Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Bakalářská práce

Vybrané zajímavé matematické a logické problémy

Eva Marešová
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.
Plzeň 2023

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne: ....

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D za vedení a pomoc na mé bakalářské práci, za cenné rady a kvalitní přístup k vypracování bakalářské práce.

OBSAH

ÚVOD

Bakalářská práce Vybrané zajímavé matematické a logické problémy je soubor 10 známých i méně známých matematických úloh, které mají svůj historický původ po celém světě. V textu jsou představeny např. úloha o sedmi mostech města Královce, problém čtyř barev nebo Monty Hallův problém. Práce obsahuje celkem deset kapitol, kdy každá je věnována jedné matematické úloze. V každé kapitole lze nalézt historický vývoj úlohy, její problematiku a následné zpracování řešení a jeho alternativy.

Hádanky a hlavolamy, nejen matematické, jsou mi velice blízké, ráda přemýšlím nad jejich řešením a procvičuji si logické myšlení. V mé práci jsou odborné úlohy, které mají přesah do školské matematiky. Školská matematika je mi velice blízká, a i z tohoto důvodu jsem si tuto práci vybrala.

Práce je určená pro všechny, kdo se rádi zamýšlí nad problematickými úlohami. V práci naleznou nejen zadání úloh, ale i jejich historii, samozřejmě postup a výsledek řešení úloh.

1. ÚLOHA VLK, KOZA A ZELÍ

Úloha O vlku, koze a zelí je považována za příznačný logistický hlavolam, který znají už děti na základní škole a zastupuje jednu z mnoha úloh o převozníkovi a překonávání řeky. Avšak i tato úloha úzce souvisí s teorií grafů a dá se dobře využít k výuce algoritmizace, proto není na škodu, si ji připomenout i v této práci.

První zmínky o této úloze se objevují už na přelomu osmého a devátého století za vlády Karla Velikého a pravděpodobným autorem je anglosaský mnich Alkuin z Yorku, který napsal sbírku matematických úloh a nazval ji *Propositiones ad acuendos iuvenes*, v překladu můžeme sbírku příkladů titulovat jako *Úlohy k bystření chlapců* (Mačák, 2001). Některé příklady z tohoto souboru se vyskytují v matematice dodnes.

Hlavolam O vlku, koze a hlávce zelí má mnoho shodných formulací s jinými třemi objekty se stejnými vztahy, např. liška, husa a pytel fazolí; liška, kuře a obilí; liška, husa a kukuřice; jaguár, prase a ovesná kaše. Jednu z verzí této celosvětově známé hádanky najdeme i v jednom z nejznámějších amerických seriálů, a to v Simpsonových, přesněji v dvacáté sérii, třinácté epizodě s názvem Gone Maggie Gone.

Tento úkol lze zadat žákům základní školy, kteří ji jsou schopni vyřešit prostým zkoušením, avšak lze ji modifikovat a využít i pro výuku na vysoké škole. Můžeme ji totiž vyjádřit jako problém z oboru dynamického programování, z oboru teorie grafů nebo z oboru číselného programování, a poté pomocí ní ilustrovat patřičné algoritmy ze zmíněných oborů, které dokážou problém vyřešit.

Jedním z takových vysokoškolských příkladů je úloha O třech kanibalech a třech misionářích, která se využívá k procvičení práce s umělou inteligencí nebo v programování.

1.1 Zadání úlohy

Na břehu řeky stojí muž, který vede na provázku kozu, vlka a v ruce drží hlávku zelí. Jeho cílem je přepravit se přes řeku i se svým nákladem na loďce, která ale uveze vždy jen muže a jednu věc nebo zvíře. Samozřejmě můžeme uvažovat, že vše převeze postupně, avšak nikdy nesmí na jednom břehu zůstat koza se zelím (aby jej nesežrala) a vlk s kozou (aby vlk nesežral kozu). Nemá k dispozici nic jiného než loďku. Jak se tedy dostane se vším na druhou stranu řeky, aby nikdo a nic nepřišlo k úhoně?

1.2 Řešení úlohy

Jako první pokus můžeme zkusit si problém nakreslit a řešit úlohu pokus-omyl, vzhledem k tomu, že patří mezi nejlehčí a nejznámější, nemělo by dlouho trvat ji i tímto způsobem vyřešit.

Po logické stránce musí převozník první převézt kozu, protože pokud by převezl vlka, zůstala by na břehu koza a zelí. Koza by zelí sežrala a úloha by nebyla splněna. Převezení zelí by znamenalo, že na břehu zůstane vlk s kozou a koza bude sežrána vlkem.

Koza je převezena na druhý břeh, převozník se vrátí s prázdným člunem a má na výběr, zda vezme jako dalšího vlka nebo zelí. Obě zmíněné varianty jsou možné a povedou k řešení. Při prvním zamyšlení ovšem zjistíme, že pokud převeze jako druhé zelí, tak při poslední cestě pro vlka, koza zelí na druhém břehu sežere. Pokud vezme jako druhého vlka a bude se vracet pro zelí, vlk na cílovém břehu sežere kozu.

Řešení se skrývá v tom, že ve chvíli, kdy je na cílovém břehu koza, zelí (nebo vlk) a převozník. Převozník vezme kozu zpět na původní břeh, může se zdát, že se svému cíli vzdaluje, ale není tomu tak. Na počátečním břehu kozu vyloží, naloží vlka (zelí), kterého převeze na cílový břeh, kde ho vyloží.

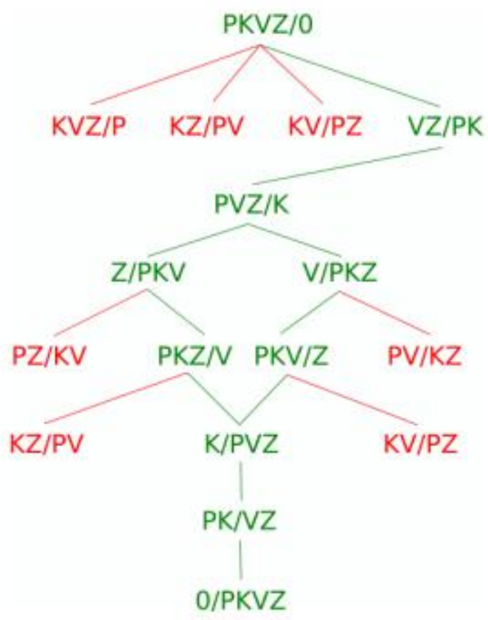
Vlk a zelí spolu na cílovém břehu mohou zůstat a převozník se vydá pro kozu, kterou na počátečním břehu naloží a převeze do cíle. Obě nejkratší řešení tohoto úkolu obsahují přeplutí řeky celkem sedmkrát, čtyřikrát tam a třikrát zpět.

Dále se k řešení této úlohy vybízí znázornění pomocí grafu. Graf bude mít tolik vrcholů, kolik stavů může nastat při převážení z jednoho břehu na druhý. Celkem získáme šestnáct uzlů. Máme totiž 4 cestující a vždy mohou nastat jen dvě situace, buď cestující na břehu je nebo není. Získáme tedy $2^4 = 16$.

Stavy, které mohou nastat na prvním břehu:

1) Vlk, koza, zelí, převozník
2) Vlk, koza, převozník
3) Vlk, převozník, zelí
4) Vlk, převozník
5) Převozník, koza, zelí
6) Převozník, koza
7) Převozník, zelí
8) Převozník
9) Vlk, koza, zelí
10) Vlk, koza
11) Vlk, zelí
12) Vlk
13) Koza, zelí
14) Koza
15) Zelí
16) Nikdo

Ještě před zkonstruováním grafu musíme odečíst ty případy, které by ohrozily nějakým způsobem stav na jednom nebo na druhém břehu. Vyškrtneme tedy situace číslo čtyři, sedm, osm, devět, deset, třináct. Čtvrtá situace je chybná z toho důvodu, že musíme zohlednit i situaci na druhém břehu, kde zůstala o samotě koza se zelím a koza si ráda na zelí pochutná, úloha by tedy nebyla splněna. Výše uvedené případy lze zaznamenat do stavového grafu. Příklad, jak by mohl stavový graf vypadat, je vyobrazený níže.



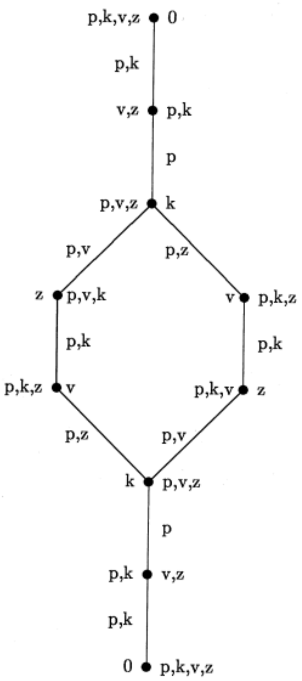
Obrázek 1 – Stavový graf[1]

Po zohlednění chybných situací zjistíme, že sestrojovaný graf bude mít deset vrcholů. Graf musí být orientovaný a musí vést k tomu, že na prvním břehu nezůstane nikdo. Zakončíme svůj počin tedy ve vrcholu číslo šestnáct.

Graf zajistí snadnější srozumitelnost a přehlednost. I v tomto případě dojdeme ke stejnému výsledku, který byl naznačen na začátku.

Máme mnoho možností vyobrazení zmíněného grafu, jeden z nich si níže uvedeme jako ilustrační příklad. U každého uzlu jsou vždy připsány situace na obou březích, levém i pravém, a hrany nesou název podle obsazení loďky. Pro výsledek řešení je graf příhodný, avšak pro samotné řešení příkladu je nedostačují a nešikovný, bohužel není dané vhodnější řešení těchto příkladů (Mačák, 2001).

[1] Zeleně zvýrazněné jsou správná cesta,
červeně zvýrazněné jsou špatné varianty cest.
p = převozník, k = koza, v = vlk, z = zelí



Obrázek 2 – Graf řešení úlohy Vlk, koza a zelí (Mačák, 2001)[2]

2. O TŘECH KANIBALECH A TŘECH MISIONÁŘÍCH

Úloha O třech kanibalech a třech misionářích je menší obměnou předchozí úlohy O vlku, koze a hlávce zelí. Tato úloha je podstatně složitější, ale pořád ji lze vyřešit logickou úvahou, řešením pokus omyl nebo systematicky pomocí stavového grafu.

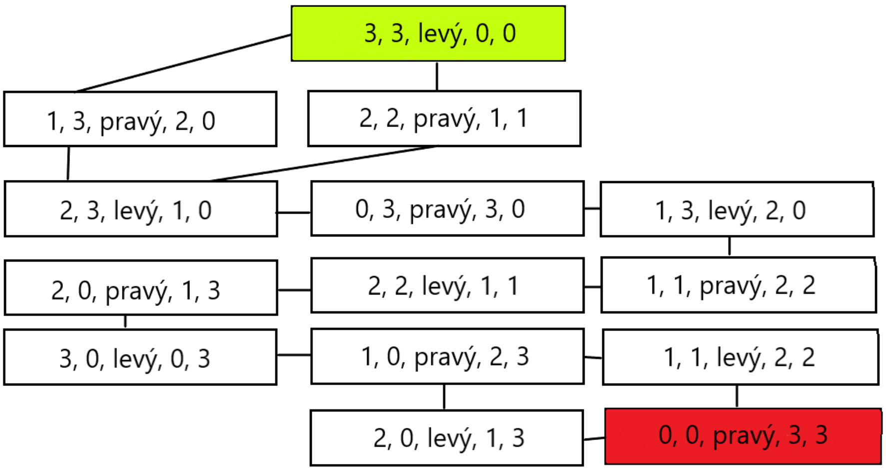
Úkol zní: *Na břehu řeky stojí tři kanibalové a tři misionáři. Loďka, která je přivázána u břehu může převézt maximálně dvě osoby. Potřebujeme, aby se všichni dostali na druhý břeh, ovšem ani na jednom břehu nesmí nikdy zůstat převaha kanibalů nad misionáři, protože jinak by kanibalové misionáře sežrali. Jak se všichni přepraví na druhý břeh řeky, aniž by kdokoli přišel k úhoně?*

1. **Možnost:** V loďce se na druhý břeh přepraví kanibal a mnich, mnich však zůstane v loďce, připluje zpět a vystoupí. Dva kanibalové se přepraví na druhý břeh, jeden z nich vystoupí, druhý se vrátí zpět k prvnímu břehu. Zde vystoupí a nalodí se dva misionáři. Jeden z misionářů na druhém břehu vystoupí a k druhému přistoupí kanibal. Oba se vrátí na první břeh, kde vystoupí kanibal a místo něj nastoupí misionář. Oba misionáři dojedou na druhý břeh, kde vystoupí a nechají loďku kanibalovi, který postupně přiveze jednoho i druhého kanibala. Všichni se tedy přesunuli na druhou stranu řeky.

[2] p = převozník, k = koza, v = vlk, z = zelí

2. **Možnost:** Nastoupí dva kanibalové do loďky, odjedou na druhý břeh, kde jeden vystoupí a druhý se vrátí. Na prvním břehu se nalodí třetí kanibal a jedou znovu na druhý břeh, kde vystoupí znovu jen jeden. Třetí kanibal se vrací na první břeh, zde vystoupí a nastoupí dva misionáři. Mniši dojedou na druhý břeh, jeden vystoupí a nastoupí kanibal. Na loďce je nyní kanibal, mnich a míří k prvnímu břehu, zde vystoupí kanibal a vymění se s posledním misionářem. Na cílovém břehu vystoupí oba misionáři a kanibal dojede s lodičkou pro své přátelé kanibaly. I tato varianta je možná a všichni se dostali v pořádku na druhý břeh řeky.

Níže je graficky uveden postup, kterým lze úlohu řešit.



Obrázek 3 – Popis řešení úlohy

Z obrázku by měly být patrné možnosti řešení. První číslo v rámečku znamená počet kanibalů na levém břehu. Druhé číslo vyobrazuje počet misionářů na levém břehu. Prostřední údaj dokumentuje pozici loďky na levém nebo pravém břehu. V pořadí čtvrtý člen udává počet kanibalů na pravém břehu a poslední číslo zaznamenává počet misionářů na pravém břehu. Obdélníček, který je zelený je počáteční břeh a cílový břeh je poznačen červenou barvou.

Je tedy patrné, že úloha má, i přes svoji složitější variantu oproti předchozí úloze, také kladné řešení.

3. EINSTEINOVA HÁDANKA

Albert Einstein vymyslel tuto logickou hádanku v minulém století. Domníval se, že pouze 2 % lidské populace dokáží onen hlavolam vyřešit pouze logickým uvažováním, bez toho aniž by si daný problém nakreslili nebo jakkoliv zaznamenali.

Jednoduší řešení je, si k samotné hádance vzít tužku a papír, vše si zaznamenat a následně podle instrukcí zapsat do tabulky.

3.1 Zadání hádanky

Hádanka zní:

„*Instrukce:*

1. *Je pět domů, z nichž každý má jinou barvu.*
2. *Všechny domy stojí vedle sebe v řadě na jedné ulici.*
3. *V každém domě žije člověk jiné národnosti.*
4. *Každý obyvatel domu pije jeden druh nápoje, kouří jeden druh cigaret a chová jedno zvíře.*
5. *Žádný z nich nepije stejný nápoj, nekouří stejné cigarety a nechová stejné zvíře.*

Sousedské vztahy:

a. *Brit bydlí v červeném domě.*
b. *Švéd chová psa.*
c. *Dán pije čaj.*
d. *Zelený dům stojí hned vedle nalevo od bílého.*
e. *Obyvatel zeleného domu pije kávu.*
f. *Ten, kdo kouří Pall Mall, chová papouška.*
g. *Obyvatel žlutého domu kouří Dunhill.*
h. *Ten, kdo bydlí uprostřed řady domů, pije mléko.*
i. *Kuřák cigaret Marlboro bydlí vedle toho, kdo chová kočku.*
j. *Nor bydlí v prvním domku.*
k. *Němec kouří cigarety Rothmanns.*
l. *Kuřák cigaret Wiefield pije pivo.*
m. *Ten, kdo kouří Marlboro, má souseda, který pije vodu.*
n. *Muž, který chová koně, bydlí vedle toho, které kouří Dunhill.*
o. *Nor bydlí vedle modrého domu.*

Otázka zní: *Kdo chová rybičky?* (Vecheta, 2013), (Stejskal)*“*

3.2 Řešení

K samotnému řešení nám pomůže tabulka:

Tabulka 1 – Tabulka pro řešení Einsteinovy hádanky

Číslo domu	1	2	3	4	5
Národnost					
Barva domu					
Nápoj					
Cigarety					
Zvíře					

Jestliže by nám nebyla tabulka poskytnuta, nejspíše bychom přemýšleli, jak vůbec s řešením začít. Když dosadíme do tabulky, co jsme schopni podle zadání bez problému doplnit, nejspíše skončíme po 5–6 krocích. Tak že si budeme muset vypracovat všechny kombinace obsazení domů podle národnosti a zjistit, která bude podle stanovených kritérií vyhovovat. Vzhledem k tomu, že pracujeme s pěti osobami, z nichž víme, kde bydlí Nor (první dům), zbývá jen vyřešit počet kombinací pro zbylé čtyři osoby. Počet kombinací získáme tak, že vypočítáme $4 * 3 * 2 = 24$, celkem tedy máme 24 možných kombinací.

Pro přehlednost sepíšeme zatím první polovinu kombinací.

Tabulka 2 – Kombinace bydlení podle národností

Kombinace č. 1	Nor	Švéd	Dán	Brit	Němec
Kombinace č. 2	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Kombinace č. 3	Nor	Brit	Němec	Švéd	Dán
Kombinace č. 4	Nor	Němec	Švéd	Dán	Brit
Kombinace č. 5	Nor	Švéd	Dán	Brit	Němec
Kombinace č. 6	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Kombinace č. 7	Nor	Brit	Němec	Švéd	Dán
Kombinace č. 8	Nor	Němec	Švéd	Dán	Brit
Kombinace č. 9	Nor	Švéd	Dán	Brit	Němec
Kombinace č. 10	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Kombinace č. 11	Nor	Brit	Němec	Švéd	Dán
Kombinace č. 12	Nor	Němec	Švéd	Dán	Brit

3.2.1 Řešení kombinace č. 1

Kombinace č. 1 je Nor, Švéd, Dán, Brit a Němec. Do naší tabulky tedy dosadíme osoby v tomto pořadí a dále dopíšeme do tabulky pojmy, které jsme schopni ze zadání doplnit.

Tabulka 3 – Kombinace č. 1

Číslo domu	1	2	3	4	5
Národnost	Nor	Švéd	Dán	Brit	Němec
Barva domu		modrý			
Nápoj			mléko		
Cigarety					
Zvíře					

Dále je nám ze zadání známo, že:

a. Brit bydlí v červeném domě.

b. Švéd chová psa.

c. Dán pije čaj.

d. Zelený dům stojí hned vedle, nalevo od bílého.

e. Obyvatel zeleného domu pije kávu.

f. Ten, kdo kouří Pall Mall, chová papouška.

g. Obyvatel žlutého domu kouří Dunhill.

h. Ten, kdo bydlí uprostřed řady domů, pije mléko.

i. Kuřák cigaret Marlboro bydlí vedle toho, kdo chová kočku.

j. Nor bydlí v prvním domku.

k. Němec kouří cigarety Rothmanns.

l. Kuřák cigaret Wiefield pije pivo.

m. Ten, kdo kouří Marlboro, má souseda, který pije vodu.

n. Muž, který chová koně, bydlí vedle toho, které kouří Dunhill.

o. Nor bydlí vedle modrého domu.

Při této kombinaci narazíme na problém, podle *pravidla a.* a *pravidla d.* Konflikt zmíněných tkví v tom, že pravidlo d nám říká, že zelený dům stojí vlevo vedle bílého domu, z toho plyne, zelený dům může být buď třetí nebo čtvrtý, ale *pravidlo a* nám říká, že Brit musí bydlet v červeném domě, a z toho vychází, že zelený nemůže stát vedle bílého. Tyto dvě pravidla si v kombinaci č. 1 vzájemně odporují. Kombinace č. 1 je tedy nevhodná.

3.2.2 Kombinace č. 2

Znovu si vypíšeme pořadí národností do naší tabulky. V této variantě řešíme kombinaci č. 2.

Tabulka 4 – Kombinace č. 2

Číslo domu	1	2	3	4	5
Národnost	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Barva domu		modrý			
Nápoj			mléko		
Cigarety					
Zvíře					

Ze zadání je nám známo, že:

a. Brit bydlí v červeném domě.
b. Švéd chová psa.
c. Dán pije čaj.
d. Zelený dům stojí hned vedle, nalevo od bílého.
e. Obyvatel zeleného domu pije kávu.
f. Ten, kdo kouří Pall Mall, chová papouška.
g. Obyvatel žlutého domu kouří Dunhill.
h. Ten, kdo bydlí uprostřed řady domů, pije mléko.
i. Kuřák cigaret Marlboro bydlí vedle toho, kdo chová kočku.
j. Nor bydlí v prvním domku.
k. Němec kouří cigarety Rothmanns.
l. Kuřák cigaret Wiefield pije pivo.
m. Ten, kdo kouří Marlboro, má souseda, který pije vodu.
n. Muž, který chová koně, bydlí vedle toho, které kouří Dunhill.
o. Nor bydlí vedle modrého domu.

Můžeme tedy zkusit doplnit tabulku, v této kombinaci.

Tabulka 5 – Kombinace č. 2 doplněná pomocí zadání

Číslo domu	1	2	3	4	5
Národnost	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Barva domu		modrý	červený	zelený	bílý
Nápoj		čaj	mléko	káva	
Cigarety				Rothmanns	
Zvíře					pes

Využili jsme informace ze sousedských vztahů *a, d, e.* Ale nekončíme, teď již můžeme vyplnit řádku s barvami domečků, protože víme, že pátý domek bude žlutý a následně pokračovat dalšími informacemi.

Ze zadání dále využijeme zeleně zvýrazněné instrukce:

a. Brit bydlí v červeném domě.
b. Švéd chová psa.
c. Dán pije čaj.
d. Zelený dům stojí hned vedle, nalevo od bílého.
e. Obyvatel zeleného domu pije kávu.
f. Ten, kdo kouří Pall Mall, chová papouška.
g. Obyvatel žlutého domu kouří Dunhill.
h. Ten, kdo bydlí uprostřed řady domů, pije mléko.
i. Kuřák cigaret Marlboro bydlí vedle toho, kdo chová kočku.
j. Nor bydlí v prvním domku.
k. Němec kouří cigarety Rothmanns.
l. Kuřák cigaret Wiefield pije pivo.
m. Ten, kdo kouří Marlboro, má souseda, který pije vodu.
n. Muž, který chová koně, bydlí vedle toho, které kouří Dunhill.
o. Nor bydlí vedle modrého domu.

Tabulka 6 – Kombinace č. 2 po doplnění žlutého domku

Číslo domu	1	2	3	4	5
Národnost	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Barva domu	žlutý	modrý	červený	zelený	bílý
Nápoj		čaj	mléko	káva	
Cigarety	Dunhill			Rothmanns	
Zvíře		kůň			pes

Do takto vyplněné tabulky nám zbývá využít poslední čtyři uvedené instrukce *f, i, l, m.*

f. Ten, kdo kouří Pall Mall, chová papouška.
i. Kuřák cigaret Marlboro bydlí vedle toho, kdo chová kočku.
l. Kuřák cigaret Wiefield pije pivo.
m. Ten, kdo kouří Marlboro, má souseda, který pije vodu.

Doplněná tabulka bude tedy vypadat takto:

Tabulka 7 – Kombinace č. 2 po celkovém vyplnění

Číslo domu	1	2	3	4	5
Národnost	Nor	Dán	Brit	Němec	Švéd
Barva domu	žlutý	modrý	červený	zelený	bílý
Nápoj	voda	čaj	mléko	káva	pivo
Cigarety	Dunhill	Marlboro	Pall Mall	Rothmanns	Wiefiled
Zvíře	kočka	kůň	papoušek		pes

Nejdříve jsme vyplnili podle *pravidla l* – Kuřák cigaret Wiefiled pije pivo, které nám umožňuje tuto informaci doplnit jen na políčka ke Švédovi. V řádku s nápoji nám chybí poslední políčko o Norovi, a to je voda. Můžeme tedy využít *instrukci m* – Ten, kdo kouří Marlboro, má souseda, který pije vodu. Víme tedy, že to bude Dán a zároveň pátými cigaretami jsou Pall Mall, které náleží Britovi. Jako třetí využijeme *l* – Kuřák cigaret Marlboro bydlí vedle toho, kdo chová kočku. Poslední využijeme *f* – Ten, kdo kouří Pall Mall, chová papouška.

Volné místo zůstává u Němce, což je zároveň odpověď na tuto zapeklitou hádanku. Rybičky chová v akváriu Němec.

Díky šťastné volbě kombinací nám stačily pro nalezení řešení jen dvě kombinace z 24 celkových. V jiném pořadí kombinací by průběh řešení nebyl tak krátký. Tento přístup je velice intuitivní a nemusí nás vždy zavést k určenému cíli nebo to může trvat velice dlouho.

U této hádanky můžeme využít také přístup pomocí tabulky, ve které jsou dány do poměru jednotlivé podmínky (např. národnost vůči domům, nápoje vůči zvířatům,…). Lze v ní odškrtávat kombinace, které platí či naopak neplatí a následně vyvozovat i další vztahy.

Tabulka 8 – Poměry jednotlivých podmínek

	Červený	Zelený	Bílý	Žlutý	Modrý	Pes	Papoušek	Kočka	Kůň	Rybičky	Čaj	Káva	Mléko	Pivo
Brit														
Švéd														
Dán														
Nor														
Němec														
Dunhill														
Marlboro														
Pall Mall														
Rothmanns														
Wiefiled														
Čaj														
Káva														
Mléko														
Pivo														
Voda														
Pes														
Papoušek														
Kočka														
Kůň														
Rybičky														

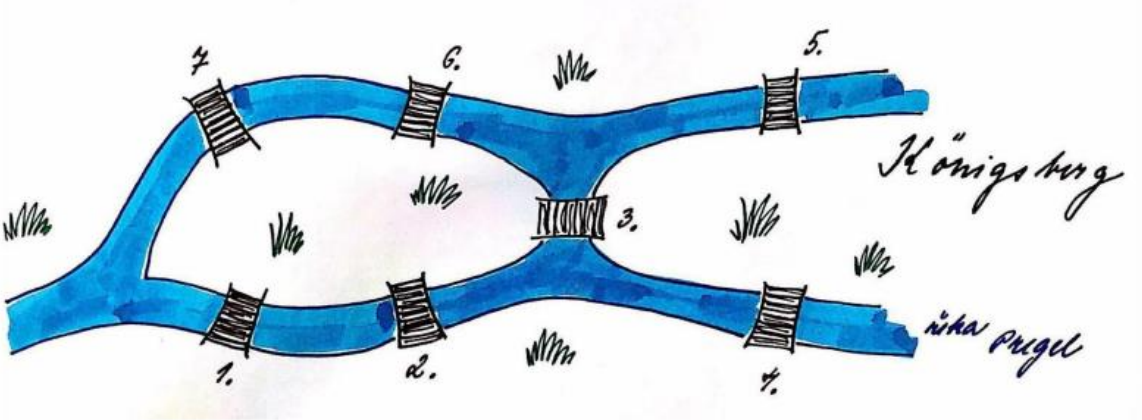
Pozitivním vodítkem v této úloze je např. „Ten, kdo kouří Pall Mall, chová papouška.“ Zaškrtneme tedy políčko, kde se protíná Pall Mall a papoušek. Ostatní možnosti Pall Mall a pes, kočka, kůň, rybičky tedy vyřadíme. Negativní vodítko by bylo např. „Ten, kdo nekouří Pall Mall, chová papouška.“ Pokud jsou v řadě/sloupci všechny křížky kromě jednoho, je odpovědí ten zbývající.

Úlohu lze modifikovat i pro žáky základní a střední školy. Lze změnit cigarety např. za hudební nástroje nebo ovocné stromy zasazené na zahradě před domem.

4. SEDM MOSTŮ MĚSTA KRÁLOVCE

Jedna z nejslavnějších úloh, která se zpočátku zdála zcela jednoduchá, je právě úloha o Sedmi mostech města Královce. Díky této úloze, v roce 1735, Leonhard Euler dal vzniknout teorii grafů (Stewart, 2013).

V době 18. století byl Královec pod nadvládou Východního Pruska (dnes Ruská federace) a rozprostíral se na březích řeky Pregola. Řeka svými dvěma rameny dala vzniknout dvěma ostrovům, které byly propojeny právě sedmi mosty. Otázka byla: *Mohu při procházce městem projít přes každý most právě jednou* (Stewart, 2013)?



Obrázek 4 – Sedm mostů města Královce

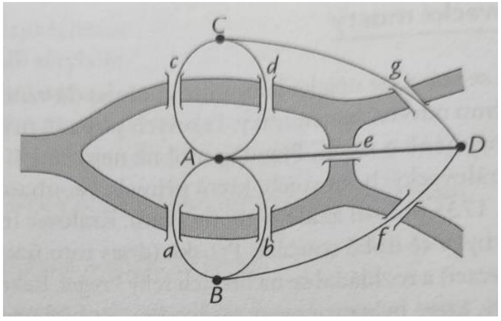
Tato úloha je provázána nejprve s matematikou základní a střední školy, kdy děti mají za úkol nakreslit např. domeček jedním tahem. Nad řešením této úlohy by se tak dalo zamyslet i v tomto duchu. Nakreslit si „mapu“ města Královce se sedmi mosty, a poté zkoušet nepřeberné množství variant cesty jedním tahem přes všech sedm mostů. Dříve či spíše později bychom zjistili, že řešení neexistuje.

Touto otázkou se zabývali matematici již v 17. století, K. A. Rybnikov ve své práci sdělil, že tento problém byl písemně zaznamenám už v roce 1650. Není však známo, kdy se s problémem poprvé setkal Leonhard Euler.

Euler po svém bádání prohlásil, že nelze projít všech sedm mostů právě jednou (Stewart, 2013). Tedy odpověď na otázku byla vyřčena záporně. Svou práci představil Petrohradské akademii 26. srpna 1735. V roce 1741 byla pod názvem *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* vydána v časopise *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae.*

Ve své práci vytvořil jednoduchý test, který řešil problémy tohoto typu a zjistil, že královecké mosty budou v tomto testu neúspěšné. Přesné vyobrazení místa nemá v těchto případech žádný vliv. Důležité však je, jak jsou jednotlivá místa spojeny. Můžeme tedy úlohu převést na jednoduchý graf, který má body spojené jednotlivými úsečkami neboli hranami. Každá část pevniny je popsána body, a každé dva body jsou spojeny hranou, právě tehdy, když místa spojuje most (Stewart, 2013).

Tímto návrhem tedy získáme čtyři body, *A, B, C, D* a sedm hran, *a, b, c, d, e, f, g,* které odpovídají jednotlivým mostům. Úkol můžeme obměnit tak, že řekneme: *„Můžeme projít grafem tak, aby každá hrana byla použita právě jednou?“*



Obrázek 5 – Grafický plánek královeckých mostů (Stewart, 2013)

Euler si stanovil dva druhy tras, pojmenoval je uzavřená cesta, která začne i skončí ve stejném bodě a cesta neuzavřená, která začne v jednom bodě a skončí v jiném (Stewart, 2013). Postupně pro náš graf obě tyto varianty vyvrátil. Z tohoto problému však vzešla jedna důležitá myšlenka, a to stupeň uzlů (Stewart, 2013). Tato veličina nás informuje o počtu hran, které vedou z daného bodu. Jako příklad můžeme uvést bod C, z kterého vychází tři hrany, tak že je to bod třetího stupně.

Pokud by se na síti vyskytovala uzavřená trasa, můžeme říct, jestliže jde nějaká hrana do nějakého bodu, potom zaručeně musí jiná hrana z tohoto bodu vycházet, abychom mohli říct, že trasa pokračuje. Jestliže existuje uzavřená trasa, poté musí být počet hran vycházejících z bodu sudý; každý bod má sudý stupeň. Už teď tedy můžeme říct, že nelze aplikovat uzavřenou cestu na královecké mosty, protože náš graf obsahuje tři uzly třetího stupně a jeden uzel pátého stupně, tedy čtyři body s lichým stupněm.

Stejně můžeme uvažovat v druhém případě, v případě neuzavřené cesty. U této varianty musíme mít právě dva body s lichým stupněm, jeden na začátku a druhý na konci naší cesty (Stewart, 2013). Graf královeckých mostů má čtyři body s lichým mocenstvím, proto ani v tomto případě není splněna podmínka pro neuzavřenou trasu.

Ve svých dalších matematických postupech Euler dokázal, že tento test lze využít u jakéhokoli souvislého grafu. Jeho důkaz byl velice zdlouhavý, dnešní důkazy se vejdou na pár řádek, a to díky novým matematickým objevům.

4.1 Eulerova první věta teorie grafů

První větu k teorii grafů Euler uvádí právě v této práci a v dnešní odbornosti zní takto: *Nechť G = (V, E) je konečný graf, V = {v_1, v_2, ..., v_n} je množina jeho uzlů a nechť pro množinu jeho hran E je |E| = h. Stupeň uzlu v_i (i = 1,...,n) označme $d_G(v_i)$.*

Pak platí

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2h$$

(Šišma, 1997)

Dále uvedl následující pravidla, která pomohou stanovit, zda hledaný tah existuje, či nikoliv:

1. *Jsou-li v grafu vice než dva uzly lichého stupně, pak eulerovský tah neexistuje.*
2. *Jsou-li v grafu právě dva uzly lichého stupně, pak existuje otevřený eulerovský tah začínající v jednom z těchto uzlů a končící v druhém.*
3. *Jestliže jsou v grafu všechny uzly sudého stupně, pak existuje uzavřený eulerův tah.* (Šišma, 1997)

Euler přemýšlel jen na souvislými grafy, což vycházelo ze zadané úlohy, Graf, které je souvislý a obsahuje jen uzly sudého stupně nazýváme v dnešní době eulerovský graf (Šišma, 1997).

Bylo by vhodné podotknout, že Euler dokázal jen první dvě pravidla, avšak dříve mu bylo milně připisováno i pravidlo třetí. Třetí pravidlo dokázal ve své práci až mladý německý matematik Carl Fridolin Bernhard Hierholzer, která vyšla dva roky po jeho smrti v roce 1873 (Stewart, 2013).

Výše nabyté znalosti využijeme i v následující kapitole o obrazcích, které lze nakreslit jedním tahem.

5. OBRAZCE JEDNÍM TAHEM

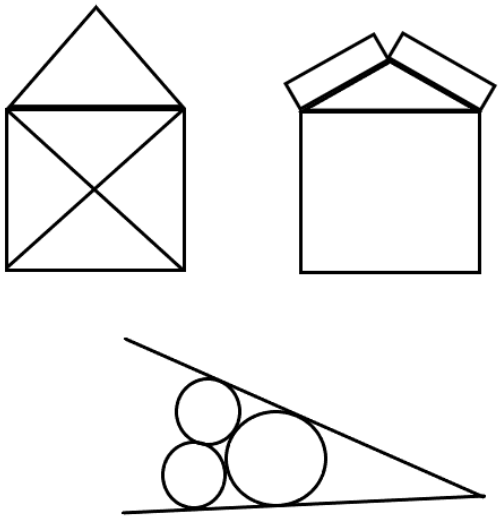
Už na základní škole se děti zabývají malováním všelijakých obrázků, které lze nakreslit jedním tahem, čili nakreslit zvolený obrázek, aniž by zvedli tužku z papíru.

Jedním z neznámějších obrázků, které mají děti nakreslit je domeček. Mohli bychom říct, že je to „hra“, která baví napříč generacemi. Zmíněný domeček je však jen vstupem do tajů mnohem složitějších obrázků, které však nejsou až tolik známé. Na nich si však můžeme ukázat jednotlivé normy a všechny souvislosti, na jejichž základě zjistíme, zda zvolený obrázek půjde jedním tahem sestrojit či nikoli.

Jednotlivé úkoly, které jdou nakreslit jedním tahem, lze vyřešit pomocí znalostí z teorie grafů, přesněji z Eulerovy první věty teorie grafů, které se blíže věnujeme v kapitole č. 4 o sedmi mostech města Královce.

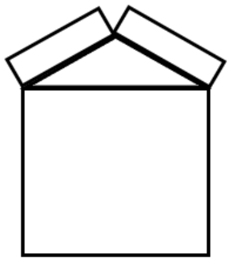
5.1 Jednotlivé úkoly

Pravidlo: Obrázek musí být nakreslen jedním tahem bez přerušení. Žádná čára nesmí být dvojitá.

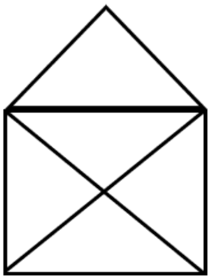


Obrázek 6 – Obrázky nakreslené jedním tahem

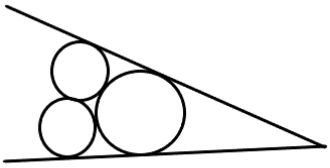
Jak na to?



Domeček, který má otevřenou střechu je jeden z nejlehčích obrázků, jenž je určen úplným začátečníkům. Při troše štěstí a pozornosti by vám měl vyjít téměř vždy, díky své nekomplikovatelnosti sestrojování. Je to díky uzlům se sudým stupněm[3], lze totiž začít v jakémkoli uzlu.



Nakreslit tento domeček jedním tahem lze, pokud začneme svůj tah vlevo nebo vpravo dole. Důvod, který tohle zapříčiňuje je četnost uzlu. Zmíněná místa jsou uzly, které mají lichou hodnotu, setkávají se zde tři čáry. Ostatní uzly jsou sudé, díky tomu není vhodné v nich začínat.

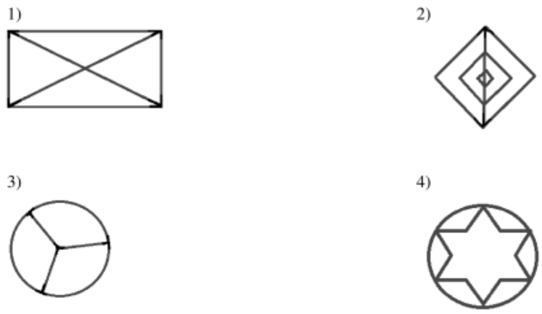


Třetí náš zvolený obrazec vypadá sice složitě, ale při bližším pohledu zjistíme, že vlevo nahoře nebo vlevo dole se opět nachází uzel s lichým počtem setkávajících se čar. Tento uzel musí být tedy počátečním uzlem. V jiném případě se obrazec nepodaří sestrojit.

5.1.1 Aplikace pro ZŠ

Výše zmíněné příklady lze aplikovat do látky základní školy. Například je můžeme koncipovat takto:

„Zjisti, zda nakreslené obrázky lze sestrojit jedním tahem. Žádná čára však nesmí být dvojitá. Uveď důvody, proč lze daný obrázek sestrojit či nikoli.“



Obrázek 7 – Obrázky jedním tahem č. 2 (Doležalová , 2015)

---

[3] Uzel je místo, kde se nám setkají čáry.

Řešení:

1) Nelze nakreslit, protože obrazec má 4 uzly s lichým počtem hran.
2) Lze nakreslit obrazec jedním tahem, ale tah musí začínat v jednom ze dvou lichých uzlů (v druhém bude končit).
3) Nelze zkonstruovat, má čtyři uzly s lichým počtem hran.
4) Lze namalovat, má samé sudé uzly, začátek může být kdekoli.

Závěr:

Závěrem můžeme říct, že jedním tahem lze nakreslit jen obrazec, který má buď dva liché uzly nebo žádný lichý uzel. Pokud má obrazec jen uzly se sudým počtem hran, můžeme svou kresbu začít kdekoliv. Když má obrazec dva liché uzly, musíme v jednom z těchto uzlů začít a v druhém svůj tah skončit. Pokud se v obrazci vyskytne čára, která vede z grafu uzlu ven, počítá se jako lichý uzel.

Příklady tohoto typu jsou pro žáky velice atraktivní, pomáhají rozvíjet grafomotoriku, orientaci v rovině a logické myšlení. Žáci většinou začnou kresbu metodou pokus-omyl, ale postupným zkoušením přichází na určitý systém, kterým se vyvarují chybám. Úkoly můžeme zapojit do výuky či rekreační matematiky a využít je lze i na procvičení kombinatorického myšlení. Zařadit je nemusíme jen v hodinách matematiky, ale například i do pracovních činností, kdy obrázky mohou vytvářet spojováním provázků (Doležalová , 2015)

Hry lze zábavně zakomponovat do výuky jako předstupeň rýsování. Dostupné jsou obrázky pro žáky 1. stupně i 2. stupně základní školy a střední školy.

5.1.2 Aplikace pro SŠ

Výše zmíněné úlohy můžou být předskokanem mnohem složitějších úloh, které se dají využít pro výuku na střední škole. Jednou motivační úlohou může být i problém z 18. století, kterým se zabýval nejen Leonard Euler, a tou je předchozí úloha o Sedmi mostech města Královce.

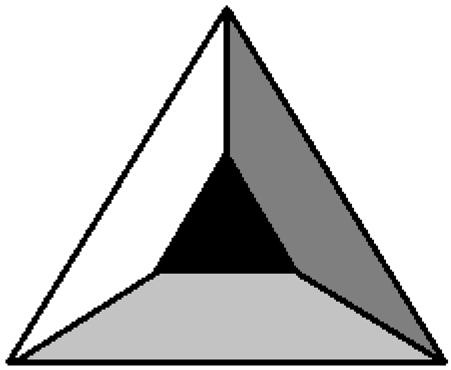
6. TEORIE ČTYŘ BAREV

6.1 Historie

Na světě jsou problémy, jejichž formulace je na první pohled jednoduchá, ale řešení může být velice obtížné. Co se historie tohoto problému týče, počáteční narážku o problému čtyř barev můžeme přisoudit Francisi Guthriemu doktorandovi z Univeristy College v Londýně, který roku 1852 při pokusu o vybarvení hrabství Anglie zjistil, že mu stačí pouze čtyři barvy, přičemž žádná dvě sousedící hrabství nejsou obarvena stejnou barvou. Po tomto zjištění diskutoval s bratrem Frederickem, zda-li je možné, že každá mapa může být znázorněna jen čtyřmi nebo méně barvami tak, že sousední státy (tj. ty, které sdílejí společný úsek, nikoli jen bod) dostanou různou barvu nebo tento fakt nějak souvisí se speciálním tvarem mapy Anglie. (Stewart, 2013)

Odpověď na tuto domněnku přišla o 124 let později. Řešení, které známe v dnešní době je do velké míry závislé na rozsáhlých výpočtech provedených počítači. Zatím neexistuje žádný matematický důkaz, který by mohl člověk ověřit krok po kroku za dobu nejméně jednoho lidského života.

Frederick nedokázal bratrovi na otázku odpovědět, a tak zmíněný problém poslal známému matematikovi Augustu De Morganovi. Bohužel i ten však záhy přichází na to, že tuto otázku nedokáže vyřešit. Není těžké dokázat, že nejméně čtyři barvy potřebujeme, neboť existují mapy o čtyřech oblastech, kdy každé dvě spolu sousedí. (Stewart, 2013)

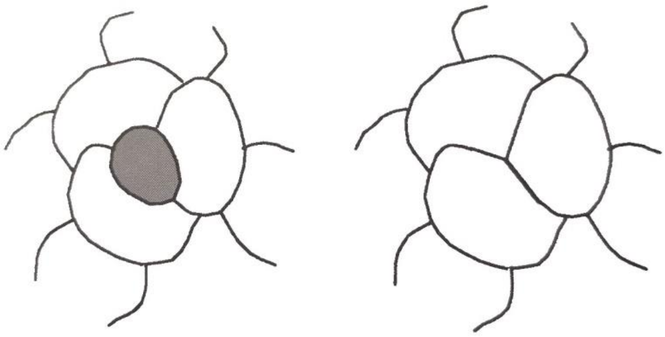


Obrázek 8 – Jednoduchá mapa, k jejímuž obarvení potřebujeme čtyři barvy. (Stewart, 2013)

De Morgan dokázal, že neexistuje analogická mapa o pěti oblastech, z nichž by každé dvě sousedili. Jeho větou dokazujeme jen to, že Větu o čtyřech barvách nemůžeme vyvrátit jednoduchým protipříkladem. Ovšem první tištěná publikovaná zmínka přišla až roku 1878, a to v časopise *Proceeding of the London Mathematical Society*. (Stewart, 2013)

O rok později (1879) přichází Arthur B. Kempe s prvním publikovaným důkazem. Kempe ukázal, že každá mapa obsahuje alespoň jednu oblast, která má pět nebo méně sousedů. Pokud najdeme oblast, jenž má tři sousedy, můžeme ji odstranit, čímž se mapa zjednoduší. (Stewart, 2013)

Vycházel z předpokladu, že pokud je možné zjednodušenou mapu obarvit čtyřmi barvami, pak je možné takto obarvit i původní mapu. Mapu budeme tedy zjednodušovat tak dlouho, než nám zbydou pouhé čtyři oblasti, ty vybarvíme čtyřmi barvami a následně se budeme vracet ve vlastních stopách a vybarvovat přibývající území podle Kempeho pravidel. (Stewart, 2013)



Obrázek 9 – Je-li možno obarvit mapu vpravo čtyřmi barvami, pak totéž platí pro mapu vlevo. (Stewart, 2013)

V roce 1890 Percy Heawood přišel na to, že existují mapy, pro které Kempeho metoda nefunguje. Pokud bychom dali pryč oblast s pěti sousedy, a pak se jí pokusili vrátit, mohli bychom se dostat do neřešitelných problémů. Kempeův argument však dokázal, že pro vybarvení rovinné mapy stačí pět barev. (Stewart, 2013)

Roku 1891 přišel další neúspěšný důkaz od Petera Guthrieho Taita, avšak na slepá místa v obou argumentech poukázal v tomtéž roce i Julius Petersen. Oba zmiňované nezdary však měly určitou hodnotu, protože díky nim A. B. Kempe objevil to, co nazýváme Kempeovi řetězy, a P. G. Tait získal ekvivalentní formulaci teorému čtyř barev, pokud jde o zbarvení tří hran. (Stewart, 2013)

Heawood pozměnil Kempeho metodu tak, aby z ní bylo jasné, že pět barev vždy stačí k obarvení jakékoli mapy, avšak už nikdo nedokázal nalézt příklad mapy, pro niž by bylo nezbytné použít pět barev. (Stewart, 2013)

V roce 1922 se povedlo Phillipovi Franklinovi dokázat, díky velkému přínosu práce Birkhoffa, že dohad o čtyřech barvách platí pouze pro mapy s nejvýše 26 územími. Franklinova teorie poskytla cestu pro úplné řešení, díky pojmu odstranitelná konfigurace, který byl v práci zaveden. Konfigurace je jakékoli souvislé území s oblastmi uvnitř nějaké mapy spolu s nějakou informací o tom, kolik oblastí sousedí s oblastmi na naší konfiguraci. Nazýváme ji odstranitelnou, pokud platí implikace, že původní mapu jde obarvit čtyřmi barvami za předpokladu, že totéž platí pro mapu zmenšenou, tedy takovou, z níž byla odstraněna naše konfigurace. (Stewart, 2013)

Franklin zjistil, že jisté konfigurace obsahující několik oblastí se někdy dají odstranit a některé osamocené oblasti nikoli. Vcelku mnoho konfigurací o větším počtu území je odstranitelných. (Stewart, 2013)

Kempeho důkaz nefungoval z toho důvodu, že jedna z jeho konfigurací, a to oblast s pěti sousedy, není odstranitelná. Franklin, ale řekl, zkusme použít větší rozsah seznamu konfigurací, který obsahuje mnohem složitější území. Soustřeďme se na některé konfigurace o dvou nebo třech oblastech. Udělejme dlouhý seznam a hledejme jakoukoli „nevyhnutelnou množinu“ odstranitelných konfigurací, když ji najdeme, jsme hotovi. (Stewart, 2013)

V roce 1950 vyslovil Heinrich Heesch domněnku, že naši větu bude možno dokázat pomocí objevu nějaké nevyhnutelné množiny odstranitelných konfigurací, avšak nalézt ji nebude snadné. Výpočty ukazovaly, že taková množina bude muset zahrnovat něco kolem 10 000 konfigurací. (Stewart, 2013)

Zmiňovanou práci od Birkhoffa využívali i další matematici. Konkrétněji to byl H. Heesch, jenž přispěl hlavními dvěma částmi důležitými pro konečný důkaz naší teorie. Byly to redukovatelnost a vybíjení. První zmiňovanou složkou se zabývali i jiní, avšak myšlenka vybíjení, klíčová pro důkaz o nevyhnutelnosti, zůstává připisována H. Heeschovi, který předpokládal, že správný vývoj této metody povede k vyřešení problému čtyř barev. (Stewart, 2013)

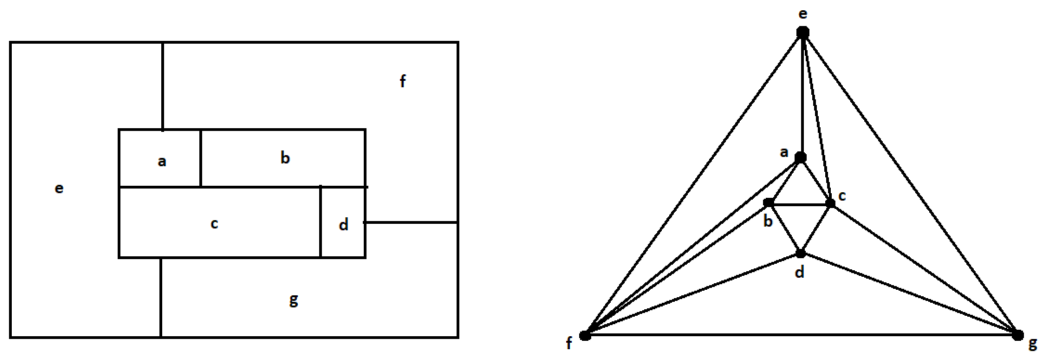
Kolem roku 1970 Wolfgang Haken vylepšil Heeschovu metodu k určování odstranitelných konfigurací a položil myšlenku, že pomocí počítače by mohl být důkaz brzy na světě. Bohužel s počítači v té době by trvalo nejméně čtvrt století prověřit všech 10 000 konfigurací. Hakenovi tedy nezbylo nic jiného než vylepšit teoretické metody a zmenšit objem výpočtů na přijatelnou mez. (Stewart, 2013)

V roce 1975 Haken ve spolupráci s Kennethem Appelem a pomocí svého počítače zredukovali velikost množiny na 2000 oblastí. Najednou se zdálo, že tandem člověk-počítač by mohl daný matematický problém vyřešit. Následně K. Appel a W. Haken v roce 1976 začali hledat poslední díl důkazu, a to vhodnou nevyhnutelnou množinu. Zadali počítači jakou množinu má hledat a počítač prověřil odstranitelnost každé konfigurace. Pokud konfigurace neprošla, byla nahrazena alternativou a test byl zopakován. V červnu téhož roku se proces zastavil a počítač vyhodnotil, že aktuální množina konfigurací je nevyhnutelná a každá konfigurace je v ní odstranitelná. Důkaz byl kompletní. (Stewart, 2013)

Výpočet trval 1 000 hodin a test odstranitelnosti využíval 487 různých pravidel. Tento proces je možné uskutečnit s dnešními počítači asi za hodinu. Zatím bohužel nedokážeme snížit velikost nevyhnutelné množiny tak, aby se mohl o správnosti přesvědčit člověk bez pomoci počítače. Nicméně víme, že Věta o čtyřech barvách platí. (Stewart, 2013)

6.2 Vznik problému a Kempeho důkaz

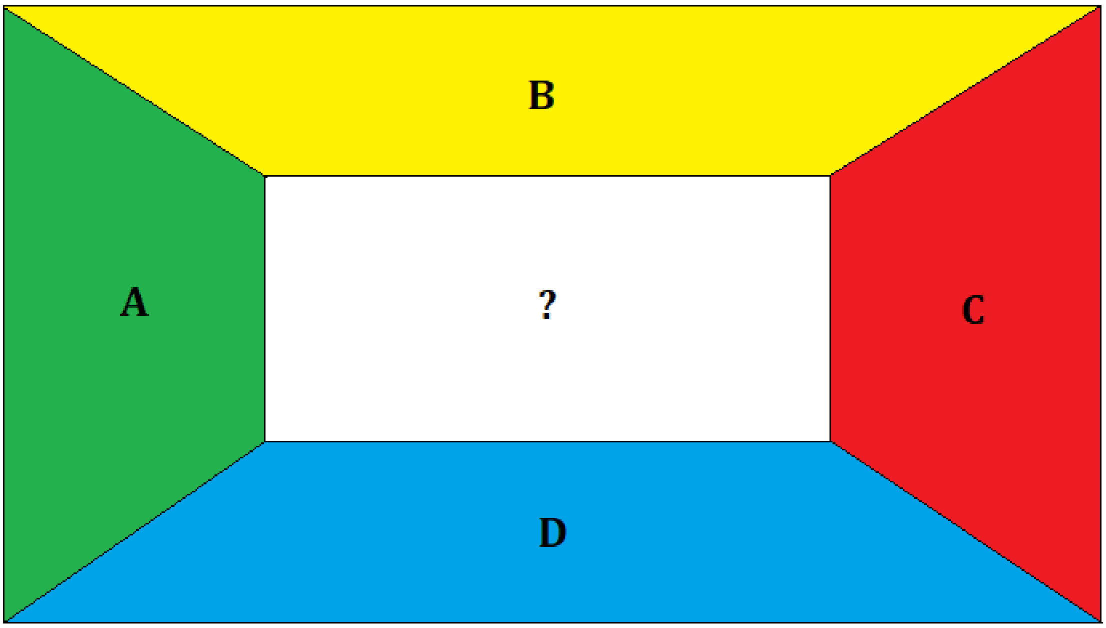
Barvení mapy můžeme přetvořit na barvení uzlů grafu, jenž dostaneme tak, že uvnitř každého státu vybereme libovolný bod a řekneme, že je uzlem grafu. Hrany grafu získáme, pokud spolu dva státy sousedí a právě tehdy dva uzly spojíme. Barvení států tak převedeme na obarvení uzlů, kdy dva uzly, jenž jsou spojeny hranou, zbarvíme odlišnými barvami. Graf odpovídající zeměpisné mapě je rovinný. (Šišma, 1997)



Obrázek 10 – Mapa a její graf (Šišma, 1997)

K obarvení této mapy stačí pouze 4 barvy. Jak už jsme zmínili obarvování map, lze převést na barvení uzlů grafu. Tuto myšlenku zveřejnil A. B. Kempe v roce 1879 (Šišma, 1997).

Kempe postupoval tak, že si nejdříve uvědomil, že stačí dokázat větu o čtyřech barvách pouze pro tzv. trivalentní mapy. To je mapa, na které se potkávají právě tři hraniční křivky v jednom bodě. Pokud dokážeme, že pro vybarvení trivalentní mapy stačí pouze čtyři barvy, tento fakt pak bude platit i pro jakoukoli libovolnou mapu. Kempe ve svém důkazu ukázal, že libovolná trivalentní mapa má oblast, která sousedí s pěti nebo méně oblastmi. Pro důkaz své hypotézy využil matematickou indukci vzhledem k počtu oblastí mapy. Musíme poukázat na to, že pokud je mapa M_r s r oblastmi vybarvená čtyřmi barvami, pak platí, že čtyři barvy stačí i pro vybarvení mapy M_{r+1} s $r+1$ oblastmi. Předpokládal jednotlivé příklady map, jejž obsahují území, které sousedí s dvěma, třemi, čtyřmi nebo pěti územími. Jedna z těchto situací musí vždy nastat. Z mapy M_{r+1} získal mapu M_r tak, že dal jednu hranu z uvažované oblasti pryč. Důkaz nevytvářel problémy pro první dva příklady. Pro oblasti se čtyřmi a pěti sousedy využil Kempe metodu řetězců (Kempe chains). Budeme předpokládat, že máme trivalentní mapu, jenž má vybarvené všechny území pomocí čtyř barev, kromě jediné, která není vybarvena, a že sousedí právě se čtyřmi územími nazývanými A, B, C a D, které jsou znázorněny zelenou, žlutou, červenou a modrou. (Šišma, 1997)



Obrázek 11 – Kempe chains

I v tomto případě můžeme zabarvení změnit tak, aby nám pouze čtyři barvy stačily. Podívejme se oblasti A a C. Můžou se stát dva případy: buď nalezneme řetězec A – C, ve kterém se budou střídat území obarvené červenou a zelenou barvou, nebo takový řetězec neexistuje.

V případě, že řetězec neexistuje, můžeme vyměnit červenou a zelenou barvu v červeno-zelených oblastech, které jsou propojeny s A, aniž bychom změnili barvu oblasti C.
Po tomto úkonu jsou oblasti A a C vybarveny červenou barvou a na zbývají pátou oblast tedy použijeme barvu zelenou. Pokud existuje řetězec A – C, ale neexistuje řetězec B – D, můžeme tuto úvahu aplikovat na žlutou a modrou oblast. (Šišma, 1997)

Kempe následně prohlásil, že pro mapy na jiných plochách nemusí tato úvaha stačit, čili čtyři barvy nemusí být pro mapu na jiné ploše dostačující. Pro tuto variantu uvádí jako příklad anuloid. Dále uvedl, že do každého území můžeme umístit bod a ten propojit s body v oblastech, které jsou sousedem uvedené oblasti. Tímto úkonem získáme rovinný graf a dostaneme úlohu, která je předělaná na barvení uzlů tohoto grafu. (Šišma, 1997)

Na Kempeho práci navazovaly i další matematici, kteří jeho výsledek práce potvrzovali a snažili se ji modifikovat. (Šišma, 1997)

6.3 Vyvrácení Kempeho důkazu

V roce 1890 Percy John Heawood upozornil na chybu v Kempeho důkazu. Ve své práci Map–colour theorem poukázal na to, že Kempeho metoda řetězců nestačí v případě, že jedna nevybarvená část trivalentní mapy sousedí s pěti dalšími oblastmi, které už jsou vybarveny čtyřmi barvami. Kempe sám sdělil na zasedání *London Mathematical Society,* že se v jeho důkazu nachází chyba, avšak ji nedokáže opravit. (Šišma, 1997)

Heawood sám pracoval na problému čtyř barev a publikoval několik prací až do roku 1950. Jeho práce je důležitá z několika důvodů. Dokázal, že stačí pět barev na vybarvení jakékoliv mapy v rovině nebo na kulové ploše. Mnoho let šlo o jediný konečný výsledek. Začal také systematicky prozkoumávat zabarvení map na různých plochách, což je důležitější. Heawood zobecnil myšlenku P. G. Taita tak, že řekl: „Budeme předpokládat, že můžeme přiřadit hodnoty +1,-1 každému uzlu trivalentní mapy tak, že součet ohodnocení uzlů v každé oblasti je dělitelný třemi, pak jde mapa vybarvit čtyřmi barvami.“ (Šišma, 1997)

6.4 Vyřešení problému

Ve chvíli kdy Kempeho a Taitovo důkazy selhaly, povedlo se dále dokázat barvení map pomocí čtyř barev jen pro mapy s určitým počtem oblastí. V roce 1922 P. Franklin dokázal tuto teorii pro oblast s nanejvýš 25 zeměmi.

V roce 1926 C. N. Reynolds dokázal totéž nanejvýš pro oblast s 27 zeměmi, C. E. Winn v roce 1940 s 35 zeměmi, O. Ore a J. Stemple pro mapy s 39 zeměmi v roce 1970 a v roce 1976 J. Mayer dosáhl nejvyššího výsledku, a to pro mapy až s 95 územími (Ross & Hall, 2010).

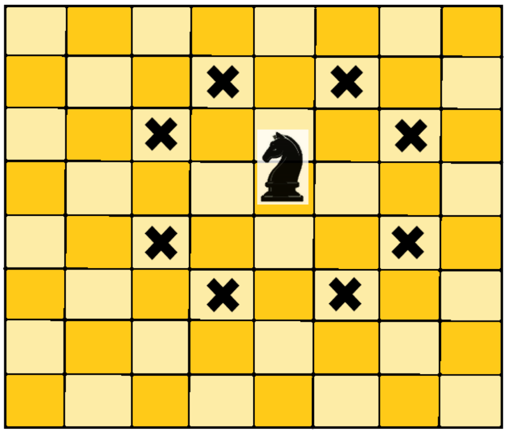
Německý matematik Heinrich Heesch mezi roky 1960 – 1970 hledal metody důkazů pomocí počítačů. Jedním z těchto důkazů, bylo i řešení problému čtyř barev pomocí počítače. Bohužel se ukázalo, že toto řešení by mu zabralo mnoho času (GFDL, 2016).

Jeho nápadem se nechali inspirovat Kenneth Appel a Wolfgang Haken z univerzity v Illinoisu, Urbana-Champaign. Díky Heeschovým výsledkům a Johna Kocha vytvořili počítačový program a uvedli tak svůj vlastní důkaz věty o čtyřech barvách. Tento matematický objev oznámili 21. června 1976 (Bailey & Borwein, 2013) a v roce 1977 vydal jejich práci časopis *Journal of Mathematics* v Illionois (Appel & Haken, 1997). Tuto domněnku trvalo vyřešit 1200 hodin procesorového času a důkaz je popsán v dokumentu o stosedmdesáti stranách, kde 114 stran obsahuje jen ilustrační přílohy. Zpracování metod, programu a samotná práce trvala celé čtyři roky.

Mnoho matematiků mělo k Appel-Hakenově metodě důkazu výhrady, hlavně z důvodu práce počítače a nemožnosti ručního přepočítání důkazu (Šišma, 1997). Během několika let U. Schmidt chybu v postupu důkazu opravdu našel, na to však Appel a Haken reagovali v roce 1989 vydáním článku, kde vysvětlili nalezenou chybu a její samotnou opravu.

7. JEZDCOVA PROCHÁZKA

Jezdcova procházka je známý matematický problém, který se týká šachové figurky koně a šachovnice. Figurka jezdce se hýbe po prázdné šachovnici dle platných šachových pravidel, tedy pohyb do L.



Obrázek 12 – Pohyb jezdcem

Úkol, který je zadán zní, aby šachová figurka navštívila každé políčko právě jednou.

Tento problém řešili již středověcí arabští a indičtí učenci a první výsledky pochází už z devátého století. Je velké množství variant jezdcovy procházky a stále se vyskytuje i v dnešní rekreační matematice, avšak nesmíme zapomenout, že je předmětem i mnoha studií významných matematiků. V minulosti se touto problematikou zabýval například Euler, Legendre nebo Vandermond. Existují různé velikosti šachovnic a odlišné pohyby jezdcem. Např. na klasické šachovnici o velikosti 8×8 polí je velké množství řešení, z nichž přesně v 26 534 728 821 064 případech jezdec dokončí svůj tah na poli, odkud ohrožuje pole, kde celá úloha začala (Šachy, 2022).

7.1 Historie

V Číně kolem roku 2200 př. n. l. byl zaznamenám tzv. magický čtverec. Čtverec s očíslovanými poli, kdy součet číslic v jednotlivých řadách, sloupcích a hlavních diagonálách je vždy stejný a jeho velikost je 3×3 pole. Čtverec se dal projít figurkou zkombinované tahy tří kamenů, což bylo v tehdejší variantě dnešních šachů tak, že tah začal na poli číslo jedna a pokračoval až k číslu devět, přičemž každé pole bylo figurkou navštíveno právě jednou. Aplikovány byly tahy kamenů, které v pozdější asijské variantě šachů *šatrandž* odpovídaly pěšci, vezíru (fers, předchůdce dnešní dámy, který mohl táhnout jen o jedno pole diagonálně) a koni (dnešní jezdec) (Šachy, 2022).

Jezdcova procházka, jak ji máme v dnešní podobě, sahá až do doby 9. století. Poprvé byla sepsána kolem roku 840 v učebnici šachů, jejímž autorem byl Al-Ádlí, bohužel se však nedochovala. Řešení z této knihy je známo díky rukopisu jiného arabského učence al-Hakima, který celé řešení popsal ve svém spise. O Al-Ádlího procházce můžeme říci, že je uzavřená, což znamená, že řešení lze začít na jakémkoli poli na šachovnici. Ve zmíněném spise se nachází ještě jedno, méně propracované, řešení. Jeho autorem je méně známý hráč šachu Ali C. Mani. V jeho podání jezdec objíždí nejdříve okraje šachovnice a postupně směřuje do středu, kde svůj tah ukončí. (Šachy, 2022)

Známější řešení pochází od kašmírského básníka Rudraty, kolem konce 9. století. Ten zmíněný problém řešil jen na půlce šachovnice, avšak k řešení problému na celé šachovnici stačí jeho postup zopakovat i na druhé půlce šachovnice. V perském rukopise z 19. století je toto řešení podrobně popsáno a v encyklopedii *Manasollasa* z 12. století, která je psána sanskrtem, je tato varianta mírně upravena tak, že řešení z první poloviny šachovnice je zopakováno i na druhé polovině, avšak otočeno o 180°. Časová blízkost těchto tří řešení zapříčinila, že nelze jednoznačně určit, které je nejstarší. Je patrné, že i těmto řešením předcházely jiné, mnohem starší, které se však bohužel písemně nedochovaly. (Šachy, 2022)

Jezdcovou procházkou se zabýval i další arabský učenec Abu-Bakr Muhammad ben Yahya as-Súlí, jeho dílo se bohužel dochovalo jen zprostředkovaně v rukopisech jiných autorů. Zajímavá je jedna jeho úvaha jezdcovy procházky, a to ta, kdy myšlenou čarou rozdělíme šachovnici vodorovně na dvě poloviny, zjistíme, že řešení je téměř na obou polovinách osově souměrné. Tento autor také sestavil procházku jezdce a slona (předchůdce dnešního střelce, pohybující se diagonálně o dvě políčka) a jezdce a vezíra (pohyb o jedno pole diagonálně). (Šachy, 2022)

První zmínku o této úloze z území Evropy nalezneme v anglo-normanském rukopisu z poslední čtvrtiny 13. století, který je uložený v Královské knihovně v Londýn. Procházka je složená ze dvou na sebe navázaných procházek po obou polovinách šachovnice. Součást tohoto řešení, která leží v horní čtvrtině šachovnice, je téměř celou jezdcovou procházkou po šachovnici 4×4 pole, kdy pouze jezdec se místo na pole H6 přesune na pole G4, jenž leží mimo zmíněnou oblast. Blíž se k řešení jezdcovy procházky na šachovnici 4×4 pole nedostaneme. (Šachy, 2022)

Dalším evropským pramenem, který zaznamenal jezdcovu procházku, je latinský rukopis od autora Nicolase de Nicolai. Tento rukopis se jmenuje *Bonus Socius* („Dobrý společník“), pochází ze 14. století a dnes ho najdeme v pařížské knihovně *Bibliotheque de Paris.* V rukopisu je zaznamenána verze jezdcovy procházky, kde na šachovnici je rozestavěno stanoveným způsobem všech 32 šachových kamenů a bílý jezdec je umístěn v rohu šachovnice. Jezdec má následně za úkol nejdříve odebrat všechny figurky kromě obou králů, pokračovat všemi pěšci a nakonec sebrat oba krále. Ta část, kde figurka jezdce vezme ostatní figurky, má jediné řešení, avšak ve chvíli, kdy přijdou na řadu pěšáci, je přesně šest způsobů, jak je z hracího plánu odebrat. (Šachy, 2022)

Výše zmíněné středověké asijské šachové poznatky byly později Evropany zapomenuty a evropští šachisté a matematici se jezdcovou procházkou a celou její problematikou začali zabývat znovu až v 18. století. Dílo *Recreations Mathematiques et Physiques,* které bylo novějším vydáním staršího díla Jacquese Ozanama a vydáno v roce 1725, obsahovalo tři jezdcovy procházky, jejich autory byli Jean-Jacques d´Ortous de Mairan, Abraham de Moivre a Pierre Rémond de Montmort. I přesto byly starší procházky a jejich řešení z dob středověku kvalitnější a přesnější. Všechny tři „moderní“ procházky byly otevřené, nedostatečně promyšlené a esteticky méně hodnotné. (Šachy, 2022)

V roce 1759 byla pruskou akademií věd v Berlíně vypsána odměna 4000 franků na nejlepší pojednání o řešení tohoto problému. Ještě v témže roce byla akademii představena práce Leonharda Eulera, který však odměnu nezískal nejspíše z důvodu, že v témže období zastával na akademii důležitou funkci.

Euler se nechal inspirovat jiným matematikem ze Švýcarska L. Bertrandem a ve své práci představil několik desítek jezdcových procházek. Velké množství z nich byly různě provázané související varianty, které vznikly díky nové metodě rozpojení již existujících sekvencí jezdcovy procházky na příhodném místě a složením na místě jiném. Řešil také symetrii v tomto problému a některá řešení opět rozvedl do dalších souvisejících variant pomocí symetrie.

Euler byl také tím, kdo se zabýval jezdcovou procházkou na menších šachovnicích. V tomto případě se však dopustil chyby, protože tvrdil, že nelze vytvořit uzavřenou procházku na šachovnici o hraně menší než je pět polí, což byla nepravda, která byla o jedno a půl století dokázána. Tuto nepravdu dokázal v roce 1917 Ernest Bergholt, jenž vytvořil uzavřenou cestu na šachovnicích o 3×10 polí a 3×12 polí. (Šachy, 2022)

Velmi zpřístupnil jezdcovu procházku na konci 18. století rakouský vynálezce Wolfgang von Kempelen, který na cestách po evropském kontinentě představoval svůj údajný šachový automat Turek (který v sobě ve skutečnosti ukrýval šachistu). Když Kempelen zemřel, převzal cestovní štafetu Johann Nepomuk Mälzel, který s automatem procestoval i Spojené státy americké.

7.2 Matematický popis a zobecnění

Zvolený problém jezdcova procházka je příkladem obecnějšího problému teorie grafů – neboli nalezení hamiltonovské cesty v grafu a řešení jezdcovy procházky, která je uzavřená odpovídá problému nalezení hamiltonovské kružnice. Avšak řešení jezdcovy procházky na rozdíl od obecného problému lze získat v lineárním čase.

Graf, který přísluší dané problematice a v němž jsou nacházeny hamiltonské cesty je koncipován tak, že vrcholy jsou jednotlivá pole šachovnice a hrana mezi nimi vede právě tehdy, když se lze z jednoho vrcholu dostat do druhého jediným tahem jezdce. Tento graf ponese název graf pohybu jezdce.

7.3 Řešení

Každá posloupnost tahů jezdce, která splňuje následující dvě základní podmínky je řešením problému jezdcovy procházky. První podmínka, kterou musí splňovat je: Každý tah je proveden v souladu s šachovými pravidly. Druhá podmínka zní: Každé z polí na šachovnici musí být použito právě jednou. V tomto matematickém představení je řešením cesta v grafu pohybu jezdce, která prochází všemi vrcholy. (Šachy, 2022)

Počet všech řešení je závislý na zvolené velikosti šachovnice, je jím přímo ovlivněn a také zda jsou na řešení kladeny další dodatečné podmínky.

7.3.1 Druhy řešení

Uzavřené řešení nastává tehdy, když se jezdec může z koncového pole jediným tahem dostat zpět na počáteční pole, z kterého vycházel a „uzavřít“ tak svou cestu. To znamená, že zvolená cesta vytvoří v grafu pohybu jezdce kružnici. Pokud není řešením „uzavřená“ cesta, nazývá se řešení „otevřená“ cesta. (Šachy, 2022)

Každá trasa, která je uzavřená se dá provést dvěma směry. Pokud pokládáme tato dvě řešení za různé, řekneme, že řešení jsou orientovaná. V druhém případě, pokládáme-li tyto dvě řešení za totožná, nazýváme řešení jako neorientované. Počet neorientovaných uzavřených řešeních je přesně polovinou počtu orientovaných uzavřených řešeních, to je způsobeno faktem, že na každé neorientované řešení připadají právě dvě orientovaná řešení.

7.3.2 Existence řešení

Schwenkova věta uvádí podrobné podmínky pro řešitelnost jezdcovy procházky pro obecné rozměry šachovnice.

Pokud máme šachovnici o rozměrech m × n polí, kde m je menší nebo rovno n, je uzavřené řešení jezdcovy procházky vždy možné, s výjimkou následujících případů:

1. Obě čísla m a n jsou lichými čísly.
2. m = 1, 2 nebo 4; m a n nejsou obě současně rovna 1.
3. m = 3 a n = 4, 6 nebo 8.

Samotný důkaz zde rozvádět nebudeme. (Šachy, 2022)

7.3.3 Počty řešení

Čtvercové šachovnice

Pokud máme šachovnici 8×8 polí, nalezneme přesně 13 267 364 410 532 neorientovaných uzavřených řešení. Šachovnice, která má 6×6 polí, má zároveň 9 862 neorientovaných řešení. Na menších čtvercových šachovnicích žádná neorientovaná uzavřená řešení nejsou. Avšak na šachovnici o velikosti 5 × 5 polí na ní lze najít 1 728 otevřených řešení, na menších poté už ne. (Šachy, 2022)

Šachovnice se čtyřmi řádky

Schwenkova věta nám říká, že na šachovnicích, které mají čtyři řádky, nelze najít uzavřené řešení jezdcovy procházky. Naopak zde můžeme najít řešení otevřená. Jaké množství jich lze najít pro šachovnici o rozměrech 4 × n pro n menší nebo rovno 21 nám říká tabulka níže.

Tabulka 9 – Počet otevřených řešení na šachovnici 4 × n, pro n ≤ 21

Rozměry	Počet otevřených řešení
4 × 1	0
4 × 2	0
4 × 3	32
4 × 4	0
4 × 5	328
4 × 6	2 976
4 × 7	25 512
4 × 8	124 352
4 × 9	758 752
4 × 10	4 852 448
4 × 11	26 735 408
4 × 12	145 945 312
4 × 13	805 129 880
4 × 14	4 334 341 216
4 × 15	22 824 469 832
4 × 16	119 276 925 152
4 × 17	617 722 010 896
4 × 18	3 163 151 197 504
4 × 19	16 059 782 780 784
4 × 20	80 965 219 241 952
4 × 21	405 344 545 960 912

7.3.4 Algoritmy

Backtracking

Jedním z nejjednodušších algoritmů pro zjištění řešení problému jezdcovy procházky je backtracking. Spočívá v tom, že jezdec skáče libovolně po šachovnici na neobsazená pole, dokud nenastane problém, že nemůže dále pokračovat, protože v doskokovém okolí všechna pole již navštívil. V tomto okamžiku se vrátí o jeden tah a skočí na jiné pole než předtím. Vzhledem k častému se vracení ze slepých uliček je tento algoritmus velice zdlouhavý. (Šachy, 2022)

Warnsdorffův algoritmus

Jeden z prvních efektivněji navržených algoritmů je Warnsdorffův algoritmus. V roce 1823 byl poprvé popsán H. C. Warnsdorffem. Tento algoritmus pracuje tak, že za pole pro další tah vybírá to, z kterého lze pokračovat nejméně způsoby. Častěji jsou tedy obsazovány méně dostupná pole nebo téměř nedostupná a na konec zůstávají snadněji dostupná pole.

Tento algoritmus je navržen pro malé šachovnice v lineárním čase. Ve variantách větších než je šachovnice o 76 × 76 polí se opět častěji dostáváme do slepých uliček. (Šachy, 2022)

Conradův algoritmus

Toto je první algoritmus, který pracuje v lineárním čase pro všechny velikosti čtvercových šachovnic. Navrhl jej a popsal v roce 1994 A. Conrad. Samotný algoritmus se zakládá na dělení dané šachovnice na menší obdélníkové výseče, pro které je dané řešení již známé. (Šachy, 2022)

7.4 V kultuře

Kašmírský básník Rudrata v 9. století využil princip jezdcovy procházky pro své veršované dílo psané sanskrtem Kâvyâlankâra. Slabiky byly napsané v šachovnicových polích a dávaly smysl pouze tehdy, když čtenář následoval tahy dané jezdcovou procházkou. (Šachy, 2022)

Další známou ukázkou jezdcovy procházky v umění je francouzský román *La Vie mode d´emploi* spisovatele Georgese Pereca, vydaný v roce 1978. Jezdcova procházka je zde využita tak, že je zde popisován činžovní dům, který má deset podlaží a na každém podlaží je deset bytů. Každému bytu je věnována jedna kapitola a pohyb mezi nimi vychází z pohybu jezdcem podle jezdcovy procházky. (Šachy, 2022)

8. ÚLOHA O 36 DŮSTOJNÍCÍCH

Úloha o 36 důstojnících byla představena akademii v Petrohradě dne 17. 10. 1776. Akademii ji představil Leonhard Euler a zadání znělo: „*Postavte do čtverce o velikosti* 6×6 *míst 36 důstojníků tak, aby v každé řadě a sloupci stáli důstojníci všech hodností a všech pluků* (Latinské čtverce).“

Euler pro vytvoření této úlohy vycházel z definice pro latinské čtverce: *„Pro každé přirozené n existuje latinský čtverec řádu n* (Latinské čtverce)*.“* Což znamená, že latinský čtverec *n-tého* řádu má rozměr *n* a je tvořený *n* prvky, které jsou rozestavěny tak, že každý prvek musí být v každém řádku a sloupci právě jednou. Jednoduchý příklad latinské čtverce je např.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Obrázek 13 – Latinský čtverec

A na základě definice pro ortogonální latinské čtverce, která zní: „*Latinské čtverce* (a_{ij}), (b_{ij}) *se nazývají ortogonální, jestliže se v matici* (a_{ij}, b_{ij}) *vyskytuje každý prvek příslušného kartézského součinu právě jednou* (Latinské čtverce)*,“* lze Eulerovu úlohu přeformulovat. Zjednodušeně řečeno ortogonální latinský čtverec je takový čtverec, který vznikne kartézským součinem latinských čtverců a žádný prvek se v něm neopakuje.

Příklad lze uvést, když si zvolím tři latinské čtverce.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

3	1	2
1	2	3
2	3	1

2	3	1
1	2	3
3	1	2

Obrázek 14 – Tři latinské čtverce

První a druhý čtverec je ortogonální, protože provedeme-li kartézský součin, dostaneme latinský čtverec, kde každý prvek je jen jednou.

13	21	32
31	12	23
22	33	11

Obrázek 15 – Latinský čtverec

Stejným způsobem můžeme zjistit, že první a třetí čtverec nejsou ortogonální, protože se zde opakují prvky 12, 23 a 31.

12	23	31
31	12	23
23	31	12

Obrázek 16 – Výsledný čtverec kartézského součinu prvního a třetího čtverce

Lze stejný způsob aplikovat na čtverce druhého řádu. Zjistíme, že vytvořit ortogonální latinský čtverec druhého řádu nelze.

Parafrázovaná Eulerova úloha by mohla znít tak to: „Najděte ortogonální latinské čtverce 6. řádu."

Otázkou je, zda se pro každé n větší než 1 vyskytuje latinský ortogonální čtverec.

V roce 1964 ve dvoudílné knize *Recréations mathématiques* byla sepsána úloha pro ortogonální čtverce 4. řádu, jejímž autorem byl *Jacques Ozaman* (Latinské čtverce).

Euler se jím zřejmě nechal inspirovat a vyslovil onu úlohu o 36 důstojnících. Pokud by úloha byla jen pro 25 důstojníků, došel by ke kladnému řešení.

5	4	1	3	2
1	3	2	5	4
2	5	4	1	3
4	1	3	2	5
3	2	5	4	1

a	b	c	d	e
b	c	d	e	a
c	d	e	a	b
d	e	a	b	c
e	a	b	c	d

5a	4b	1c	3d	2e
1b	3c	2d	5e	4a
2c	5d	4e	1a	3b
4d	1e	3a	2b	5c
3e	2a	5b	4c	1d

Obrázek 17 – Latinské čtverce 5. řádu

Hodnosti jsou označené číslem a pluk písmenem.

Když stejný princip zkoušel Euler aplikovat na čtverce šestého řádu, jeho pokus se nezdařil. Dokonce se nejdříve domníval, že ortogonální latinské čtverce existují jen pro každé *liché* n, ale Ozanam ve své knize ukázal, že existují i latinské čtverce 4. řádu. Idea, kterou měl Euler tedy byla, že ortogonální čtverce neexistují pro žádné $n = 4k + 2, k = 0, 1, 2, 3, \dots (tj. n = 2, 6, 10, 14, \dots)$, ale pro ostatní řády již řešení existuje.

Porovnáním všech možností, o celé století později, v roce 1900 doložil francouzský celní inspektor Gaston Tarry, že latinské čtverce 6. řádu neexistují.

Právě díky němu, můžeme dnes říci, že Eulerova úloha o 36 důstojnících nemá řešení, protože nelze důstojníky rozestavit podle zvolených pravidel. Konečné slovo nakonec měli R. C. Bose a S. S. Shirkhande, když ve spolupráci s E. T. Parkerem v roce 1959 ukázali, že ortogonální latinské čtverce existují pro všechny řády větší než dva, jedinou výjimkou je právě šestý řád (Pafel, 2009).

9. PROBLÉM DVOU OBÁLEK

Problém nebo chcete-li paradox dvou obálek je mnohými autory a matematiky považovaný za hádanku, logickou hříčku, filozofický problém nebo problém z oblasti teorie optimálního rozhodování a teorie pravděpodobnosti.

Máme dvě obálky, které od sebe nelze rozlišit, každá z nich má v sobě kladnou sumu peněz a v jedné z obálek je dvakrát více peněz než v druhé. Můžete si zvolit jakoukoli ze dvou obálek a její obsah si ponechat. Zcela náhodně si jednu z nich zvolíte, ale než obálku otevřete, obdržíte návrh vyměnit ji za druhou obálku. Jaká je nejvhodnější reakce? Vyměníte obálku nebo si necháte svou první volbu?

9.1 Diskuze č. 1

Zkusíme navrhnout přesvědčivý argument, proč by měla být volba změněna na druhou obálku.

Částku, jenž je ve zvolené obálce označíme A. Pravděpodobnost, že A je menší než částka v druhé obálce je ½, a pravděpodobnost, že A je větší než částka v druhé obálce je také ½. Pokud je A menší z částek v obálkách, poté druhá z obálek má uvnitř částku 2A. Jestliže A je větší z částek v obálkách, poté druhá obálka zahrnuje částku A/2. Tedy druhá z obálek pojímá částku 2A s pravděpodobností ½ a částku A/2 s pravděpodobností ½.

Můžeme tedy říct, že střední hodnota částky ve druhé obálce je

$$\frac{1}{2}(2A)+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{5}{4}A$$

Získaná střední hodnota je větší než A, můžeme tedy tvrdit, že v průměru se dá na změně obálky vydělat.

Vyvstává výhrada: Když vyměníme obálky a označíme obsah druhé obálky B a budeme pokračovat stejnými úvahami, dovede nás to zpět k zdánlivě výhodnému argumentu obálky vyměnit. Tak to bychom mohli obálky měnit stále dokola a nikdy neskončit. A zde se nám vyskytuje paradox, protože je racionálnější vzít si obsah z libovolné obálky, než stále dokola obálky bez přestání zaměňovat. Problém se nachází v tom, najít chybu ve zde napsané argumentaci.

9.2 Diskuze č. 2

Úvaha, kterou jsme výše sepsali, by byla správná, pokud by byla vztažená k jiné situaci. Posléze, co si vyberu obálku č. 1 s částkou A, vložíme do druhé obálky částku A/2 s p = ½ a částka 2A s p = ½. Poté znovu nabídneme změnu.

Pokud změnu odmítneme zisk bude roven A, vyměníme-li obálku, průměrný zisk bude roven 5/4 A. Teď už je změna výhodná.

Kde nastala v předchozí úvaze chyba?

Částku v první obálce označím A, poté to bude buď nižší částka a v druhé obálce bude 2A, nebo v první obálce bude vyšší částka a v druhé obálce bude tedy částka A/2. V prvním zmíněném případě se nacházejí v obálkách částky A a 2A, v druhém zmíněném případě částky A a A/2. Nenastane tedy případ, že bych po výměně obálek nacházel s pravděpodobností p = ½ částky 2A a A/2, jak nám to nutí zvolená argumentace.

9.3 Diskuze č. 3

Matematik Raymond Smullyan se zabýval tímto problémem bez použití pravděpodobností. Problém tedy přeformuloval, aby neobsahoval pravděpodobnosti a uvedl tyto logické argumenty:

1. Hráč si vybere obálku s částkou, kterou označíme A. Výměnou obálek tedy může hráč získat A nebo ztratit A/2. Možný zisk je v tomto případě větší než možná ztráta.
2. Y a 2Y jsou značení pro částky v obálkách. Pokud hráč vymění obálky může buď získat Y nebo ztratit Y. Tak že možná ztráta je rovna možnému zisku.
3. Obálka s částkou, kterou si hráč nevybral označíme B. Hráč může výměnou obálky získat částku B/2, nebo ztratit částku B. V tomto případě je tedy zisk menší než možná ztráta.

Vidíme tedy, že Smullyan dokázal tři případy, které mohou nastat a bez použití pravděpodobností. (Smullyan, 2004)

10. MONTY HALLŮV PROBLÉM

10.1 Historie problému

Úloha, která je pojmenována po americko-kanadském moderátorovi, je z roku 1975. Řadíme ji mezi pravděpodobnostní úlohy. Mezi roky 1963–1977 se vysílal americký pořad Let´s Make a Deal (*Pojďme udělat dohodu*), který moderoval Monty Hall. V pořadu jsou vysílány principiálně podobné soutěže, soutěžící si vždy může zvolit, zda-li bude riskovat nebo zůstane na drobné ceně.

Často opakující se hra byla ta, kde si soutěžící má zvolit jedny ze tří dveří, přičemž jen jedny schovávají hlavní výherní cenu (auto) a za druhými dvěma stojí koza.

V únoru roku 1975 formuloval a vyřešil tento problém americký matematik Steve Selvin. Většina lidí si zvolí nezměnit svou volbu, protože správné řešení volbu změnit s pravděpodobností výhry 2/3 je pro soutěžící neintuitivní. Soutěž neprobíhala vždy jednoznačně, soutěžící byli ovlivňováni částkami ze strany moderátora nebo moderátor otevíral dveře okamžitě po vybrání kozy.

10.2 Stanovení problému

Běžné zadání hry bylo: *Soutěžící si může vybrat mezi třemi dveřmi, které jsou stejné. Za jedněmi dveřmi je ukryté auto, které je hlavní cenou, zbylé dvoje dveře ukrývají kozu. Soutěžící si zvolí jedny ze dveří, avšak je neotevře. Jedny ze dveří, které zbývají otevře moderátor, který ví, kde je auto schované. Vždycky otevře nevýherní dveře. Pokud se naskytne situace, kdy soutěžící zvolí dveře, kde je auto, moderátor otevírá jedny dveře čistě náhodně. Poté, co moderátor otevře nesprávné dveře, má soutěžící možnost změnit svou volbu. Může zůstat u své původní volby, nebo zvolit druhé neotevřené dveře. Soutěžící vyhraje věc nebo zvíře za zvolenými dveřmi. Jaká volba je lepší?*

10.3 Řešení problému

Pro vyřešení samotného problému budeme vycházet z klasické podmíněné pravděpodobnosti a znalosti Bayesovy věty.

Definici soutěže máme sepsanou výše. Auto se ukrývá za i-tými dveřmi, tento jev označíme Di. Pravděpodobnost, že je auto ukryté za jakýmikoli dveřmi je stejná, z toho vyplývá, že pravděpodobnosti jevů, které známe, jsou rovny (Kahoun, 2020)

$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{1}{3}.$$

Otevření i-tých dveří, tento jev označíme Oi. Soutěžící si vybral první dveře, a protože moderátor ví, kde je auto ukryté a zároveň ty dveře nemůže otevřít, získáme pravděpodobnost

$$P(O_3|D_3) = P(O_2|D_2) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že moderátor nesmí otevřít dveře, kde je auto a ani dveře, které si zvolil soutěžící, dostaneme

$$P(O_3|D_2) = P(O_2|D_3) = 1.$$

Ve zbývajících případech volí moderátor mezi dvěma možnostmi, je pravděpodobnost

$$P(O_3|D_1) = P(O_2|D_1) = \frac{1}{2}.$$

Pravděpodobnost při výměně dveří vypočítáme pomocí Bayesova vzorce

$$P(D_2|O_3) = \frac{P(O_3|D_2) \cdot P(D_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_3|D_i) \cdot P(D_i)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Pravděpodobnost, pokud bude soutěžící trvat na své původní volbě

$$P(D_1|O_3) = \frac{P(O_3|D_1) \cdot P(D_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_3|D_i) \cdot P(D_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Pravděpodobnosti v případě otevření druhých dveří jsou stejná

$$P(D_3|O_2) = \frac{P(O_2|D_3) \cdot P(D_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_2|D_i) \cdot P(D_i)} = \frac{2}{3},$$

$$P(D_1|O_2) = \frac{P(O_2|D_1) \cdot P(D_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(O_2|D_i) \cdot P(D_i)} = \frac{1}{3}.$$

Z výše napsaného je patrné, že pravděpodobnost u změny volby je vždy $\frac{2}{3}$ a u setrvání jen $\frac{1}{3}$. Při klasickém zadání soutěžního úkolu je pro soutěžícího lepší změnit svou volbu z důvodu, že má větší pravděpodobnost výhry než kdyby svou volbu nezměnil. (Kahoun, 2020)

Samozřejmě lze problém zobecnit pro *n* dveří, nebo počítat pravděpodobnost například pro variantu hry se čtyřmi dveřmi.

ZÁVĚR

Na začátku mé bakalářské práce jsem představila známou úlohu o koze, vlkovi a hlávce zelí, která je známá již dětem na základní škole. Navázala jsem její složitější modifikací úloha o třech kanibalech a třech misionářích. V obou případech byla využita nejdříve metoda pokus-omyl a logické myšlení, následně jsme k řešení úlohy využili problematiku teorie grafů.

V třetí kapitole byla rozebrána známá Einsteinova hádanka s otázkou „Kdo chová rybičky?“. Nejprve jsme zvolili metodu doplňování tabulky dosazováním informací, které víme na základě zadání a následně zkoušeli kombinace ze všech 24 možných, která bude ta správná. To je velice zdlouhavé řešení, a proto je v kapitole zmíněna i metoda, která využívá poměrů jednotlivých podmínek. Následuje kapitola obrazců, které lze nakreslit jedním tahem např. domeček, kde jsme definovali Eulorovu první větu teorie grafů. Kapitola pátá využívá také znalosti z teorie grafů a pojednává o procházce po dvou ostrovech města Královce.

Jedním z nejsložitějších matematických problémů v této práci je kapitola šest, kde je zpracován problém čtyř barev. Problém, jehož správné řešení nelze vyřešit v reálném čase bez použití počítače. V sedmé kapitole jsme se zaměřili na úlohu zvanou jezdcova procházka. Jedná se o pohyb figurky jezdce po šachovnici, řešení úlohy vychází z posloupnosti pohybu jezdcem a velikosti šachovnice. Osmá kapitola se vrací zpátky k významnému matematikovi Leonhardu Eulerovy, který představil světu úlohu o 36 důstojnících, kde demonstroval problematiku latinských čtverců. Tato úloha však nemá řešení.

Nejmladší úlohu nalezneme v kapitole devět, která se zabývá problémem dvou obálek. Při této úloze se věnujeme pravděpodobnosti vyšší šance na výhru. A nakonec jedna v praxi využitelná úloha z reality show. Výběr ze tří dveří, kdy se za jedněmi skrývá výhra v podobě auta. Zde řešíme zda je výhodnější změnit svůj výběr nebo výběr ponechat. K řešení úlohy využíváme výpočtů pravděpodobnosti. Problém tří dveří je také nazýván jako Monty Hallův problém.

Každé zadání a řešení úlohy, bylo doplněno o historický kontext úloh.

RESUMÉ (ČJ)

Bakalářská práce se zabývá vybranými zajímavými matematickými a logickými problémy. Popisuje jejich historický vznik a průběh. Představuje zadání každého úkolu a jeho variant. Po zadání je vždy podrobně probráno řešení problému.

Jednotlivé úlohy jsou O vlku, koze a zelí, úloha O třech kanibalech a třech misionářích, Einsteinova hádanka, O sedmi mostech města Královce a obrazce jedním tahem. Kapitoly, které následují jsou složitější a jsou to Problém čtyř barev, Jezdcova procházka, Úloha o 36 důstojnících, Problém dvou obálek a Monty Hallův problém.

RESUMÉ (AJ)

The bachelor thesis deals with selected interesting mathematical and logical problems. It describes their historical origin and course. It represents the assignment of each task and its variants. After the assignment, the solution to the problem is always discussed in detail.

The individual problems are About the Wolf, the Goat and the Cabbage, the problem About Three Cannibals and Three Missionaries, Einstein's Riddle, About the Seven Bridges of the City of Královce, and One-Stroke Shapes. The following chapters are more difficult and are The Four Colors Problem, The Horseman's Walk, The 36 Officers Problem, The Two Envelopes Problem, and The Monty Hall Problem.

SEZNAM LITERATURY

[1] APPEL, K. a W. HAKEN. In: *Every planar map is your colorable. Part I: Discharging*. Illionois of Mathematics, 1997, s. 429-490.

[2] BAILEY, D. H. a BORWEIN, J. M. *The Colour Life of the Four-color Theorem: A Tribute to Kenneth Appel*. The Huffingtonpost. [online]. 2013 [citováno 28. 5. 2016] Dostupné z: http://www.huffingtonpost.com/david-h-bailey/kenneth-appel-four-colortheorem_b_3233775.html.

[3] DOLEŽALOVÁ, Jana. Netradiční úlohy ve školské matematice [online]. Brno, 2015 [cit. 2023-05-25]. Závěrečná práce. Masarykova univerzita, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky. Vedoucí práce RNDr. Karel Lepka, Dr. Dostupné z: file:///C:/Users/evcam/Downloads/CZV-netradicni_ulohy_Archive.pdf.

[4] GFDL. *Four color theorem.* Absolute astronomy. [online]. 2016 [citováno 30. 5. 2016] Dostupné z: http://www.absoluteastronomy.com/topics/Four_color_theorem

[5] HORDINA, Josef. Úloha o Vlku, koze a hlávce zelí. Mozkolam [online]. ©, 2019 [cit. 2023-05-22]. Dostupné z: https://mozkolam.cz/slovni-hlavolamy/logicke-ulohy/vlk-koza-a-zeli/

[6] Jezdcova procházka. Šachy [online]. ©, 2022 [cit. 2023-05-22]. Dostupné z: https://sach.estranky.cz/clanky/jezdcova-prochazka.html

[7] KAHOUN, Tomáš. *Monty Hallův problém* [online]. Brno, 2020 [cit. 2023-05-30]. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Fakulta přírodovědecká, Ústav matematiky a statistiky. Vedoucí práce Mgr. Ondřej Pokora, Ph.D. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/ggq1x/BP.pdf.

[8] Latinské čtverce. *Ústav matematiky a statistiky* [online]. Brno [cit. 2023-05-30]. Dostupné z: http://web.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/latin.pdf

[9] MAČÁK, Karel. Tři středověké sbírky matematických úloh: Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil. Praha: Prometheus, 2001. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-215-5.

[10] NOVOTNÝ, Jan. Problém dvou obálek, problém tří dveří a Jánošíkův paradox. Masarykova univerzita [online]. Brno, 2018 [cit. 2023-05-22]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~vnufcb/CD/pdf/VNUF23_26.pdf

[11] PAFEL, Jan. *Ortogonální latinské čtverce a Eulerova úloha o 36 důstojnících* [online]. 2009 [cit. 2023-05-30]. Dostupné z: https://drive.google.com/file/d/0B0ZlMWdgGZi6cmF1bmZBZmhVb28/view?resourcekey=0-aSUoDj0gmXvT1VKeIMwVXw

[12] ROSS, W. T. a J. HALL. *Four, five and six color theorems*. Nature of Mathematics, Great ideas and gems of mathematics [online]. 2010 [cit. 2023-05-03]. Dostupné z: https://natureofmathematics.wordpress.com/lecture-notes/four-and-five-color-theorems/
[13] SMULLYAN, Raymond. *Šeherezádiny hádanky a další podivuhodné úlohy*. Praha: Portál, 2004.
[14] STEWART, Ian. *Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta*. Praha: Dokořán, 2013. Aliter. ISBN 978-80-7363-292-2.
[15] STEJSKAL, Pavel. Einsteinovy hádanka. *Ústav matematiky a statistiky* [online]. Brno [cit. 2023-05-30]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/Einsteinova_hadanka.pdf
[16] ŠIŠMA, Pavel. *Teorie grafů 1736-1963*. Praha: Prometheus, 1997. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-065-9.
[17] VECHETA, Vladimír. Einsteinovy hádanky a jiné hlavolamy. *Metodický portál RVP* [online]. Praha, 2013 [cit. 2023-05-30]. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/r/ZBBAD/17411/EINSTEINOVY-HADANKY-A-JINE-HLAVOLAMY.html

SEZNAM TABULEK A OBRÁZKŮ

Seznam obrázků

Seznam tabulek