyžadujeme práci ve skupině a očekáváme skupinovou spolupráci. Druhému případu se nyní budeme věnovat podrobněji.

Práce ve skupině úzce souvisí s tzv. *kooperativním učením*, jehož podstatu formuluje H. Kasíková ([3], s. 62), podle níž „*jde o systém založený na principech kooperace při učení v malých skupiných. Kooperace sama, i když je cenným cílem tohoto systému, však není cílem prioritním - tím je rozvoj intelektuální a osobnostně sociální.*“ Efektivní a přínosné kooperativní učení může nastat při splnění základních podmínek, z čehož vzešlo pět principů, které jsou základem pro uvedení projektového vyučování do praxe ([3], s. 84 - 86):

1. Pozitivní vzájemná závislost, tedy vnímání odpovědnosti každého člena skupiny za dosažení společného cíle.
2. Osobní odpovědnost, individuální skládání účtů, které je spojené s vnímáním společného učení jako prostředku pro individuální rozvoj.
3. Interakce tváří v tvář, tedy skupinová komunikace podporující učení.
4. Formování a využití interpersonálních avskupinových dovedností upozorňuje na potřebu, aby žáci byli vybaveni dovednostmi, které umožní efektivní spolupráci celé skupiny.
5. Reflexe skupinové činnosti je spojena s hodnocením průběhu práce ve skupině jejími členy.

Skupinová práce jednoznačně přispívá k rozvoji klíčových kompetencí, především kompetence sociální, kompetence komunikativní a personální a kompetence k řešení problémů. Pozitivní přínosy práce ve skupině jsem se pokusila shrnout:

- ostýchaví žáci se spíše projeví v menší skupině než před celou třídou,
- „více hlav víc ví“, tzn. na určitý problém dokáže skupina nahlédnout z více stran a úspěšně navrhnout nebo najít řešení,
- ve skupině se mohou profilovat silné vlastnosti žáků (role vůdce),
- projevuje se důležitost každého na dosažení společného cíle,
- žáci se učí komunikovat, vyslovovat své vlastní názory i přijímat (a případně kriticky hodnotit) názory ostatních,
- žáci si navzájem můžou pomoci nebo se kontrolovat, tzn. probíhá vrstevnické učení,
- v rámci skupiny se můžou naučit rozdělit si práci tak, aby dosáhli větší efektivity.

Samozřejmě můžeme vnímat i negativní aspekt skupinové práce, kdy se neaktivní žák snadno „schová“ za práci ostatních. Tomu se bohužel nedokážeme vyhnout a je potřeba si uvědomit, že pro zbytek skupiny stále převládají výše zmíněné pozitivní dopady skupinové práce.

Dělení žáků do skupin je jedna z činností, kterou je potřeba při zadávání skupinové práce dobře promyslet. Ve vazbě na cíle práce a na to, jaké kompetence chceme u žáků rozvíjet, můžeme volit různé způsoby vytváření skupin. Jeden pohled na dělení nabízí G. Petty ([1], s.239-240):

- náhodně,
- kamarádství,
- výsledky a zkušenosti žáků,
- záměrné promíchání,
- podle zasedacího pořádku.

Pro náhodné dělení existuje mnoho způsobů, jak skupiny sestavit. Můžeme využít metodu špachtliček se jmény žáků, které náhodně poskládáme dovskupin s požadovaným počtem členů. Můžeme nechat žáky losovat čísla skupin, případně k tomuto účelu využít technologie a skupiny rozdělit například pomocí „kola štěstí" (možnost vytvoření na stránkách https://wordwall.net/cs/about/template/random-wheel). Další možností je podle počtu vytvářených skupin vybrat „kapitány", kteří si pak na základě svého rozhodnutí zvolí členy týmu. Každá z uvedených možností má své klady i zápory, je nutné pracovat s celkovým klimatem třídy a zvolit takový přístup, který umožní žákům využít veškerý potenciál efektivní práce v týmu.

G. Petty ([1], s.296) si pokládá ještě jednu otázku související s prací skupiny. „*Jestliže budou žáci provádět samostatnou práci ve skupinách, budou všichni členové skupiny dostávat stejnou známku?*" Najít správnou odpověď není vůbec jednoduché a sama jsem tuto otázku řešila u prvního projektu (viz Kapitola 2). Věřím, že se mi podařilo hodnotit individuální výkon každého žáka ve skupině, přestože jsem původně měla v úmyslu ohodnotit celou skupinu podle nejslabšího člena týmu. Ať už přistoupíme k této problematice jakkoliv, žákům musí být kritéria hodnocení předem známa.

1.2 Kurikulární dokumenty

V této práci se budu věnovat matematice v rozsahu střední škole. Ke zpracování této kapitoly jsem využila především [4] a [5].

Principy kurikulárního vzdělávání jsou formulovány v tzv. *Bílé knize* (Národním programu rozvoje vzdělávání v ČR) a legislativně zakotvené v zákoně č. 561/2004 Sb. o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání. Pojem *kurikulum* vymezuje například J. Průcha ([6], s. 235 - 268) jako „ *obsah vzdělávání, který zahrnuje veškeré zkušenosti, které žáci získávají ve škole a v činnostech ke škole se vztahujících, zejména jejich plánování, zprostředkovávání a hodnocení*".

Tvorba kurikulárních dokumentů probíhá jednak na úrovni státní a jednak na úrovni školní. Pro potřeby této práce jsou na státní úrovni stěžejní Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G) a Rámcový vzdělávací program (programy) pro střední odborné vzdělávání (RVP SOV). Podrobnému dělení se zde nebudeme věnovat, pouze porovnáme RVP G a RVP SOV, kde se soustředíme především na definovaný povinný obsah vzdělávání v oblasti matematiky. Na úrovni školních dokumentů je zásadní Školní vzdělávací program (ŠVP), který musí být v souladu s příslušným RVP, nicméně pro potřeby konkrétní školy definuje uspořádání vzdělávacího obsahu do předmětů nebo jiných celků učiva a zároveň vymezuje časový harmonogram vzdělávání.

K porovnání vzdělávacího obsahu jsem z oborů SOV volila obory maturitní a technicky zaměřené, kde se předpokládá výuka matematiky, konkrétně jsem se věnovala prostudování následujících: 23 –41 –M/01 Strojírenství, 23 –62 –L/01 Optik, 26 –41 –M/01 Elektrotechnika, 36 –45 –M/01 Technická zařízení budov, 36 –47 –M/01 Stavebnictví a 63 –41 –M/02 Obchodní akademie. Ve všech zmíněných oborech je matematika zařazena do oblasti *Matematické vzdělávání* a učivo na úrovni RVP SOV je shodně členěno do kategorií (můžeme si dovolit odkázat na jeden konkrétní RVP, vybrala jsem z [4], RVP 23 –41 –M/01 Strojírenství, s. 39):

1. Operace s čísly
2. Číselné a algebraické výrazy
3. Funkce
4. Řešení rovnic a nerovnic
5. Goniometrie a trigonometrie
6. Planimetrie
7. Stereometrie
8. Analytická geometrie
9. Posloupnosti a finanční matematika
10. Kombinatorika
11. Pravděpodobnost v praktických úlohách
12. Statistika v praktických úlohách

RVP G zařazuje matematiku do vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* a učivo je rozděleno do následujících kategorií ([5], s. 23):

1. Základní poznatky z matematiky
2. Množiny
3. Výroková logika
4. Číselné obory
5. Mocniny
6. Výrazy s proměnnými
7. Rovnice a nerovnice
8. Kombinatorika
9. Pravděpodobnost
10. Práce s daty
11. Obecné poznatky o funkcích
12. Funkce
13. Posloupnost
14. Geometrie v rovině
15. Geometrie v prostoru
16. Trigonometrie
17. Analytická geometrie v rovině

V obecné obsahové rovině se RVP G a RVP SOV neliší a v matematice můžeme očekávat velmi podobnou úroveň výstupů u absolventů obou typů škol. V dalším textu se proto budu odkazovat na zařazení témat v rámci RVP G. Na úrovni ŠVP však pozorujeme rozdíly, především v časovém uspořádání vzdělávacího obsahu do jednotlivých ročníků. Základním ŠVP, ze kterého budu v této práci vycházet, je ŠVP GFK (viz [7]). Důvodem je pilotní testování navrhovaných projektů, které jsou stěžejním prvkem této práce, a které proběhlo právě na tomto gymnáziu. Tématicky se projekty věnují finanční matematice, funkcím, statistice a geometrii v prostoru. Při porovnání ŠVP GFK a dalších škol jsem se soustředila na zařazení uvedených témat do jednotlivých ročníků. V porovnání je zahrnuto gymnázium a konkrétní školy oborově odpovídající výše zmíněnému přehledu oborů SOV, které jsou lokalizované v Plzni nebo okolí. Výsledky srovnání ukazuje tabulka 1.1.

	Finanční matematika	Funkce	Statistika a práce s daty	Geometrie v prostoru
GFK	1.	2.	4.	3.
POA[1]	3.	2.	2.[2]	3.
SPŠ Stavební[3]	3.	2.	4.	2.
SPŠ, Strojírenství [4]	3.	2.	4.	2.
Gymnázium Mikulášské[5]	4.	1.	3.	2.

Tabulka 1.1: Tabulka rozdělení témat do ročníků podle konkrétních ŠVP.

Z tabulky si můžeme všimnout, že na úrovni gymnázií se uspořádání vzdělávacího obsahu v ŠVP značně liší. Naopak u SPŠ strojní a stavební nacházíme shodu.

V následujících kapitolách představím dva projekty, které jsem měla možnost vyzkoušet, a návrhy dalších, které jsou připravené k dopracování a využití při výuce. Vzhledem k tomu, že projekty byly realizované na GFK, je přizpůsobené i hodnocení. GFK hodnotí své žáky procenty, přičemž výsledky mohou být převedeny na klasifikační stupně pomocí přepočtu v tabulce 1.2 (viz [12]).

Procentuální rozsah	**Klasifikační stupeň**
85 % - 100 %	výborný
70 % - 84 %	chvalitebný
55 % - 69 %	dobrý
40 % - 54 %	dostatečný
méně než 40 %	nedostatečný

Tabulka 1.2: Převod procent na klasifikační stupně na GFK.

[1] Plzeňská obchodní akademie s.r.o., [8]
[2] V rámci samostatného předmětu Integrovaný ekonomický předmět (Statistika)
[3] [9]
[4] [10]
[5] [11]

Kapitola 2

Finanční matematika

Finanční matematika je pro žáky střední školy lákavým tématem. Mají pocit, že se v abstraktním světě matematiky dotknou něčeho konkrétního, co v budoucnosti využijí. To mě motivovalo k vytvoření projektu, ve kterém dostanou příležitost setkat se s poměrně konrétními situacemi. Aby projekt úspěšně zvládli, je nutné v první řadě ověřit, co už ze světa financí znají. Vyjasnit nesprávně pochopené pojmy a prohloubit jejich znalosti a dovednosti především v oblasti půjčování a ukládání finančních prostředků.

2.1 Výuka na středních školách

Téma finanční matematiky je v rámci RVP G zařazeno do vzdělávací oblasti *Člověk a svět práce.* Až na úrovni ŠVP je stanoveno, „ “v jakém ročníku (ročnících) a jakým způsobem se vzdělávací obsah realizuje([5], s. 83). Zároveň se s finanční matematikou setkáváme ve vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace*, v rámci vzdělávacího obsahu *Závislosti a funkční vztahy*, kde mezi očekávanými výstupy najdeme, že žák „interpretuje z funkčního hlediska složené úrokování, aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost ve finanční matematice“([5], s. 24). V této práci se budeme věnovat zařazení právě v matematice.

ŠVP GFK pro vyšší gymnázium zařazuje finanční matematiku jako součást geometrických posloupností do 4. ročníku ([7], s. 110), kdy se jedná především o ukázku jejich aplikace. Ze dvou důvodů je však finanční matematika v tematickém plánu zařazena již do 1. ročníku a to ještě před téma *Základní poznatky z matematiky.* Prvním z důvodů je „nedostatek“ času na projekt v polovině maturitního ročníku, kdy se žáci soustředí především na přípravu k maturitní zkoušce. Druhým z důvodů je významnost tématu, se kterým žáci s jistotou přijdou do kontaktu ještě před ukončením střední školy. Domnívám se, že v tomto případě nevadí, když se s matematickým pozadím geometrických posloupností seznámí až později.

Jak bylo zmíněno, příklady z finanční matematiky najdeme jako ukázku užití geometrických posloupností například v monotematických učebnicích matematiky pro gymnázia nakladatelství Prometheus ([13]). Podrobné zpracování tématu pro středoškolskou úroveň zprostředkovává učebnice *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy* ([14]). Pro účely gymnázia je výše zmíněná publikace velmi rozsáhlá a je nutné pojmy i příklady vhodně vybírat. V rámci této práce jsem za podstatné považovala pojmy, které žáci využijí nebo je budou potřebovat při zpracování navrženého projektu. Dalším zdrojem pro teoretický úvod a definování obsahu učiva byla stránka *www.realisticky.cz* ([15]).

2.2 Obsah učiva

Předpokládá se, že žáci ze základní školy zvládají elementární práci s procenty. Ověření míry znalostí je možné na jednoduchých příkladech ([15]).

2.2.1 Opakování a upevnění prekonceptů

Příklad 2.1. *Zboží, které chce majitel internetového obchodu prodat, má cenu 7 850 Kč bez DPH. Jakou konečnou cenu musí uvést na svém e-shopu (počítáme s 21% sazbou DPH)?*

Řešení. Část třídy zvládne odpovědět okamžitě. Než se pustíme do samotného výpočtu, je vhodné si ujasnit, co znamená zkratka DPH (daň z přidané hodnoty), se kterou se již všichni jistě setkali. Je vhodné rozvést diskuzi, o jakou daň se jedná a jaké sazby DPH jsou aktuálně v platnosti, případně na jaké zboží nebo služby jsou sazby vztaženy.

Žáky k řešení můžeme dovést využitím trojčlenky s následujícím zápisem

$$\begin{array}{rc} 100\,\% \ldots\ldots & 7\,850 \text{ Kč} \\ 121\,\% \ldots\ldots & x \text{ Kč} \\ \hline \end{array}$$

odtud

$$\frac{x}{7\,850} = \frac{121}{100},$$

a tedy

$$x = 1,21 \cdot 7\,850\,\text{Kč}. \tag{2.1}$$

Závěrem můžeme zmínit, že podobně bychom postupovali, kdybychom chtěli získat informaci o ceně produktu, který by byl např. o 20 % zlevněný, tzn. původní částku bychom v takovém případě násobili desetinným číslem 0, 8. □

Příklad 2.2. *Po zlevnění o 12 % stojí kilogram banánů 24,9 Kč. Jaká byla původní cena?*

Řešení. Postupujeme jako v předchozím příkladu. Můžeme opět využít trojčlenku ve tvaru

$$\begin{array}{rc} 100\,\% \ldots\ldots & x\,\text{Kč} \\ 88\,\% \ldots\ldots & 24,9\,\text{Kč} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{x}{24,9} = \frac{100}{88},$$

a tedy

$$x = \frac{100 \cdot 24,9}{88} = 28,30\,\text{Kč}. \tag{2.2}$$

□

Příklad 2.3. *Na zemi žije v současnosti 7,401 mld obyvatel. Jejich počet se má v následujícím roce zvýšit o 1,1 %. Kolik obyvatel bude na zemi za rok? O kolik se jejich počet zvýší?*

Řešení. Řešení tohoto příkladu nechávám na žácích a společně pouze diskutujeme správné úvahy jejich postupu.

$$7,401 \cdot 1,011 = 7,482\,\text{mld.}$$

$$7,482 - 7,401 = 0,081\,\text{mld} = 81\,\text{mil.}$$

□

V rámci výše uvedených příkladů jsem si dovolila netrvat na slovní odpovědi, protože cílem těchto příkladů bylo rychlé připomenutí práce s procenty.

2.2.2 Pojmy finanční matematiky

Než přejdeme k výpočtům spojeným s půjčováním financí, spořením, jednoduchým a složeným úročením, považuji za nezbytné, aby se žáci orientovali v základních termínech finanční matematiky. S ohledem na to, že při práci na projektu budou žáci pracovat ve světě reálných finančních produktů, měli by mít dostatek znalostí, aby se v pojmech neztratili. Některé pojmy jsou vysvětleny vlastními slovy, pokud jsem využila přímo definici, je uveden konkrétní zdroj.

- **Dlužník** je osoba, která si půjčila peníze (a nyní někomu peníze dluží).
- **Věřitel** je osoba, která peníze zapůjčila. Věřitelem může být buď osoba, nebo instituce (banka).
- **Kapitál** je vstupní suma peněz. Je to buď částka, kterou si půjčujeme, nebo naopak částka, kterou ukládáme na spoření.
- **Úrok** je peněžní odměna za vypůjčení nebo naopak uložení finančních prostředků. V případě půjčky se jedná o částku, kterou zaplatíme navíc. V případě spoření je to částka, kterou banka zaplatí navíc nám za to, že jsme si u ní peníze uložili. Odvárko definuje úrok jako „částku, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz“([14], str. 8). Banku můžeme tedy v různých případech vnímat různě - jednou jako věřitele (pokud si půjčíme peníze), podruhé jako dlužníka (pokud do ní peníze uložíme).
- **Roční úroková míra** je procenty vyjádřený poměr úroku a kapitálu. V případě půjčky to znamená, kolik procent z půjčené částky zaplatíme za rok navíc. Pro spoření analogicky, kolik procent z vložené částky za rok navíc získáme. Označení roční úrokové míry zkratkou p.a. pochází z latinského *per annum*, což znamená *za jeden rok.*
- **Zástava** je majetek dlužníka, na který má věřitel nárok v případě, že dlužník nebude schopen svůj dluh splatit.
- **Ručitel** je osoba, která se zavázala uhradit dluh za dlužníka v okamžiku, kdy dlužník není schopen splácet.

- **Hypotéka** je finanční půjčka na pořízení nemovitosti, kdy dlužník touto zakoupenou nemovitostí ručí bance. Jinými slovy v případě, že dlužník není schopen splácet, má banka právo tento majetek dlužníkovi zabavit.
- **Katastr nemovitostí** je databáze, která obsahuje soupis veškerého nemovitého majetku s uvedením vlastníků. Uchovává rovněž informace o zástavních právech a břemenech. K prodeji nemovitosti fakticky dochází až v okamžiku zápisu do katastru nemovitostí.
- **RPSN** je zkratka pro *reálnou procentní sazbu nákladů*, která obsahuje informaci o všech nákladech spojených s půjčkou. Odpovídá roční úrokové sazbě v okamžiku, kdy si věřitel neúčtuje už žádné další poplatky (za uzavření smlouvy, za vedení účtu, za pojištění apod.).
- **Daň z úroku** je zákonem stanovená daň 15 % z úroku, kterou odvádí banka státu, pokud si v bance uložíte peníze.
- **Renta** je označení pro pravidelný měsíční příjem, který není odměnou za práci nebo prodej. Člověk, který pobírá rentu, je *rentiér*.
- **Inflace** je označení pro znehodnocování měny. Roční míra inflace je udávaná v procentech a vyjadřuje, o kolik procent se změní ceny za rok.
- **Anuita** „je splátka dané výše opakující se v pravidelných časových intervalech po určité období" ([14], str. 119).

V následujících příkladech si mají žáci uvědomit, že je rozdíl, jestli chceme spočítat celkovou částku nebo se ptáme jenom na úroky.

Příklad 2.4. *Paní Kvasničková uložila do banky na jeden rok částku 238 000 Kč. Úroková míra je 2,25 %. Určete*

a) úrok před zdaněním,

b) úrok po zdanění,

c) částku, kterou banka paní Kvasničkové po roce vyplatí.

Řešení.

ad a) Pro úrok platí

$$u_1 = K \cdot i,$$

kde u_1 vyjadřuje úrok před zdaněním, K je kapitál a i je roční úroková míra uvedená desetinným číslem. Po dosazení

$$u_1 = 238\,000 \cdot 0,0225 = 5\,355\,\text{Kč}.$$

ad b) Ze zákona musíme v případě spoření uvažovat i 15% daň z úroku. Výše úroku po zdanění (označeno u) bude

$$u = K \cdot i \cdot 0,85 = 238\,000 \cdot 0,0225 \cdot 0,85 = 4\,552\,\text{Kč}.^{6} \tag{2.3}$$

[6] Zaokrouhleno na celé koruny.

ad c) Pro celkovou částku vyplacenou po jednom roce platí

$$K_1 = K + u = 238\,000 + 4\,552 = 242\,552\,\text{Kč}.$$

□

Příklad 2.5. *Jirka uvažuje o životě rentiéra. Kolik peněz by musel mít uloženo v bance s roční úrokovou mírou 1,2 %, aby za rok získal na úrocích dostatek peněz na zaplacení svých průměrných měsíčních výdajů ve výši 50 000 Kč?*

Řešení. Nejprve vypočteme průměrné náklady za rok, které odpovídají požadované výši úroku

$$u = 12 \cdot 50\,000 = 600\,000.$$

Dále využijeme výše uvedený vztah 2.3.

$$K = \frac{u}{i \cdot 0,85} = \frac{600\,000}{0,012 \cdot 0,85} = 58\,823\,529\,\text{Kč}.$$

□

2.2.3 Jednoduché a složené úročení

Problematiku jednoduchého a složeného úročení jsem se rozhodla ukázat na příkladech, nikoliv jako hotové vzorce. V tomto případě si totiž žáci kdykoliv v budoucnu vzorec odvodí, pokud ovládnou princip.

Příklad 2.6. *Honza uložil na tři roky na spořicí účet do banky 250 000 Kč s roční úrokovou mírou 0,48 %. Banka mu úroky vyplácí každý rok na běžný účet. Jakou částkou bude po třech letech disponovat, pokud nic neutratí?*

Řešení. Většinu žáků napadne, že se jedná o výpočet úroku za rok, jeho vynásobení počtem let a přičtení ke kapitálu. Dostanou tedy

$$u = K \cdot i \cdot 0,85 \cdot 3 = 250\,000 \cdot 0,0048 \cdot 0,85 \cdot 3 = 3\,060\,\text{Kč}.$$

Po přičtení úroku k vloženému kapitálu dostávají výsledek 253 060 Kč. □

Postup v příkladu 2.6 označujeme jako *jednoduché úročení*, kdy úroky jsou pravidelně připisovány na konci každého úrokovacího období. V případě, že z úroků nic neutratíme, můžeme odvodit vzorec pro celkovou částku naspořenou po n letech

$$K_n = K + K \cdot i \cdot 0,85 \cdot n = K(1 + i \cdot 0,85 \cdot n), \tag{2.4}$$

kde K_n představuje výši finančních prostředků po n letech spoření.

Příklad 2.7. *Paní Ulrychová uložila do banky 48 000 Kč. Banka úročí jednou ročně, vždy na konci kalendářního roku. Paní Ulrychová vybírá pravidelně na začátku roku úrok za předchozí rok. Kolik korun vybrala za čtyři roky? Předpokládáme, že úroková míra se neměnila a byla po celou dobu 2,35 %.*

Řešení. Vycházíme ze vztahu 2.4 a po dosazení dostáváme

$$K_4 = 48\,000 \cdot (1 + 0{,}0235 \cdot 0{,}85 \cdot 4) = 51\,835\,\text{Kč}.$$

□

Příklad 2.8. *Uvažujeme stejné zadání jako v příkladu 2.6, nicméně nyní předpokládáme, že úroky nejsou připisovány na běžný účet, ale po každém roce jsou úroky připsány k vložené částce. Jakou částku v takovém případě Honza naspoří za 3 roky?*

Řešení. V rámci řešení budeme postupovat ve třech krocích. Nejprve určíme výši finančních prostředků po prvním roce spoření podle vztahu 2.4, tedy po dosazení dostáváme

$$K_1 = K(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85) = 251\,020\,\text{Kč}$$

kde jsme za počet let n dosadili 1, protože spoření vztažené k danému vstupnímu kapitálu probíhalo jeden rok.

Podobně budeme pokračovat pro další roky, tzn.

$$K_2 = K_1(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85) = 252\,044{,}16\,\text{Kč}, \tag{2.5}$$

$$K_3 = K_2(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85) = 253\,072{,}50\,\text{Kč}. \tag{2.6}$$

Tímto způsobem by Honza získal o $12{,}50$ Kč více. □

Úročení, které je demonstrované v příkladu 2.8, je nazývané *složené úročení* a jedná se o takové, kdy jsou úroky každoročně připisovány ke kapitálu a každý rok se tak úročí vyšší suma peněz. Nicméně postup uvedený v jednotlivých krocích by pro delší časová období byl značně nepraktický, tudíž žáky je vhodné navést k odvození obecného vzorce. Stačí si uvědomit, jaké informace jsou schované v každém kroku výpočtu. Můžeme si dovolit rozklíčovat pouze druhý a třetí krok. Ve vztahu 2.5 dosadíme za K_1 a dostáváme

$$K_2 = K(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85)(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85) = K(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85)^2.$$

Podobně dosadíme ve vztahu 2.6 a dostáváme

$$K_3 = K(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85)^2(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85) = K(1 + 0{,}0048 \cdot 0{,}85)^3.$$

Pokud bychom takto postupovali dál, získáme obecný vzorec pro naspořenou částku po n letech spoření

$$K_n = K(1 + i \cdot 0{,}85)^n. \tag{2.7}$$

Příklad 2.9. *Jakou částku bys měl našetřenou, kdyby tvůj předek uložil 10 Kč s roční úrokovou mírou 2,5 % u příležitosti založení Karlovy Univerzity v Praze?*

Řešení. Řešení je jednoduché, nicméně aby žáci pouze nedosazovali zadané hodnoty do vzorce, musí si v tomto případě správné hodnoty připravit. Buď si pamatují, nebo si najdou rok založení Karlovy Univerzity, tedy rok 1348. Odtud určí délku spoření

$$2020 - 1348 = 672$$

a dále už jen dosadí do vztahu 2.7

$$K_{672} = 10 \cdot (1 + 0,025 \cdot 0,85)^{672} = 13\,700\,951\,\text{Kč}.$$

□

Další částí teoretického úvodu je zmínka o úrokovacím období, tedy době, po které banka připisuje úrok na účet. Ta totiž nemusí vždy být rok, naopak často je to doba kratší - pololetí, měsíc, týden nebo den. Nejčastěji se v našem prostředí k výpočtům využívá tzv. *evropský standard*, který určuje pravidla následovně

- 1 rok má 360 dní, tzn. 1 den odpovídá $\frac{1}{360}$ roku,
- 1 rok má 12 měsíců, tzn. 1 měsíc odpovídá $\frac{1}{12}$ roku,
- 1 měsíc má 30 dní,
- při výpočtu výše úroku se započítává den výběru, nikoliv den uložení peněz.

Způsob počítání s kratším úrokovacím obdobím shrnuje následující příklad.

Příklad 2.10. *Vypočti, jakou částku našetříš za 3 roky, pokud uložíš 150 000 Kč s roční úrokovou mírou 0,75 % a úrokovací období je*

a) rok,

b) půlrok,

c) měsíc,

d) den.

Řešení. Při řešení budeme počítat s počtem úrokovacích období v průběhu jednoho roku. Pro případ a) tedy budeme mít období jedno, pro případ b) budou v průběhu roku období 2, atd. Vztah 2.7 se změní následujícím způsobem

$$K_n = K\left(1 + \frac{i}{p} \cdot 0,85\right)^{n \cdot p}, \tag{2.8}$$

kde p představuje počet úrokovacích období v rámci jednoho roku. Zároveň součin $n \cdot p$ představuje celkový počet úrokovacích období za celou dobu spoření.

ad a) V případě úrokovacího období jeden rok se nemění nic oproti vztahu 2.7, stačí tedy jen dosadit

$$K_3 = 150\,000 \cdot (1 + 0,0075 \cdot 0,85)^3 = 152\,887,08\,\text{Kč}.$$

ad b) V případě půlročního úrokovacího období už dosazujeme do vztahu 2.8

$$K_3 = 150\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0075}{2} \cdot 0,85\right)^{3 \cdot 2} = 152\,891,71\,\text{Kč}.$$

ad c) Pokud je úrokovacím obdobím měsíc, pak jejich počet v průběhu jednoho roku je 12, a tedy

$$K_3 = 150\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0075}{12} \cdot 0,85\right)^{3\cdot 12} = 152\,895,58\,\text{Kč}.$$

ad d) V posledním případě je počet úrokovacích období za jeden rok 360 a dostáváme

$$K_3 = 150\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,0075}{360} \cdot 0,85\right)^{3\cdot 360} = 152\,896,33\,\text{Kč}.$$

□

Poslední důležitou znalostí, kterou žáci budou potřebovat pro zpracování svého projektu, jsou výpočty spojené s pojmem *anuita.*

Příklad 2.11. *Získali jsme od banky účelový spotřebitelský úvěr na nákup sportovních potřeb ve výši 70 000 Kč na 36 měsíců s úrokovou mírou 12,5 %. Úvěr budeme splácet měsíčními anuitami. Úrokovací období banky je 1 měsíc. První úročení a první splátka budou realizovány za 1 měsíc po poskytnutí úvěru. Banka sdělila, že anuitní splátka bude činit 2 342 Kč. Je výše anuity určena správně?*

Řešení. Pokusíme se najít obecný vztah pro určení výše anuitní splátky. Na konci každého úrokovacího období vždy banka nejprve připíše úrok k aktuální výši dluhu. Následně dlužník zaplatí svou splátku.

1. Určíme stav na konci **1. měsíce**.
   - Banka připíše úrok: vycházíme ze vztahu 2.8

     $$U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right),$$

     kde U značí výši poskytnutého úvěru.
   - Dlužník zaplatí první splátku s:

     $$U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s$$

2. Určíme stav na konci **2. měsíce**.
   - Banka připíše úrok:

     $$\left[U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s\right] \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)$$

   - Dlužník zaplatí splátku s:

     $$\left[U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s\right] \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s = U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s$$

3. Určíme stav na konci **3. měsíce**.

- Banka připíše úrok:

$$\left[U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s\right] \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)$$

- Dlužník zaplatí splátku s:

$$\left[U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s\right] \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s$$

Poslední uvedený vztah upravíme roznásobením závorek a následným vytknutím členu $-s$ a dostáváme

$$\begin{aligned} &U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^3 - s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^2 - s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right) - s = \\ &= U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^3 - s \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{12}\right)^2 + \left(1 + \frac{i}{12}\right) + 1\right] \end{aligned}$$

Ze stavu dluhu na konci 3. měsíce dokážeme analogicky určit, jak bude vypadat stav dluhu po n měsících. Zároveň ale víme, že po určitém n měsíců bude úvěr splacen, a tedy zbývající dluh bude roven 0 Kč. Dostáváme

$$\begin{aligned} &U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n - \\ &- s \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{n-2} + \cdots + \left(1 + \frac{i}{12}\right) + 1\right] = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nyní se dostáváme do učiva oktávy (4. ročníku). Pokud uvažujeme o zadání projektu žákům kvinty (1. ročníku), potom je vhodné v tuto chvíli je pouze *seznámit* s termínem *geometrická posloupnost* a vzorec pro součet prvních n členů předložit jako fakt. V případě, že by bylo rozhodnuto o uskutečnění projektu v oktávě (4. ročníku), žáci by mezi zvládnutými prekoncepty měly navíc posloupnosti a řady, kam výše zmíněná problematika patří.

Závorku za členem $-s$ tedy upravíme podle vzorce pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti a dostáváme

$$U \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^n - s \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{12}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{i}{12}\right) - 1} = 0. \tag{2.10}$$

Posledním krokem našich úprav bude vyjádření hledané neznámé s, kterou získáme úpravou rovnice 2.10 do obecného tvaru

$$s = \frac{U \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^n \cdot \frac{i}{k}}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^n - 1}, \tag{2.11}$$

kde U je výše úvěru, s je výše anuitní splátky, n je celkový počet úrokovacích období, k je počet úrokovacích období v jednom roce.

Když se vrátíme k zadání příkladu, naším úkolem bylo ověřit, zda výše měsíční splátky je bankou správně určená. Dosadíme tedy do odvozeného vztahu 2.11 a dostáváme

$$s = \frac{70\,000\left(1+\dfrac{0,125}{12}\right)^{36}\cdot\dfrac{0,125}{12}}{\left(1+\dfrac{0,125}{12}\right)^{36}-1} = 2\,342\,\text{Kč},$$

což odpovídá částce, kterou určila banka. □

2.3 Cíle a příprava projektu

Projekt z finanční matematiky dává žákům možnost rozšířit si své znaloti o finančním trhu včetně získání souvislostí o toku peněz v běžném provozu domácnosti. Jedním z předpokladů je, že mají zvládnutou základní terminologii finanční matematiky. Zároveň se orientují v počítání s procenty, pracují s úrokovou mírou a zvládají vypočítat výši měsíčních splátek na základě stanovené délky splácení (viz část 2.2).

V rámci projektu budou žáci pracovat s příjmy i výdaji a budou se snažit najít optimální řešení pro financování zadaného úkolu. Projekt je navržen pro práci ve skupinách a jeho součástí je závěrečná prezentace, během které zástupci týmů představí svou práci, obhájí navržený způsob financování a zhodnotí své výsledky. Během práce se mají naučit pracovat v týmu a každý svým dílem přispět k dosažení společného cíle. V průběhu zpracování projektu se předpokládá, že se v jednotlivých skupinách najdou žáci s manažerskými předpoklady, kteří práci povedou, budou hlídat termíny a celý projekt zastřešovat. Stejně tak jako si v ideálním případě najdou svoji roli ostatní - matematici se pustí do výpočtů, analytici začnou studovat možnosti na trhu, grafici budou řešit úpravu práce i prezentace. Projekt tak rozvíjí hned několik klíčových kompetencí, konkrétně kompetenci k učení, kompetenci komunikativní, kompetenci sociální a personální a rovněž kompetenci k řešení problémů.

Hlavní cíle projektu

- získat představu o hodnotě peněz,
- uvědomit si souvislosti každodenního života,
- prozkoumat dostupné produkty na finančním trhu,
- určit bezpečnou výši měsíční splátky,
- analyzovat rizika při půjčování finančních prostředků,
- zvládnout práci v týmu, samostatně přispět k dosažení společného cíle.

2.4 Požadavky na žáky

Žáci se rozdělí do skupin tak, aby každá skupina byla složena z minimálně čtyř a maximálně šesti členů. Odhaduje se práce ve 4 až 5 skupinách v závislosti na velikosti třídy. Možnosti rozdělení do skupin jsou popsané v odstavci Dělení žáků do skupin na str. 5. Pro tento projekt je vhodné ve třídách osmiletého gymnázia nechat rozdělení žáků na jejich rozhodnutí. V prvních ročnících středních škol bych se přikláněla k výběru kapitánů, kteří si do svých týmů zvolí členy. Důvodem k tomuto rozhodnutí je povaha projektu, kdy má v každé skupině dojít k dohodě ohledně rozvržení práce mezi všechny členy. Společným výstupem je písemná práce, kterou lze považovat za jakousi zprávu o průběhu projektu, a dále pak již zmíněná prezentace.

Ve všech nabízených tématech je úkolem žáků řídit se reálnými úvahami a aktuálními možnostmi finančního trhu. Při práci na projektu mají uvažovat jako standardně vydělávající rodina (pár, single) s průměrnou měsíční mzdou (aktuální výši průměrné mzdy v ČR žáci najdou na stránkách Českého statistického úřadu).

Jak bylo řečeno v úvodu této části, není nutné, aby na dílčích úkolech pracovali všichni společně. Naopak, součástí zadání je požadavek, aby si žáci ve svých skupinách rozdělili role a zkusili pracovat samostatně na přidělených úkolech, jejichž výstupy přispějí ke splnění zadání. Je vhodné, aby se soustředili i na vlastní schopnosti a silné stránky.

Základní témata, která by se při zadání projektu měla objevit vždy, jsou

- koupě nemovitosti (rodinný dům),
- rekonstrukce bytu,
- nákup osobního automobilu,
- nákup notebooku (resp. osobního počítače).

Pro třídy s větším množstvím žáků je možné rozšířit zadání o následující možnosti

- instalace solární elektrárny na rodinný dům,
- letecká dovolená all inclusive,
- vybavení nové domácnosti.

Požadavky na písemnou práci Písemná práce bude rozdělena na *společnou část* a *samostatnou část* (tzv. zhodnocení). Společnou část odevzdá za celou skupinu jeden člen týmu, který ji s pomocí ostatních „spolupracovníků“ zpracuje na základě jimi dodaných podkladů. Každý člen týmu navíc připojí své vlastní *zhodnocení*, které je povinnou součástí pro splnění práce. Obě tyto části budou mít stejný termín odevzdání, při jehož nedodržení budou buď skupina (za společnou část) nebo jednotlivci (za zhodnocení) přicházet o body (viz část 2.5).

Struktura společné části:

- úvod s informacemi o zpracovávaném tématu,
- složení skupiny a rozdělení rolí ve skupině,
- konkrétní vybraný produkt (včetně zdroje - odkazu),

- možnosti financování produktu,
- vlastní výpočet a návrh splátkového kalendáře (doba splácení, uvážení bezpečné výše měsíční splátky),
- úvahu, jak se změní doba splácení nebo výše měsíční splátky v případě, že si klient nepůjčí celou částku (využití vlastních úspor),
- závěr - názor na nabízené produkty, jejich bezpečnost a vhodnost pro financování vybraného produktu, výsledky porovnání vlastních výpočtů s nabídkami na trhu,
- shrnutí zdrojů (všechny webové stránky a další zdroje, ze kterých bylo čerpáno).

Struktura zhodnocení:

- každý sám za sebe,
- kritické hodnocení vlastního přispění ke zpracování projektu,
- hodnocení práce ostatních členů týmu,
- celkové hodnocení práce skupiny (jak skupina spolupracovala, co se povedlo nebo naopak co se nedařilo),
- návrhy pro zlepšení do budoucna.

Požadavky na prezentaci Skupina bude svou práci prezentovat před ostatními spolužáky. Je možné vybrat mluvčího skupiny, nebo prezentaci rozdělit na příspěvky jednotlivých členů. Prezentace budou odevzdány v předem stanoveném termínu elektronicky, aby je vyučující mohl mít nahrané ve svém zařízení a během prezentační hodiny se eliminovaly časové prodlevy související s technikou.

Kritéria pro prezentaci:

- délka maximálně 8 minut,
- vyžadovaná struktura
  - představení tématu a členů týmu včetně rozdělení rolí,
  - výběr způsobu financování, jeho obhájení a představení podmínek pro využití vybraného finančního produktu,
  - shrnutí délky splácení a výše měsíční splátky,
  - závěr (identifikovat, co bylo za celou skupinu na práci nejtěžší, jak se pracovalo),
- odevzdání elektronicky ve formátu `.pdf` nebo `.pptx` v předem stanoveném termínu.

2.5 Návrh hodnocení

Hodnocená bude jak kvalita odevzdané práce na základě výše stanovených požadavků, tak termíny odevzdání. V rámci hodnocení má každá část výstupu jinou váhu. Práce každého žáka je hodnocena podle kritérií v tabulce 2.1, kde členové jedné skupiny získají všichni stejný základ a jejich individuální výsledky se tak mohou lišit pouze ve vazbě na vlastní zhodnocení. Podobně jsou navržena hodnoticí kritéria pro prezentaci v tabulce 2.2.

Při nesplnění termínu odevzdání společné části písemné práce ztrácí tým 10 b. za každý den prodlení. Počínaje 6. dnem je automaticky uděleno bodové ohodnocení 0 b. Při nesplnění termínu pro odevzdání zhodnocení ztrácí konkrétní žák za každý den prodlení 10 b. z celkového hodnocení práce skupiny a opět počínaje 6. dnem po termínu je mu uděleno hodnocení 0 b. za písemnou práci. Pokud žák práci vůbec nedodá, je možné na základě školního a klasifikačního řádu konkrétní školy uvažovat o nehodnocení žáka v předmětu. Tento krok závisí čistě na přístupu školy k samostatným pracím a nastaveným hodnotám, které se žákům snaží předat.

V případě termínu na odevzdání prezentace je postup analogický - při nesplnění termínu odevzdání ztrácí tým v tomto případě 10 b. za každý den prodlení, nicméně na nulové bodové ohodnocení se tým nedostane z toho důvodu, že termín odevzdání prezentace by měl být zpravidla nastaven poměrně krátkou dobu před stanoveným termínem samotné prezentace.

V rámci rozvoje kompetence sociální a personální je připraveno vrstevnické hodnocení prezentací, kdy žáci hodnotí své vystupující spolužáky v předem definovaných oblastech. Každý tým odevzdává vyplněný formulář s hodnocením ostatních prezentujících (Arch pro vrstevnické hodnocení). Stejný formulář vyplňuje vyučující a z připravených hodnocení vytvoří výslednou hodnotu (průměrnou).

PÍSEMNÁ PRÁCE 70 %	
Splnění všech definovaných požadavků	max 60 b.
– úvod	5 b.
– složení skupiny a rozdělení rolí	5 b.
– představení vybraného produktu	5 b.
– vyhledané možnosti financování	5 b.
– vlastní návrh financování, výpočet splátkového kalendáře	20 b.
– porovnání vlastního návrhu s produkty dostupnými na trhu	10 b.
– závěr	5 b.
– vlastní zhodnocení za jednotlivce	5 b.
Grafická úprava	max 30 b.
– rozdělení do kapitol, odstavců, odsazování	10 b.
– graficky zpracovaný splátkový kalendář	10 b.
– pojmenované obrázky a tabulky	10 b.
Uvedené všechny zdroje	max 10 b.

Tabulka 2.1: Návrh hodnocení písemné práce finančního projektu.

PREZENTACE 30,%	
Délka prezentace	max 20 b.
Struktura	max 30 b.
– představení tématu	5 b.
– rozdělení rolí	5 b.
– výběr způsobu financování a jeho obhájení	10 b.
– shrnutí délky splácení a podmínek úvěru	10 b.
Grafická úprava	max 20 b.
– pravopis	10 b.
– obrázky	5 b.
– zarovnání, nadpisy, množství textu na slidu	5 b.
Projev	max 30 b.
– použití odpovídající terminologie	5 b.
– orientace v problematice vybraného tématu	5 b.
– plynulý projev	5 b.
– oční kontakt s posluchači	5 b.
– NE čtení napsaného textu	10 b.

Tabulka 2.2: Návrh hodnocení prezentace finančního projektu.

2.6 Průběh, zhodnocení a doporučené modifikace projektu

Předpokládaná doba na zpracování projektu byla jeden měsíc. Kromě úvodní hodiny, která slouží k seznámení, zadání a úvodní organizaci, je vhodné věnovat část hodin buď konzultacím se skupinami, nebo přímo práci na projektu, během které může vyučující sledovat a usměrňovat myšlenky žáků.

Projekt byl zatím realizován ve dvou po sobě následujících letech, konkrétně ve školním roce 2021/22 a následně ve školním roce 2022/23. V prvním roce byl zadán v jedné třídě, kvintě (1. ročníku), a již po tomto pilotním testování bylo nutné provést dílčí úpravy v původních podmínkách na splnění. V následujícím roce byly již zapojeny obě paralelní třídy kvint (1. ročníku). Zadání popsané v kapitole 2.4 odpovídá tomu, jakým způsobem proběhl pilotní ročník. Ve zmiňovaném druhém roce došlo k následujícím úpravám.

1. **Témata se nelosovala:** žákům byla předložena základní témata uvedená v kapitole 2.4, ze kterých si skupiny vybíraly. Projekt tak měl potenciál porovnat různé pohledy a přístupy žáků k řešení stejných situací.
2. **Mzda:** žáci dostali větší prostor při určování příjmů a namísto průměrné mzdy zveřejněné na stránkách ČSÚ se mohli řídit aktuálními nabídkami na trhu práce

(na základě dostupných informací z pracovních portálů).

2.6.1 Průběh

Projekt byl zadaný na dobu 4 týdnů a byly mu věnovány 4 vyučovací hodiny. V první hodině byli žáci seznámeni s podrobným zadáním, byla vysvětlena jednotlivá témata, podmínky splnění a návrh hodnocení. Seznámení s projektem bylo podložené vytvořeným zadáním v aplikaci Microsoft Teams (viz obrázek 6.1 na str. 74), které bylo doplněné o sadu hodnoticích kritérií (viz obrázek 6.2 na str. 75). Žáci tak měli přehled o tom, co a jakým způsobem se bude hodnotit, včetně podrobných specifikací, jak má vypadat odevzdávaná práce. Padly také první dotazy, které během úvodní hodiny směřovaly výhradně k podmínkám splnění a vyjasnění požadavků. Ukázala se rovněž vynalézavost žáků, kteří ihned po vyslechnutí zadání vymýšleli způsoby, jakými by hypoteticky mohli získat dostatečné finanční prostředky, jimiž by pokryli financování produktů zadaných v jednotlivých tématech. Zazněly návrhy typu „*Co když zdědím milión po babičce, která umřela?*“ nebo „*Tak my budeme investovat do bitcoinu a pak to prodáme a budeme mít dost peněz na koupení domu.*“ Bylo proto nutné velmi jasně specifikovat cíle projektu, tzn. naučit se pohybovat na finančním trhu, zjistit různé možnosti financování a podmínky, za kterých jsou čerpatelné. A zároveň s tím si umět nabídky zhodnotit a případně i provést kontrolu navrhované výše splátek. Po rozdělení do skupin dostali žáci pár minut času na to, aby se domluvili, jaké téma bude jejich skupina zpracovávat. V pilotním ročníku proběhlo na závěr úvodní hodiny losování témat. Druhá hodina věnovaná práci na projektu byla naplánovaná se čtrnáctidenním odstupem a měla mít podobu konzultace již odvedené práce na projektu. Žáci dostali za úkol mít rozdělené role ve svých skupinách, znát konkrétní produkt určený k financování a pracovat se svou fiktivní „sociální situací“, tedy zda budou vystupovat jako single, bezdětný pár nebo rodina. Opakovaně se ukázalo, že 14 dní je pro žáky příliš dlouhá doba na to, aby se samostatně pustili do práce. Reálně začali na projektu pracovat až v průběhu této hodiny, což je samozřejmě neefektivní i z hlediska plánování výuky.

Třetí hodina byla opět naplánovaná s odstupem dvou týdnů a během ní už probíhaly prezentace jednotlivých skupin. Aby byl objem prezentací vůbec stihnutelný v jedné hodině, je nutné prezentace odevzdat předem, v požadovaném termínu, aby je vyučující měl dostupné na svém zařízení. Zkrátí se tak čas na práci s technikou a je možné se věnovat čistě obsahu. Během prezentování jednotlivých skupin probíhalo i vrstevnické hodnocení. Každá skupina měla k dispozici hodnoticí arch (Arch pro vrstevnické hodnocení), do kterého doplňovala své hodnocení spolužáků v nastavených kategoriích. Navržené hodnocení od spolužáků bylo součástí celkového hodnocení skupiny.

Poslední hodina sloužila k diskuzi, proběhla oboustranná zpětná vazba, které se věnuji podrobněji v části 2.7. Od vyučujícího byly sděleny připomínky k odevzdaným pracím a prezentacím. Od žáků návrhy a hodnocení, jak se jim práce na projektu líbila a dařila.

2.6.2 Doporučení pro další ročníky

Po dvou „testovacích“ letech jsem nasbírala zkušenosti, které mi umožňují navrhnout úpravy pro další roky. Z obou ročníků vyplynuly jak silné, tak slabé stránky projektu, se kterými je vhodné pracovat. Pro přehlednost jsou navrhovaná doporučení rozdělena do několika kategorií.

Témata: Ve druhém ročníku si žáci mohli z témat vybírat. Většina z nich se doma již setkala s termínem *hypotéka*, tedy téma financování koupě domu jim přišlo nejsnazší, a proto si jej vybrali v jedné třídě všechny skupiny. Tak se ztratil původní záměr seznámit žáky se všemi nejčastějšími způsoby úvěrů (hypotéka, spotřebitelský úvěr, úvěr ze stavebního spoření, leasing), jejich výhodami, riziky i rozdílnostmi produktů, které lze s jejich pomocí financovat.

Návrh: Vždy zachovat čtyři stěžejní témata (Kapitola 2.4), která se přidělí jednotlivým skupinám (na základě losování nebo jinou metodou), a k tomu alternativně

- přidat témata rozšiřující,
- některá ze čtyř základních přidělit dvěma skupinám.

První ze způsobů dává možnost nahlédnout problematiku do šířky a ukázat situace, se kterými se možná někteří žáci v budoucnu setkají. Druhá možnost dává příležitost se podívat do hloubky a porovnat například přístup dvou skupin ke stejnému tématu.

Příprava žáků: Ani v jednom z ročníků se neobjevil samostatný výpočet splátkového kalendáře. Žáci pracovali s přednastavenými, veřejně dostupnými online kalkulačkami, nikoliv s vlastními návrhy. V prvním roce jsem se domnívala, že je to „absence dovedností“ žáků dané třídy. Po druhém roce jsem se ujistila, že důvod je úplně jiný a chyba je na mé straně. Příprava žáků totiž proběhla na velmi teoretické bázi, jak je popsáno v kapitole 2.2. Vztahy pro výpočty byly vysvětleny, vyzkoušeny, ale rozhodně ne v takové míře, aby žáci dokázali navrhnout splátkový kalendář, tedy rozpis splátek pro jednotlivá období.

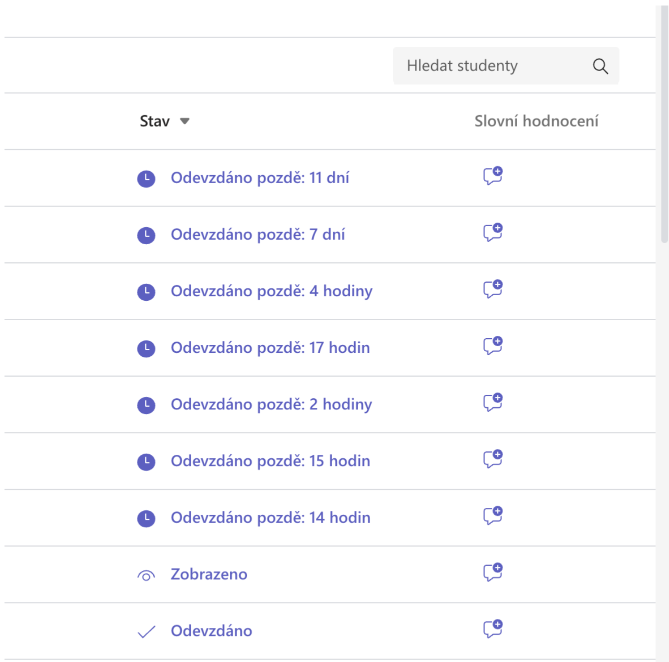
Návrh: Během řešení příkladů a seznamování žáků s pojmy z finanční matematiky je vhodné věnovat čas i ukázce práce se softwarem. Základní a plně dostačující pro úroveň střední školy je Microsoft Excel. Aby žáci byli schopní splnit veškeré požadavky projektu, je nutné si ověřit, že znají základní principy práce s programem, a nasměrovat je, jak mají nabyté znalosti využít v konkrétním případě. V rámci této přípravy doporučuji zařadit i ukázku různých grafických způsobů zobrazení dat a čísel, které dále využijí při přípravě prezentace vlastní práce.

Ukázky: Často jsem se setkala s pracemi, které neodpovídaly požadavkům zadání na strukturu. Žáci si nedokázali pouze z popisu udělat představu o tom, jak má práce vypadat. Jsem přesvědčaná o tom, že i přes téma, které je primárně matematické, je nutné dodržovat základní pravidla typografie, všechna pravidla pravopisu i požadavky na strukturu. Podobně není možné očekávat, že žáci připraví prezentaci, která splňuje typografická pravidla a zásady pro její tvorbu.

Návrh: Připravit žákům ukázku práce. Většina z nich bude pracovat v softwaru Microsoft Word, tedy je vhodné jim vytvořit šablonu. Ti žáci, kteří budou chtít dát práci vlastní směr, si dokážou poradit a upravit si styl. Ostatní budou minimálně vybaveni dostatečně reprezentativním materiálem. Samozřejmě tato část práce nemusí být nutně dílem samotného vyučujícího. Naopak myslím, že by měli být žáci aktivně zapojeni do přípravy šablony. Je proto možné vytvořit sdílený soubor, který společně se žáky upravíte do podoby odpovídající požadavkům na strukturu písemné práce. Podobně bych doporučila postupovat i v případě šablony pro prezentaci, kterou většina žáků bude vytvářet v softwaru Microsoft PowerPoint. A v rámci přípravy na prezentaci věnovat čas zopakování pravidel a zásad pro tvorbu prezentace i pro přednes.

Oba výše uvedené návrhy zcela zjevně nesouvisí s matematikou. V tomto směru je více než žádoucí zapojit do projektu i vyučující odpovídajících předmětů - českého jazyka a základů společenských věd. ŠVP GFK nabízí propojení s mediální výchovou, která je vyučovaná v předmětu osobnostně sociální výchova právě v kvintě (1. ročníku). Celkově může tato mezipředmětová spolupráce připravit žáky na další úkoly, ať už v podobě vytváření ročníkových prací na stávající škole, při tvorbě závěrečných prací na univerzitě, nebo při uplatnění na trhu práce.

Výstupy: Provádět kontrolu několika prací se shodným obsahem je neefektivní a energeticky náročné, pokud chcete každému žákovi poskytnout relevantní zpětnou vazbu. Bude nutné do dalších ročníků upravit požadavky na odevzdání práce za jednotlivé skupiny. Naopak on-line odevzdání do vytvořeného Zadání v aplikaci Microsoft Teams (případně jiném ekvivalentním nástroji) doporučuji zachovat, protože dává jednoznačnou informaci o termínu odevzdání a lze tak transparentně hodnotit splnění (viz obrázek 2.1).



Obrázek 2.1: Ukázka kontroly termínů odevzdání v Microsoft Teams.

Návrh: V zadání doporučuji omezit se na odevzdání jedné písemné práce za celou skupinu, která bude doplněná o samostatné stránky s hodnocením jednotlivých členů. Jako legitimní považuji nastavit požadavek na formát on-line odevzdávané práce, konkrétně odevzdání ve formátu `.pdf`, ideálně doplněné ještě o zadání přesného formátu pro název souboru s vlastním hodnocením, například ve tvaru `prijmeni_skupina.pdf`, název souboru s písemnou prací, například ve tvaru `PP_skupina.pdf`. Podobně je možné požadovat odevzdání prezentace buď ve formátu `.pptx`[7] například ve tvaru `Prezentace_skupina.pptx`, nebo opět ve formátu `.pdf`.

Jednotný formát i název následně velmi usnadní orientaci při kontrole prací, plnění termínů a vytváření hodnocení pro žáky.

2.7 Výsledky projektu z finanční matematiky

Při kontrole odevzdaných prací i vyslechnutí jednotlivých prezentací se ukázalo, že moje vlastní představa o zpracování se velmi lišila od produktů, které mi byly předloženy žáky. V první řadě se objevovalo nedodržení navržené struktury práce. Všechny skupiny se sice zaměřily na hledání vhodných finančních produktů na trhu, nicméně ani jedna skupina nepřišla s vlastním výpočtem financování a jeho porovnáním právě s komerčními nabídkami. Z tohoto pohledu tak byla splněna jen polovina cíle spojeného s rozvojem žáků. Zároveň musím konstatovat, že žáci v kvintě (1. ročníku) často neumí využít možnosti technologií k vytvoření písemné práce - často se objevovaly hrubé pravopisné chyby. Přestože se primárně jednalo o matematickou práci, nelze přehlížet ani tuto oblast, do níž bezpochyby patří i správná sazba matematického textu (například rozdělování několikaciferných čísel na konci řádků by se nemělo objevovat).

Při prezentacích se ukázala jak kreativita, tak hlavně zatím neschopnost žáků prezentovat získané výsledky a obecně „prodat“ vlastní práci. Slidy byly často přeplněné množstvím informací a hlavně čísly, která byla sice úhledně sepsaná v tabulkách, ale pro posluchače nic neříkající. V obou výše zmíněných případech se na žáky snesla kritika a zároveň doporučení, jak se zpětnou vazbou mohou naložit pro příští práci (konkrétní kroky uvádím v následující části 2.6.2).

Na druhou stranu se všichni žáci zapojili - ať už do hledání vhodných produktů k financování, nebo do prozkoumávání finančního trhu. Dokázali si poradit s detaily - například pokud vybrali konkrétní dům ke koupi, snažili se najít zaměstnání odpovídající poměrům daného kraje. Reálně si spočítali, jaké jsou měsíční náklady na stravu, dojíždění do zaměstnání i náklady na energie. Zajímavé byly pohledy jednotlivých skupin na zpracování projektu. Jedna z nich zpracovala projekt z pozice finančního poradce pro smyšlený manželský pár (viz 6.1.6 v příloze na str. 78). Jiná si zvolila, že bude vystupovat jako žák, jenž si chce koupit auto na dojíždění do školy. Tato skupina jako jednu alternativu financování navrhovala darování orgánů a další „nemocenské služby“. Na jednu stranu se jednalo o velmi nestandardní přístup, ovšem bylo nutné v tomto případě ocenit reflexi a zhodnocení různých možností ze strany žáků (viz 6.1.7 v příloze na str. 92). Obecně se ukázala vysoká schopnost autoevaluace vlastního výkonu včetně indentifikace slabých

[7] Připouštíme jinou koncovku v souvislosti s verzí softwaru.

míst při zpracování práce. Nejčastěji se objevovalo hodnocení časového rozvržení, kdy si žáci nechali práci „na poslední chvíli" a nestihli ji dokončit do podoby, kterou si určili. Některé ukázky zpětné vazby od žáků jsou uvedeny v příloze na str. 75.

Ukázala se kvalita vrstevnického hodnocení, kdy žáci velmi zodpovědně přistoupili k ohodnocení svých spolužáků. V žádném z případů jsem nenašla výrazný rozpor mezi mým a žákovským hodnocením. Naopak jsme velmi často upozorňovali na stejné nedostatky.

Kapitola 3

Grafy funkcí a křivky

Téma funkcí je velmi široké a lze na něj pohlížet z několika stran. Přestože analytické a grafické zadání funkce jsou úzce spjaty, bohužel se často i přes velikou snahu nedaří docílit provázání představy mezi předpisem a grafem funkce. Na dalších řádcích nezabývám funkcí ve smyslu vyjádření závislosti dvou veličin, ale soustředím se pouze na souvislosti mezi změnami v předpisu funkce a jejich dopadem na tvar křivky, která je grafem. Důvodem k tomuto pojetí je příprava studentů na projekt, který bude souviset právě s pochopením souvislosti mezi předpisem a grafem.

3.1 Výuka funkcí na středních školách

V rámci RVP jsou funkce zařazeny do tematického celku *Závislosti a funkční vztahy* ([5], str. 24). Předpokládá se zvládnutí učiva obsahujícího uchopení samotného pojmu funkce, definičního oboru a oboru hodnot, grafu funkce a vlastností funkcí. Dále pak RVP v učivu specifikuje konkrétní funkce - lineární, kvadratickou, funkce s absolutní hodnotou, lineární lomenou, mocninné, funkci druhá odmocnina, exponenciální, logaritmické a goniometrické. Níže uvedeme očekávané výstupy, vymezené v RVP, jejichž naplnění má navržený projekt podpořit:

- načrtne grafy požadovaných funkcí a určí jejich vlastnosti,
- formuluje a zdůvodňuje vlastnosti studovaných funkcí.

V rámci projektu zatím nebudeme pracovat s funkcemi goniometrickými, přestože v RVP a následně v ŠVP zařazeny jsou. Nicméně v době zpracování projektu není žákům tento typ funkcí zatím známý a cíle projektu mohou být naplněné i bez nich.

V ŠVP GFK je téma funkcí zařazeno do sexty (2. ročníku), pro který je zároveň určen připravovaný projekt. Učivo i očekávané výstupy opět úzce souvisí s požadavky uvedenými v RVP. Projekt si klade za úkol podpořit splnění následujících výstupů:

- poznat funkci a popsat ji různými způsoby,
- najít funkci daných vlastností,
- upravit předpis funkce na jiný tvar, najít významné body grafu, sestrojit graf funkce,

- rozlišit základní typy funkcí, použít základní pravidla pro změny předpisu funkcí (posun grafu, souměrnost podle osy).

3.2 Nutné znalosti žáků před zahájením projektu

Žáci vstupují do projektu v okamžiku, kdy znají elementární funkce a jejich grafy. Současně se orientují v souvislostech mezi předpisem a grafem funkce a s jejich pomocí dokáží vytvořit jednoduché obrázky, jak je ukázáno níže v části 3.2.2. Pro úspěšné zvládnutí projektu rovněž předpokládáme základní znalosti práce s GeoGebrou (případně podobným softwarem).

3.2.1 Pojmy ze světa funkcí

Stejně jako v předchozí kapitole věnované finanční matematice i zde se musí žáci orientovat v pojmech užívaných v souvislosti s funkcemi. Níže nabízím přehled nejdůležitějších definic, na které se později budu odkazovat, jejž jsem převzala z Přehledu středoškolské matematiky od Josefa Poláka ([16], s. 130-159).

Definice 3.1. ***Funkce***

Nechť A,B jsou neprázdné množiny reálných čísel ($\mathsf{A} \subset \mathbb{R}$, $\mathsf{B} = \mathbb{R}$). Přiřadíme-li každému číslu $x \in \mathsf{A}$ právě jedno $y \in \mathsf{B}$, pak se toto jednoznačné přiřazení (zobrazení) reálných čísel nazývá ***reálná funkce reálné proměnné x*** a značí se malým písmenem, zpravidla f, g apod.

Proměnná x se nazývá ***funkční proměnná*** nebo také ***argument funkce f***. Množina A všech hodnot proměnné x se nazývá ***definiční obor funkce f*** a značí se D_f nebo $D(f)$.

Proměnná y se nazývá ***funkční hodnota*** či ***hodnota funkce f v bodě x*** a bývá označována také jako $f(x)$[8]. Množina všech hodnot funkce f se nazývá ***obor hodnot funkce f*** nebo ***obor funkčních hodnot funkce f*** a značí se H_f nebo $H(f)$.

Definice 3.2. ***Graf funkce***

V rovině zvolíme pravoúhlou (speciálně kartézskou) soustavu souřadnic s počátkem O a osami x, y. Pro všechna $x \in D(f)$ každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x, f(x)]$ přiřadíme v této rovině bod, který má (v uvedeném pořadí) souřadnice $x, y = f(x)$. Množinu všech takových bodů roviny nazýváme ***grafem funkce f***.

Definice 3.3. ***Vlastnoti funkcí***

- Řekneme, že funkce je ***sudá***, pokud

$$\forall x \in D(f) : (-x) \in D(f) \wedge f(-x) = f(x).$$

- Řekneme, že funkce je ***lichá***, pokud

$$\forall x \in D(f) : (-x) \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x).$$

[8] Píšeme $y = f(x)$ nebo $x \longmapsto f(x)$.

- Řekneme, že funkce je ***periodická***, pokud existuje kladné číslo p takové, že

$$\forall x \in D(f) : x \pm p \in D(f) \wedge f(x \pm p) = f(x).$$

Na základě definice 3.3 určujeme i vlastnosti grafů. Pro sudou funkci platí, že její graf je souměrný podle osy y. Pro funkci lichou platí, že její graf je souměrný podle počátku kartézské soustavy souřadnic. Toho lze s výhodou využít v GeoGebře, kde stačí vytvořit jen polovinu „obrázku“ a následně její obraz v osové nebo středové souměrnosti, což bude ukázáno v příkladu 3.4.

Definice 3.4. ***Lineární funkcí*** nazýváme každou funkci

$$f(x) : y = ax + b, \quad D(f) = \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Speciálně: Je-li $a \neq 0, b = 0$, pak se lineární funkci říká ***přímá úměrnost***. Je-li $a = 0$, jde o ***konstantní funkci***. Grafem každé lineární funkce je přímka.

Definice 3.5. ***Kvadratickou funkcí*** nazýváme každou funkci

$$f(x) : y = ax^2 + bx + c, \quad D(f) = \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

kde $a \neq 0$ a $b, c \in \mathbb{R}$. Grafem každé kvadratické funkce je parabola s vrcholem $V = [x_v, y_v]$, kde

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ a } y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Pro $a > 0$ je vrchol minimem grafu funkce, pro $a < 0$ je vrchol maximem grafu funkce. Předpis 3.2 můžeme doplněním na úplný čtverec[9] upravit do vrcholového tvaru

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v, \tag{3.3}$$

který budeme s výhodou využívat při práci s grafem kvadratické funkce.

Definice 3.6. ***Lineární lomená funkce*** je funkce

$$f(x) : y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{kde } c \neq 0,\ ad - bc \neq 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}.$$

Jejím grafem je rovnoosá hyperbola se středem v bodě $S = [x_s; y_s]$, kde

$$x_s = -\frac{d}{c} \text{ a } y_s = \frac{a}{c}.$$

Předpis 3.6 lze upravit podobně jako předpis kvadratické funkce, tentokrát na středový tvar

$$y = \frac{k}{x - x_s} + y_s, \text{ kde } k = \frac{1}{c^2}(bc - ad) \neq 0. \tag{3.4}$$

[9]Odvození lze najít např. v [16], str. 117.

Definice 3.7.

- ***Mocninná funkce s přirozeným mocnitelem*** je funkce

$$f : y = x^n,\ n \in \mathbb{N},\ D(f) = \mathbb{R}.$$

Grafem této funkce pro $n = 1$ je *přímka* a pro $n > 1$ *parabola n-tého stupně.*

- ***Mocninná funkce se záporným celým mocnitelem*** je funkce

$$f : y = x^{-n},\ n \in \mathbb{N},\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Grafem této funkce je *hyperbola stupně n+1.*

Definice 3.8. ***Exponenciální funkce*** o základu a je funkce

$$f : y = a^x, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ D(f) = \mathbb{R}.$$

Definice 3.9. ***Logaritmická funkce*** o základu a je označována jako

$$f : y = \log_a x$$

je funkce inverzní k exponenciální funkci o témž základu a. Definiční obor logaritmické funkce je $D(f) = H(f^{-1}) = (0, +\infty)$.

Definice 3.10. ***Absolutní hodnota funkce***

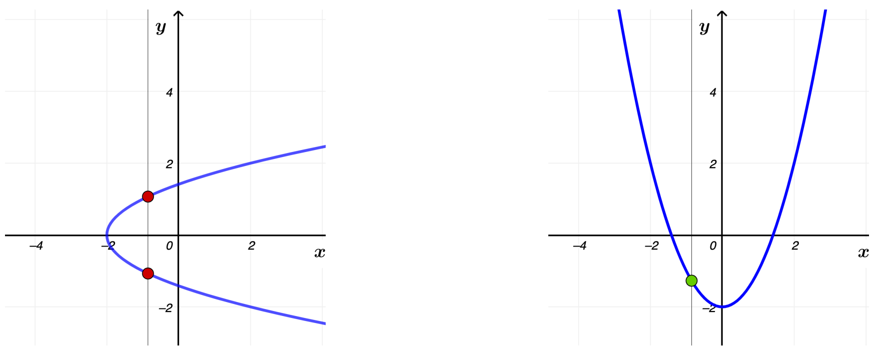
Je-li dána funkce $f : y = f(x)$ s definičním oborem $D(f)$, pak funkci

$$|f| : y = |f(x)|, \quad x \in D(|f|) = D(f)$$

nazýváme ***absolutní hodnota funkce*** f.

3.2.2 Grafy elementárních funkcí

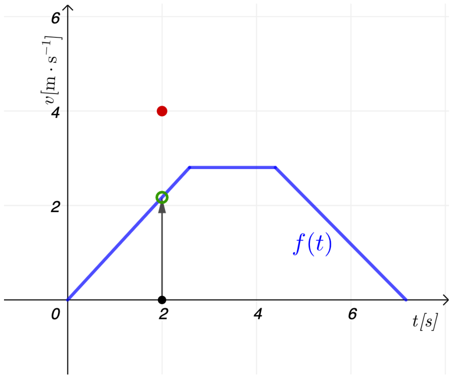
V souladu s definicí 3.2 můžeme říci, že křivka znázorněná v kartézské soustavě souřadnic je *grafem funkce*, pokud libovolná rovnoběžka se svislou osou má s danou křivkou nejvýše jeden průsečík, jak je vidět na obrázku 3.1.



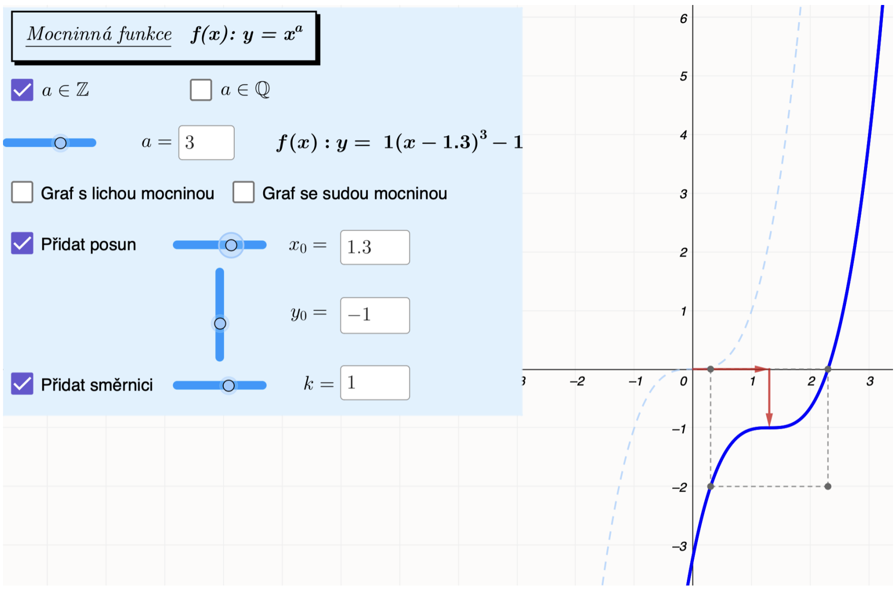
(a) Křivka není grafem funkce.   (b) Křivka je grafem funkce.

Obrázek 3.1: Příklady křivek.

Znovu je možné žákům připomenout, že funkce představuje *závislost*. Pokud, pro představu, uvážíme závislost rychlosti na čase (viz obrázek 3.2), nemůže se stát, že v jeden okamžik má pozorovaný pohybující se objekt dvě rychlosti. Není to fyzikálně možné, tedy ani v grafu *funkce* se nemohou objevit dvě hodnoty „nad sebou" pro jeden konkrétní čas.



Obrázek 3.2: Rychlost v závislosti na čase je grafem funkce.



Obrázek 3.3: Chování grafu mocninné funkce s celým mocnitelem v závislosti na předpisu.

Žáci by při přípravě na zpracování projektu měli získat jistotu pro práci s grafy. Především by měli zvládnout upravovat předpis tak, aby dokázali v rámci kartézské soustavy souřadnic „posouvat" graf funkce na požadovanou pozici. Pro pochopení většiny souvislostí mezi předpisem funkce a jejím grafem jsem v GeoGebře vytvořila výuková prostředí, na obrázku 3.3 je ukázka pro mocninnou funkci. V každém prostředí mají žáci k dispozici jak obecný předpis daného typu funkce, tak i ten konkrétní v závislosti na volbě parametrů.

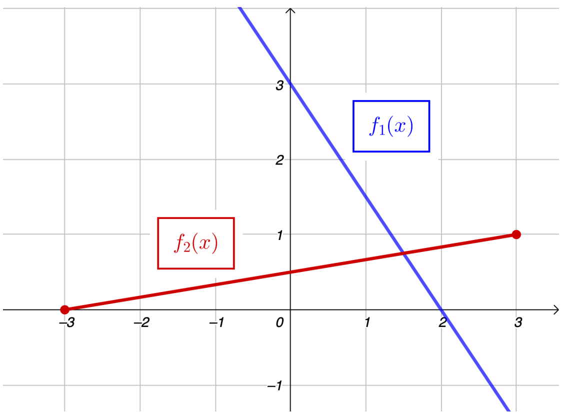
V GeoGebře jsem vytvořila prostředí pro následující elementární funkce:

- lineární, dostupné z https://www.geogebra.org/m/yhufyeft
- kvadratická, dostupné z https://www.geogebra.org/m/ptu7ybah
- mocninná, dostupné z https://www.geogebra.org/m/zb9jrdab
- lineární lomená, dostupné z https://www.geogebra.org/m/nwusqsca

3.2.3 Práce s GeoGebrou a příprava žáků

Pro svou práci budou žáci nutně potřebovat znalosti obecných předpisů elementárních funkcí, pomocí kterých budou aproximovat vytvořené grafické návrhy. Zároveň však musí zvládnout určit konkrétní předpis dané funkce na základě známých údajů. K procvičení a upevnění těchto dovedností slouží následující příklady, ve kterých si žáci nejprve zopakují, jak určit předpisy funkcí z grafu funkce. Na základní úlohy navazují ukázky aproximace obrázku funkcemi.

Příklad 3.1. *Určete předpisy funkcí zadaných grafy na obrázku 3.4.*



Obrázek 3.4: Zadání k příkladu 3.1.

Řešení. Z obrázku vidíme, že oba grafy představují lineární funkci, budeme tedy pracovat s obecným předpisem pro lineární funkci ve tvaru 3.1. Určením souřadnic dvou bodů, které náleží grafu funkce, získáme soustavu rovnic.

- Pro funkci $f_1(x)$ z grafu snadno určíme souřadnice dvou bodů, ideální jsou body $[0; 3]$ a $[2; 0]$. Dosazením do 3.1 dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 3 &= a \cdot 0 + b \\ 0 &= a \cdot 2 + b, \end{aligned}$$

odkud hned můžeme určit $b = 3$ a $a = -\dfrac{3}{2}$. Získali jsme tak předpis pro funkci $f_1(x)$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3.$$

V grafu funkce na obrázku 3.4 není naznačené žádné omezení pro definiční obor, tedy společně se získaným předpisem automaticky předpokládáme $D(f_1) = \mathbb{R}$.

- Pro funkci $f_2(x)$ opět určíme souřadnice bodů, tentokrát se nabízí krajní body funkce, tedy $[-3; 0]$ a $[3; 1]$. Opět dosazením těchto bodů do 3.1 dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot (-3) + b \\ 1 &= a \cdot 3 + b, \end{aligned}$$

ze které sečtením získáme $b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{6}$. Získáváme tak předpis pro funkci $f_2(x)$ ve tvaru

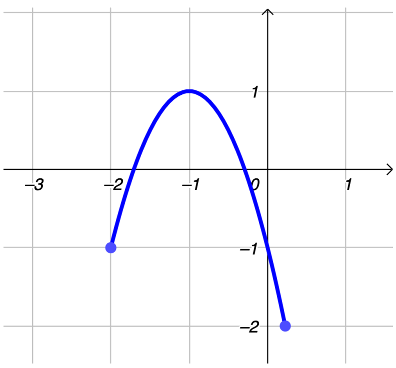
$$y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}.$$

V tomto případě je ale grafem místo přímky úsečka, je proto nutné omezit definiční obor na podmnožinu $D(f_2) = \langle -3; 3 \rangle$.

□

V předchozím příkladu jsme se setkali s omezením definičního oboru, které budou žáci využívat ve svých projektech. Budou tedy pro své funkce hledat vlastní podmnožinu M definičního oboru $D(f)$ $(M \subseteq D(f))$[10], na které vykreslí příslušný graf. Dále jsou uvedeny další ukázkové příklady, na kterých žáci mohou nasbírat zkušenosti potřebné ke zpracování vlastního projektu.

Příklad 3.2. *Určete předpis kvadratické funkce zadané jejím grafem na obrázku 3.5.*



Obrázek 3.5: Zadání k příkladu 3.2.

Řešení. Ukážeme si dva přístupy, jak získat předpis uvedené funkce. Nejprve uvedeme postup analogický předchozímu příkladu. Tedy určíme souřadnice důležitých bodů, v případě kvadratické funkce tyto body potřebujeme tři. Jsou jimi $[-2; -1]$,$[-1; 1]$ a $[0; -1]$. Prostřední z uvedených bodů je vrcholem paraboly, čehož využijeme a budeme hledat předpis ve vrcholovém tvaru 3.3. Do rovnice dosadíme souřadnice vrcholu a dostáváme

$$y = a(x + 1)^2 + 1.$$

S využitím některého z dalších bodů určíme koeficient a, tedy vybereme například bod

[10]Definici vlastní podmnožiny lze najít například v [16], s. 40.

$[0; -1]$ a dostáváme

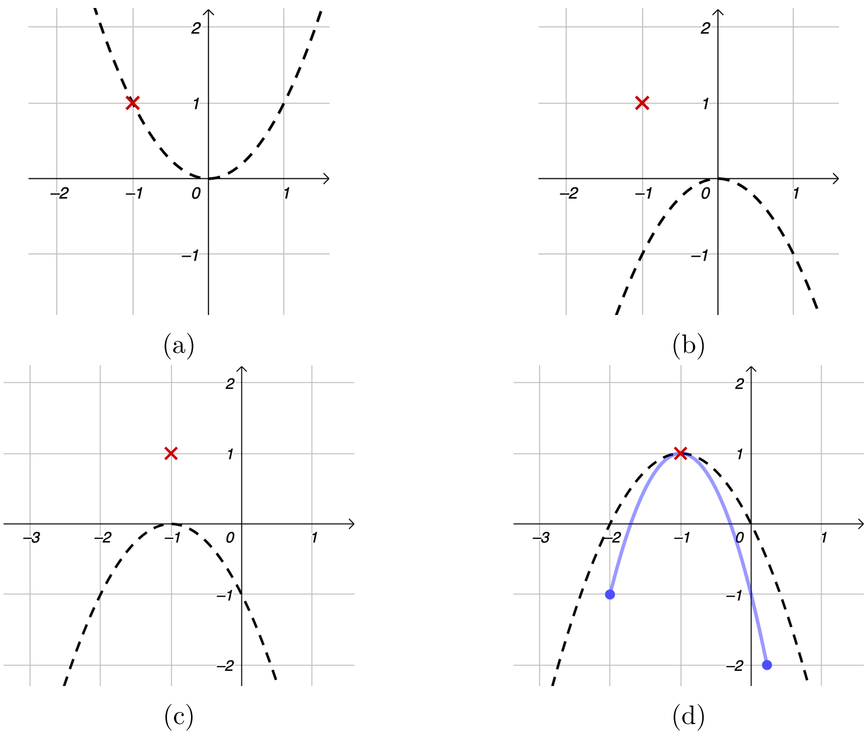
$$\begin{aligned} -1 &= a(x-0)^2 + 1 \\ a &= -2. \end{aligned}$$

Výsledná rovnice paraboly je

$$y = -2(x+1)^2 + 1. \tag{3.5}$$

Abychom měli předpis kompletní, musíme opět omezit definiční obor. Zdola je omezení vidět přímo z grafu, tedy spodní mez je -2. Horní mez musíme dopočítat z předpisu. Známe hodnotu $y = -2$, kterou dosadíme do 3.5, upravíme a získáme hodnoty pro x_1, x_2. Protože hledáme horní omezení definičního oboru, bude nás zajímat hodnota $x > -1$, tedy $x = \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}$. Dostáváme tak výsledek pro naši funkci

$$f(x) : y = -2(x+1)^2 + 1, \quad x \in \left\langle -2; \frac{-2+\sqrt{6}}{2} \right\rangle. \tag{3.6}$$



Obrázek 3.6: Postupné úpravy grafu kvadratické funkce.

Druhý přístup k nalezení předpisu vede přes postupnou úpravu základního grafu kvadratické funkce $y = x^2$. Na obrázku 3.6 máme znázorněné čtyři kroky, které po doplnění poslední úpravy níže vedou k získání požadovaného grafu funkce. Jednotlivé úpravy z obrázku 3.6 popíšeme:

a) obrázek 3.6a znázorňuje graf funkce $y = x^2$, červeně je označen vrchol výsledné paraboly,

b) vzhledem k tomu, že vrchol leží v maximu, musíme změnit v předpisu znaménko koeficientu u kvadratického členu, čímž dosáhneme změny v orientaci grafu uvedené na obrázku 3.6b a předpis $y = -x^2$,

c) graf získaný v předchozím kroku posuneme o 1 doleva ve směru osy x, čemuž odpovídá předpis $y = -(x + 1)^2$ a obrázek 3.6c,

d) v posledním kroku posuneme získaný graf o 1 nahoru ve směru osy y, čemuž odpovídá obrázek 3.6d a předpis $y = -(x + 1)^2 + 1$.

Posledním krokem bude úprava „šířky“ paraboly, která v aktuálním předpisu neodpovídá našemu požadavku. V našem dosavadním předpisu tak stačí stávající koeficient u kvadratického členu nahradit neznámou a, dosadit vhodný bod paraboly a řešením rovnice koeficient a vypočítat. Vzhledem k tomu, že pro výpočet nemůžeme použít vrchol paraboly, jako vhodný se nabízí průsečík s osou y, tedy budeme dosazovat bod $[0; -1]$ a dostáváme

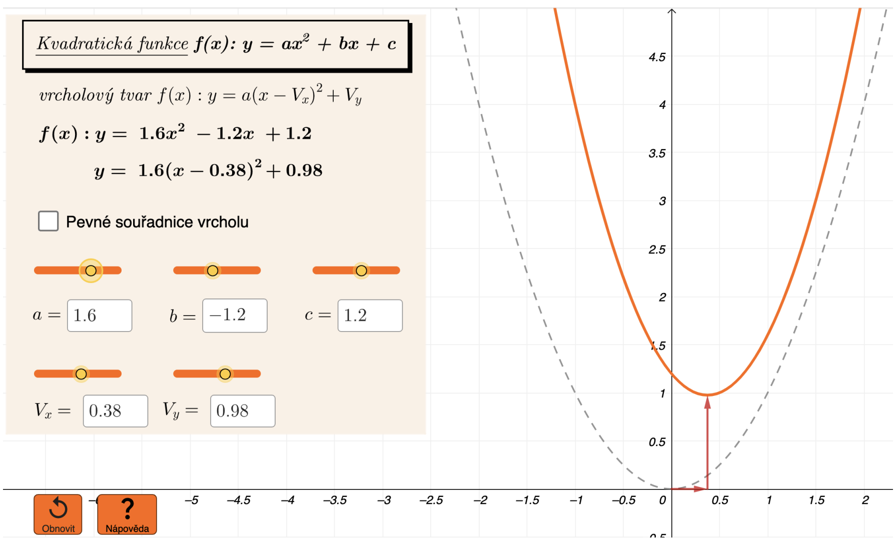
$$\begin{aligned} -1 &= a \cdot (0 + 1)^2 + 1 \\ a &= -2, \end{aligned}$$

a odtud

$$f(x) : y = -2(x + 1)^2 + 1.$$

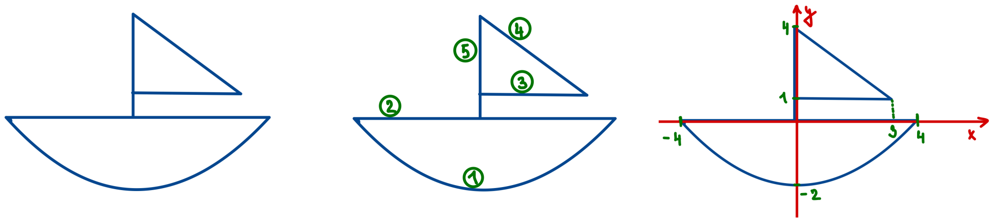
Získáváme tak stejný výsledek jako 3.6, protože omezení definičního oboru by proběhlo totožně s předcházejícím přístupem. □

V příkladu bylo ukázáno, že se lze na základě podobnosti obrázku se známými funkcemi postupnými úpravami předpisu dopracovat k finálnímu tvaru dané funkce. Opět je možné k procvičení využít výuková prostředí vytvořená v GeoGebře (viz str. 31). Na obrázku 3.7 je vidět ukázka prostředí pro kvadratickou funkci.



Obrázek 3.7: Ukázka výukového prostředí pro práci s grafem kvadratické funkce.

Příklad 3.3. *Pokuste se pomocí grafů elementárních funkcí vytvořit nákres z obrázku 3.8a v GeoGebře.*



(a) Návrh. (b) Určení funkcí. (c) V soustavě souřadnic.

Obrázek 3.8: Kroky vytváření matematického modelu k příkladu 3.3.

Řešení. V okamžiku, kdy dostaneme do ruky nějaký návrh, je vhodné si jej rozdělit na jednotlivé části, které nám připomínají grafy známých funkcí. V obrázku 3.8b vidíme, jakým způsobem si můžeme zvolit rozdělení na části. Vzhledem k tomu, že máme za úkol pracovat pouze s grafy funkcí, vidíme problém ve svislé úsečce, kterou nedokážeme popsat jako funkci. V takovém případě je dovoleno využít funkcí GeoGebry a úsečku na závěr vytvořit pomocí nástroje *úsečka*. Pro ostatní křivky dokážeme navrhnout funkce, jejichž grafy budeme aproximovat.

1. parabola - kvadratická funkce
2. vodorovná přímka - konstantní funkce
3. vodorovná přímka - konstantní funkce
4. přímka - lineární funkce

V tuto chvíli se můžeme pustit do výpočtu konkrétních předpisů pro zvolené funkce. K tomu je potřeba si návrh vhodně umístit do kartézské soustavy souřadnic a odhadnout důležité body, které budou sloužit jako vstupní informace k vytvoření konkrétních předpisů funkcí, což je naznačeno na obrázku 3.8c.

1. **Kvadratická funkce** $f_1(x)$

   V obrázku 3.8c jsme určili 3 body paraboly, z čehož lze odvodit konkrétní předpis. Vyjdeme z vrcholového tvaru kvadratické funkce:

   $$y = a(x - x_v)^2 + y_v, \tag{3.7}$$

   kde $a \in R$ a x_0, y_0 představují souřadnice vrcholu paraboly, který jsme odvodili z tvaru křivky jako její nejnižší bod. Z náčrtku snadno určíme, že vrchol paraboly má souřadnice $[0; -2]$. Dosazením do 3.7 získáme

   $$y = ax^2 - 2. \tag{3.8}$$

   Zbývá určit koeficient a, což dokážeme dosazením jednoho z krajních bodů $[-4; 0]$, $[4; 0]$ do předpisu 3.8.

   $$0 = a \cdot 4^2 - 2 \longrightarrow a = \frac{1}{8}.$$

Získali jsme předpis kvadratické funkce. Abychom však nevykreslili celou parabolu, musíme omezit definiční obor krajními body paraboly, v našem případě tedy body se souřadnicemi $x_1 = -4$ a $x_2 = 4$. Dostáváme tak výslednou definici první funkce ve tvaru

$$f_1(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2, \quad x \in \langle -4; 4 \rangle. \tag{3.9}$$

2. **Konstantní funkce** $f_2(x)$

   Budeme postupovat stejným způsobem jako při hledání předpisu pro kvadratickou funkci. V tomto případě budeme hledat předpis pro konstantní funkci, navíc podle umístění do kartézské soustavy souřadnic určovaná úsečka leží na ose x, tzn. její předpis je $y = 0$. Opět ale musíme omezit definiční obor krajními body úsečky, abychom nezobrazili celou přímku. Dostáváme tak výsledek

$$f_2(x) = 0, \quad x \in \langle -4; 4 \rangle. \tag{3.10}$$

3. **Konstantní funkce** $f_3(x)$

   Funkce prochází bodem $[0; 1]$ a zbývá pouze správně omezit definiční obor. Dostáváme tedy

$$f_3(x) = 1, \quad x \in \langle 0; 3 \rangle. \tag{3.11}$$

4. **Lineární funkce** $f_4(x)$

   Pro tuto část bude potřeba provést výpočet předpisu na základě znalosti krajních bodů úsečky a obecného vztahu pro lineární funkci 3.1. Jeden krajní bod má souřadnice $[0; 4]$, druhý krajní bod má souřadnice $[3; 1]$. Dosazením těchto bodů do obecného předpisu 3.1 dostaneme soustavu rovnic

$$4 = 0 \cdot a + b \tag{3.12}$$

$$1 = 3 \cdot a + b. \tag{3.13}$$

   Z 3.12 získáme $b = 4$. Dosazením do 3.13 dostáváme $a = -1$, a tedy při omezení definičního oboru získáme předpis

$$f_4(x) = -x + 4, \quad x \in \langle 0; 3 \rangle. \tag{3.14}$$

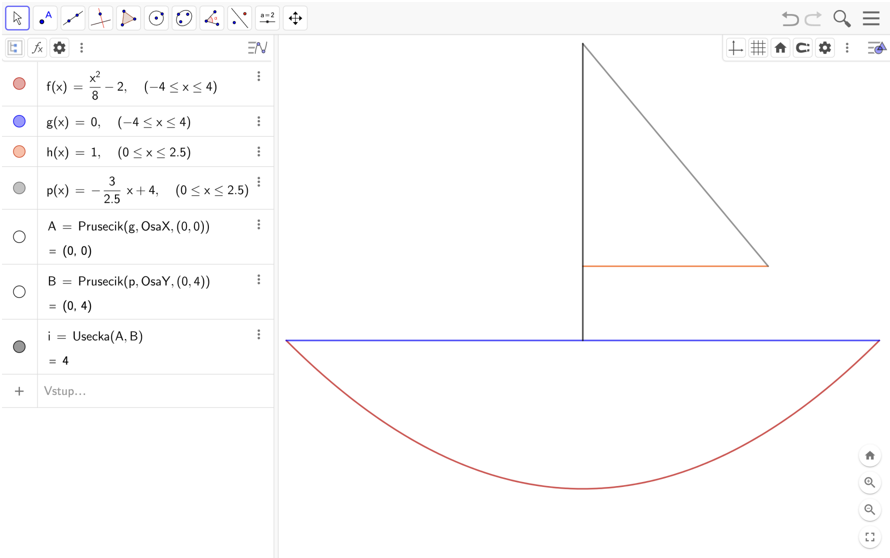
Výše jsme uvedli, že poslední křivkou je „svislá úsečka“, kterou nedokážeme popsat pomocí funkce a k jejímu vykreslení využijeme nástroje GeoGebry. Můžeme se tedy přesunout k přepisu definovaných funkcí do GeoGebry.

V GeoGebře využijeme příkaz *Funkce(výraz, počáteční hodnota parametru, koncová hodnota parametru)*. Do vstupního pole postupně zadáme předpisy funkcí $f_1 - f_4$ tak, jak jsme je popsali v rovnicích 3.9, 3.10, 3.11 a 3.14, a doplníme krajní body definičního oboru. Pro f_1 například zadáváme

Funkce(1/8 x^2 – 2, –4,4).

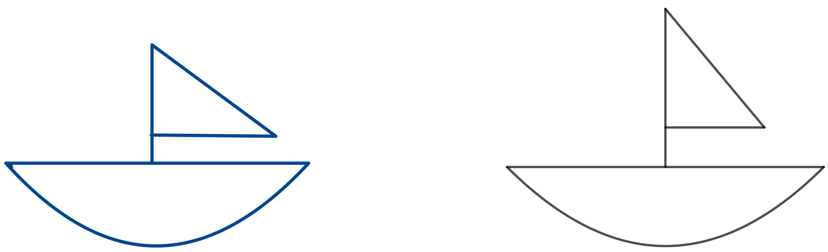
Stejně budou zadané ostatní funkce. K vytvoření poslední svislé úsečky si nejprve vytvoříme v GeoGebře dva body, jeden se souřadnicemi $[0; 4]$, druhý se souřadnicemi

[0; 1], a mezi nimi následně vytvoříme úsečku. Po vypnutí souřadnicových os i mřížky získáme zatím neupravený výsledek v podobě, jak je ukázáno na obrázku 3.9.



Obrázek 3.9: Neupravený výsledek po zadání předpisů funkcí v GeoGebře.

Poslední částí je sjednocení barev křivek a porovnání „počítačového“ výsledku s návrhem.



(a) Návrh.

(b) Výsledek z GeoGebry.

Obrázek 3.10: Porovnání finálního výsledku s původním návrhem.

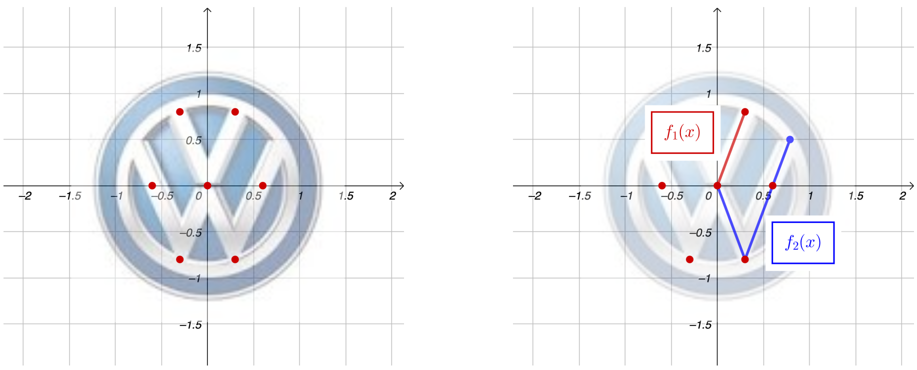
□

Jak vidíme na obrázku 3.10, aproximace byla vcelku úspěšná. Zároveň je však zřejmé, že pouhý odhad důležitých bodů v kartézské soustavě souřadnic není dostatečný k tomu, aby výsledek maximálně odpovídal zadání. Žáky je proto nutné upozornit, aby si konkrétní vzdálenosti ve svých návrzích změřili a do kartézské soustavy přenášeli přesné hodnoty. V dalších ukázkových příkladech se zaměříme jak na konkrétní určení vzdáleností důležitých bodů, tak na využití některých dalších vlastností funkcí.

Příklad 3.4. *Pokuste se pomocí grafů funkcí aproximovat logo na obrázku 3.11 a vykreslit ho s pomocí GeoGebry. Kružnici opsanou logu můžete zadat s využitím nástrojů GeoGebry.*

Obrázek 3.11: Obrázek k příkladu 3.4.

Řešení. Nejprve se pusťme do analýzy loga a všimněme si jeho pravidelnosti. Je tvořeno výhradně úsečkami, pokud pro úvodní úvahy zanedbáme opsanou kružnici, budeme tedy pracovat pouze s lineárními funkcemi. Logo je osově souměrné podle svislé osy, čehož lze využít. Na druhou stranu si můžeme všimout, že logo lze vytvořit ze dvou lineárních funkcí s absolutní hodnotou. Zkusíme tedy aproximovat oběma způsoby. Nejprve však umístíme logo do kartézské soustavy souřadnic a určíme důležité body. Jednou z funkcí



(a) (b)

Obrázek 3.12: Umístění do soustavy souřadnic a rozdělení na funkce.

GeoGebry je možnost importovat obrázek a upravit si jeho průhlednost, čehož jsme využili. Dále pak s pomocí přiblížení a samozřejmě s určitou mírou zjednodušení jsme určili důležité body, jejichž souřadnice jsou $[-0,6;0]$, $[-0,3;-0,8]$, $[-0,3;0,8]$, $[0;0]$, $[0,3;-0,8]$, $[0,3;0,8]$, $[0,6;0]$. V tuto chvíli není jisté, že využijeme body všechny, ani si nemůžeme být jistí, zda nebude potřeba některé hodnoty dopočítat.

Přístup 1: Nejdříve se zkusíme podívat na logo jako na osově souměrné podle osy y. Začneme horní úsečkou označenou na obrázku 3.12b jako $f_1(x)$ s krajními body $[0;0]$ a $[0,3;0,8]$. Po dosazení do obecného předpisu lineární funkce 3.1 dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot 0 + b \\ 0,8 &= a \cdot 0,3 + b, \end{aligned}$$

odkud získáme $b = 0, a = \frac{8}{3}$, a tedy po omezení definičního oboru máme předpis

$$f_1(x) : y = \frac{8}{3}x, \quad x \in \langle 0; 0,3 \rangle.$$

Druhou část, označenou na obrázku 3.12b jako $f_2(x)$, můžeme vnímat jako lineární funkci s absolutní hodnotou. Vyjdeme z předpisu pro $f_1(x)$ a pouze funkci upravíme, posuneme vrchol do bodu $[0,3; -0,8]$ a vhodně omezíme definiční obor. Zdola je definiční obor omezen hodnotou $x = 0$. Omezení shora bude nutné určit z vytvořeného předpisu funkce, kdy budeme hledat, pro jaká x funkce nabývá hodnoty $y = 0,5$. Předpis vytvoříme ve třech krocích:

i) Vyjdeme z předpisu lineární funkce s absolutní hodnotou, který doplníme o konstantu určenou v předpisu $f_1(x)$, a dostáváme

$$y = \frac{8}{3}|x|. \tag{3.15}$$

ii) Posuneme získanou funkci po ose x do požadovaného bodu, dostáváme

$$y = \frac{8}{3}|x - 0,3|.$$

iii) Posuneme získanou funkci po ose y a dostaneme požadovaný předpis

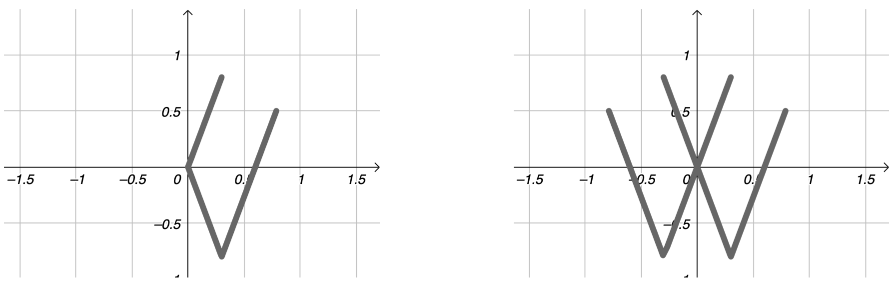
$$f_2 = \frac{8}{3}|x - 0,3| - 0,8.$$

Nyní musíme určit, pro které $x > 0,3$ bude funkce nabývat hodnoty $y = 0,5$. Vzhledem k požadavku na hodnotu x si můžeme dovolit odstranit absolutní hodnotu s kladným znaménkem a řešíme tak lineární rovnici

$$\begin{aligned} 0,5 &= \frac{8}{3}(x - 0,3) - 0,8 \\ \frac{8}{3}x &= 0,5 + 0,8 + 0,8 \\ x &= \frac{63}{80} = 0,7875. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Získali jsme tak horní mez pro omezení definičního oboru a můžeme psát kompletní předpis

$$f_2(x) : y = \frac{8}{3}|x - 0,3| - 0,8, \quad x \in \langle 0; 0,7875\rangle.$$



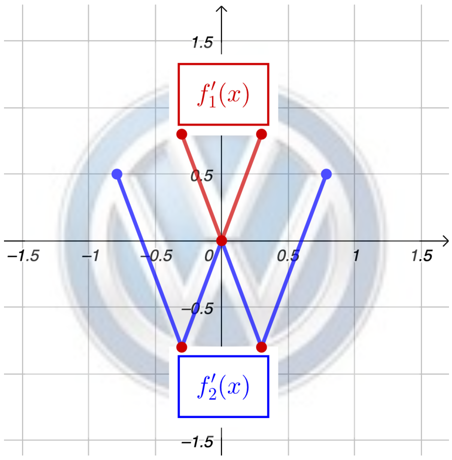
(a) (b)

Obrázek 3.13: Využití osové souměrnosti.

Výše určené funkce $f_1(x)$ a $f_2(x)$ nám stačí k vykreslení pravé části loga. K vytvoření levé části využijeme nástroj GeoGebry *osová souměrnost* (viz obrázek 3.13).

Přístup 2: Druhou možností, jak uchopit rozložení loga na funkce, je využít pouze lineární funkce s absolutní hodnotou. Jako základ poslouží již získaný předpis 3.15 z odvození výše. Ten přímo odpovídá horní části loga označené na obrázku 3.14 jako $f'_1(x)$, a proto můžeme rovnou psát

$$f'_1(x) : y = \frac{8}{3}|x|, \quad x \in \langle -0,3; 0,3 \rangle.$$



Obrázek 3.14: Aproximace s využitím absolutní hodnoty.

Pro spodní část loga, označenou jako $f'_2(x)$, vystavíme předpis opět v několika krocích:

i) Nejprve funkci $f'_1(x)$ posuneme po ose y a získáme předpis

$$f'_{21} = \frac{8}{3}|x| - 0,8.$$

ii) Nyní je nutné absolutní hodnotu využít na získanou funkci, abychom získali požadovaný tvar, dostáváme

$$f'_{22} = \left| \frac{8}{3}|x| - 0,8 \right|.$$

iii) V posledním kroku získanou funkci f'_{22} opět posuneme po ose y a dostáváme tak konečný předpis

$$f'_2(x) = \left| \frac{8}{3}|x| - 0,8 \right| - 0,8.$$

Zbývá omezit definiční obor, k čemuž využijeme již získaného výsledku 3.16, kdy v důsledku osové souměrnosti loga bude dolní mez pouze opačnou hodnotou horní meze. Dostáváme tak

$$f'_2(x) : y = \left| \frac{8}{3}|x| - 0,8 \right| - 0,8, \quad x \in \langle -0,7875; 0,7875 \rangle.$$

Výsledek tohoto přístupu je stejný jako na obrázku 3.13b. Vidíme, že výstup příliš neodpovídá původnímu logu, takže budeme pokračovat v úpravách. Základní kontura, kterou jsme získali, je velmi dobrou aproximací i výchozím bodem pro další práci. Zůstaneme u druhého přístupu konstrukce, který pro další práci bude výhodnější. V původním logu se vyskytuje kontura zdvojená. Uvědomíme si, že zdvojení můžeme dosáhnout relativně jednoduchým posouváním vytvořených funkcí ve směru nebo prosti směru osy y a následně úpravami definičního oboru. Přístupů, jak dosáhnout požadovaného výsledku, bude jistě více, nicméně v rámci této práce nabídneme dva. Vybírala jsem je s cílem poskytnout každému žákovi možnost zažít úspěch s ohledem na jeho individuální možnosti. Někteří najdou svůj limit během výpočtu předpisů funkcí, které představují základní konturu loga. Pro ně pak GeoGebra slouží jako nástroj, díky němuž metodou „pokus-omyl“ mohou vnímat další souvislosti mezi změnami v předpisu a grafickým výstupem. Posuny vytvořených křivek budou provádět přímo v programu a budou se snažit dosáhnout co největší podobnosti s předlohou. Na druhé straně spektra budou žáci, kteří budou pracovat s přesnými výpočty, na jejichž základě teprve provedou konstrukci. Tento přístup je určitě z hlediska matematiky náročnější, proto je vhodné žáky za jeho provedení motivačně ohodnotit, například formou bonusu, který mohou využít při jiné hodnocené aktivitě. Zároveň je třeba upozornit, že pro výpočty je nutné opravdu přesné měření, čehož u právě zpracovávaného loga nedokážeme dosáhnout.

Finální logo jsme tedy dotvořili zkoušením vhodných kombinací posunů a omezování definičního oboru, abychom dosáhli co největší podobnosti se vzorem. GeoGebra bohužel nenabízí snadné možnosti vybarvení obrazců, přesto můžeme konstatovat, že podobnost s původním logem je více než zřejmá, jak je vidět na obrázku 3.15.

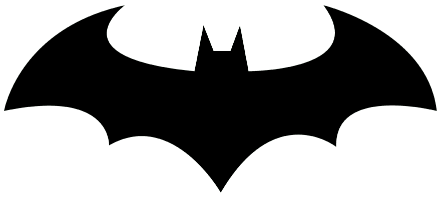
(a) (b)

Obrázek 3.15: Porovnání výsledku s návrhem.

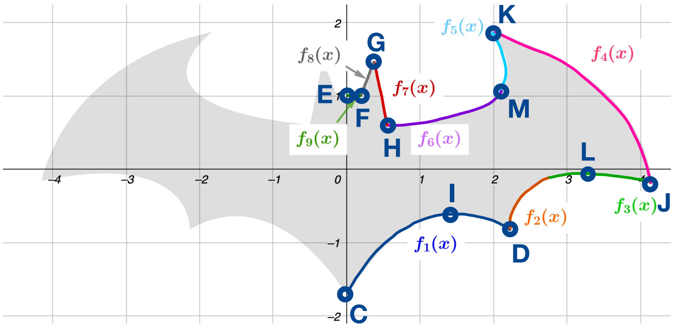
□

Příklad 3.5. *S využitím aproximace pomocí funkcí se pokuste v GeoGebře vytvořit logo uvedené na obrázku 3.16.*

Řešení. Je zřejmé, že v tomto případě si už nevystačíme pouze s lineárními funkcemi a absolutní hodnotou, jak tomu bylo v příkladu 3.4. S výhodou zde opět využijeme osovou souměrnost podle osy y. V prvním kroku si umístíme obrázek do kartézské soustavy souřadnic a vytvoříme návrh funkcí, které bychom v aproximaci mohli použít. Budeme se zabývat pouze jednou, konkrétně pravou, stranou loga, jak vidíme na obrázku 3.17. Zde jsou navrženy i body, ze kterých vyjdeme při definování předpisů konkrétních funkcí.



Obrázek 3.16: Logo k zadání příkladu 3.5.



Obrázek 3.17: Zpracování návrhu v kartézské soustavě souřadnic.

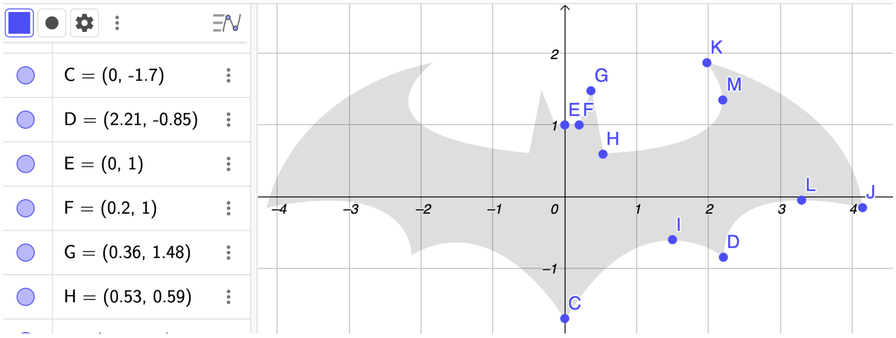
Navržené funkce

$f_1(x)$	- kvadratická funkce	$f_5(x)$	- logaritmická funkce
$f_2(x)$	- lineární lomená funkce	$f_6(x)$	- logaritmická funkce
$f_3(x)$	- kvadratická funkce	$f_7(x)$	- lineární funkce
$f_4(x)$	- lineární lomená funkce	$f_8(x)$	- lineární funkce
$f_9(x)$	- lineární funkce		

Relativně snadno dokážeme získat předpisy lineárních a kvadratických funkcí. Jediné, co k tomu potřebujeme, jsou souřadnice odhadnutých důležitých bodů. Vzhledem k možnostem práce v GeoGebře můžeme body tak, jak jsou navržené v obrázku 3.17, vytvořit přímo v požadovaných místech a jejich souřadnice odečíst vlevo v *algebraickém okně*, jak vidíme na obrázku 3.18.

K určení předpisů lineárních funkcí nám budou stačit pouze krajní body. Předpis grafu kvadratické funkce se bude nejlépe určovat z vrcholového tvaru paraboly(3.3). Budeme tedy potřebovat krajní body, které svými x-ovými souřadnicemi budou vymezovat definiční obor, a navíc bod, který představuje vrchol paraboly. Ten se budeme snažit odhadnout jako bod s nejvyšší (případně nejnižší) y-ovou souřadnicí křivky, kterou chceme aproximovat parabolou.

Všimněme si, že v návrhu není umístěn bod, ve kterém dojde k napojení funkcí $f_2(x)$ a $f_3(x)$. Vyznačený bod L představuje pouze odhad vrcholu funkce $f_3(x)$. Napojení není uvedeno z toho důvodu, že k jeho hladkému provedení pro dvě křivky nemají žáci v současné chvíli dostatečné znalosti. Ty přesahují možnosti středoškolské matematiky a s touto problematikou se žáci seznámí až při studiu na vysoké škole. Dokážou ale bod napojení odhadnout vhodným omezením definičního oboru, jak ukážeme níže.



Obrázek 3.18: Vyznačení důležitých bodů pro určení předpisů funkcí.

- ***Kvadratická funkce*** $f_1(x)$

  Výše uvedené informace o hledání předpisu kvadratické funkce hned ukážeme v praxi. Hledáme kvadratickou funkci $f_1(x)$, pro kterou jsme odhadli krajní body $C = [0; -1,7]$ a $D = [2,21; -0,85]$, které vymezují definiční obor. Zároveň jsme jako nejvyšší bod křivky odhadli bod $I = [1,5; -0,6]$, který představuje vrchol paraboly. Dosazením souřadnic bodu I do vrcholového tvaru předpisu 3.3 dostaneme

  $$y = a \cdot (x - 1,5)^2 - 0,6,$$

  kde a je hledaný koeficient, který určuje výsledný tvar paraboly. Jeho hodnotu získáme dosazením jednoho z krajních bodů, výhodnější je v tomto případě pracovat s bodem C. Po úpravách získáme hodnotu $a = -\frac{22}{45}$, a tedy předpis

  $$f_1(x) : y = -\frac{22}{45}(x - 1,5)^2 - 0,6, \quad x \in \langle 0; 2,2 \rangle.$$

- ***Kvadratická funkce*** $f_3(x)$

  Tato funkce je určená svým vrcholem, který jsme umístili do bodu $L = [3,3; -0,05]$, a svým krajním bodem $J = [4,15; -0,15]$. Druhý krajní bod je rovněž přechodem mezi funkcemi f_2 a f_3, a jak bylo řečeno výše, určíme ho až v okamžiku, kdy získáme předpis pro funkci $f_2(x)$ a vhodným omezením definičních oborů obou funkcí dosáhneme plynulého (tzn. hladkého) přechodu mezi funkcemi. Prozatím tedy funkci omezíme vrcholem L a krajním bodem J. Analogicky předchozímu postupu určíme obecně vrcholový tvar

  $$y = a \cdot (x - 3,3)^2 - 0,05$$

  a dosazením souřadnic bodu J určíme koeficient $a = -0,1384$. Dostáváme tak předpis

  $$f_3(x) : y = -0,1384(x - 3,3)^2 - 0,05, \quad x \in \langle 3,3; 4,15 \rangle.$$

- ***Lineární funkce*** $f_7(x)$

  Funkce je určena body $G = [0,36; 1,48]$ a $H = [0,53; 0,59]$. Dosazením těchto bodů do obecného předpisu lineární funkce 3.1 dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 1,48 &= a \cdot 0,36 + b \\ 0,59 &= a \cdot 0,53 + b, \end{aligned}$$

jejímž řešením jsou koeficienty $a = -\dfrac{89}{17}$ a $b = \dfrac{286}{85}$, a tedy získáme předpis

$$f_7(x) : y = -\frac{89}{17}x + \frac{286}{85}, \quad x \in \langle 0,36; 0,53 \rangle.$$

- ***Lineární funkce*** $f_8(x)$

  Postup určení předpisu je shodný s předchozí funkcí $f_7(x)$. Řešením soustavy rovnic dostaneme koeficienty a, b a výsledný předpis

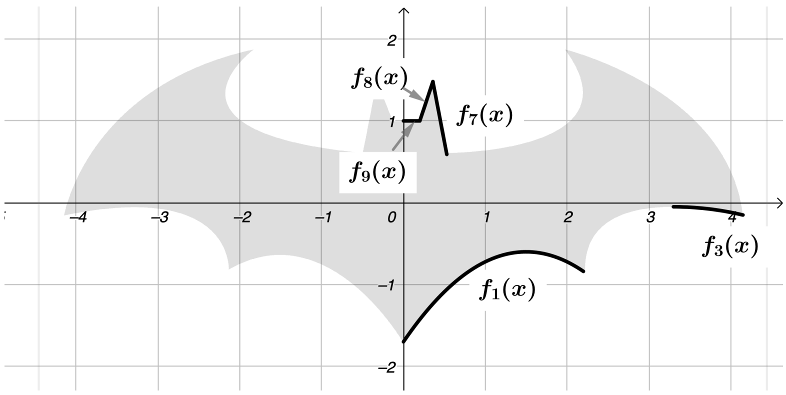
$$f_8(x) : y = 3x + 0,4, \quad x \in \langle 0,2; 0,36 \rangle.$$

- ***Lineární funkce*** $f_9(x)$

  Poslední z uvedených jednoduchých funkcí je triviální konstantní funkce s předpisem

$$f_9(x) : y = 1, \quad x \in \langle 0; 0,2 \rangle.$$

Aktuálně získaný výsledek je znázorněn ukazuje obrázek 3.19. Pro zbývající funkce



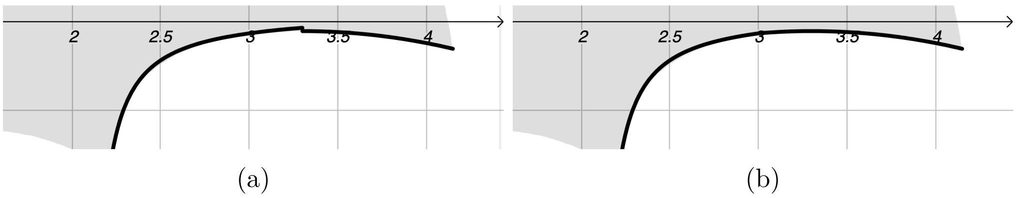
Obrázek 3.19: Části určené jednoduchými funkcemi.

už nedokážeme určit přesný předpis pouze z odhadnutých bodů. S ohledem na aktuální znalosti žáků si dovolíme postupovat metodou „pokus-omyl“. Vyjdeme ze základního předpisu pro graf funkce, kterou jsme vybrali pro daný úsek, a pomocí úprav v předpisu docílíme požadovaného zakřivení a umístění tak, aby výsledek co nejvíce odpovídal podkladu. V rámci toho se zaměřujeme na již získané znalosti o chování grafů funkcí v důsledku změn v předpisu, konkrétně změny zakřivení a posuny.

- ***Lineární lomená funkce*** $f_2(x)$

  Tato funkce bude navazovat na již získanou funkci $f_3(x)$. Naším úkolem není pouze nalezení předpisu pro funkci $f_2(x)$, ale rovněž zjištění bodu, ve kterém budou funkce nejlépe navazovat. Začneme posunem základní funkce $y = \frac{1}{x}$ a snažíme se najít předpis ve středovém tvaru podle 3.4. Jedním krajním bodem pro omezení definičního oboru je bod D, tedy přechod mezi funkcemi $f_1(x)$ a $f_2(x)$. Druhý krajní bod zkusíme ponechat až v bodě L. Uspokojivého tvaru funkce dosáhneme s předpisem

$$f_2(x) : y = -\frac{2}{17(x-2,08)} + 0,07, \quad x \in \langle 2,21; 3,3 \rangle.$$



Obrázek 3.20: Napojení funkcí v závislosti na omezení definičních oborů.

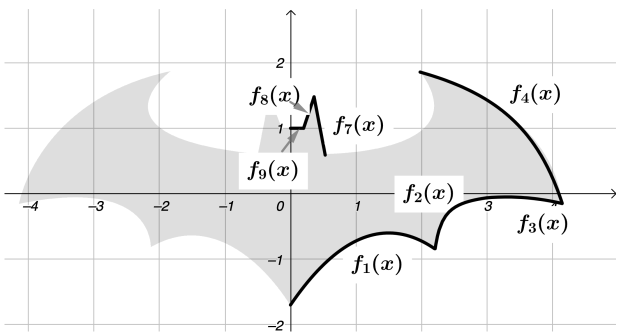
S výše nastaveným omezením definičních oborů funkcí $f_2(x)$ a $f_3(x)$ na sebe ovšem křivky nenavazují. Důvodem je rozdílná funkční hodnota pro krajní bod definičních oborů, konkrétně pro $x = 3,3$ dostáváme $f_2(x) = -0,026$ a $f_3(x) = -0,05$. Rozdíl je patrný i na obrázku 3.20a. Pokud bychom napojení chtěli určit přesně, musíme najít takové x, pro které $f_2(x) = f_3(x)$, což nás ale zavede na řešení rovnice třetího stupně, které na úrovni střední školy najít neumíme. Zbývá tedy zkusit pouze odhadnout, kde by mohl být rozdíl funkčních hodnot natolik minimální, aby se napojení funkcí jevilo plynulé. Dostatečně přesné je v naší aproximaci napojení v bodě $x = 3$, kdy $f_2(x) = 0,058$ a $f_3(x) = -0,06$, tedy rozdíl funkčních hodnot je pouhým okem nepostřehnutelný, jak je vidět na obrázku 3.20b.

Nově tak pro funkci $f_3(x)$ platí $x \in \langle 3; 4,15 \rangle$ a pro funkci $f_2(x)$ platí $x \in \langle 2,21; 3 \rangle$.

- ***Lineární lomená funkce*** $f_4(x)$

  Opět vyjdeme ze základního předpisu $y = \frac{1}{x}$ a úpravami získáme předpis pro odpovídající křivku

$$f_4(x) : y = \frac{2,736}{x-5,1} + 2,735, \quad x \in \langle 1,98; 4,15 \rangle.$$

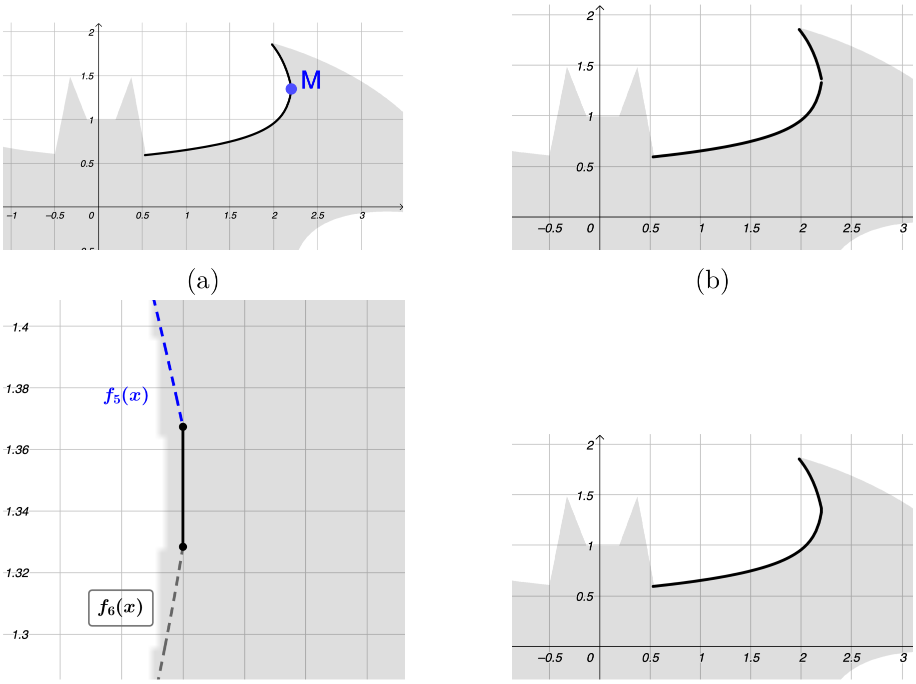


Obrázek 3.21: Částečně zpracované logo.

Nyní už podle obrázku 3.21 zbývá dokončit poslední část, kterou budeme aproximovat logaritmickými funkcemi.

- ***Logaritmické funkce*** $f_5(x)$ ***a*** $f_6(x)$

  Vzhledem k tomu, že máme aproximovat funkcemi, není možné, abychom pro jednu hodnotu x získali dvě různé hodnoty y. Proto poslední křivku rozdělujeme na dvě části a podobně jako u funkcí $f_2(x)$ a $f_3(x)$ bychom ideálně měli dosáhnout plynulého přechodu mezi křivkami.



(a) (b) (c) (d)

Obrázek 3.22: Napojení funkcí.

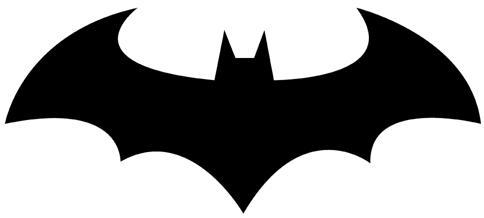
Jako vhodný přechod se jeví bod $M = [2,2; 1,35]$, jak je znázorněno na obrázku 3.22a. Postupnými úpravami předpisu logaritmické funkce jsme dosáhli maximální shody s předlohou pro následující předpisy

$$f_5(x) : y = -\frac{2}{5} \log_9 |x - 2,23| + 0,69, \quad x \in \langle 0,53; 2,2 \rangle,$$

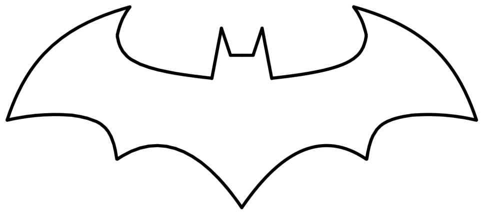
$$f_6(x) : y = \log_{15} |x - 2,28| + 2,3, \quad x \in \langle 1,98; 2,2 \rangle.$$

Jak je vidět na obrázku 3.22b, funkce na sebe v bodě $x = 2,2$ opět nenavazují v důsledku rozdílných funkčních hodnot. Abychom eliminovali mezeru, můžeme aproximovat část mezi koncovými body $f_5(x)$ a $f_6(x)$ úsečkou, jak ukazuje přiblížení na obrázku 3.22c. V konečném rozlišení na obrázku 3.22d nebude toto velké zjednodušení poznat s ohledem na velmi malou reálnou délku úsečky. Tento typ úpravy si ale můžeme dovolit pouze proto, že se pohybujeme v úrovni znalostí střední školy a jsme navíc omezeni prací s funkcemi. Samozřejmě by bylo mnohem vhodnější pracovat s křivkami, které bychom dokázali do požadovaného tvaru upravit.

Dokončili jsme tak celou pravou stranu loga. Nyní stačí získané grafy zobrazit v osové souměrnosti podle osy y za pomoci nástroje GeoGebry *osová souměrnost*. Výsledek je k porovnání s původním návrhem na obrázku 3.23.



(a)



(b)

Obrázek 3.23: Porovnání předlohy a výsledku k příkladu 3.5.

Pokud bychom se použití nástroje osové souměrnosti chtěli vyhnout, můžeme využít sudosti funkce *absolutní hodnota*. Stačí v předpisech upravit všechna x na $|x|$ a tutéž změnu provést v definičních oborech. Získáme stejný výsledek, jako je na obrázku 3.23b. Předpisy funkcí s využitím absolutní hodnoty jsou uvedeny v příloze v tabulce 6.1 na str. 96.

□

3.3 Cíle a příprava projektu

Projekt je zaměřen na mezipředmětovou spolupráci s důrazem na aplikaci matematiky. Cílem je ukázat schopnosti žáků při práci s grafy elementárních funkcí a zároveň poskytnout žákům možnost si matematiku opět ukázat v reálném světě. Spolupráce na projektu je rozvíjena mezi matematikou a předměty hudební, resp. výtvarná výchova, v souladu s ŠVP GFK. Projekt je složen ze dvou na sebe navazujících částí. V první z nich žáci pracují na přípravě grafického návrhu ve výchovných předmětech. V druhé části se snaží své grafické návrhy aproximovat pomocí grafů elementárních funkcí a svůj matematický model vykreslit v GeoGebře. Kdykoliv se níže budeme zmiňovat o elementárních funkcích a jejich grafech, máme na mysli ty, které jsou uvedeny v kapitole 3.2.1 a kapitole 3.2.2.

Než žáci přistoupí k části matematické, je potřebná součinnost s vyučujícími obou výchovných předmětů. V hudební výchově se žáci v daném ročníku seznamují s hudbou z období klasicismu a romantismu. Učí se rozpoznat zásadní díla dané doby a vytvářet tzv. *musicogramy*. Musicogram je grafický zápis poslouchané skladby, který se snaží zaznamenat jak melodii, tak harmonii a rytmus skladby v jednoduchých obrazcích. Zároveň odráží celkovou strukturu poslouchané skladby. Jedná se o nástroj pro podporu aktivního poslechu hudby. V rámci hudební výchovy může být cílem práce s musicogramy analýza skladby bez osobních emocí (do grafu se nepromítá, jestli se hudba žákům líbí nebo ne), práce se strukturou skladby (stejné obrazce pro stejné části), případně grafické vnímání hudby. Právě musicogramy budou vstupem do matematické části projektu.

Ve výtvarné výchově žáci pracují s písmem, typografií a mikrotypografií, vytvářejí vlastní návrhy písma a návrhy loga. Pro tuto skupinu žáků bude východiskem pro matematickou část jejich vlastní logo.

V okamžiku, kdy mají žáci připravené své vstupní návrhy, se může projekt posunout do fáze matematického modelování. Jak bylo řešeno výše, úkolem je využít znalostí grafů elementárních funkcí, pokusit se najít v návrzích podobnosti křivek s grafy funkcí a tyto křivky vybranými funkcemi aproximovat. Na základě vytvořeného matematického modelu žáci vykreslí jednotlivé části funkcí do GeoGebry a vytvoří tak co nejpřesnější kopii svého grafického návrhu.

Tento projekt si rovněž klade za cíl nabídnout žákům částečně pohled do reálného světa. Ve svých budoucích profesích se můžou setkat se situací, kdy vstupní data (informace, vzorky, návrhy, apod.) bude nutné upravit předtím, než budou zadány na zpracování softwarem. V rámci projektu se učíme grafické návrhy před vykreslením v GeoGebře upravit a zjednodušit tam, kde je to potřeba.

3.4 Požadavky na žáky

V rámci projektu bude každý žák pracovat samostatně a bude navazovat na podklady vytvořené v hudební nebo výtvarné výchově. V případě, že si žák nedokáže v rámci výchovného předmětu připravit grafický návrh k dalšímu zpracování, bude jeho úkolem najít si nějaké již existující logo, které předem předloží ke schválení a ke kterému následně bude tvořit matematický model.

Jednotlivé kroky projektu

1. Vytvořit grafický návrh (případně sehnat si grafický návrh).
2. Rozložit návrh na části a pokusit se je aproximovat grafy elementárních funkcí.
3. Vytvořit předpisy funkcí tak, aby na sebe jednotlivé části navazovaly.
4. Matematický model zadat do GeoGebry.
5. Porovnat grafický návrh s počítačovým zpracováním.

Ke splnění projektu je nutné odevzdat písemnou práci s předem definovanou strukturou a zdrojový soubor z GeoGebry. Obojí bude odevzdáno do připraveného zadání v Microsoft Teams.

Požadavky na písemnou práci Každý žák zpracuje svou písemnou práci, která bude splňovat níže definovanou strukturu. Práce bude odevzdána elektronicky ve formátu .pdf do zadání v Microsoft Teams s názvem ve tvaru `prijmeni.pdf`.

1. **Úvod**

   Popis procesu vytváření grafického návrhu ve vazbě na hudební nebo výtvarnou výchovu.

2. **Matematický model**

   (a) Obrázek s grafickým návrhem.

   (b) Rozklad na části, které lze aproximovat pomocí grafů funkcí. Popis funkcí, kterými budou jednotlivé části nahrazeny.

   (c) Předpisy funkcí včetně intervalů z definičního oboru, jejichž složením vznikne požadovaná grafika. Pro lineární a kvadratickou funkci uveďte i postup odvození a výpočtu.

3. **Práce v GeoGebře**

   Výsledný obrázek z GeoGebry.

4. **Závěr**

   Zhodnocení vstupu a výstupu. Reflexe vlastní práce, definování obtížných míst.

Požadavky na soubor v GeoGebře Výsledek v GeoGebře bude graficky upraven tak, aby odpovídal co nejvíce návrhu. Samozřejmostí je sjednocení barev a formátů jednotlivých částí. Pokud si to povaha návrhu žádá, je možné využít nástrojů osové nebo středové souměrnosti.

Časový harmonogram Matematická část projektu je navržena na 8 hodin. V přípravné fázi by žáci měli zvládnout příklady uvedené v kapitole 3.2, která by měla navázat po zvládnutí elementárních funkcí. Během prvních hodin se žáci blíže seznámí s prací v GeoGebře i jejími „nástrahami“. Celkově by žáci i s domácí přípravou měli na projektu pracovat 1 měsíc. Po 14 dnech od zadání musí odevzdat rozpracovaný projekt ke konzultaci. V této fázi má být hotový grafický návrh, částečně navržený rozklad na jednotlivé funkce a vytvořený alespoň jeden konkrétní předpis funkce. Tato část je zohledněna v hodnocení uvedeném v tabulce 3.1, kde je celkový bodový zisk matematického modelu rozdělen na dvě hodnoty.

3.5 Návrh hodnocení

Opět i při tomto projektu máme snahu, aby si žáci odnesli nejen praktický vhled do užití matematiky, ale rovněž aby byli schopní dodržet a respektovat nastavené požadavky na strukturu nebo formátování výstupu. To všechno jsou relevantní nároky zadavatelů, s nimiž se mohou v budoucnu setkat ve svých profesích. Z výše uvedených důvodů jsem navrhovala hodnocení jak praktické, tak i formální stránky práce, včetně dodržení termínu odevzdání.

Hodnocení matematického modelu bylo navíc rozděleno na dvě části. První bylo hodnocení při *povinné konzultaci*, druhou část tvořilo hodnocení *při odevzdání*.

Formální požadavky	
– formát písemné práce pouze .pdf	2 b.
– elektronická podoba písemné práce s názvem `prijmeni.pdf`	2 b.
– zdrojové kódy odevzdané elektronicky s názvem `prijmeni.ggb`	2 b.
– včasné odevzdání písemné práce	10 b.
Struktura písemné práce	
1. Úvod	4 b.
2. Matematický model	
– grafický návrh	5 + 5 b.
– rozklad na části, výběr funkcí	5 + 10 b.
– vytvoření předpisů pro grafy funkcí	5 + 20 b.
3. Práce v GeoGebře	20 b.
4. Závěr	10 b.
Termín odevzdání	
každý den prodlení	-10 b.
od 6. dne při odevzdání práce	-100 b.
neodevzdání práce	nehodnocen

Tabulka 3.1: Návrh hodnocení projektu *funkce*.

3.6 Výsledky projektu a doporučení

Projekt se ukázal být poměrně komplikovaným. Počáteční požadavek, aby žáci nejprve vytvořili všechny předpisy, se ukázal v mnoha případech jako nerealizovatelný. Odvození z definovaných bodů výborně fungovalo pro lineární a kvadratické funkce. U dalších typů funkcí se osvědčil postup, který byl demonstrován v rámci přípravného příkladu 3.5 a jehož kroky jsou shrnuty níže:

a) odhadnout, jaký graf nejlépe odpovídá křivce (lineární lomená, mocninná, logaritmická, exponenciální),

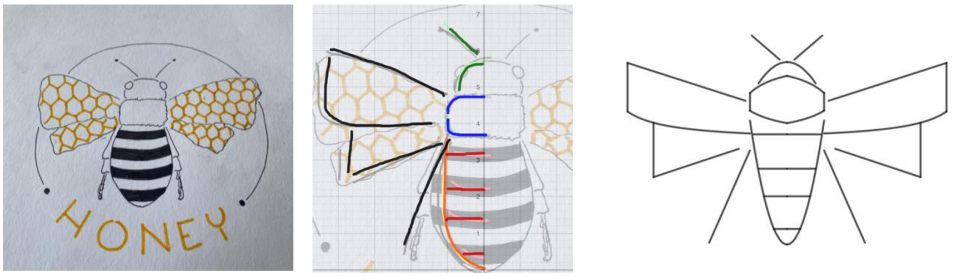
b) vytvořit základní graf odhadnuté funkce,

c) změnami v předpisu graf posunout a změnit jeho tvar tak, aby maximálně odpovídal aproximované křivce.

Tento postup nutil žáky, aby si uvědomili, jaké změny se s grafem dějí při změnách koeficientů v předpisu, na jaká místa musí přidávat konstanty, aby se graf posunul správným směrem, apod. Z tohoto pohledu projekt naplnil stanovený cíl a žáci prokázali, že jsou schopni pracovat s grafy elementárních funkcí a upravit pomocí předpisu jejich tvar do požadované podoby. Zároveň se velmi zdokonalili v práci s GeoGebrou, mimo jiné se naučili využívat absolutní hodnotu a omezení definičního oboru.

Je nutné podotknout, že mnohem lépe se pracovalo žákům, kteří měli návrhy z výtvarné výchovy. Práce s musicogramy byla komplikovanější v tom smyslu, že na první pohled není zřejmý žádný konkrétní tvar, jako je tomu v případě loga. U těchto prací by bylo jistě zajímavé propojení přímo s hudbou a bodem pohybujícím se po vytvořených obrazcích. Pak by i návrhy s musicogramy získaly v očích žáků vyšší kredit. Do dalšího ročníku bych tedy zkusila propojení s jiným předmětem, například s dějepisem, kde si v rámci tématu českého středověku mohou žáci vytvořit návrh vlastního erbu, který by následně aproximovali funkcemi a zpracovali v GeoGebře.

Při této první (pilotní) realizaci se ukázala opět potřeba na přesnější specifikaci a vysvětlení požadavků. Do budoucna bude proto nutné více synchronizovat spolupráci s vyučujícími druhého předmětu. A žákům velmi podrobně vysvětlit, že není jejich úkolem vytvořit grafický návrh tak, aby se skládal pouze z grafů funkcí, ale že princip je opačný. Tedy vytvořit libovolný návrh a pak až hledat možné zjednodušení v podobě grafů funkcí, které již znají. Tento konkrétní přístup bohužel dokázala zvládnout pouze jedna žákyně, jejíž výsledek ukazuje obrázek 3.24. Jedná se o logo vytvořené pro potřeby vybudování značky medu z domácího včelařství.



Obrázek 3.24: Ukázka výsledku v projektu *funkce*.

Ostatní své původní návrhy vytvářeli již s představou matematiky v pozadí. Nedostatek v podobě nejasného zadání se objevoval i v hodnocení práce právě ze strany žáků, takže zdůraznění cíle a způsobu, jak k projektu přistoupit, bude úkolem do dalších let. Součástí hodnocení nebylo posouzení subjektivního vnímání obtížnosti návrhu ze strany učitele. V zadání se neobjevil požadavek na povinné použití některých druhů funkcí. Důvodem byla snaha o individuální přístup k žákům, kteří sami volili obtížnost své práce. Pro některé byla vrcholem samotná práce v GeoGebře a vypořádání se s určením předpisů pro lineární funkci. Jiní svá díla tvořili pomocí několika druhů již probraných funkcí nebo sami nastudovali grafy dalších funkcí (konkrétně goniometrických). Vnímala jsem, že pro většinu třídy není matematika jejich „předmětem číslo jedna“. Přesto jsem se setkala s výsledky, které často předčily mé očekávání a žáci, kteří nepatří v běžných hodinách k těm aktivním, se pustili do opravdu komplikovaných prací. Ukázky jsou uvedené v příloze na str. 96. Povinné zařazení některých funkcí do dalších ročníků zatím nezvažuji právě z výše uvedených důvodů.

Kapitola 4

Statistika a zpracování dat

Statistická analýza bývá oblíbeným typem samostatné práce v matematice na středních školách. Jedná se často o nalezení vhodných datových souborů a jejich statistické zpracování, tedy určení statistických ukazatelů. V rámci projektu ze statistiky bych se ráda zaměřila na celý průběh analýzy dat přizpůsobený znalostem a možnostem žáků střední školy. Cílem připravovaného projektu je nabídnout žákům vhled do celého průběhu práce s daty, tedy získání dat, jejich zpracování a interpretace. Kromě určení statistických ukazatelů má práce za úkol nabídnout žákům rozšířený pohled na interpretaci výsledků. Základní myšlenku jsem čerpala z knihy *Faktomluva* [17], která upozorňuje na dramatizaci a negativní vnímání globálních faktů a jejich často chybnou interpretaci.

Podrobné specifikace jednotlivých kroků projektu jsou uvedeny dále v kapitole 4.4. Tento projekt spadá do kategorie nevyzkoušených, tedy není možné nabídnout výstupy a doporučení na případné změny, jako tomu bylo u předchozích dvou projektů.

4.1 Statistika na středních školách

Při studiu RVP najdeme statistiku jako součást vzdělávacího obsahu *Práce s daty, kombinatorika, pravděpodobnost* ([5], s. 24). Učivo obsahuje práci s daty, která je konkrétně vymezena jako analýza a zpracování dat v různých reprezentacích, statistický soubor a jeho charakteristiky (vážený aritmetický průměr, medián, modus, peercentil, kvartil, směrodatná odchylka, mezikvartilová odchylka). Připravovaný projekt se zaměřuje na dosažení následujících očekávaných výstupů:

- Žák volí a užívá vhodné statistické metody k analýze a zpracování dat (využívá výpočetní techniku).
- Žák reprezentuje graficky soubory dat, čte a interpretuje tabulky, diagramy a grafy, rozlišuje rozdíly v zobrazení obdobných souborů vzhledem k jejich odlišným charakteristikám.

Podle ŠVP GFK je *statistika* zařazena do oktávy (čtvrtého ročníku) v rámci tématu *Pravděpodobnost a statistika*. Zde jsou očekávané výstupy popsány podrobněji a přímo souvisí s některými cíli připravovaného projektu. Jako příklady uveďme, že žák

- sestaví tabulku pro četnost znaku, zvolí a nakreslí vhodný graf,

- určí charakteristiky polohy a variability znaku, vysvětlí jejich význam a vhodnost užití, porovná statistické soubory zadané výčtem hodnot, tabulkou a grafem,
- provede samostatný výzkum (ve zvoleném tématu) a statisticky ho zpracuje v elektronické podobě.

Obecně se na střední škole žáci setkají se základy statistiky a částečně se seznámí s jejím významem pro další obory, kde je nepostradatelná (např. biologie, ekonomie, demografie, pojistná matematika a další). Hlubší znalosti o dělení statistických metod a přístupů, včetně jejich aplikovatelnosti, získají žáci až při svém dalším studiu v rámci vysoké školy.

4.2 Potřebné znalosti

V době zahájení práce na projektu mají žáci prostudovanou statistiku, přesněji řečeno její základy. Před zadáním projektu je vhodné krátce zopakovat pojmy, se kterými se budou žáci dále setkávat, a následně představit praktickou ukázku práce v textovém editoru. Než přistoupíme k opakování, v tomto tématu více než v předcházejících, považuji za vhodné se pozastavit u motivace ke studiu statistiky. Jak v přípravě, tak následně v projektu, se snažím klást důraz na interpretaci výsledků statistického šetření. Důvodem jsou informace, se kterými jsme denně konfrontováni a které formují náš pohled na realitu. Snažím se žáky upozornit na to, že často to, co je prezentováno jako výsledek statistického průzkumu, není v souladu s matematickými principy. Jako úvodní příklad může posloužit běžný článek z tisku (ať už máme na mysli tištěné, nebo elektronické médium).

Příklad 4.1. *Na základě obrázku 4.1 napište krátkou zprávu o ekonomické situaci Čechů a jejich plánech na investice.*[11]

Obrázek 4.1: Graf k zadání příkladu 4.1.

Než se žáci pustí do vymýšlení příběhů, můžeme je navést k prozkoumání validity prezentovaných dat. Otázkou je, proč součet procentuálních úhrnů nedává očekávanou hodnotu 100 %, ale v tomto případě 133 %. Tento příklad má být jednou z hlavních motivací k pochopení základních principů statistiky a reprezentace dat. Má být také podnětem k tomu, aby žáci velmi opatrně nakládali s informacemi, které jsou jim předkládány.

[11] Obrázek je převzatý z článku webového serveru Novinky. cz ([18]).

Vraťme se nyní k opakování pojmů, které mají žáci již zažité. Tentokrát jsem k procvičení zvolila krátký interaktivní kvíz, který poskytne okamžitou zpětnou vazbu jak žákům, tak vyučujícímu. Kvíz jsem vytvářela na platformě `quizizz.com` a je dostupný na https://quizizz.com/admin/quiz/64579bb63e2306001e0fe187?source=quiz_share. Kvíz je možné vyhledat na hlavní stránce platformy po stisknutí tlačítka *Enter code* vpravo nahoře, kde budete vyzvání k zadání názvu *Statistika - teorie* a mezi výsledky hledání již vyberete podle autora (Alexandra Marešová). V příloze na str. 99 je k dispozici kvíz tiskové verzi pro případ, že by nebylo možné pracovat on-line.

Dále shrneme základní terminologii s krátkým popisem.

- **Statistika** je v širším slova smyslu veškerá činnost spojená se získáním dat, jejich zpracováním a hodnocením výsledků.
- **Statistický znak** x je společná vlastnost jednotlivých dat, kterou chceme zkoumat, například věk, výška, hmotnost, místo trvalého bydliště, místo narození apod.
- **Hodnota znaku** $x_1, x_2, \dots$ je konkrétní údaj znaku. V případě číselné hodnoty se jedná o znaky *kvantitativní*, naopak v případě hodnoty vyjádřené slovy se jedná o znaky *kvalitativní*.
- **Četnost hodnoty znaku** n_j $(\, j = 1, 2, \dots, r,\ r < n)$ je číselně vyjádřený počet, kolikrát se daná hodnota vyskytuje v souboru s n hodnotami. Podíl četnosti hodnoty znaku vůči celkovému počtu prvků v souboru se nazývá *relativní četnost hodnoty znaku*, zpravidla se vyjadřuje v procentech a je určena jako

$$\nu_j = \frac{n_j}{n}. \tag{4.1}$$

- **Histogram** je grafické znázornění četností hodnoty znaku. Jedná se o sloupcový graf, kde na vodorovnou osu bývá vynášena hodnota znaku (případně interval) a na svislou osu odpovídající četnost.
- **Statistické charakteristiky** představují jednu konkrétní hodnotu udávající souhrnnou informaci o statistickém znaku. Zejména se jedná o *charakteristiky polohy* a *charakteristiky variability*.
- **Charakteristiky polohy** udávají střední (průměrnou) hodnotu sledovaného znaku. Patří mezi ně
  - *aritmetický průměr:*
  $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$
  - *geometrický průměr:*
  $$\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$
  - *harmonický průměr:*
  $$\overline{x}_H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}},$$
  - *modus:* hodnota znaku s největší četností,

- *medián:*

$$\mathrm{Med}(x) = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{když } n \text{ je liché,} \\ \dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right), & \text{když } n \text{ je sudé.} \end{cases}$$

Hlavním rozdílem je vhodnost jejich využití. Například aritmetický průměr není vhodný pro data, která obsahují hodnoty extrémně vzdálené od většiny (ať už vysoké, nebo nízké). V takových případech bývá lepší charakteristikou medián. Modus je vhodné využít v okamžiku, kdy chceme určit hodnotu znaku s nejčastějším výskytem.

- **Charakteristiky variability** určují proměnlivost znaku, tedy jedná se o hodnotu, která specifikuje odchylku od zvolené charakteristiky polohy. Patří mezi ně zejména
  - *variační rozpětí:*

$$R = x_{\max} - x_{\min},$$

  - *rozptyl:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,$$

  - *směrodatná odchylka:*

$$s_x = \sqrt{s_x^2},$$

  - *variační koeficient:*

$$v_x = \frac{s_x}{\overline{x}}.$$

  Variační rozpětí udává orientační hodnotu variability. Směrodatná odchylka udává tzv. *absolutní chybu*, tedy informaci o tom, „jak moc se získané hodnoty mohou lišit od skutečnosti“. Bývá vyjádřená v jednotkách daného znaku, což může být komplikací v okamžiku, kdy chceme porovnávat. Obecnější je variační koeficient, který ukazuje proměnlivost znaku bez ohledu na jednotlky a který udává tzv. *relativní chybu*.
- **Korelace** vyjadřuje závislost (vztah) mezi dvěma pozorovanými veličinami.

Po zvládnutí teorie je vhodné žáky provést praktickou částí zpracování dat. V následujícím příkladu projdeme důležité body práce s tabulkovým procesorem, které žáky při zpracování projektu mohou potkat. Pracovat budeme v *MS Excel*, který je stále nejrozšířenějším a pro naši statistickou práci rovněž dostačujícím softwarem.

Příklad 4.2. *Statisticky zpracujte data v souboru* `data_statistika.xlsx`. *Určete základní charakteristiky polohy i variability, vytvořte histogram četností, určete, v jaké podobě jsou data více variabilní, a vhodně interpretujte výsledky.*

Řešení. Příklad by měl pro většinu žáků představovat opakování a rozšíření dosavadních znalostí práce v softwaru. Data v souboru představují hodnoty známek z nějakého předmětu mezi žáky jednoho ročníku. Známky jsou vyjádřeny procenty (standardní způsob hodnocení na GFK) a rovněž jako přepočet procent na jednu hodnotu (státní známku). Budeme hledat charakteristiky pro obě vyjádření.

Na začátek žákům připomeneme, jakým způsobem se v softwaru pracuje s funkcemi a jak lze vzorce z jedné buňky „roztáhnout“ do buněk sousedních. Pro většinu statistických ukazatelů existují funkce, je možné sestavit přehled těch základních, k čemuž můžeme zvolit dva přístupy podle časových možností. Buď žákům předložíme vyplněnou tabulku s názvy funkcí, nebo je necháme, aby si tabulku s pomocí různých zdrojů doplnili sami. Pro účely této práce předkládám v tabulce 4.1 shrnutí funkcí použitých v tomto konkrétním příkladu. To by pro studenty mělo být dostatečným základem ke zvládnutí jejich projektů.

Popis ukazatele	**Funkce**
počet hodnot v dané oblasti	POČET(hodnota1; hodnota2; ...)
aritmetický průměr	PRŮMĚR(číslo1; číslo2; ...)
modus	MODE(číslo1; číslo2; ...)
medián	MEDIAN(číslo1; číslo2; ...)
maximální hodnota	MAX(číslo1; číslo2; ...)
minimální hodnota	MIN(číslo1; číslo2; ...)
rozptyl	VAR.P(číslo1; číslo2; ...)
směrodatná odchylka	SMODCH.P(číslo1; číslo2; ...)
četnost	ČETNOSTI(data; hodnoty)
logaritmus při daném základu	LOGZ(číslo; základ)

Tabulka 4.1: Funkce MS Excel použité pro zpracování příkladu 4.2.

Výsledek vypočtených charakteristik polohy a variability ilustruje obrázek 4.2. Zároveň můžeme vyslovit první dílčí závěr plynoucí ze získaných výsledků - variabilita hodnot zadávaných jednou známkou je vyšší než u hodnocení v procentech.

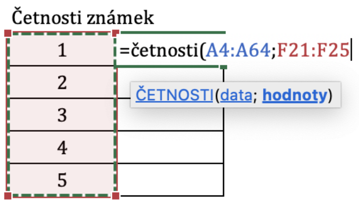
Poloha	%	známka
průměr	59	3
modus	73	3
medián	60	3

Variabilita	%	známka
maximum	96	5
minimum	21	1
variační rozpětí	75	4
rozptyl	372,5289	1,536684
směrodatná odchylka	19,30101	1,23963
variační koeficient	33%	40%

Obrázek 4.2: Výsledky základního zpracování dat v MS Excel.

Konkrétní jsou jedním ze způsobů reprezentace výsledků, nicméně často využívaným je především grafické zpracování. V našem příkladu si ukážeme dva přístupy k vytvoření histogramu, který poskytuje prvotní informaci o rozdělení („rozprostření“) dat v souboru. Je z něj na první pohled vidět, jaká hodnota se vyskytuje nejčastěji, případně v jakém intervalu se objevuje nejvíce hodnot.

Nejprve vytvoříme histogram pro známky zadané v běžném intervalu 1 až 5. Použijeme funkci ČETNOSTI k určení počtu výskytů jednotlivých hodnot v datovém souboru. Proces a výsledky ukazuje obrázek 4.3.



(a)

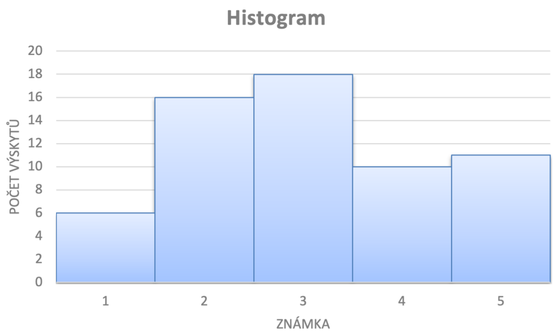
Četnosti známka

1	6
2	16
3	18
4	10
5	11

(b)

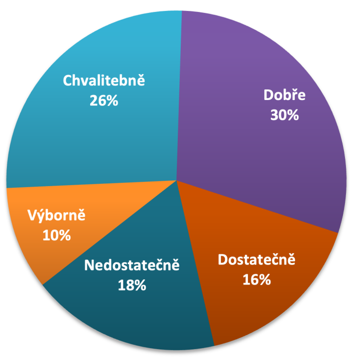
Obrázek 4.3: Určení četností výskytu jednotlivých hodnot v souboru.

Na základě získaných hodnot vytvoříme *sloupcový graf*, který můžeme ještě upravit tak, aby mezi sloupci nebyla mezera, dostáváme tak histogram v podobě ukázané na obrázku 4.4.



Obrázek 4.4: Histogram četností známek.

Pro tento příklad si ukážeme i vytvoření *koláčového grafu* pro relativní četnosti, ve kterém známky vyjádřené číslicí zaměníme za běžně užívaný slovní popis. Relativní četnosti získáme na základě vztahu (4.1) a jejich zobrazením dostáváme graf na obrázku 4.5.



Obrázek 4.5: Procentuální zastoupení jednotlivých známek.

Nyní se podíváme na tvorbu histogramu pro hodnocení vyjádřené v procentech. V tomto případě máme k dispozici velké množství různých hodnot, histogram vytvořený pro všechny z nich najednou nemá žádnou vypovídací hodnotu o rozložení dat. Z toho důvodu jednotlivé hodnoty třídíme do intervalů, pro které následně opět určujeme četnosti. Rozdělení do intervalů určíme pomocí tzv. *Sturgesova pravidla*. To je jedním z přístupů, pomocí něhož lze stanovit „rozumný“ počet intervalů (tříd) v závislosti na celkovém počtu dat a který se řídí vzorcem

$$k = 1 + 3,33 \cdot \log n,$$

kde k je počet intervalů (tříd) a n je celkový počet dat. Pro velikost intervalu platí

$$h = \frac{R}{k},$$

kde R je variační rozpětí. Na základě počtu a velikosti tříd vytvoříme jednotlivé intervaly a pro ně určíme četnosti. Výsledky jsou shrnuty na obrázku 4.6 a intervalový histogram ukazuje obrázek 4.7

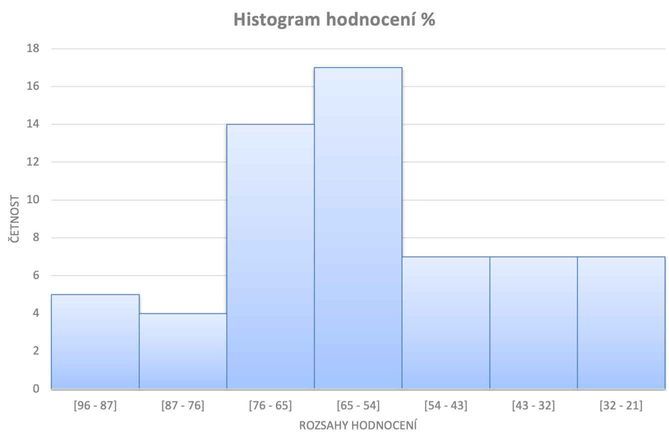
Sturgesovo pravidlo

k =	6,89159
h =	10,8828
šířka intervalu	11

Spodní hranice	Četnost
21	2
32	5
43	7
54	7
65	17
76	14
87	4
96	5

Interval	Četnost
[96 - 87]	5
[87 - 76]	4
[76 - 65]	14
[65 - 54]	17
[54 - 43]	7
[43 - 32]	7
[32 - 21]	7

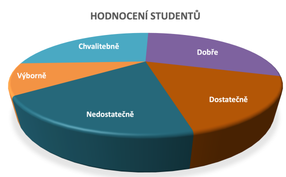
Obrázek 4.6: Výpočet šířky intervalu.



Obrázek 4.7: Histogram pro intervaly.

Tím jsme zpracovali základní statistickou analýzu a můžeme interpretovat výsledky. Známkování jednou hodnotou je v porovnání se známkováním procenty více variabilní, tedy více rozptýlené kolem střední hodnoty. Z obou histogramů plyne, že nejčastěji udělovaná známka je trojka, resp. hodnota z intervalu 54 % až 65 %. Tomu odpovídá i vypočítaný průměr a medián. Modus spadal pro hodnocení procenty se svojí hodnotou 73 do vyššího intervalu. Na základě statistického šetření nemůžeme o výsledcích říci nic dalšího než to, co jsme konstatovali výše. Z dat nedokážeme vyslovit hodnocení na kvalitu třídy, nemáme srovnání s jinými třídami ani dalšími předměty.

Protože náš budoucí projekt se má zaměřovat i na problematiku nevhodné interpretace dat, ukážeme si, jak snadno můžeme grafický výstup změnit a „prodat“ informaci, kterou chceme interpretovat. V dnešním světě se daří informacím buď s velkým negativním nádechem, nebo přinejmenším sdělujícím velkou senzaci. S takovým úmyslem můžeme předložit i námi zpracované výsledky žáků. Provedeme drobnou změnu v zobrazení grafu na obrázku 4.5. Přidáme prostorový pohled, vynecháme informaci o procentech a graf „správně“ natočíme. Výsledek ukazuje obrázek 4.8, ke kterému stačí přidat přitažlivý titulek, např. „Příliš vysoké nároky na studenty?“, a doplnit text například o to, že výsledky studentů ukazují, jak vysoké nároky na ně klade dnešní školní systém. Pro ukázku není třeba se příliš rozepisovat, žáci při svých projektech jistě popustí uzdu své fantazii a dokáží zpracovat zajímavé články. Nicméně stále bychom měli mít na paměti, že cílem je ukázat, jak snadno můžeme podlehnout iluzi zprostředkované nevhodnou grafickou interpretací. Na závěr přípravy bych žákům nabídla prostudování článku z roku 2015 ([19]), který uveřejnil server *www.idnes.cz* a který upozorňuje právě na problematiku nevhodně interpretovaných dat.



Obrázek 4.8: Ukázka manipulace grafického výstupu.

□

Jedním ze stěžejních míst přípravy na projekt je dostatečná informovanost žáků. Měli by si uvědomit, že si v rámci projektu budou práci na průzkumu pouze zkoušet. Reálné požadavky na získání relevantních dat totiž podléhají poměrně striktním kritériím, ať už bychom se bavili o množství respondentů vstupujících do dotazníkového šetření. Další podmínkou je rovnoměrné zastoupení mužů a žen, případně všech věkových kategorií. Samozřejmě konkrétní výběr se odvíjí od informace, kterou s pomocí dotazníku máme za úkol získat. Ve zkratce by mělo zazník, že z odpovědí od deseti respondentů, kteří všichni spadají do jedné věkové kategorie, můžete těžko vyslovit závěr týkající se například spokojenosti obyvatel s životem v dané lokalitě.

4.3 Cíle a průběh projektu

Jak již bylo zmíněno výše, projekt si klade hned několik cílů. Jedním z nich je nabídnout žákům možnost zažít práci s daty od samého začátku, tzn. od vlastního získání relevantních dat. Zde můžeme narazit na problém, že někteří žáci nebudou ochotni se pustit do přímého dotazování neznámých lidí. V takovém případě si musí vybrat téma projektu takové, jehož data budou záviset na pozorování a zkoumání objektů či jevů. Dalším cílem je procvičení práce v tabulkovém procesoru, osvojení si některých jednoduchých funkcí a příkazů. A nakonec je cílem ukázat, jakým způsobem je možné s výsledky analýzy manipulovat ve prospěch podpory uričtého vnímání skutečnosti.

Projekt by měl probíhat v několika fázích. V přípravné fázi by měli žáci vytvořit strategii pro získání potřebných dat pro zpracování jejich tématu. Ve svých skupinách se tedy musí rozhoudnout, jaký má být výstup jejich stastistické analýzy. Tzn. položit si otázku, na kterou chtějí svým „průzkumem" odpovědět a na jejímž základě zvolí vhodný způsob získání dat. Je možné, že někteří budou mít problém s osobním dotazováním. V takovém případě do hry dříve zmiňované rozdělení rolí ve skupině, přechod na téma, ve kterém bude možné data získat pouze pozorováním nějakého jevu. Pokud se skupina rozhodne pro dotazování, musí si sama vytvořit dotazník, který poskytne relevantní odpovědi. Podobně pokud skupina bude sbírat data pozorováním, musí si ujasnit, jaké ukazatele budou sledovány. V obou případech je zapotřebí kvalitní příprava, aby získávání dat bylo efektivní a přineslo potřebné výstupy.

Následovat bude část získání dat. K tomu účelu by bylo nejvhodnější vyčlenit jeden den po domluvě s vedením školy a ostatními kolegy. Během jednoho dne by měli žáci ve svých skupinách nasbírat potřebná data, která následně budou zpracovávat. Jedním z úkolů tohoto projektu je „dostat" žáky mimo zdi školní budovy, aby i v rámci matematiky mohli pracovat v jiném prostředí. V závislosti na vybraných tématech je možné zvolit strategii průběhu dne. V zásadě jsou dvě možnosti - stanovit si místo a hodinu setkání na začátku dne, kde každá skupina nahlásí, na jakých místech v rámci města se bude zdržovat. Následně si stanovit čas a místo setkání na konci dne, aby žáci ukázali, že získali potřebná data. Druhou možností je nechat začátek otevřený (je možné, že povaha některých projektů si bude vyžadovat pozorování v ranních hodinách) a stanovit si pouze místo a čas setkání na konci dne, kdy se žáci opět prokáží nasbíranými daty.

V další části budou žáci přenášet data do elektronické podoby a pak proběhne jejich zpracování v tabulkovém procesoru. Zde se zaměří na třídění dat a určení statistických ukazatelů pro svá data. Součástí této části bude grafické zpracování dat a výsledků. V této fázi by se měli ve skupině rozhodnout, jakou zvolí strategii pro manipulaci s daty, tedy jakým způsobem budou své výsledky chtít interpretovat. Na základě vybrané interpretace vytvoří novinový článek, který bude obsahovat zmanipulované výsledky a bude prosazovat určitý konkrétní postoj.

Poslední částí projektu bude prezentace výsledků žákovských prací. Zástupci z jednotlivých skupin spolužákům představí téma svého projektu, způsob získání i zpracování dat, přednesou výsledky a seznámí s možnostmi ovlivňování vnímání „reality" v důsledku různě podaných informací. Prezentace by měla proběhnout ve dvou na sebe navazujících hodinách. Zakončena by měla být diskuzí nad jednotlivými tématy a vrstevnickým hodnocením, které v tomto případě proběhne už pouze formou slovní zpětné vazby.

Výstupem, který by bylo možné veřejně prezentovat, jsou vzniklé novinové články, které by bylo možné vystavit na chodbách školy. Zároveň si však troufám říci, že někteří žáci dokáží přijít i s naprosto seriózními průzkumy, s jejichž výsledky by pak bylo vhodné seznámit relevantní správní orgány.

4.4 Požadavky na žáky

V tomto projektu se opět zaměříme na skupinovou práci, kdy na zvoleném tématu bude pracovat ideálně jedna čtyřčlenná skupina. Protože se jedná o práci v posledním ročníku střední školy, nechala bych rozdělení do skupin na rozhodnutí žáků. V rámci skupiny se žáci domluví na tématu, které pro ně bude zajímavé ke zpracování, a dojde opět k rozdělení rolí. Nicméně podmínkou pro úspěšné splnění projektu bude, aby se všichni ve skupině účastnili sběru dat, která následně projdou statistickým zpracováním.

Žákům pro začátek nabízím následující obecná témata, která mohou uchopit a rozpracovat dle vlastního uvážení:

- **Kalita bydlení v Plzni:** Téma je poměrně rozsáhlé a záleží, jakou optikou jej žáci budou chtít prozkoumat. Mohou se zaměřit na spokojenost obyvatel v některých konkrétních oblastech nebo naopak na nedostatky, které by obyvatelé chtěli řešit. Základem pro zpracování bude vytvoření vhodného dotazníku, na základě něhož získají žáci odpovědi, jež budou vstupními daty pro zpracování.

  Návrhy na zpracování

  - porovnat věkové složení v jednotlivých městských částech - odhad potřebné občanské vybavenosti ve vazbě na věk obyvatel,
  - porovnat názory na kvalitu bydlení ve sledovaných oblastech pro vybrané městské části - směřování ke zlepšení podmínek tam, kde vyplynulo nejvíce nedostatků.

- **Analýza MHD:** Zaměření na zkoumání zpoždění různých linek MHD v Plzni dává opět několik možností, jak téma uchopit. Další podtéma, které může spadat do této kategorie, je dotazníkové šetření využití MHD jako hlavní dopravy mezi obyvateli města s cílem odkrýt důvody, proč obyvatelé MHD nevyužívají.

  Návrhy na zpracování

  - vybrat si jednu linku, několikrát ji projet a zaznamenávat případné zpoždění na jednotlivých zastávkách - odhalit, zda v některém konkrétním úseku opakovaně dochází ke zpoždění, a zkusit odhadnout důvody,
  - v rámci tramvajových linek zaznamenávat zpoždění na jedné konkrétní zastávce v průběhu dne s cílem zjistit, jestli existuje nějaká denní doba, ve které dochází ke zpožďování opakovaně, a navrhnout možné řešení situace,
  - na základě vytvořeného dotazníku zjistit, jak je využívána městská hromadná doprava, a případně odhladit důvody, kvůli kterým využita není.

- **Statistika školního prostředí:** V tomto tématu se nabízí prozkoumat výsledky studentů v jednotlivých předmětech napříč ročníky. Dále je možné analyzovat hodnocení chlapců a dívek, například k ověření nebo vyvrácení všeobecně uznávané představy, že dívky bývají úspěšnější v humanitních a chlapci v přírodovědných předmětech.
- **Školní bufet:** Téma je zaměřené na konkrétní školu, v tomto případě na GFK, kde je v dopoledních hodinách provozován školní bufet. Opět existuje několik pohledů, kterými se lze na analýzu podívat s ohledem na informaci, kterou chceme získat.

  Návrhy na zpracování

  - skladba nakupovaného sortimentu - zjistit, po jaké kategorii zboží je největší poptávka,
  - nejčastější návštěvnící - prozkoumat složení návštěvníků bufetu, z jakých jsou ročníků, případně konkrétních tříd,
  - dotazníkovým šetření zjistit, kolik žáků (případně i učitelů) využívá bufet a jak často, jaký sortiment nakupují a jaký sortiment jim chybí.

Po získání potřebných informací bude úkolem žáků provést statistické zpracování získaných dat a připravit prezentaci výsledků, jejímž cílem bude mimo jiné ukázat možnou manipulaci s daty. Žáci si zvolí stanovisko, které chtějí „prodat“ v rámci své prezentace, a data, resp. jejich reprezentaci upraví tak, aby odpovídala dané volbě. Zároveň připojí porovnání s reálnými výsledky. Snahou je ukázat, že v rámci prosazování některých rozhodnutí či plánů může docházet ze strany různých představitelů nebo médií ke zkreslování skutečnosti, která ovlivňuje mínění a postoje veřejnosti. Kromě prezentace bude výstupem zpráva o výsledcích průzkumu v podobě, v jaké by se mohla objevit v novinovém článku.

Požadavky na soubory k odevzdání Pro hodnocení práce je důležitý nejen výsledek, ale především zpracování. Ke splnění projektu bude nutné za skupinu odevzdat následující soubory v požadovaných formátech

1. data a jejich zpracování v tabulkovém procesoru ve formátu `tema.xlsx`,
2. zpráva do novinového článku ve formátu `tema.pdf`,
3. prezentace o průběhu a výsledcích projektu ve formátu `tema.pptx`.

Prezentace i novinový článek budou obsahovat grafické zpracování dat, které odpovídá zvolené interpretaci.

Požadavky na zpracování dat Data budou v elektronické podobě v jednom listu souboru. Minimální počet dat, která projdou zpracováním, je 30. Na dalším listu budou s pomocí funkcí tabulkového procesoru určené četnosti a relativní četnosti sledovaného znaku (nebo znaků) a dále charakteristiky polohy i variability statistického souboru. Tento list bude doplněn o graf (případně grafy), který vizuálně reprezentuje data a výsledky statistického zpracování. Poslední list souboru bude obsahovat buď dotazník, nebo připravené archy pro sběr dat.

Požadavky na prezentaci Délka prezentace je stanovena na 10 minut maximálně. Prezentovat bude jeden zástupce skupiny. Úkolem prezentace bude seznámit spolužáky s vybraným tématem, představit jim průběh sběru dat, jejich zpracování a nakonec ukázat interpretaci výsledků. V rámci posledního kroku bude cílem ukázat, jak je možné s výsledky manipulovat ve prospěch prosazení nějakého konkrétního požadavku.

Požadavky na článek Článek bude obsahovat jméno autora, případně autorů. Cílem bude mediálně zajímavě informovat o výsledcích průzkumu. Součástí článku bude graf, který podpoří interpretaci výsledků. Článek může být doplněn i o ilustrační fotografii.

Výše navržená témata nejsou jediná možná, ale můžeme je považovat za „záchytná“, pokud by žáci nedokázali přijít s tématem, které jim bude bližší a které by oni sami chtěli zpracovat. Naopak, pokud si vyberou jiné téma, musí ho předem nechat schválit vyučujícím.

4.5 Návrh hodnocení

V posledním ročníku na GFK jsou žáci většinou zaneprázdněni vytvářením svých ročníkových prací. Z toho důvodu jsem pro tento projekt zvolila jiný druh výstupního textu, než je písemná práce. V rámci hodnocení je kladen hlavně důraz na tři oblasti - získání dat, jejich zpracování a následná prezentace. Možné hodnocení je znázorněno v tabulce 4.2.

Formální požadavky	
zpracovaná data ve formátu `tema.xlsx`	5 b.
novinový článek ve formátu `tema.pdf`	5 b.
prezentace ve formátu `tema.pptx`	5 b.
dodržení termínu (odevzdání všech tří souborů)	10 b.
Sběr dat	
příprava dotazníků nebo archů pro sběr dat	10 b.
získání potřebných dat ke zpracovnání	10 b.
Zpracování dat	
statistické zpracování	10 b.
grafické zpracování	10 b.
Novinový článek	
příprava ovlivněných dat	10 b.
článek	5 b.
Prezentace	
dodržení času	5 b.
představení tématu a jeho zpracování	5 b.
ukázka manipulace s výsledky	10 b.

Tabulka 4.2: Návrh hodnocení statistického projektu.

Kapitola 5

Návrhy dalších projektů a modifikace stávajících

Výše navržené projekty jsou podrobně zpracované a dva z nich prošly i pilotní realizací. Z té mimo jiné vyplynulo, že projektová výuka matematiky je možná. Níže si dovolím nabídnout už jen rozpracované myšlenky na realizaci dalších projektových témat, které však nejsou v současné chvíli dokončené. Nicméně mají potenciál k tomu, aby byly zařazeny do výuky matematiky.

5.1 Geometrie ve městě

Myšlenkou tohoto projektu je spojit geometrii v rovině i v prostoru nejen s výpočty, ale i s vnímáním svého okolí. Projekt je zaměřený na geometrii, která dle RVP ([5], str. 25) obsahuje následující učivo:

- geometrie v rovině,
- geometrie v prostoru,
- trigonometrie,
- analytická geometrie v rovině.

Projekt by se měl věnovat především naplnění následujících očekávaných výstupů, kdy žák

- využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému,
- v úlohách početní geometrie aplikuje funkční vztahy, trigonometrii a úpravy výrazů, pracuje s proměnnými a iracionálními čísly,
- řeší planimetrické a stereometrické problémy motivované praxí,
- využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření.

Zařazení do konkrétního ročníku bude opět záviset na konkrétním typu školy, pokud se budeme řídit ŠVP GFK ([7], str. 109), spadá problematika do učiva septimy (3. ročníku). Před zahájením projektu by žáci měli mít znalosti z planimetrie, stereometrie, měli by umět pracovat se základními tělesy, zvládnout určit jejich povrch a objem a s využitím trigonometrie určit reálné rozměry těles. Práce bude opět skupinová, kdy ve skupině by měli být ideálně čtyři žáci. Prvním úkolem každé skupiny bude „procházka“ městem, během které budou sbírat informace o různých geometrických útvarech, jež kolem sebe zaregistrují. Svou cestu by měli graficky zpracovat do mapy města a zapsat, co objevili. Druhou částí úkolu bude výběr jednoho geometrického tělesa (stavby), pro které

- na základě podobností a s využitím trigonometrie určí reálné rozměry tělesa,
- ve vhodně zvoleném měřítku vytvoří v GeoGebře 3D model tohoto tělesa,
- ve vhodně zvoleném měřítku vytvoří a v GeoGebře narýsují průmět tělesa ve volném rovnoběžném promítání,
- ve vhodně zvoleném měřítku v GeoGebře vytvoří půdorys, bokorys i nárys,
- určí reálný povrch a objem tělesa.

Během vytváření rýsovaných výstupů by měli žáci zvládnout doplnit své „výkresy“ i o reálné rozměry, na každém „výkresu“ by se mělo objevit měřítko, ve kterém žáci pracovali. Výstupem by měla být opět písemná práce, ve které se objeví následující informace:

- mapa s cestou procházky a zakreslenými geometrickými útvary, které skupina potkala,
- všechny obrázky vytvořené v GeoGebře (3D model, průmět, bokorys, půdorys, nárys),
- výpočet pro objem a povrch tělesa.

Zajímavé by bylo opět propojení s výtvarnou výchovou, kde by žáci mohli vytvořit papírové modely na základě získaných dat. I zde by se objevil přesah do matematiky, protože by žáci museli připravit síť modelu. V rámci výtvarné výchovy by své modely mohli doplnit o dokreslené detaily. V případě, že by projekt probíhal na střední odborné škole stavební, navrhovala bych práci samozřejmě v softwaru, ve kterém jsou žáci zvyklí pracovat. Zajímavých výstupem by mohl být model tělesa (stavby) vytvořený na 3D tiskárně, pokud má škola takovou technologii k dispozici. Zároveň má tento projekt s ohledem na navrženou práci s mapu potenciál k propojení se zeměpisem .

Pro žáky gymnázií nabízí tento projekt využití matematiky v reálném světě. Pro žáky odborných škol může být příliš primitivní vzhledem k jejich specializaci. V takovém případě už je na úvaze vyučujícího, jakým způsobem by projekt pro své žáky mohl obohatit.

5.2 Individiuální projekty

Dosavadní uvedené projekty cílily vždy na celou třídu. Ať už se jednalo o práci ve skupině, nebo práci individuální, vždy na projektu pracovali všichni žáci. Jako další typ projektů se nabízí čistě individuální zadání, které může být realizováno v podobě ročníkové práce z matematiky. V takovém případě bývají na zpracování kladené již poměrně vysoké nároky, ať už z hlediska formální stránky, nebo prokázání odborné znalosti. Ročníkové práce také úzce souvisí s tzv. *SOČ*[12] (viz [20]), tedy soutěží, která klade důraz na schopnosti žáků vytvořit samostatnou práci a zároveň rozvíjí jejich prezentační dovednosti v podobě představení své práce a výsledků před odbornou porotou. Při zkoumání oceněných prací z minulých ročníků je patrná velmi vysoká úroveň odbornosti jednotlivých prací.

Matematicky zaměřená ročníková práce s sebou nese i požadavek na korektní matematický zápis. Přestože jeden z nejrozšířenějších textových editorů, *MS Word*, již nabízí možnosti zápisu matematického textu, stále není sazba dostatečně kvalitní. Z toho důvodu je i pro žáky středních škol, kteří mají v plánu se po absolvování střední školy věnovat některému technickému oboru, vhodné se naučit pracovat v sázecím softwaru LaTeX. Jejich práce tak kromě odborné stránky získá vysokou typografickou úroveň. Více o programu a základech je uvedeno v [21].

Níže nabízím dvě témata pro ročníkové práce. Je potřeba vnímat, že se jedná o návrh tématu, které samozřejmě v průběhu zpracování konkrétním žákem může projít zpřesněním a z poměrně široké oblasti se žák může specializovat jen na úzkou problematiku.

Nabídka témat a požadavky na výstupy:

1. **Historie důkazů v geometrii:** Žák najde a prostuduje literaturu související s historií důkazů a historií geometrie. Rozebere různé přístupy v dokazování geometrických zákonitostí z pohledu matematických znalostí, které v době vzniku prvních důkazů měli matematici k dispozici. Zaměří se na vliv analytické geometrie a vybere ukázky problémů, na kterých ukáže jak geometrický, tak algebraický důkaz. Porovná výhody a nevýhody obou přístupů.

2. **Vlastnosti kuželoseček:** Žák má za úkol prostudovat vlastnosti elipsy, paraboly a hyperboly. Dále ukáže možné způsoby konstrukce těchto kuželoseček právě na základě jejich vlastností. V poslední řadě bude cílem se zaměřit na parabolu a její využití při konstrukci Voroného diagramů. Žák popíše vlastnosti Voroného diagramů a jejich uplatnění a vysvětlí postup konstrukce s využitím vlastností paraboly. Výstupem práce navíc bude jednoduchá aplikace, ve které bude postupná konstrukce diagramu demonstrována.

5.3 Úpravy vyzkoušených projektů

Během pilotních realizací vznikly návrhy na rozšíření a úpravy projektů. Nejprve se budu věnovat obecné rovině a následně předložím možnosti pro úpravy již realizovaných projektů. Přestože jsou projekty primárně připravené pro uvedení na gymnáziu, velmi snadno je lze využít i na různých typech středních škol. Podle oborového zaměření si učitelé matematiky mohou konkretizovat požadavky na výstupy. Jako příklad můžeme uvést využití grafů goniometrických funkcí pro elektrotechnické obory, kde předpokládáme znalost těchto funkcí z odborných předmětů. Podobné úpravy jsou možné i pro projekty ze statistiky a finanční matematiky ve vazbě na odborné předměty například na obchodní

[12] středoškolská odborná činnost

akademii nebo střední škole ekonomické. Dále se zaměříme na rozšíření testovaných projektů.

Projekt z finanční matematiky Pokud bychom projekt realizovali v některém z vyšších ročníků gymnázia, bylo by vhodné využít znalosti exponenciálních a logaritmických rovnic. Stačilo by přidat požadavek na výpočet délky splácení vypůjčené částky, pokud bychom znali výši měsíční splátky. Tedy nechat žáky určit, jaká je při nastavených podmínkách nejnižší možná výše splátky, aby doba splácení byla ještě reálná. Další možný pohled je analyzovat míru závislosti délky splácení na výši měsíční splátky.

Při zachování zařazení projektu do 1. ročníku se nabízí rozšířit zadání o „nenadálou událost“. Hlavním cílem této úpravy je připravit žáky na situace, které nastávají a na které nemusí být vždy připraveni. V takovém případě by vyučující měl mít k dispozici přehled, v jaké ekonomické situaci se skupiny při zpracování projektu nachází (single, pár, rodina). Pro každou skupinu je pak potřeba připravit několik situací, ze kterých budou žáci losovat. Příkladem mohou být:

- rozbitá pračka,
- nabourané auto,
- výpověď z bytu,
- dlouhodobá nemoc,
- lyžařský výcvik pro děti.

Losování některé z výše uvedených situací by mělo proběhnout až v průběhu projektu, kdy žáci budou řešit financování v zadaných tématech (viz Kapitola 2.4). Jejich úkolem by mělo být porovnání původního záměru s tím, jak museli svůj přístup změnit ve vazbě na losovanou situaci. Měli by ukázat možná řešení a obhájit jimi vybrané.

Projekt funkce Během zpracování projektu ukázalo relativní omezení, pokud máme pracovat pouze s grafy funkcí. Proto by zadání projektu mohlo proběhnout i ve vyšším ročníku v době, kdy žáci zvládnou pracovat i s rovnicemi základních křivek, tedy kružnicí, parabolou, hyperbolou a elipsou, případně rovnicí přímky, resp. úsečky, kolmé na osu x. Pak by bylo možné celý projekt zapsat opravdu pouze ve formě matematického předpisu a vytvořit poměrně komplikované obrazce. Další omezení můžeme vnímat v práci s GeoGebrou, ve které žáci dokázali vytvořit pouze kontury svých obrázků. Nicméně i vybarvení je možné a to s využitím integrálního počtu. GeoGebra disponuje funkcí k vyznačení plochy pod (resp. nad) grafem funkce s pomocí určitého integrálu. Barvu výplně lze volit a obrázek je tak možné po částech vybarvit.

Zajímavé by bylo zaměřit se i na výstup z projektu. Nabízí se vytvořit plakáty s grafickým návrhem a pouze se seznamem matematických funkcí. Obojí doplnit o QR kód s odkazem na výsledný obrázek, který vznikl v GeoGebře. Taková prezentace v rámci školy, doplněná například poutavým názvem „Co umí matika“ by mohla být motivací pro další žáky a impulem pro změnu jejich vnímání matematiky.

Závěr

Na první pohled se může zdát, že práce obsahuje málo matematiky v rigorózním slova smyslu. V tom případě bychom si měli položit otázku, jakou úlohu sehrává v současné době matematika na střední škole. S rozvojem informačních technologií můžeme nabýt dojmu, že ne všichni musí nutně rozumět pozadí různých výpočtů. Nicméně to, co je stále nezbytné a stěžejní, je rozumět získaným výsledkům. Umět je správně interpretovat, naučit se hledat řešení, dekomponovat velké problémy na menší části, umět řešit situaci postupnými kroky. To vše lze využít v krizovém managementu, lékařství, vedení společností a zároveň se jedná o dovednosti, které se v abstraktním slova smyslu učí právě v matematice.

V práci jsem se zaměřila na projektovou výuku. Vytvořila jsem tři projekty a navrhla několik témat na další. Dva z vytvořených projektů se podařilo vyzkoušet v praxi a získat zkušenosti do dalších ročníků. Každý navržený projekt obsahuje úvodní část, kde jsem se zabývala zařazením příslušného tématu do konkrétního ročníku. Dále jsem navázala opakováním již získaných znalostí. K opakování buď sloužily jednoduché příklady, případně jsem materiály vytvářela v podobě výukových prostředí v GeoGebře nebo interaktivního kvízu na portálu `www.quizizz. com`. Všechny vytvořené projekty dále obsahují přímo příklady s problematikou týkající se samotného projektu, mají přesně definované požadavky na výstupy, formulované zadání pro žáky i navržené hodnocení. Vyzkoušené projekty jsou navíc doplněny výstupy žáků.

Projekt z finanční matematiky byl první, který jsem realizovala. Výstupy z tohoto projektu přinesly první pozitivní zpětnou vazbu na projektovou výuku. Žáci měli v tomto projektu za úkol ve skupinách zpracovat financování konkrétního předmětu, vypočítat splátkový kalendář, porovnat své výpočty s nabídkami finančního trhu a své závěry prezentovat. Úspěšně jsem v tomto projektu využila vrstevnické hodnocení prezentací. Naopak se nepodařilo dostatečně pracovat se softwarem, takže výpočet splátkového kalendáře se přesunul k využívání online kalulaček a porovnání nabídek různých společností.

Druhým realizovaným projektem bylo kreslení obrázku pomocí grafů funkcí. Zde se podařilo mezipředmětové propojení s výtvarnou a hudební výchovou. Žáci měli podle výchovného předmětu buď nakreslit návrh loga pro vlastní značku, nebo vytvořit musicogram na předem určenou skladbu. Grafické návrhy poté aproximovali pomocí grafů známých elementárních funkcí a pouze s využitím předpisů vykreslili loga v GeoGebře. Projekt se ukázal jako poměrně náročný, nicméně si troufnu tvrdit, že každý jednotlivec se posunul. Ať už bych měla hodnotit pouze to, že se žáci naučili pracovat v softwaru a dokázali ovlivnit umístění grafu v kartézské soustavě souřadnic pomocí změn v předpisu funkce.

Posledním zpracovaným tématem byla statistika, nicméně tento projekt už neprošel testováním. Hlavním cílem v tomto projektu bude ukázat možnou manipulaci s grafy. Úkolem žáků bude získat data (pozorováním nebo dotazníkem), data zpracovat a vhodně interpretovat. Při interpretaci si vyzkouší, jak je možné relativně jednoduchými technikami manipulovat s informacemi. Z projektu by si měli odnést dostatečné znalosti k tomu, aby dokázali ovlivněná data odhalit a slepě nedůvěřovali každému grafu, se kterým se setkají.

V závěru práce jsou shrnutá doporučení a možné modifikace vyzkoušených projektů pro uvedení v jiných ročnících nebo na různých typech středních škol. Celá práce nesměřovala svou povahou k hodnocení vlivu projektové výuky na výsledky žáků v matematice. Naopak se snažila mít spíš motivační charakter a ukázat, že matematika ne vždy souvisí jen s počítáním příkladů. Mně samotné práce přinesla cenné zkušenosti do mé budoucí učitelské praxe. Sama pro sebe jsem dokázala najít odpověď na to, čím je „matematika“ na úrovni střední školy. Pro mě se stala kufříkem nástrojů, se kterými je potřeba se naučit pracovat, vědět, že některé lze použít v určitých případech, ale lze je někdy nahradit za jiné. Když se tyto nástroje naučíme využívat při řešení jednoduchých úkolů, budeme je znát natolik, že je dokážeme použít v praxi. Věřím, že projekty jsou cestou, která pomůže žákům získat kladný vztah k matematice.

Literatura

[1] PETTY, Geoffrey. *Moderní vyučování.* 6., rozš. a přeprac. vyd. Přeložil Jiří Foltýn. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0367-4.

[2] KRATOCHVÍLOVÁ, Jana. *Teorie a praxe projektové výuky.* 2. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 2016. ISBN 978-80-210-8163-5.

[3] KASÍKOVÁ, Hana. *Kooperativní učení a vyučování: teoretické a praktické problémy.* Praha: Karolinum, 2001. Učební texty Univerzity Karlovy v Praze. ISBN 80-246-0192-3.

[4] *RVP - Rámcové vzdělávací programy* [online]. MŠMT: © 2022 [cit. 2023-05-07]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/#rozcestnik

[5] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* [online]. Praha: MŠMT, 2007. [cit. 2022-10-15]. Dostupné z: https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/

[6] PRŮCHA, Jan. *Moderní pedagogika.* 2., přeprac. a aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2002. ISBN 80-7178-631-4.

[7] *ŠVP pro vyšší gymnázium* [online]. Plzeň: Gymnázium Františka Křizíka a základní škola, ©2023. [cit. 2023-01-15].
Dostupné z: https://www.krizik.eu/gymnazium/skolni-vzdelavaci-programy

[8] *Školní vzdělávací program* [online]. Plzeň: Plzeňská obchodní akademie s.r.o., ©2019 [cit. 2023-05-05]. Dostupné z: https://poaplzen.cz/studium-a-jeho-organizace/skolni-vzdelavaci-program-svp/

[9] *Školní vzdělávací program, Stavebnictví* [online]. Plzeň: SPŠ stavební, ©2023 [cit. 2023-05-05]. Dostupné z: https://www.spsstav.cz/wp-admin/admin-ajax.php?juwpfisadmin=false&action=wpfd&task=file.download&wpfd_category_id=33&wpfd_file_id=4079&token=&preview=1

[10] *Školní vzdělávací program, Strojírenství*[online]. Klatovy: SPŠ Klatovy, ŠumavaNet.cz [cit. 2023-05-05]. Dostupné z: https://www.klatovynet.cz/spskt/user/deska/dokumenty/web_new/skolni_vz_programy/strojirenstvi_2016.pdf

[11] *Školní vzdělávací program, zaměření všeobecné*[online]. Plzeň: Gymnázium Mikulášské náměstí [cit. 2023-05-05]. Dostupné z: https://www.mikulasske.cz/wp-content/uploads/2020/10/SVP1920v_vse.pdf

[12] *Školní řád*[online]. Plzeň: Gymnázium Františka Křizíka a základní škola, ©2023. [cit. 2023-05-07]. Dostupné z: https://www.krizik.eu/gymnazium/dokumenty-ke-stazeni

[13] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia. Posloupnosti a řady.* 2., upravené vydání. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-195-7.

[14] ODVÁRKO, Oldřich. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2005. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-7196-303-8.

[15] *Www.realisticky.cz* [online]. Martin Krynický, 2010. [cit. 2023-01-30]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz

[16] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.

[17] ROSLING, Hans, Ola ROSLING a Anna ROSLING RÖNNLUND. *Faktomluva: deset důvodů, proč se mýlíme v pohledu na svět - a proč jsou věci lepší, než vypadají.* Přeložila Eva Nevrlá. V Brně: Jan Melvil Publishing, 2018. Pod povrchem. ISBN 978-80-7555-056-9.

[18] BUŘÍNSKÁ, Barbora. *Kam s penězi? Češi plánují utrácet třeba za dovolenou.* In: *Novinky.cz.* [online]. 9. 4. 2023 [cit. 2023-05-07]. Dostupné z: https://www.novinky.cz/clanek/finance-kam-s-penezi-cesi-planuji-utracet-treba-za-dovolenou-40425320

[19] KASÍK, Pavel. *Věříte grafům? Podívejte se, jak jednoduché triky používají manipulátoři.* In: *iDnes.cz.* [online]. 27. 10. 2015 [cit. 2023-05-05]. Dostupné z: https://www.idnes.cz/technet/veda/manipulace-grafy-statistika.A151023_164547_veda_pka

[20] *Středoškolská odborná činnost* [online]. Národní pedagogický institut České republiky [cit. 2023-05-06]. Dostupné z: https://www.soc.cz

[21] RYBIČKA, Jiří. *LATEX pro začátečníky.* 3. vyd. Brno: Konvoj, 2003. ISBN 80-7302-049-1.

Přílohy

6.1 Finanční matematika

6.1.1 Zobrazení zadání v aplikaci

Zadání

Pokyny

Obecné požadavky

- pracovat s reálnými daty (vybrané produkty budou mít uvedený zdroj a práce bude připravená na základě reálných podkladů)
- skupina bude vystupovat v roli single, bezdětný pár nebo rodina
- výdělek bude podložen aktuální průměrnou mzdou, kterou uvádí Český statistický úřad
- při výpočtech je potřeba započítat náklady na živobytí (při výběru finančních produktů dávejte pozor na podmínky poskytnutí úvěrů - někde je nutné dodatečné pojištění, což znamená další výdaje!)
- v rámci své skupiny si rozdělit role - každý by měl přispět, hodnocena bude celá skupina a nejedná se o práci jednotlivce (zaměřte se na svoje silné stránky, buďte manažery, grafiky, výpočtáři, plánaři projektu, prezentujícími, apod.)

<u>Písemná práce:</u> **Složena ze dvou částí - společné a samostatného zhodnocení. Společná část práce by měla být obsahově i graficky jednotná pro všechny členy týmu. Samostatné zhodnocení je individuálním příspěvkem a názorem jednotlivce, nicméně stále je to součást odevzdávané práce, tedy mělo by být graficky sjednoceno se zbytkem textu.**
Povinný obsah:

- jméno autora (toho, který danou práci odevzdává),
- úvod s informacemi o vybraném tématu,
- složení skupiny a rozdělení rolí ve skupině,
- konkrétní vybraný produkt (včetně odkazu),
- možnosti financování,
- návrh a výpočet splátkového kalendáře (doba splácení, uvážení bezpečné výše měsíční splátky),
- úvaha, jak se změní doba splácení nebo výše měsíční splátky v případě, že klient bude disponovat nějakým vstupním kapitálem,
- závěr - názor na nabízené produkty, jejich bezpečnost a vhodnost pro financování vybraného produktu; vlastní návrh optimálního řešení a porovnání vlastních výpočtů s nabídkami na trhu,
- shrnutí zdrojů (všechny webové stránky a jiné zdroje, které jste při práci potřebovali).

Zhodnocení (samostatné):

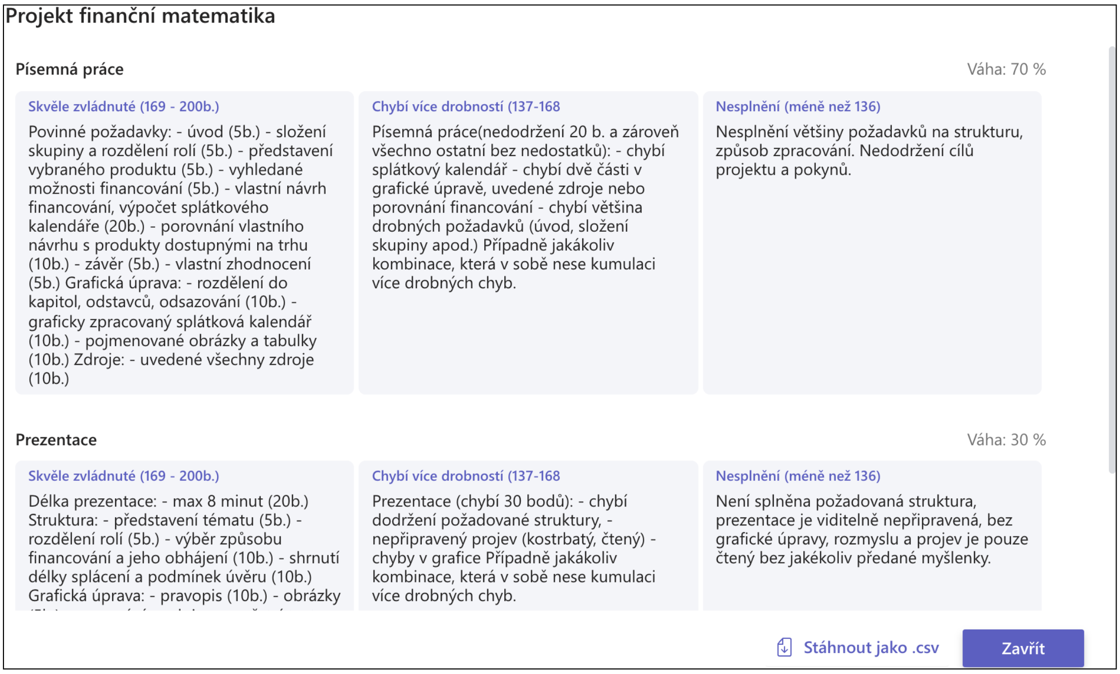
- každý hodnotí individuálně,
- kritické hodnocení vlastního přispění ke zpracování projektu,
- hodnocení práce ostatních členů týmu,
- celkové zhodnocení práce skupiny (jak se dařila komunikace a spolupráce),
- co se povedlo, co se nepovedlo a případně vlastní doporučení na zlepšení do budoucna.

<u>Prezentace</u>

- délka maximálně 8 minut,
- struktura: představení vybraného produktu, představení týmu včetně rozdělení rolí; výběr způsobu financování; shrnutí délky splácení a výše měsíční splátky při různých konfiguracích vstupních parametrů (vlastní úspory, výše akontace, ...); závěr (jak se pracovalo, co bylo nejtěžší, co vás při práci překvapilo, co vás práce naučila)

Obrázek 6.1: Zadání projektu z finanční matematiky v aplikaci Microsoft Teams.

6.1.2 Hodnoticí kritéria v aplikaci



Obrázek 6.2: Ukázka sady hodnoticích kritérií v aplikaci Microsoft Teams.

6.1.3 Hodnocení žáky [13]

„*Líbilo se mi, že každý dělal, co měl a neflákal se. Úkoly byly splněni rychle, ale museli jsme dělat práci na poslední chívli, protože jsme se mohli sejít jen o víkendu a měli jsme jen 2 setkání. Celkově si myslím, že práce nám šla dobře a neměl bych problém pracovat v této skupině znovu.* “

„*Dělala jsem celou prezentaci a řekla bych že to vše bylo vyrovnané. V naší skupině se mi pracovalo dobře a projekt mě moc bavil přestože se jednalo o matematiku.* “

„*Celkově se mi s mými kolegy pracovalo relativně dobře. Komunikace byla však velkým problémem který nás na našich schůzkách nejvíce zdržoval. Mezitim co se polovina týmu utápí v množství práce na jedné straně stolu, na té druhé nemá nikdo co dělat. Tato situace nastala, protože si všichni nepřipravili celkové ceny místností na první setkání. Jako povedené považuji ty hodiny, které nás dostali k finálnímu výsledku. Naopak složité bylo rozdělení práce na schůzkách, to bych zlepšila lepší přípravou potřebných materiálů.*“

„*Myslím si, že úvěry jsou bezpečný a pohodlný způsob jak získat peníze, ale myslím že je zbytečné půjčovat si na věci jako je auto když mé staré stále funguje. Samozřejmě půjčka na dům je něco jiného. S penězi se podle mě musí obecně zacházet opatrně a úsporně, hlavně když mám peníze půjčené.*“

[13] Jedná se o citace bez úpravy textu, tedy včetně pravopisných i stylistických chyb.

6.1.4 Arch pro vrstevnické hodnocení

Název tématu: ....

Složení hodnoceného týmu: ....

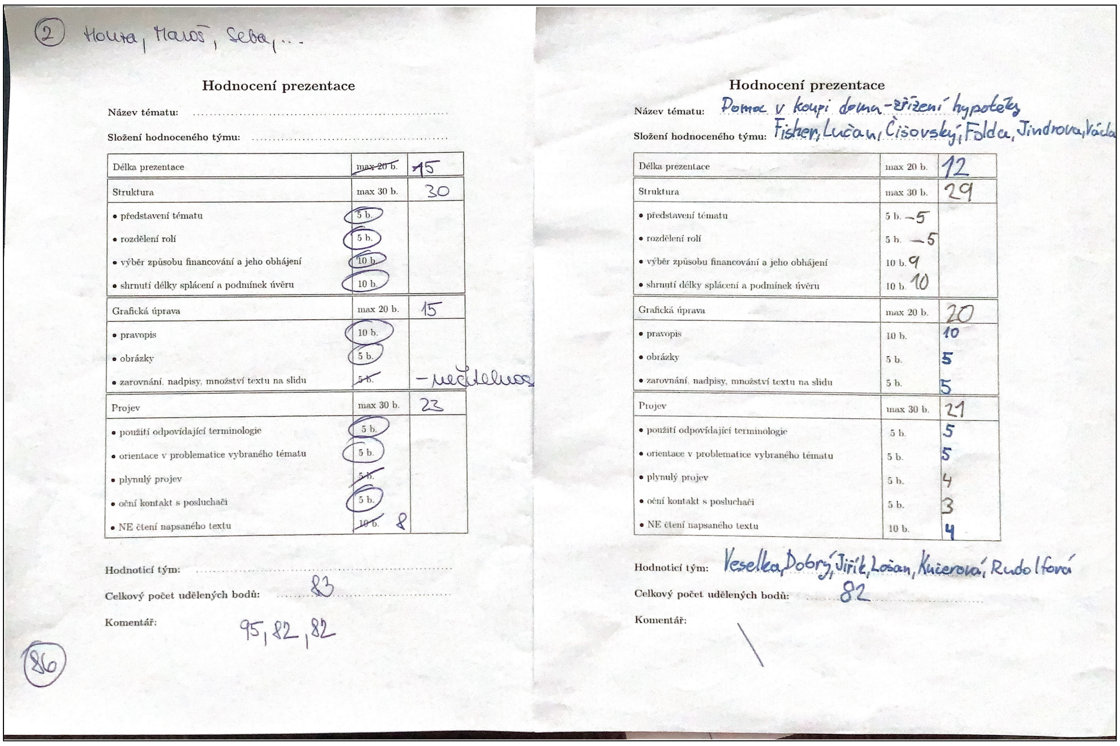
Délka prezentace	max 20 b.	
Struktura	max 30 b.	
• představení tématu	5 b.	
• rozdělení rolí	5 b.	
• výběr způsobu financování a jeho obhájení	10 b.	
• shrnutí délky splácení a podmínek úvěru	10 b.	
Grafická úprava	max 20 b.	
• pravopis	10 b.	
• obrázky	5 b.	
• zarovnání, nadpisy, množství textu na slidu	5 b.	
Projev	max 30 b.	
• použití odpovídající terminologie	5 b.	
• orientace v problematice vybraného tématu	5 b.	
• plynulý projev	5 b.	
• oční kontakt s posluchači	5 b.	
• NE čtení napsaného textu	10 b.	

Hodnoticí tým: ....

Celkový počet udělených bodů: ....

Komentář:

6.1.5 Ukázky vrstevnického hodnocení prezentací



2 Houta, Maroš, Seba,…

Hodnocení prezentace

Název tématu:

Složení hodnoceného týmu:

Délka prezentace	~~max 20 b.~~	15
Struktura	max 30 b.	30
• představení tématu	5 b.	
• rozdělení rolí	5 b.	
• výběr způsobu financování a jeho obhájení	10 b.	
• shrnutí délky splácení a podmínek úvěru	10 b.	
Grafická úprava	max 20 b.	15
• pravopis	10 b.	
• obrázky	5 b.	
• zarovnání, nadpisy, množství textu na slidu	~~5 b.~~	– nečitelnost
Projev	max 30 b.	23
• použití odpovídající terminologie	5 b.	
• orientace v problematice vybraného tématu	5 b.	
• plynulý projev	~~5 b.~~	
• oční kontakt s posluchači	5 b.	
• NE čtení napsaného textu	~~10 b.~~ 8	

Hodnotící tým:

Celkový počet udělených bodů: 83

Komentář: 95, 82, 82

86

Hodnocení prezentace

Název tématu: Pomoc v koupi domu - zřízení hypotéky

Složení hodnoceného týmu: Fisher, Lučan, Čisovský, Folda, Jindrova, Václa

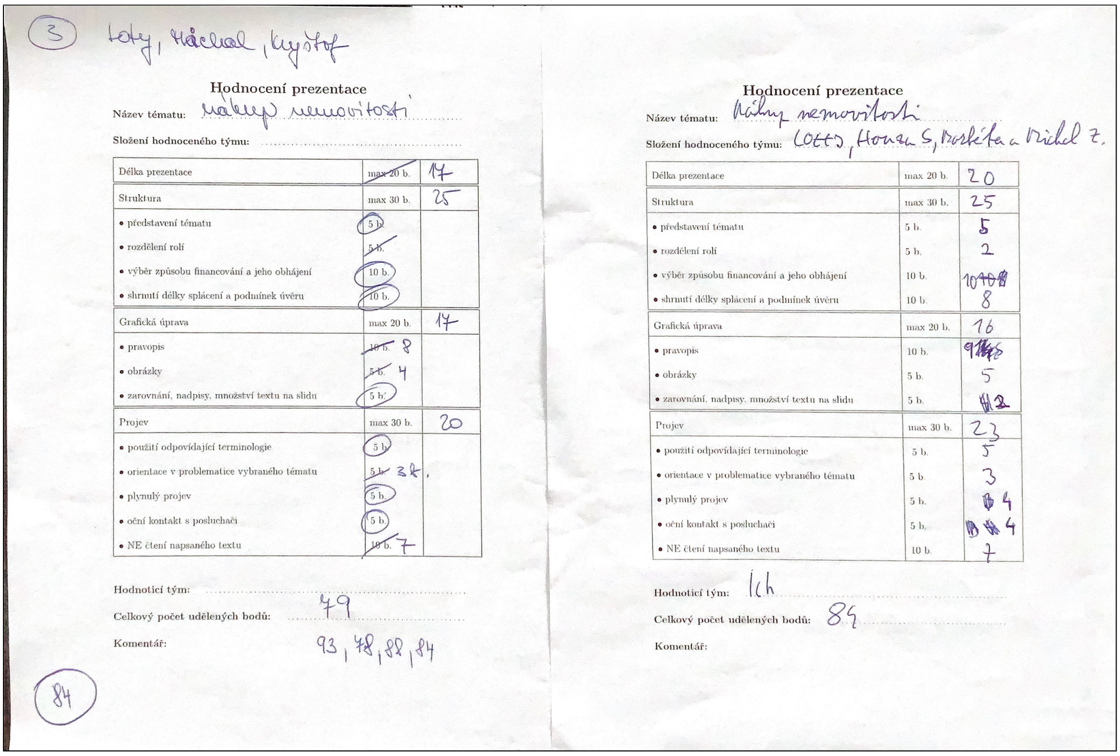
Délka prezentace	max 20 b.	12
Struktura	max 30 b.	29
• představení tématu	5 b. – 5	
• rozdělení rolí	5 b. – 5	
• výběr způsobu financování a jeho obhájení	10 b. 9	
• shrnutí délky splácení a podmínek úvěru	10 b. 10	
Grafická úprava	max 20 b.	20
• pravopis	10 b.	10
• obrázky	5 b.	5
• zarovnání, nadpisy, množství textu na slidu	5 b.	5
Projev	max 30 b.	21
• použití odpovídající terminologie	5 b.	5
• orientace v problematice vybraného tématu	5 b.	5
• plynulý projev	5 b.	4
• oční kontakt s posluchači	5 b.	3
• NE čtení napsaného textu	10 b.	4

Hodnotící tým: Veselka, Dobrý, Jiřík, Lošan, Kučerová, Rudolfová

Celkový počet udělených bodů: 82

Komentář:

(a)



3 Loty, Václav, Kryštof

Hodnocení prezentace

Název tématu: nákup nemovitosti

Složení hodnoceného týmu:

Délka prezentace	~~max 20 b.~~	17
Struktura	max 30 b.	25
• představení tématu	5 b.	
• rozdělení rolí	~~5 b.~~	
• výběr způsobu financování a jeho obhájení	10 b.	
• shrnutí délky splácení a podmínek úvěru	10 b.	
Grafická úprava	max 20 b.	17
• pravopis	~~10 b.~~ 8	
• obrázky	~~5 b.~~ 4	
• zarovnání, nadpisy, množství textu na slidu	5 b.	
Projev	max 30 b.	20
• použití odpovídající terminologie	5 b.	
• orientace v problematice vybraného tématu	~~5 b.~~ 3 ~~4~~	
• plynulý projev	5 b.	
• oční kontakt s posluchači	5 b.	
• NE čtení napsaného textu	~~10 b.~~ 7	

Hodnotící tým:

Celkový počet udělených bodů: 79

Komentář: 93, 78, 88, 84

84

Hodnocení prezentace

Název tématu: Nákup nemovitosti

Složení hodnoceného týmu: Lotto, Honza S, Markéta a Michal Z.

Délka prezentace	max 20 b.	20
Struktura	max 30 b.	25
• představení tématu	5 b.	5
• rozdělení rolí	5 b.	2
• výběr způsobu financování a jeho obhájení	10 b.	10 ~~10~~ ~~8~~
• shrnutí délky splácení a podmínek úvěru	10 b.	8
Grafická úprava	max 20 b.	16
• pravopis	10 b.	9 ~~8~~
• obrázky	5 b.	5
• zarovnání, nadpisy, množství textu na slidu	5 b.	~~4~~ 2
Projev	max 30 b.	23
• použití odpovídající terminologie	5 b.	5
• orientace v problematice vybraného tématu	5 b.	3
• plynulý projev	5 b.	~~3~~ 4
• oční kontakt s posluchači	5 b.	~~3~~ ~~3~~ 4
• NE čtení napsaného textu	10 b.	7

Hodnotící tým: ich

Celkový počet udělených bodů: 84

Komentář:

(b)

Obrázek 6.3: Porovnání vrstevnického hodnocení s hodnocením učitele.

6.1.6 Zpracování koupě domu

Projekt – finanční matematika

H Y P O T E Č N Í   Ú V Ě R

<u>Matyáš Fisher</u> (<u>skupina</u>: Čeňka Jindrová, Hana Václavovičová, Sebastian Folda, Maroš Čišovský, Jan Lučan)

Hypoteční úvěr je úvěr (půjčka) zajištěný zástavním právem k nemovitosti (hypotékou). Běžně se používá ke koupi nemovitosti (domu, bytu, …), k rekonstrukci, k výstavbě nebo k přístavbě nemovitostí.

<u>Rozdělení rolí ve skupině</u>

Matyáš Fisher - <u>mzdový a daňový účetní, hypoteční specialista</u> – výpočet čistých mezd a daňových záloh, tabulky ČSÚ, možnosti financování, potvrzení o příjmech, písemná práce a její grafika

Maroš Čišovský – <u>realitní makléř</u> – informace o bytu v Plzni (prodej bytu a daň z nemovitosti tohoto bytu), vyhledávání ostatních možných domů ke koupi

Sebastian Folda – <u>manažer a kontrolor koupě domu a peněz</u> – informace o domu, návrh a plán oprav domu, finanční náklady na živobytí (s Marošem), závěr, prezentace a její grafika

Jan Lučan – <u>realitní makléř a daňový účetní</u> – úvod a představení projektu, informace o bytu v Praze, daň z nemovitostí a daň z příjmu z pronájmu (daňové přiznání)

Čeňka Jindrová a **Hana Václavovičová** – <u>hypoteční poradkyně</u> – porovnávání hypoték u různých bank, úvaha, druhy hypoték, vypočítání hypotéky, splátkový kalendář

Projekt naší skupiny – hypoteční úvěr

Manželé Vochomůrkovi – manželé 7,5 let. Bezdětní. Bydlí v Plzni, kde se starají o matku paní Vochomůrkové.

Pan **Vochomůrka** - lékař – chirurg (FN Plzeň), stár - 36 let, jeho hrubý měsíční příjem je **84 831 Kč**.

Paní **Vochomůrková** - učitelka (VOŠ Plzeň), 34 let, její hrubý měsíční příjem je **47 431 Kč**.

Výše jejich hrubých měsíčních příjmů – podle tabulek Českého statistického úřadu.

Průměrné hrubé měsíční mzdy lékařů podle ČSÚ

ZDRAVOTNICTVÍ ***HEALTH***

25-22. Průměrná hrubá měsíční mzda lékařů

Average gross monthly wage of physicians

v Kč *CZK*

Rok *Year*	Celkem *Total*	podle pohlaví *Sex*		podle sféry působení *Remuneration sphere*		podle věkových skupin (v letech) *Age group (years)*			
		muži *Males*	ženy *Females*	mzdová sféra *Wage sphere*	platová sféra *Salary sphere*	25–34	35–44	45–54	55+
2015	54 693	62 006	47 812	46 011	64 846	42 692	60 064	60 507	56 620
2016	55 876	64 219	48 584	46 671	68 991	44 425	58 667	62 016	57 904
2017	60 173	69 015	52 487	50 704	73 729	47 655	63 327	66 821	62 465
2018	65 195	74 681	56 972	54 582	80 860	51 922	68 882	72 183	68 275
2019	67 120	76 308	59 361	56 206	85 409	56 067	76 378	77 723	62 805
2020	74 210	83 985	66 012	61 211	95 669	65 772	84 831	86 373	66 711

- https://www.czso.cz/csu/czso/25-zdravotnictvi-pdjjd50qzi - hrubé příjmy lékařů

Průměrné hrubé měsíční mzdy učitelů podle ČSÚ

VZDĚLÁVÁNÍ ***EDUCATION***

24-14. **Průměrná hrubá měsíční mzda učitelů v regionálním školství**

Average gross monthly wages of teachers in regional education

v Kč *CZK*

Rok *Year*	Mateřské školy *Nursery schools*	Základní školy *Basic schools*	Střední školy *Secondary schools*	Konzervatoře *Conservatoires*	Vyšší odborné školy *Higher professional schools*
2010	20 299	25 802	27 156	26 806	28 740
2011	21 025	26 995	27 843	27 729	29 079
2012	23 327	27 332	27 970	27 032	29 365
2013	23 399	27 623	28 157	27 077	29 568
2014	23 720	28 151	28 714	27 801	30 152
2015	24 108	29 005	29 568	29 019	30 525
2016	25 300	30 671	31 160	30 310	31 967
2017	27 089	33 040	33 261	32 645	33 960
2018	30 021	36 623	37 037	36 119	37 401
2019	34 155	42 070	42 438	41 350	41 734
2020	36 591	46 210	46 931	45 278	47 431

- https://www.czso.cz/csu/czso/24-vzdelavani-kr5w72abvz - hrubé příjmy učitelů

Manželé bydlí v panelovém bytě 1+kk (30 m^2, Jižní Předměstí, Plzeň).

Byt vlastní. Byt je velmi malý. Uprostřed města – hluk. Neodpovídá jejich nárokům na pěkné bydlení.

https://reality.idnes.cz/detail/prodej/byt/plzen-skroupova/632c43c79a03d41bc224834b/

Pan Vochomůrka vlastní ještě jeden byt v Praze (41,6 m^2, 2+kk, Chodov – Praha 4), kde bydlel za svobodna. Tento byt již 7 let pronajímají za 14 900 Kč/měsíc. Roční náklady na údržbu tohoto bytu (včetně daň z nemovitosti) dosahují 30 000 Kč.

https://reality.idnes.cz/detail/pronajem/byt/praha-11-krejpskeho/634be7e0930c207a0c0aa651/

Rozhodli se pro koupi malého domku na venkově. Vybírali ze 3 možností. Nakonec si chtějí koupit starší domek (70 m^2, Mrtník, Plzeň – sever). Dům je nabízen za výhodnou cenu - 3 700 000 Kč. Nachází se v žádané lokalitě. Vyhovuje jejich představám. Snadná a rychlá doprava do Plzně. Ideální bydlení.

https://www.bezrealitky.cz/nemovitosti-byty-domy/739045-nabidka-prodej-domu-mrtnik

- vybraný dům v obci Mrtník

https://reality.idnes.cz/detail/prodej/dum/ulice/633d585fcc388a470d3bfb42/ - nepěkný domek, ošklivý vzhled, neodpovídá představám

https://reality.idnes.cz/detail/prodej/dum/nyrany-mikolase-alse/61702377f48ce81948066bd5/

- příliš drahý dům, cena přesahuje cenové představy

Možnosti financování

Možnosti financování bydlení – zajištění koupi nového domu lze:

- hypotékou, půjčkou od rodičů/příbuzných, hotově, úvěrem ze stavebního spoření, spotřebitelským úvěrem, státní podpora

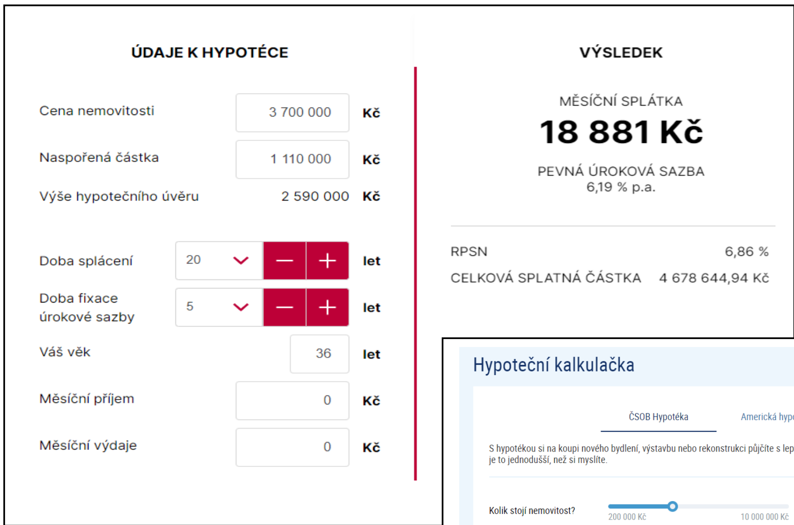
Manželé se rozhodli pro hypotéku, protože se zdá jako nejlepší řešení v dané situace (řešení financování bydlení) – dobrá investice.

Úvaha: V případě, že tito klienti (manželé Vochomůrkovi) disponují nějakým vstupním kapitálem, banka lépe schválí hypotéku (bude požadovat menší záruky), v některých případech může banka nabídnout i výhodnější úrokovou sazbu.

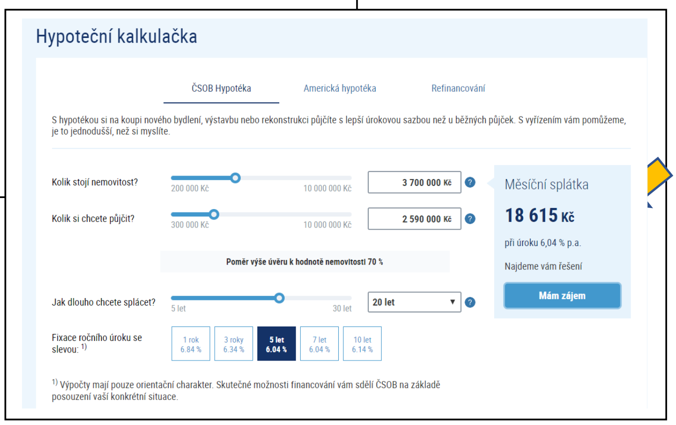
Na běžném účtu mají manželé uloženo 1 500 000 Kč (úspory + z pronájmu pražského bytu /za 7 let/). **Mohou hned použít 1 110 000 Kč** (30% pořizovací ceny domu**) ke koupi nového domu**. Na zbylou částku pořizovací ceny domu chtějí zažádat u banky o **hypotéku** pouze na **2 590 000 Kč** (70% pořizovací ceny domu). Hypotéku budou ručit domem, který si za půjčené peníze koupí. Životní nebo jiné pojištění u banky není třeba (manželé mají dostatek peněz na běžném účtu).

<u>Pro správný výběr srovnávali možnosti hypoték u různých bank</u> - KB, ČSOB, mBank a Neplať nájem (použití hypotečních kalkulaček).

Porovnávali měsíční splátky a úrokovou sazbu (+ RPSN) u bank s dobou fixace na 5 let.

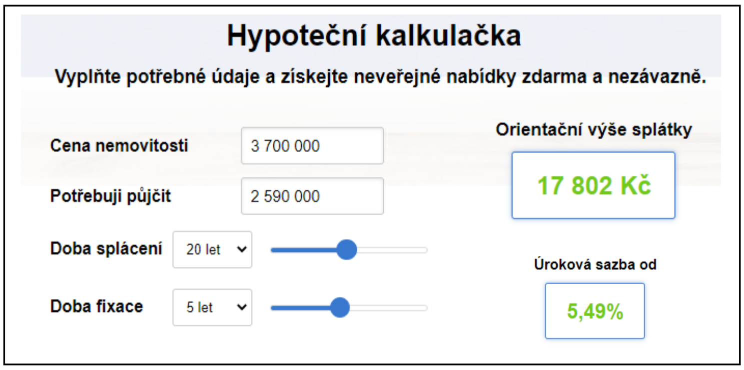


Komerční banka



ČSOB

mBank



Neplať nájem

Jako nejvýhodnější možnost hypotéky zhodnotili půjčku u ČSOB, protože v porovnání s mBankou a KB měla nejlepší nabídku úrokových sazeb (+ RPSN) a měsíčních splátek. U této banky jsou už dlouho klienty. Jedná se o klasickou hypotéku. U společnosti Neplať nájem jsou sice splátky, RPSN i úroková sazba výhodněji, ale tuto společnost neznají, nemají ji prověřenou, nedůvěřují jí.

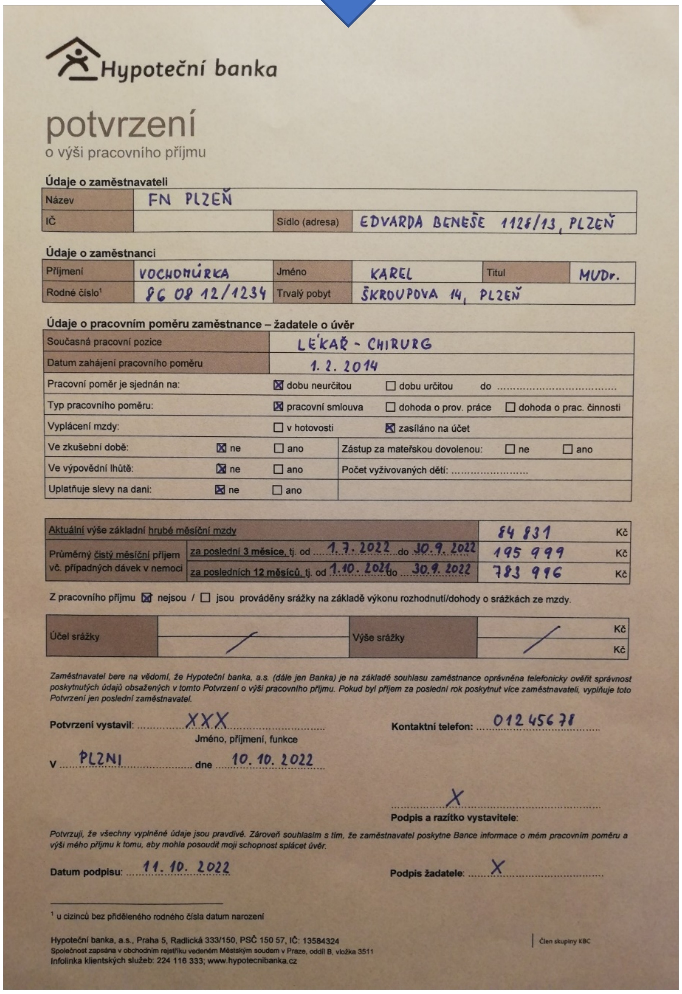
Druhy hypoték – nebankovní hypotéka – hypotéky poskytované nebankovní společností, podobná americké hypotéce

americká hypotéka – jištění nemovitostí k bydlení pro pořízení čehokoliv (např. zájezd, auto).

australská hypotéka – čím vyšší půjčka, tím nižší úroková sazba

dále **hypotéka bez registru, hypotéky pro živnostníky, … atd.**

Při žádosti o hypotéku je nutné dodat bance **potvrzení o zaměstnání a o výši čistých mezd žadatele** (pana Vochomůrky), tak i doklad o výši čistých mezd jeho manželky (v případě, že p. Vochomůrka nemůže splácet hypotéky, dluh přechází na manželku).


Hypoteční banka

potvrzení
o výši pracovního příjmu

Údaje o zaměstnavateli

Název	FN PLZEŇ		
IČ		Sídlo (adresa)	EDVARDA BENEŠE 1128/13, PLZEŇ

Údaje o zaměstnanci

Příjmení	VOCHOMŮRKA	Jméno	KAREL	Titul	MUDr.
Rodné číslo[1]	86 08 12/1234	Trvalý pobyt	ŠKROUPOVA 14, PLZEŇ		

Údaje o pracovním poměru zaměstnance – žadatele o úvěr

Současná pracovní pozice	LÉKAŘ - CHIRURG		
Datum zahájení pracovního poměru	1. 2. 2014		
Pracovní poměr je sjednán na:	☒ dobu neurčitou	☐ dobu určitou	do ....
Typ pracovního poměru:	☒ pracovní smlouva	☐ dohoda o prov. práce	☐ dohoda o prac. činnosti
Vyplácení mzdy:	☐ v hotovosti	☒ zasíláno na účet	
Ve zkušební době: ☒ ne ☐ ano		Zástup za mateřskou dovolenou: ☐ ne ☐ ano	
Ve výpovědní lhůtě: ☒ ne ☐ ano		Počet vyživovaných dětí:	
Uplatňuje slevy na dani: ☒ ne ☐ ano			

Aktuální výše základní hrubé měsíční mzdy		84 831 Kč
Průměrný čistý měsíční příjem vč. případných dávek v nemoci	za poslední 3 měsíce, tj. od 1. 7. 2022 do 30. 9. 2022	195 999 Kč
	za posledních 12 měsíců, tj. od 1. 10. 2021 do 30. 9. 2022	783 996 Kč

Z pracovního příjmu ☒ nejsou / ☐ jsou prováděny srážky na základě výkonu rozhodnutí/dohody o srážkách ze mzdy.

Účel srážky	/	Výše srážky	/ Kč
			Kč

Zaměstnavatel bere na vědomí, že Hypoteční banka, a.s. (dále jen Banka) je na základě souhlasu zaměstnance oprávněna telefonicky ověřit správnost poskytnutých údajů obsažených v tomto Potvrzení o výši pracovního příjmu. Pokud byl příjem za poslední rok poskytnut více zaměstnavateli, vyplňuje toto Potvrzení jen poslední zaměstnavatel.

Potvrzení vystavil: XXX
Jméno, příjmení, funkce

Kontaktní telefon: 012 45678

V PLZNI dne 10. 10. 2022

X
Podpis a razítko vystavitele:

Potvrzuji, že všechny vyplněné údaje jsou pravdivé. Zároveň souhlasím s tím, že zaměstnavatel poskytne Bance informace o mém pracovním poměru a výši mého příjmu k tomu, aby mohla posoudit moji schopnost splácet úvěr.

Datum podpisu: 11. 10. 2022 **Podpis žadatele:** X

[1] u cizinců bez přiděleného rodného čísla datum narození

Hypoteční banka, a.s., Praha 5, Radlická 333/150, PSČ 150 57, IČ: 13584324
Společnost zapsána v obchodním rejstříku vedeném Městským soudem v Praze, oddíl B, vložka 3511
Infolinka klientských služeb: 224 116 333; www.hypotecnibanka.cz
Člen skupiny KBC

Potvrzení o výši pracovního příjmu

Pan Vochomůrka – lékař – výpočet čisté měsíční mzdy

Základ pro výpočet zálohy na daň: 84 900 Kč (u výpočtu zálohy na daň se hrubá mzda zaokrouhluje na stovky nahoru)

Daň před slevami 84 900 Kč x 15% = 12 735 Kč

Slevy na dani 2 570 Kč

Daň 12 735 Kč – 2 570 Kč = **10 165 Kč**

Sociální pojištění 4,5% x 84 831 Kč = **5 515 Kč**

Zdravotní pojištění 6,5% x 84 831 Kč = **3 818 Kč**

Čistá mzda: 84 831 Kč – 5 515 Kč – 3 818 Kč – 10 165 Kč = 65 333 Kč

Čistá mzda pana Vochomůrky je vidět v potvrzení o výši pracovního příjmu.

Paní Vochomůrková – učitelka VOŠ – výpočet čisté měsíční mzdy

Základ pro výpočet zálohy na daň: 47 500 Kč

Daň před slevami 47 500 Kč x 15% = 7 125 Kč

Slevy na dani 2 570 Kč

Daň 7 125 Kč – 2 570 Kč = **4 555 Kč**

Sociální pojištění 4,5 % x 47 431 Kč = **2 135 Kč**

Zdravotní pojištění 6,5% x 47 431 Kč = **3 084 Kč**

Čistá mzda: 47 431 Kč – 2 135 Kč – 3084 Kč – 4 555 Kč = 37 657 Kč

Měsíční finanční náklady na živobytí

V potaz se musejí také brát při žádání o hypotéku **průměrné finanční náklady na živobytí – 70% čistého měsíčního rodinného příjmu.** Zda jsou manželé schopni platit pravidelně měsíční splátky. Těchto 70% zahrnují – platby na nájemné, hypotéky, daně např. z nemovitosti, energie, voda, jídlo, oblečení, pohonné hmoty,… atd.

(viz. následující odkazy)

https://www.prazskypatriot.cz/zivotni-naklady-v-praze-jsou-vyssi-s-prumernou-mzdou-ve-zbytku-republiky-si-zde-nevystacite/ - životní náklady https://www.obcanskeporadny.cz/cs/ostatni/rodinny-rozpocet-a-jeho-tvorba - životní náklady

Finanční měsíční náklady na živobytí v domácnosti u Vochomůrků:

→ jejich čistý příjem 102 990 Kč (65 333 Kč + 37 657 Kč)

→ **finanční měsíční náklady** 70% x 102 990 Kč = **72 093 Kč**

Manželé Vochomůrkovi mají dostatečný příjem. K jejich příjmu se přičítává ještě příjem z pronájmu bytu v Praze.

Výpočet hypotečního úvěru u ČSOB

Manželé Vochomůrkovi se dohodli s bankou na klasické hypotéce na 2 590 000 Kč na dobu 20 let s úrokovou sazbou 6,04% , RPSN 6,61% - *často se mění*), fixace 5 let. ,

/Po 5 letech se můžou s ČSOB dohodnout na lepší úrokové sazbě a na jiném RPSN/

RPSN = roční procentní sazba nákladů *- celkovou cenu úvěru (úroková sazba + poplatky bance)*

Při výpočtu budou používat RPSN, aby byla vidět celková cena úvěru.

Výpočet měsíční splátky v Excelu: **=PLATBA(Ú/100/12;D*12;H)*-1**

Ú .... úroková sazba (zde použijeme RPSN)

D .... doba splácení

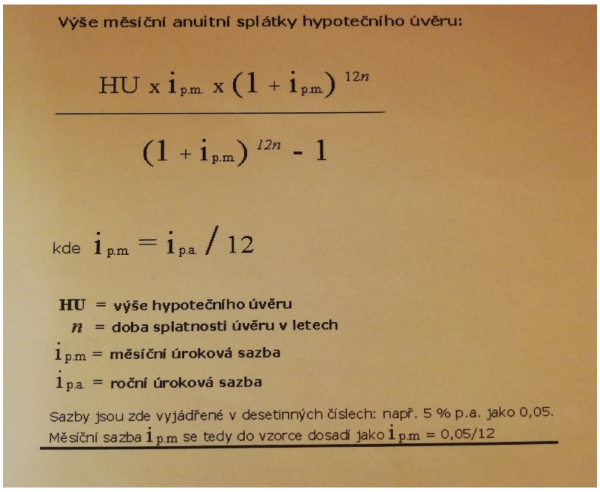
H .... výše hypotečního úvěru

=PLATBA(6,61/100/12;20*12;2590000)*-1

Měsíční splátka: 19 478,4382 Kč - splátka se zaokrouhluje ≐ **19 478 Kč**

(*výpočty pro porovnání:* *30 let* *měsíční splátka* *16 558,3741 Kč*
25 let *měsíční splátka* *17 666,3059 Kč*
15 let *měsíční splátka* *22 718,5956 Kč*)

Lze použít i tento vzorec:



Výše měsíční anuitní splátky hypotečního úvěru:

$$\frac{HU \times i_{p.m.} \times (1 + i_{p.m.})^{12n}}{(1 + i_{p.m.})^{12n} - 1}$$

kde $i_{p.m.} = i_{p.a.} / 12$

HU = výše hypotečního úvěru
n = doba splatnosti úvěru v letech
$i_{p.m.}$ = měsíční úroková sazba
$i_{p.a.}$ = roční úroková sazba

Sazby jsou zde vyjádřené v desetinných číslech: např. 5 % p.a. jako 0,05.
Měsíční sazba $i_{p.m.}$ se tedy do vzorce dosadí jako $i_{p.m.}$ = 0,05/12

Výpočet přeplatku hypotéky: **=měsíční splátka*12*D-H**

Přeplatek hypotéky je rozdíl mezi částkou, kterou banka půjčí, a celkovou částkou, kterou klienti bance zaplatí (úrok za hypotéku celkem)

=19478,4382*12*20-2590000

Přeplatek hypotéky: 2 084 825,17 Kč – zaokrouhluje se ≐ **2 084 825 Kč**

(*výpočty pro porovnání:* *30 let* *přeplatek hypotéky* *3 371 014,67 Kč*
25 let *přeplatek hypotéky* *2 709 891,76 Kč*
15 let *přeplatek hypotéky* *1 499 347,21 Kč*)

https://www.csob.cz/portal/lide/hypoteka?bid1=ps-RET-CSOB-hypoteka-2CSB0017I|25|txt|kws|csob~brand~hypoteka-22w10-Eta-google-red170017447&gclid=EAIaIQobChMIrYm0vLye-wIV45BoCR3UHghQEAAYASAAEgJQJvD_BwE - ČSOB

Splátkový kalendář

https://www.kalkulackahypoteky.cz/ splátkový kalendář

Splátkový kalendá
. 3 - projekt.xlsx

Výpočet daní

Byt v Plzni – **daň z nemovitosti** = 30 m^2 (výměr bytu v m^2) x sazba u bytu 2 Kč x koeficient podle velikosti obce – Plzeň – 3,5 x místní koeficient 1 x koeficient 1,2

30 x 2 x 3,5 x 2 x 1,2 = **252 Kč**

https://www.mesec.cz/kalkulacky/vypocet-dane-z-nemovitosti/

Byt v Praze – **daň z nemovitosti** = 41,6 m^2 (výměr bytu v m^2) x sazba u bytu 2 Kč x koeficient podle velikosti obce – Praha - 4,5 x místní koeficient 2 x koeficient 1,2

41,6 x 2 x 4,5 x 2 x 1,2 = **900 Kč**

Daň z nemovitosti se platí vždy jednou za rok.

https://www.mesec.cz/kalkulacky/vypocet-dane-z-nemovitosti/

https://www.penize.cz/formulare/66952-priznani-k-dani-z-nemovitosti - formulář daň z nemovitostí

- **daňové přiznání** = zdaňují se všechny příjmy (příjmy ze zaměstnání + příjmy z pronájmu zkrácené o náklady spojené s pronájmem (náklady na údržbu bytu, daň z nemovitosti)

Hrubá mzda od zaměstnavatele (84 831 Kč x 12 = 1 017 972 Kč)

1 017 972 Kč

\+ 148 800 Kč (14 900 Kč x 12 = 178 800 Kč – 30 000 Kč /náklady na byt/ = 148 800 Kč)

1 166 772 Kč ≐ 1 166 700 Kč základ pro daň (zaokrouhluje se stovky dolů)

1 166 700 x 15% = 175 005 Kč 15% daň

\- 30 840 Kč sleva na poplatníka (2 570 Kč x 12 = 30 840)

\- 121 980 Kč (10 165 Kč x 12 = 121 980 Kč – daň, kterou zaplatil u zaměstnavatele

Σ **22 185 Kč** doplatek daně (p. Vochomůrka musí doplatit)

https://www.financnisprava.cz/assets/tiskopisy/5405_27.pdf formulář daň. přiznání

Prodej bytu v Plzni (kde bydlí)

Aby měli dostatek peněz (např. na splácení hypotéky, na krásnou dovolenou, na koupi nového auta, na rekonstrukci nového domu, … atd.) rozhodli se, že byt v Plzni po nastěhování do domu prodají. Byt prodají za **2 290 000 Kč**. Peníze si po koupi uloží na běžný účet.
Zde za příjem peněz z prodeje bytu nebudou platit žádné daně, protože podle vyhlášky - při prodeji bytu, ve kterém bydlíte alespoň 2 roky, se na vás nevztahuje povinnost platit daň.

https://www.hypotecni.info/dan-z-prodeje-nemovitosti/ - prodej nemovitosti

Opravy nového domu

Manželé Vochomůrkovi mají v plánu na svém domě příští rok provést několik dodělávek a zlepšit bydlení v domě a na zahradě – např. novou omítku, zasít trávník u domu (hnojivo, osivo), koupit nový nábytek, gril, zahradní kůlnu, sekačku na trávu, motorovou pilu.

Omítka	23 240 Kč
Osivo (3 ks)	1 542 Kč
Nábytek	12 999 Kč
Gril	9 999 Kč
Hnojivo	915 Kč
Zahradní kůlna	14 690 Kč
Sekačka na trávu	4 990 Kč
Motorová pila	2 990 Kč
Celkem	**71 365 Kč**

Závěr

Manželé Vochomůrkovi jsou nadšení. Našli si ideální nový venkovní dům za příznivou cenu kousek od města Plzeň. Z nabízených domů se jim nejvíce líbil. Byt, ve kterém ještě teď bydlí, mají v úmyslu prodat, a získané peníze výhodně investovat (např. vylepšit nový dům). S vybranou hypotékou na koupi domu u ČSOB jsou spokojeni. Tato banka má pro ně nejpříznivější nabídku hypotéky (odhad nemovitosti zdarma, bez poplatků za sjednání a vedení úvěru, ……). Zvolili si hypotéku na 20 let s optimální fixní délkou 5 let, která jim zajišťuje jistotu na určité období. Neobávají se neschopnosti splácet svou hypotéku (měsíčně 18 615 Kč), jelikož dokážou ekonomicky hospodařit.

Jsme rádi, že jsme jim v našem projektu mohli pomoci.

Samostatné ohodnocení Matyáše Fishera

Na našem projektu – **Hypoteční úvěr – finanční matematika** jsme si dali opravdu záležet a naše práce je vidět. Pilně a spolehlivě jsme pracovali po celou dobu vytváření tohoto projektu. Téma, které jsme si vybrali, nebylo pro nás lehké, ale myslím si, že jsme to zvládli. Hned na začátku jsme si v naší skupině rozdělili funkce. Když jsme zjistili nebo získali nové důležité informace, které souviseli s naší prací, vzájemně jsme se informovali – telefon, sms-ky, ve škole, o přestávkách. Posílání zpráv nebralo konce. Bez potíží jsme si radili a pomáhali jsme si. Chválím pracovitost, trpělivost a snahu všech v naší skupině.

Dost mě překvapily nesnáze při vyhledávání dat od Českého statistického úřadu. Vyhledat potřebné údaje nebylo vůbec lehké. Ale nevzdal jsem to a s bolestí hlavy jsem je našel.

Po získání nových poznatků a jejich uplatnění v našem projektu si v dospělosti bez problémů vypočítám výši mého čistého platu, daně a vím, jak na ně.

S naším projektem jsme spokojeni. Teď můžeme někomu poradit, kdyby si chtěl, nevěděl jak a kde si půjčit potřebné peníze.

6.1.7 Zpracování koupě auta

Pavel Chaloupka – **Samostatná práce z matematiky, 2022**
Skupina: Šimon Matoušek, Tomáš Jedlička, Miriam Žáčková, Michal Pavlíček, Julie Smrčková

Rozdělení rolí: pracovali jsme společně, na powerpointové prezentaci se podílela Julie Smrčková a na písemné práci Šimon Matoušek, Pavel Chaloupka a Miriam Žáčková

Úkol: Úkolem naší práce bylo zajistit financování na koupi auta, výpočet splátek a možnost financování a najít nejvýhodnější možnosti. Také jsme vybírali přesný produkt a pracovali s reálnými daty.

Vybraný produkt: **Mercedes Benz e220 cdi W211**
BMW E36 Jsme nezvolili z důvodu vyšší spotřeby a nižší spolehlivosti
Náš vybraný vůz **Mercedes Benz e220 cdi W211** již byl zakoupen, než jsme sem stihli vložit odkaz, tak jsme použili odkaz velmi podobného vozu
https://suchen.mobile.de/fahrzeuge/details.html?id=355550894&cn=DE&isSearchRequest=true&makeModelVariant1.makeId=17200&makeModelVariant1.modelDescription=cdi+w211&makeModelVariant1.modelId=48&pageNumber=1&scopeId=C&sortOption.sortBy=creationTime&sortOption.sortOrder=DESCENDING&fnai=prev&searchId=94a08450-cd77-b4a2-c8b0-3b7a31222365&ref=srp

Informace o kupujícím: Náš kupující se jmenuje Hynek Skočdopole, kterému je 18 let a studuje na GFK. Jeho příjmy vychází z brigády v jídelním řetězci McDonalds kde pracuje třikrát týdně 12 hodin=144 hodin měsíčně. Jeho příjem na hodinu je 128 Kč. Jeho měsíční příjem bez výdajů činí 18 432Kč. V pracovní smlouvě měl napsáno, že daně se mu počítají ihned od hodinové mzdy.
Babička mu přispěla na koupi auta 10 000 Kč.
Jelikož Hynek bydlí u rodičů, nemusí platit nájem, ale jídlo si pro sebe platí sám. Rodiče mu na školu už nepřispívají a má ji rozdělnou na měsíční splátky 2000 Kč měsíčně.
Jeho další měsíční výdaje tvoří cca. 3000 Kč.
Jelikož stále nemá auto zakoupené, používá MHD, a to ho stojí 350 Kč měsíčně.
Naspořeno nemá absolutně nic.

Měsíční příjmy	Měsíční výdaje	Výsledné příjmy:
Brigáda: 18 432Kč	Jídlo: -7000Kč	18 432Kč
	Školné: -2000Kč	-12 350Kč
	Další výdaje: -3000Kč	**6082Kč**
	MHD: -350Kč	

Úvaha: pokud bude Hynek mít větší kapitál který mu poskytnou rodiče nebo např. stipendium, tak se jeho měsíční příjmy zvýší, a nebude si muset půjčit tolik peněz a vyjde ho to levněji. S měsíčním příjmem 6082 Kč si na auto našetří za 17 měsíců (když se nepočítají výdaje k autu).

Auto, které se rozhodl si koupit stojí 100000 Kč s DPH. Potřebuje sehnat 85 000Kč.

Možnosti financování:

1. Půjčka od banky
   Hynek si vypočítal možnosti od dvou bank: ČSOB a Raiffeisen bank. ČSOB mu poskytla půjčku kdy si půjčí 85 000Kč a bude splácet 24 měsíců 4000 Kč, tedy zaplatí dohromady 96 000 Kč.
   Reiffeisen bank mu poskytla půjčku, kdy si půjčí 85 000 Kč a bude splácet 24 měsíců, jeho měsíční splátka bude 3919 Kč. Z půjček těchto dvou bank je tedy výhodnější.

2. Auto na splátky
   Stejný vůz stojí 120 000 Kč, pokud bude 78 měsíců splácet 1903 Kč zaplatí dohromady 150 000 Kč. Je to nejbezpečnější možnost pro financování vozu.
3. Nemocenské služby
   Pokud by Hynek prodal svoji ledvinu, plíci a části jater (24 000 Kč x3) a daroval sperma 12 měsíců, dostane 12 000Kč od sperma banky. Dohromady by tedy vydělal 90 000 Kč za rok, ale je to jen jednorázové. Je to také nejrychlejší možnost výdělku, také nejhorší možnost výdělku.

Správa vozu: Hynek Skočdopole bydlí v Třemošné a do školy a do práce najezdí za den min. 11 km. Najezdí tedy 65,1 km za týden=4.5 litrů týdně=216 Kč týdně.

Výdaje auta: Povinné ručení činí 5500 Kč ročně, Hynek zaplatí havarijní pojištění za 5000 Kč ročně. Za benzín zaplatí 216 Kč týdně= (864 Kč měsíčně),11 232 Kč ročně. Dohromady ho správa vozu ročně stojí 27 732 Kč.

Roční příjmy	Roční výdaje	Výsledné roční příjmy:
Brigáda: 221 184Kč	Jídlo: -84 000Kč	221 184Kč
	Školné: -24 000Kč	-148 200Kč
	Další výdaje: -36 000Kč	**72 984Kč**
	MHD: -4200Kč	
	Havarijní pojištění: -5000Kč	
	Povinné ručení: -5500Kč	
	Benzín: -11 232Kč	

Závěr: Úkolem práce bylo vybrání možných finančních možností na koupi vozu. Kupující Hynek Skočdopole má měsíční příjem z brigády McDonalds, kde má hodinový příjem 128Kč. Jinak si platí jídlo, školné a MHD a další výdaje. Bydlí u rodičů a neplatí životní náklady jako plyn a nájem.
Vůz ke koupi, který si vybral je **Mercedes Benz e220 cdi W211,** který stojí zhruba 100 000 Kč na bazaru. Naspořeno nemá nic, ale babička mu jednorázově poskytla 10 000 Kč na koupi auta (kdyby Hynek spořil 17 měsíců naspořil by si na toužené auto). Musí získat 85 000 Kč a zjišťoval si možnosti bezpečného financování.
U banky ČSOB mu nabídli půjčku, kdy si půjčí 85 000Kč a bude splácet 24 měsíců 4000 Kč, tedy zaplatí dohromady 96 000 Kč. Druhá nabízená možnost je od banky Raiffeisen bank, kdy

si půjčí 85 000 Kč a bude splácet 24 měsíců, jeho měsíční splátka bude 3919 Kč. Z půjček těchto dvou bank je tedy výhodnější.
Pokud by se rozhodl si koupit auto na splátky, zaplatí dohromady 150 000 Kč, (samotný vůz stojí 120 000 Kč), pokud bude měsíčně splácet 1903 Kč po dobu 78 měsíců. Ze všech možností vedlejšího financování je to ta nejlepší varianta, tedy naše finální, i když není nejlepší – naspoření by trvalo pouze 17 měsíců. Je nejbezpečnější – kdyby se Hynek dostal do situace, kdy bude potřebovat něco zaplatit, bude mít úspory větší, než kdyby si půjčil z banky.
Pro správu vozu musí zaplatit havarijní pojištění (5000 Kč za rok), povinné ručení (5500 Kč za rok) a cenu benzínu (pokud nepočítáme servis vozu). Na cestu do školy a do práce potřebuje Hynek 4,5 litru benzínu týdně, to ho vyjde na 216 Kč týdně, 864 Kč měsíčně, 11 232 Kč ročně. Dohromady ho správa vozu ročně stojí 27 732 Kč.
Koupě vozu se Hynkovi nevyplatí, nezáleží na možnosti financování. Auto nepotřebuje. Nejvíce by se mu vyplatilo si jeho měsíční příjem našetřit dohromady, za 17 měsíců by byl schopný pokrýt koupi auta. Z jiných možností financování je nejvýhodnější si koupit auto na splátky.

Zdroje:
Kalkulačka půjčky od ČSOB: https://www.csob.cz/portal/lide/pujcky/pujcka-na-cokoliv?bid1=ps-RET-CSOB-pujcka_na_cokoliv-2CSB0017I|25|txt|kws|csob~brand~pujcka-22w28-rsa-google-red170018128&gclid=CjwKCAiAvK2bBhB8EiwAZUbP1Ns6NvF8NLq8Tup15d75csDiuGftUOzVRaR3ec5as0vqR_Ksn8q0AxoCc3wQAvD_BwE

Kalkulačka půjčky od Raiffeisen bank: https://www.rb.cz/promo/minutova-pujcka?gclid=CjwKCAiAvK2bBhB8EiwAZUbP1EgeZjdUc2pxWgxN92waAWckeOme3sblDG3zWcwamrdz0UGzX6I1ZBoCjSIQAvD_BwE

Mercedes Benz e220 cdi W211 (podobný vůz):
https://suchen.mobile.de/fahrzeuge/details.html?id=355550894&cn=DE&isSearchRequest=true&makeModelVariant1.makeId=17200&makeModelVariant1.modelDescription=cdi+w211&makeModelVariant1.modelId=48&pageNumber=1&scopeId=C&sortOption.sortBy=creationTime&sortOption.sortOrder=DESCENDING&fnai=prev&searchId=94a08450-cd77-b4a2-c8b0-3b7a31222365&ref=srp

Auto na splátky:https://www.aaaauto.cz/cz/mercedese/car.html?id=519070971#make=75&model=174&pmax=150000

Pojištění vozu (je nutná SPZ, kterou nemáme, a tak jsme pojištění spočítali pomocí rodičů)
https://www.porovnej24.cz/povinne-ruceni/zadani?gclid=CjwKCAiAvK2bBhB8EiwAZUbP1JnwKarRfzYnvAjRQxzCzSGtjUSa4dQvrmcocmCnCnXOnEU__Z_ZJhoCikAQAvD_BwE

Vlastní zhodnocení
Můj příspěvek byl v tom že jsem se podílel na psaní wordového dokumentu bohužel u rozebírání možností práce jsem nebyl přítomen a půjčoval jsem techniku, když bylo za potřebí. Všichni v týmu udělali vlastní kus podle toho, jaké byli jejich ambice a co mohli nabídnout za schopnosti a vědomosti. Naše komunikace byla v pořádku ale pro příště bych založil nějakou skupinu, aby bylo vše v přehlednějším formátu. Myslím, že se nám povedlo vypracovat kvalitní práci. Pro příště bych zlepšil přehlednost komunikace. ☺

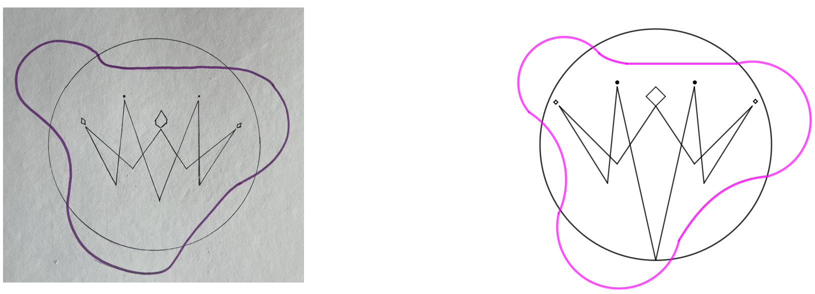
6.2 Funkce

6.2.1 Předpisy funkcí k příkladu 3.5

Funkce	Předpis	Definiční obor
$f_1(x)$	$y = -\dfrac{22}{45}(\lvert x\rvert - 1,5)^2 - 0,6$	$\lvert x\rvert \in \langle 0; 0,2\rangle$
$f_2(x)$	$y = -\dfrac{2}{17(\lvert x\rvert - 2,08)} + 0,07$	$\lvert x\rvert \in \langle 2,21; 3\rangle$
$f_3(x)$	$y = -0,3184(\lvert x\rvert - 4,15)^2 - 0,15$	$\lvert x\rvert \in \langle 3; 4,15\rangle$
$f_4(x)$	$y = \dfrac{2,736}{\lvert x\rvert - 5,1} + 2,735$	$\lvert x\rvert \in \langle 1,98; 4,15\rangle$
$f_5(x)$	$y = -\dfrac{2}{5}\log_9 \lvert\lvert x\rvert - 2,23\rvert + 0,69$	$\lvert x\rvert \in \langle 0,53; 2,2\rangle$
$f_6(x)$	$y = \log_{15} \lvert\lvert x\rvert - 2,28\rvert + 2,3$	$\lvert x\rvert \in \langle 1,98; 2,2\rangle$
$f_7(x)$	$y = -\dfrac{89}{17}\lvert x\rvert + \dfrac{286}{85}$	$\lvert x\rvert \in \langle 0,36; 0,53\rangle$
$f_8(x)$	$y = 3\lvert x\rvert + 0,4$	$\lvert x\rvert \in \langle 0,2; 0,36\rangle$
$f_9(x)$	$y = 1$	$x \in \langle -0,2; 0,2\rangle$

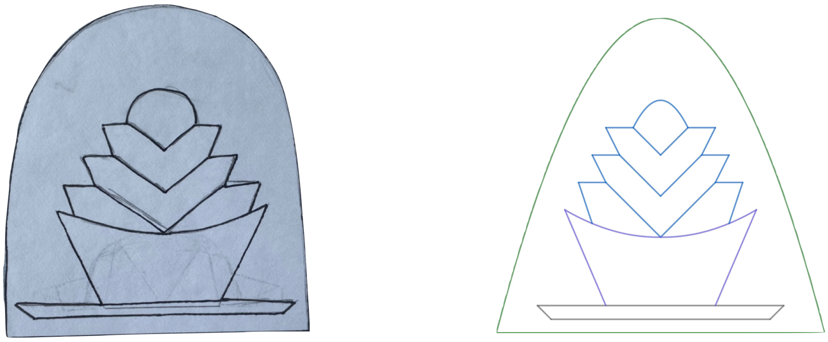
Tabulka 6.1: Předpisy pro funkce s využitím absolutní hodnoty.

6.2.2 Ukázky prací žáků z projektu *Funkce*



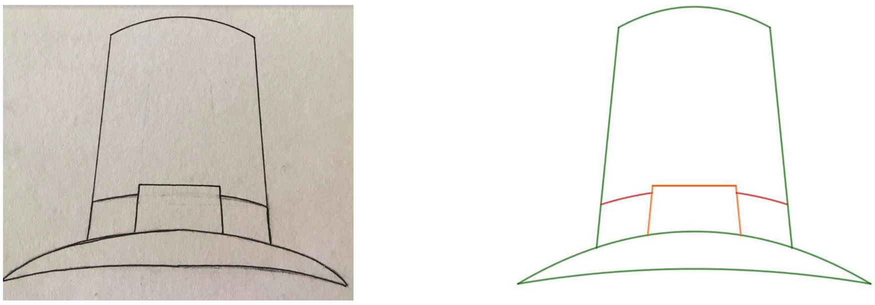
(a) (b)

Obrázek 6.4: Logo pro značku kosmetiky.



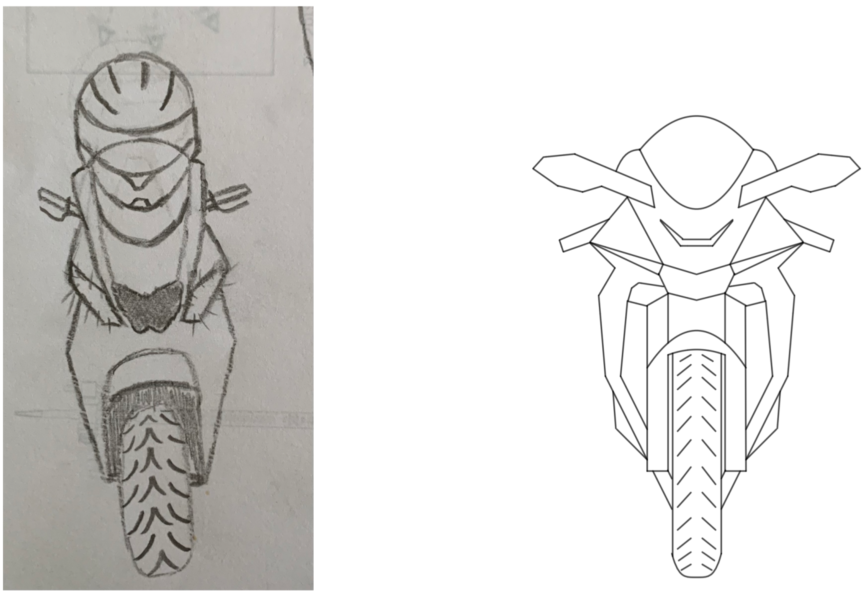
(a) (b)

Obrázek 6.5: Cupcake.



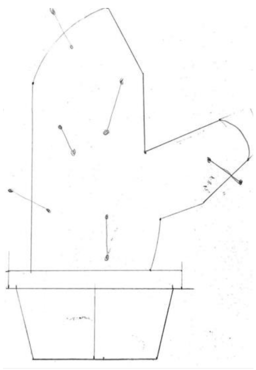
(a) (b)

Obrázek 6.6: Klobouk.

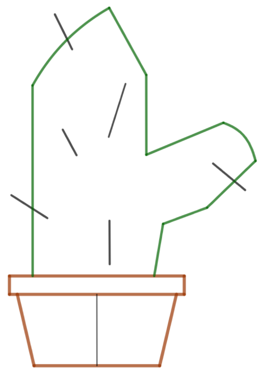


(a) (b)

Obrázek 6.7: Motorka.



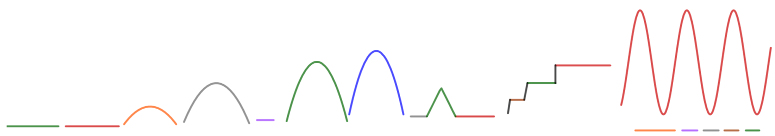
(a)



(b)

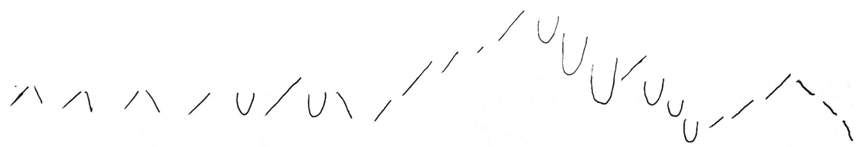
Obrázek 6.8: Kaktus.

(a)

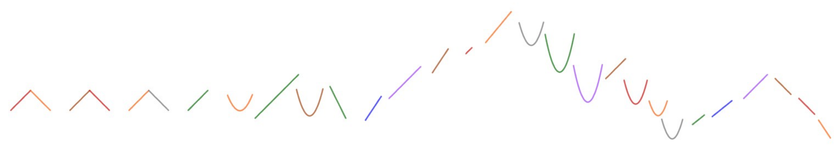


(b)

Obrázek 6.9: Slon (Saints Saense).



(a)



(b)

Obrázek 6.10: Concerning hobbits, 0:00 - 0:21.

6.3 Statistika

NAME :

CLASS :

DATE :

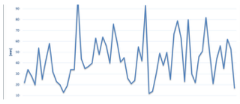
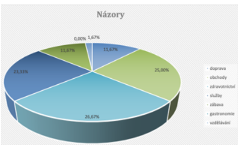
Statistika - teorie

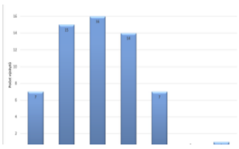
10 Questions

1. Počet pracovníků, výše mzdy, věk pracovníků nebo délka zaměstnaneckého poměru se řadí mezi

- [ ] kvantitativní statistické znaky
- [ ] korelační statistické znaky
- [ ] komplexní statistické znaky
- [ ] kvalitativní statistické znaky

2. Jaký graf byste správně použili ke znázornění relativních četností kvalitativního znaku?

- [ ] takové informace se nezobrazují graficky
- [ ] 
- [ ] 

- [ ] 

3. Střední hodnota znaku, která je citlivá na extrémně nízké nebo naopak vysoké hodnoty v souboru, se nazývá

- [ ] modus
- [ ] aritmetický průměr
- [ ] geometrický průměr
- [ ] harmonický průměr

4. .... znaku x je jeho hodnota, která má největší četnost.

- [ ] Rozptyl
- [ ] Modus
- [ ] Medián
- [ ] Relativní četnost

5. Absolutní chyba je vyjádřena pomocí.........

- [ ] rozptylu.
- [ ] variačního koeficientu.
- [ ] směrodatné odchylky.
- [ ] absolutní odchylky.

6. Mezi charakteristiky variability nepatří...

- korelační koeficient.
- variační koeficient.
- směrodatná odchylka.
- variační rozpětí.

7. Určete modus znaku "roky".

Roky	Četnost
5	3
7	2
10	7
13	3
15	5
26	1
40	4
45	5

- 7
- 45
- 10
- 1

8. Korelace vyjadřuje statistickou..........znaků.

- nezávislost
- závislost

9. Jaká je nejčastěji udělovaná hodnota známky?

- 1
- 3
- 4
- 2

10. Jakým způsobem určíte průměrnou známku z předmětu v celém ročníku a jaká bude její hodnota?

	Žáci	Známka
Třída 1	27	2,57
Třída 2	21	2,91
Třída 3	26	2,12

- geometrickým průměrem s hodnotou 2,51
- aritmetickým průměrem s hodnotou 2,53