ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Řešené příklady algebraických struktur s jednou a se dvěma binárními operacemi

Bakalářská práce

Adéla Soulková
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2023

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím zdrojů informací a literárních pramenů, které uvádím v přiloženém seznamu literatury.

V Plzni dne ……………….. 2023

………..…………………………………………

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji panu PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za vedení při vypracovávání mé bakalářské práce, za cenné rady a za výborný přístup k řádnému vypracování bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Řešené příklady algebraických struktur s jednou a se dvěma binárními operacemi je tématem mé bakalářské práce.

Téma jsem si vybrala proto, abych vytvořila materiál pro studenty matematických studií, například k předmětu elementární algebry. Mně samotné při studiu předmětu takovýto text chyběl. Chyběl mi text, který by obsahoval více příkladů k učivu algebraických struktur s jednou a dvěma binárními operacemi, které bych si mohla zkusit doma spočítat a zkontrolovat k lepšímu pochopení daného učiva, které se na cvičeních a přednáškách nedá úplně dokonale celé naučit. Mým cílem je tedy vytvořit text, který pomůže k pochopení algebraických struktur a jejich rozdělení a rozeznání dané struktury dle příslušných vlastností.

V první části práce si vymezíme nejprve základní pojmy. Zprvu vymezíme pojmy množina a kartézský součin, poté budeme pokračovat pojmem binární operace a její základní vlastnosti, které nám budou velkým pomocníkem při rozeznávání algebraických struktur. Poté přejdeme ke kapitole věnované algebraickým strukturám s jednou binární operací. Určíme si typy těchto struktur, jak jejich vlastnosti navazují na sebe. Jedná se o strukturu grupoid, pologrupa, monoid, grupa a význam abelovské struktury. Následuje kapitola algebraických struktur se dvěma binárními operacemi. V práci se dále popisuje, jak poznáme polookruh, okruh, obor integrity či těleso. Poslední dvě kapitoly jsou věnovány řešeným příkladům algebraických struktur nejprve s jednou, poté se dvěma binárními operacemi.

1 Množina

1.1 Definice: Množina je jedním ze základních pojmů užívaných v matematice. Označuje se ve většině případů velkými písmeny z latinky. Zapisuje se ve většině případů do složených závorek. (matweb.cz, 2022)

Zápis: $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4...\}$

Množinou budeme rozumět jakýkoliv soubor vzájemně rozlišitelných objektů, které budeme nazývat jejími prvky. Přitom budeme předpokládat, že každá množina je svými prvky jednoznačně určena (Burian,Libicher, s. 13, 1976).

Množinu tedy chápeme jako soubor prvků, které jsou zadané dle zvoleného kritéria, či výčtem prvků. Množina může být konečná, například $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, či nekonečná, například množina celých čísel Z. Speciálním případem množiny je množina prázdná, která neobsahuje žádný prvek, značí se obvykle $\emptyset$. Množina může být zadána i výrokovou formou či intervalem. Ke každé množině můžeme najít její podmnožiny. Množina je sama sobě podmnožinou. Označuje se $B \subseteq A$. Tedy množina B je podmnožinou množiny A.

1. **Příklad:** Nalezněte podmnožinu množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C \subseteq A$

Podmnožinu této množiny tvoří jakýkoliv prvek spadající do množiny A

$C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{1, 4, 5, 6\}$

Podmnožin množiny můžeme nalézt mnoho. Množina je i podmnožinou sama sebe.

2 Kartézský součin

2.1 Definice: Mějme dvě množiny A, B. Jejich kartézským součinem rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic sestavených z prvků množin A a B v tomto pořadí, tj. první prvek je z A a druhý prvek je z B. (Kovář, 2023)

Vyjádříme vztahem $A \times B = \{(a, b), a \in A \wedge b \in B\}$

Dle zápisu rozumíme kartézským součin množin A, B množinu uspořádaných dvojic (*a, b*), kdy *a* je prvkem množiny A a prvek ***b*** je prvek v množině B.

3 Binární operace

3.1 Definice: Binární operací Δ definovanou na množině M, která je neprázdná, rozumíme, zobrazení kartézského součinu M × M do M. (Drábek, 2011)

Můžeme zobecnit na tvar Δ: M × M → M.

Praktické zobrazení binární operace

5 · 8 = 40, zapíšeme jako

$[5,8] \xrightarrow{\cdot} 40$ nebo · : $[5,8] \longrightarrow 40$

3.2 Základní vlastnosti binárních operací

3.2.1 Komutativnost operace

3.2.1.1 Definice: Mějme operaci *, kterou nazveme komutativní, pokud (∀a, b ∈ M): a*b = b*a

Mezi komutativní operace patří například operace sčítání, násobení, sjednocení, průnik, sčítání vektorů, sčítání matic.

1. Příklad:

5 + 4 = 4 +5

8 · 9 = 9 · 8

3.2.2 Asociativnost operace

3.2.2.1 Definice: Operaci * nazveme asociativní právě tehdy, když platí pro všechna a, b, c náležící množině M (a*b)*c = a * (b*c) (Kučerová, 2012).

Symbolicky (∀ a, b, c ∈ M): (a*b)*c = a * (b * c).

Jedná se například o operace sčítání, násobení, sčítání vektorů, sčítání a násobení matic, sjednocení a průnik množin

3.2.3 Neutrální prvek

3.2.3.1 Definice: Prvek e v operaci * nazveme neutrální právě tehdy, když pro všechna a z množiny M platí e*a = a*e = a.

Symbolicky: $(\forall\ a \in M)$: e*a = a*e = a.

V tomto případě je jedná o neutrální prvek. Každá binární operace může mít nejvýše jeden neutrální prvek.

Pokud lze říct pouze, že e*a = a, jedná se o levý neutrální prvek.

Naopak, pokud a*e = a, jedná se o pravý neutrální prvek

Například 0 je pravým neutrálním prvkem operace odčítání. Jednotka je levý i pravý neutrální prvek operace násobení.

a + 0 = a (neutrálnost nuly vůči sčítání)

b · 1 = a (neutrálnost jedničky vůči násobení)

A + O = A (neutrálnost nulové matice vůči sčítání)

A · I = A (neutrálnost jednotkové matice vůči násobení)

A ∪ ∅ = A (neutrálnost sjednocení s prázdnou množinou)

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (neutrálnost sčítání vektorů s nulovým vektorem) (Drábek, 2011)

V aditivním zápisu je obvykle symbol 0 a nazývá se nulový prvek. V multiplikativním jde většinou o 1 a symbol nazveme jednotkovým prvkem.

3. Příklad: Na množině celých čísel Z nalezněte neutrální prvek binární operace ° zadané předpisem a ° b = (a + b) – 3

a ° e = a

(a + e) – 3 = a

e – 3 = a – a

e = 3

nalezli jsme pravý neutrální prvek

ověříme, zda se rovná levému

e + b – 3 = b

e = 3

tímto shledáváme levý prvek neutrálním.

Pozn.: Pokud je operace komutativní, stačí nalézt pouze levý nebo pravý neutrální prvek. Existence druhého je již zajištěna komutativností operace.

Neutrální prvek zadané binární operace je 3.

3.2.4 Agresivní prvek

3.2.4.1 Definice: Prvek g nazýváme agresivním prvkem binární operace * definované na množině M právě tehdy, když platí $(\forall a \in M) : a * g = g * a = g$.

Jedná se například o průnik množiny s prázdnou množinou

$a \cdot 0 = 0$ (agresivnost nuly vůči násobení)

$A \cap \emptyset = \emptyset$ (agresivnost prázdné množiny vůči průniku)

$A \cdot O = O$ (agresivnost nulové matice vůči násobení) (Drábek 2011)

4. Příklad: Zjistěte, zda v násobení matice nulovou konstantou je nula agresivním prvkem.

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Při násobení matice nulovou konstantou je nula agresivním prvkem.

3.2.5 Inverzní prvek

3.2.5.1 Definice: Prvek a^{-1} nazveme inverzním prvkem binární operace k prvku a na množině M právě tehdy, když platí $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, kde e je neutrální prvek operace *. (Drábek 2011)

Jedná se například o sčítání čísel opačných $k + (-k) = 0$ např. $1+(-1) = 0$, opačné matice při jejich sčítání, opačné vektory při sčítání, převrácené hodnoty v násobení racionálních čísel (ke každému a nalezneme číslo rovné $\frac{1}{a}$ neboli a^{-1}). K číslu 0 však takové žádné číslo neexistuje, proto se určují inverzní prvky často bez nuly.

5. Příklad: Nalezni předpis pro určení inverzních prvků v operaci $a \circ b = (a + b) - 3$ definované na množině přirozených čísel, kde neutrálním prvkem je $e = 3$.

$a \circ a^{-1} = e$

$a + a^{-1} - 3 = 3$

$a^{-1} = 6 - a$

Inverzní prvek k prvku a je tedy prvek $a^{-1} = 6 - a$.

3.2.6 Idempotentní operace

3.2.6.1 Definice: Binární operaci * nazveme idempotentní na množině M právě tehdy když platí ($\forall$ a $\in$ M): a * a = a. Jedná se například o sjednocení množin $A \cup A = A$, průnik množin $A \cap A = A$. (Drábek 2011)

6. Příklad: Určete, zda binární operace daná předpisem $a*b = \frac{a+b}{2}$ a definovaná na množině racionálních čísel je idempotentní.

$a * b = \frac{a+b}{2}$

$a * a = a$

$\frac{a+a}{2} = a$

$\frac{2a}{2} = a$

$a = a$

Podmínka platí, operace je idempotentní.

3.2.7 Jednoznačnost dělení

3.2.7.1 Definice: Operaci * nazveme operací s jednoznačným dělením má-li rovnice a* x = b, x* a = b právě jedno řešení. (Drábek 2011)

7. Příklad: Určete, zda binární operace daná předpisem $a*b = \frac{a+b}{2}$ a definovaná na množině racionálních čísel je operací s jednoznačným dělením.

$a * x = b$

$\frac{a+x}{2} = b$

$a + x = 2b$

$x = 2b - a$

x máme jednoznačně určeno, jde tedy o binární operaci s jednoznačným dělením.

3.2.8 Uzavřenost operace

K vyšetření algebraických struktur budeme potřebovat znát pojem uzavřenost operace na množině.

Řekneme, že operace je uzavřená na množině právě tehdy když, výsledkem jsou čísla z dané množiny.

3.2.9 Cayleyho tabulka

Jednou z metod pro vypočtení binárních operací je Cayleyho tabulka. Cayley byl anglický matematik a jeden z prvních algebraiků. Proto se operační tabulce nejčastěji říká Cayleyho. Tabulka, po jejímž vytvoření můžeme vyčíst téměř všechny z výše zmiňovaných vlastností, vyjma asociativnosti, které nám budou sloužit k určení algebraických struktur s jednou binární operací, která bude zavedena v textu níže. Které vlastnosti to tedy jsou?

Pozn.: Vyšetřit vlastnost a významné prvky binární operace prostřednictvím Cayleyho tabulky je možné jen u operací definovaných na konečných množinách s dostatečně malým počtem prvků. V případě většího počtu prvků nebo nekonečné množiny je tabulka neúměrně velká, či je složité ji celou zapsat. Provádět vyšetřování tímto způsobem je tak nevhodné.

Uzavřenost

- pokud jsou výsledkem v tabulce pouze prvky ze zadané množiny, jedná se a uzavřenou operaci.

Asociativnost

- z tabulky nelze jednoznačně vyčíst
- jelikož jsou spolu v operaci vždy jen dva prvky, chybí nám tedy třetí rozměr.

Neutrální prvek

- poznáme ho tak, že jeho řádek je ve shodě s prvním řádkem tabulky, totéž platí o sloupcích

Inverzní prvek

- pokud je v místě průsečíku dvou prvků v řádku i sloupci uveden neutrální prvek, jsou vzájemně inverzní.

Komutativnost

- je-li tabulka osově souměrná dle hlavní diagonály, operaci považujeme za komutativní. Hlavní diagonála vede z levého horního rohu do pravého dolního rohu tabulky.

Jednoznačnost dělení

- v každém řádku i sloupci je prvek ze záhlaví tabulky obsažen právě jednou.

Idempotentnost

- na hlavní diagonále jsou prvky ze záhlaví tabulky právě jednou.

8. Příklad Vyšetření vlastností operace zadané tabulkou

Vyšetřete binární operaci * definovanou na množině M.

M = {1, 2, 3, 5, 6} s a * b = NSD (a, b), kde NSD je největší společný dělitel.

*	**1**	**2**	**3**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2
3	1	1	3	1	3
5	1	1	1	5	1
6	1	2	2	1	6

Komutativnost

Pokud je tabulka symetrická podle hlavní diagonály, je operace komutativní, což zobrazuje výše uvedená tabulka. Operace komutativní není.

Neutrální prvek

Neutrální prvek této operace neexistuje. Pokud by zde neutrální prvek existoval, bylo by v řádku za ním a ve sloupci pod ním opsané záhlaví tabulky.

Inverzní prvek

Inverzní prvky neexistují, pokud neexistuje prvek neutrální. Pokud by existoval prvek neutrální, vzájemně inverzní prvky by byly ty, na jejichž průsečíku se nachází prvek neutrální.

Agresivní prvek

Má za sebou v řádku a pod sebou ve sloupci jen sám sebe. V tomto příkladu se jedná o číslo jedna.

Idempotentnost

Pokud jsou na hlavní diagonále, tedy z levého horního do pravého spodního rohu stejná čísla jako v záhlaví řádků, je poté operace idempotentní.

Tento příklad danou vlastnost splňuje.

Jednoznačné dělení

V každém řádku a sloupci by musel být každý prvek zastoupen právě jednou. Pokud existuje agresivní prvek operace, nemůže být s jednoznačným dělením. Zadaná operace tedy nemá jednoznačné dělení.

9. Příklad

Mějme operaci * zadanou tabulkou pro prvky a, b, c. Vyšetřete vlasnosti. Které lze z tabulky vyčíst. Jedná se o komutativnost, neutrální prvek, inverzní prvek a uzavřenost.

*	**a**	**b**	**c**
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	b	a

Uzavřenost

Operace * je uzavřená, jelikož nám v celé tabulce vyšly pouze prvky zadané množiny.

Neutrální prvek

Jediným prvkem, který má v řádku i sloupci shodné prvky se záhlavím tabulky je prvek a, tudíž je neutrální.

Inverzní prvek

Pro každý prvek existuje inverzní prvek. Sledujeme, kde se nachází prvek a, tedy neutrální prvek. Z tabulky vyčteme, že prvek b je inverzní s prvkem b, prvek c je inverzní k prvku c, prvek a je inverzní sám k sobě tedy k prvku a.

Komutativnost

Tabulka je osově souměrná podle hlavní diagonály, z toho plyne komutativnost operace.

4 Algebraické struktury s jednou binární operací

4.1 Definice: Uspořádanou dvojici (M, *), kde M je neprázdná množina, na které je definovaná jedna binární operace *, se nazývá algebraická struktura s jednou binární operací (Drábek, s. 103, 1985)

Mezi algebraické struktury s jednou binární operací patří grupoid, pologrupa, monoid, grupa, Abelův grupoid (pologrupa, grupa, monoid).

4.2 Grupoid

4.2.1 Definice: Algebraickou strukturu (*M*, *) nazveme grupoid, pokud je operace * uzavřená na množině M, tedy platí ($\forall$a, b $\in$ M) ($\exists$c $\in$ M): a * b = c.

Jedná se o operaci například sčítání a odčítání v reálných číslech, násobení přirozených čísel, sjednocení a průnik množin na potenčním systému libovolné množiny A.

4.3 Pologrupa (asociativní grupoid)

4.3.1 Definice: Vezměme si algebraickou strukturu (G, *), která je grupoid. Pokud platí, (a * b) * c = a * (b * c) pro každé a, b, c, náležící G, potom je algebraické struktura asociativní.

Grupoid, který je asociativní se nazývá asociativní grupoid neboli pologrupa.

Operace sčítání a násobení jsou vždy asociativní. Naopak odčítání a dělení asociativní nejsou. Tedy pokud budeme mít zadané alegebraické struktury s operací sčítání dvou samostatných prvků a násobení, které budou uzavřené, víme, že je to pologrupa. Pokud budeme mít algebraické struktury s operací odčítání a dělení budou vždy nejvíce grupoidem.

4.4 Monoid

4.4.1 Definice: Pokud máme algebraickou strukturu (K, *) zadanou jako pologrupu, potom pokud existuje prvek *e* takový, že pro každý prvek a $\in$ K platí, že *e**a = a**e* = a, jedná se dle výše uvedených pravidel o neutrální prvek ke každému prvku. Můžeme tedy strukturu nazvat monoidem.

Pokud má operace pologrupy neutrální prvek, nazýváme ji pologrupou s jednotkou neboli monoidem (Legéň, 1980).

V multiplikativním zápisu neutrální prvek nazýváme jednotkovým prvkem, značíme 1. V aditivním zápisu neutrální prvek nazýváme nulovým prvkem a značíme 0.

4.5 Grupa

4.5.1 Definice: V případě že máme zadanou algebraickou strukturu (M, *) a víme, že se jedná o monoid. Pokud můžeme pro všechny prvky z množiny M určit inverzní prvek, nazveme strukturu (M, *) grupou.

Pokud je operace ke své podmíněné vlastnosti, tedy takové, aby byla grupoidem, pologrupou, monoidem či grupou, ještě komutativní, pro všechny prvky platí a * b = b * a, nazývá se struktura abelovská či komutativní. Například abelovská grupa, abelovský monoid. Označení abelovský či Abelův je dle významného norského matematika Henrika Abela.

4.6 Tabulka vlastností algebraických struktur s jednou binární operací

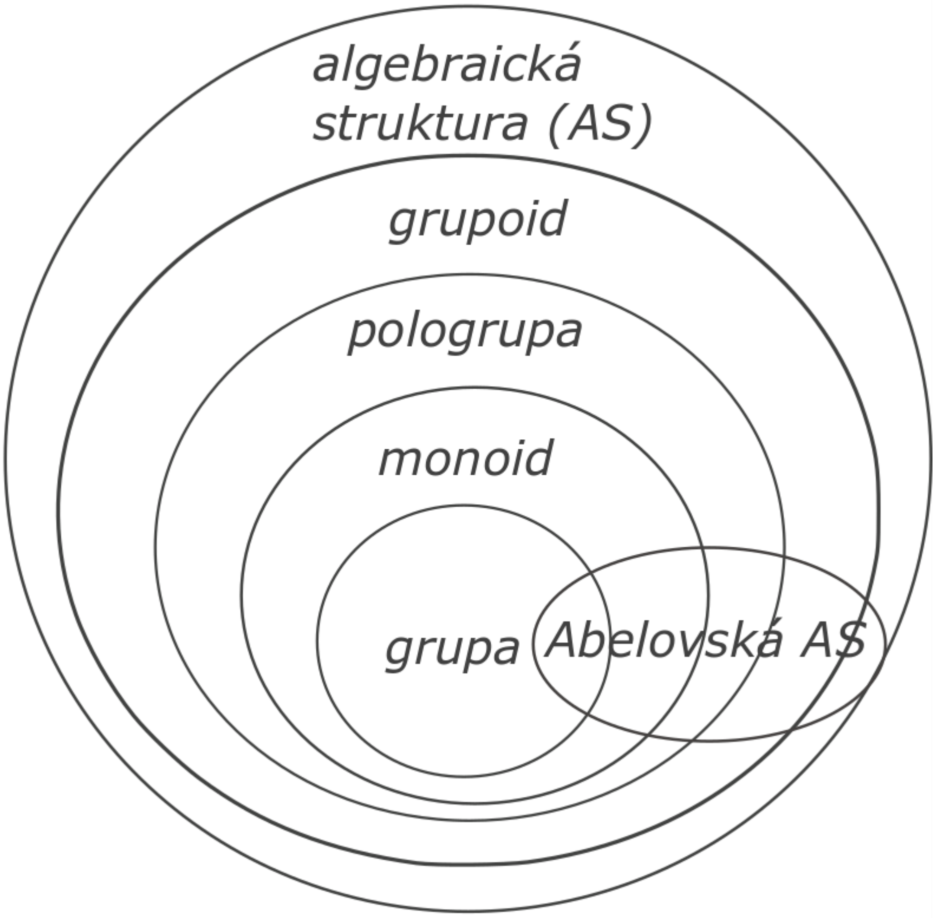
Pro lepší přehlednost si z daných vlastností uvedených výše v textu vytvoříme tabulku, která nám bude sloužit k lepší orientaci při řešení příkladů.

	uzavřenost	asociativita	neutrální prvek	inverzní prvek	komutativnost
Grupoid	ano	ne	ne	ne	ano
Pologrupa	ano	ano	ne	ne	ano (abelovský)
Monoid	ano	ano	ano	ne	ano (abelovský)
Grupa	ano	ano	ano	ano	ano (abelovská)

Tabulka 1 vlastnosti algebraických struktur s jednou binární operací (zdroj: vlastní)

4.7 Schéma algebraických struktur

Z výše zmíněného je zřejmé, že pologrupa je speciálním případem grupoidu, jehož binární operace je asociativní. Můžeme tedy říci, že třída pologrup je podtřídou třídy grupoidů. Podobně monoid je speciálním případem pologrupy, v níž existuje neutrální prvek, a grupa je speciálním případem monoidu, v němž ke všem prvkům existují inverzní prvky. Třída grup je tedy podtřídou třídy monoidů a třída monoidů je podtřídou třídy pologrup. Tato skutečnost je graficky znázorněna v následujícím schématu, v němž je vyznačena i třída komutativních algebraických struktur.



Obrázek 1 Schéma algebraických struktur s jednou binární operací (zdroj: vlastní)

5 Algebraické struktury se dvěma binárními operacemi

5.1 Definice: Algebraickou strukturou se dvěma binárními operacemi nazýváme uspořádanou trojici (M, +, ·) kde M je neprázdná množina, ve které je definovaná binární operace + a ·. Vnější operace · v našem případě u definování struktur níže násobení je distributivní vůči vnitřní operaci, v našem případě sčítání.

5.1 Distributivnost

5.1.1 Definice: Máme-li v množině M zadané dvě binární operace + a ·, pak pro ně platí $\forall$ a, b, c $\in$ M: a (b + c) = ab + ac $\wedge$ (b + c) a = ba + ca, potom je v tomto případě vnější binární operace násobení distributivní vzhledem k vnitřní binární operaci sčítání. Obě výše zmíněné rovnosti se nazývají distributivní.

5.2 Dělitele nuly

Prvky a, b $\in$ M, ve struktuře (M, +, ·) se nazývají dělitele nuly, právě tehdy když a $\neq$ 0, b $\neq$ 0, a zároveň a · b = 0

5.3 Polookruh

5.3.1 Definice: Algebraickou strukturu (P, +, ·) nazveme polookruhem v případě, že platí následující podmínky. Operace aditivní je komutativní, asociativní a uzavřená, struktura (P, +) je tedy abelovská pologrupa. Operace multiplikativní musí být v tom případě distributivní vzhledem k operaci aditivní a struktura (P, ·) musí být pologrupou. Pokud je i operace · komutativní, jedná se o komutativní polookruh.

Zjednodušeně pro algebraickou strukturu (P, +, ·) platí:

1. Algebraická struktura (P, +) tvoří komutativní pologrupu
2. Struktura (P, ·) je pologrupa
3. Platí distributivní zákon

   Pokud by v bodě dva platila komutativnost, jednalo by se o komutativní polookruh.

5.4 Okruh

5.4.1 Definice: Algebraickou strukturu (O, +, ·) nazveme okruhem v oboru sčítání a násobení právě tehdy když budou platit následující tři podmínky vyjadřující, že je algebraická struktura okruh:

1. Algebraická struktura (O, +) je abelovská grupa.
2. Algebraická struktura (O, ·) je pologrupa.
3. Operace ·je vůči operaci + distributivní.

Pokud by se jednalo o komutativní okruh, stačí v podmínce 2. změnit: Algebraická struktura (O, ·) je komutativní (abelovská) pologrupa.

Má- li pologrupa (O, ·) jednotkový prvek, jedná se v tom případě o komutativní okruh s jednotkou.

Příkladem může být množina celých čísel s operací sčítání a násobení (Z, +, ·), která je komutativní okruh s jednotkou.

Modely okruhů

1. V lineární algebře jde o nekomutativní okruhy čtvercových matic nad číselnými obory vzhledem ke sčítání a násobení těchto matic.

2. Množina spojitých funkcí na jistém intervalu je komutativním okruhem vzhledem ke sčítání a násobení těchto funkcí.

3. (FÚSZ[1]) podle modulu m ≡ 4 je komutativním okruhem vzhledem ke sčítání a násobení těchto zbytkových tříd (Drábek 2011).

[1] FÚSZ – Fundamentální úplná soustava zbytků – Souvisí s kongruencí. Jednoduše můžeme popsat jako množinu zbytků po dělením jedním číslem.

5.5 Obor integrity

5.5.1 Definice: Algebraickou strukturu (I, +, ·) nazveme oborem integrity, právě tehdy když se jedná o komutativní okruh, ve kterém neexistují netriviální dělitelé nuly. Platí nám tedy tyto podmínky:

1. Algebraická struktura (O, +) je abelovská grupa.
2. Algebraická struktura (O, ·) je pologrupa.
3. Operace ·je vůči operaci + distributivní.
4. Neexistují triviální dělitelé nuly.

Modely oboru integrity

1. Množina celých čísel s operací sčítání a násobení
2. Fundamentální úplná soustava zbytků podle číselného modulu, kdy m ≡ 5 vzhledem k operaci sčítání a násobení

5.6 Těleso

5.6.1 Definice: Algebraickou strukturu nazveme komutativním tělesem (T, +, ·) právě tehdy když platí následující podmínky:

1. Struktura (T, +) je komutativní grupa
2. Struktura (T - {0}, 0) je grupa (0, je neutrální prvek vůči operaci +)
3. Platí distributivní zákony
4. Neexistují netriviální dělitelé nuly

5.7 Přehled algebraických struktur se dvěma binárními operacemi a jejich vlastnosti

Tabulka pro přehlednost jednotlivých algebraických struktur se dvěma binárními operacemi. Co musí být splněno u každé operace a daná struktura mohla vzniknout.

(M, +, ·)	(M, +)	(M, ·)
polookruh	komutativní pologrupa	pologrupa
komutativní polookruh	komutativní pologrupa	komutativní pologrupa
okruh	komutativní grupa	pologrupa
komutativní okruh	komutativní grupa	komutativní pologrupa
obor integrity	komutativní grupa	komutativní pologrupa s neexistencí dělitele 0
těleso	komutativní grupa	nenulové prvky, grupa
komutativní těleso	komutativní grupa	nenulové prvky, komutativní grupa

Tabulka 2: Přehled algebraických struktur se dvěma binárními operacemi a jejich vlastnosti (zdroj: vlastní)

V tabulce č.3 na následující straně nalezneme rozepsané jednotlivé vlastnosti a jejich existenci pro vznik jednotlivých algebraických struktur se dvěma binárními operacemi.

(A, +, ·)	(A, +)					(A, ·)						
	uzav.	asoc.	komut.	neut. prv.	inv. prv.	uzav.	asoc.	komut.	neut. prv.	inv. prv.	dělite.	distri.
polookruh	ANO	ANO	ANO	NE	NE	ANO	ANO	NE	NE	NE	ANO	ANO
komutativní polokruh	ANO	ANO	ANO	NE	NE	ANO	ANO	ANO	NE	NE	ANO	ANO
okruh	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	NE	NE	NE	ANO	ANO
komutativní okruh	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	NE	NE	ANO	ANO
obor integrity	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	NE	NE	ANO
těleso	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	NE	ANO	ANO	NE	ANO
komutativní těleso	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	NE	ANO

Tabulka 3: Přehled algebraických struktur se dvěma binárními operacemi a jejich vlastnosti (zdroj: vlastní)

uzav. = uzavřená, asoc. = asociativní, komut = komutativní, neut. prv. = neutrální prvek, inv. prv. = inverzní prvek, dělite. = dělitelé nuly, distri. = distributivnost operace · vůči operaci +

6 Řešené příklady s jednou binární operací

1. Určete dle vlastností algebraických struktur s jednou binární operací, o kterou algebraickou strukturu se jedná.
Máme zadané operace, na množinách:

a) (R, +) reálná čísla

Podrobné řešení jednotlivých struktur

Jedná se o grupoid?

Toto dokážeme rozhodnout snadno.

Jedná se o operaci sčítání na množině reálných čísel. Pokud sečteme dvě reálná čísla, dostaneme vždy číslo reálné. To znamená, že nám vždy vyjdou čísla z množiny R a jde tedy o strukturu **grupoid**

Jedná se pologrupu?

Aby byla algebraická struktura pologrupou musí být grupoidem a zároveň být asociativní. První podmínku jsme už zjistili, že platí. Druhá podmínka je asociativnost

$(a + b) + c = a + (b + c)$

U reálných čísel bude vždy platit, že při sčítání je jedno v jakém pořadí sčítám.

Algebraická struktura je tedy asociativní grupoid (**pologrupa**).

Jedná se o monoid?

Monoid musí být asociativní a musí mít neutrální prvek.

Neutrální prvek ke každému číslu existuje a je to 0.

$a + e = a$

$a + 0 = a$

Struktura je tedy **monoid.**

Jedná se o grupu?

Grupa musí splňovat vlastnosti jako monoid plus ještě k tomu musí existovat pro každý prvek, prvek inverzní.

Každé číslo z množiny reálných čísel může mít opačný prvek.

$a + a^{-1} = e$

a k němu příslušné -a, například 1 a -1, 2 a -2…

Daná algebraická struktura je tedy **grupa.**

Zbývá nám ověřit, zda se jedná o Abelovský grupoid.

Operace musí být tedy ještě komutativní. Komutativnost v operaci sčítání platí.

$a + b = b + a$

$5 + 4 = 4 + 5.$

Operace je komutativní

Algebraická struktura (R, +) je **abelovská grupa.**

(Z, +)

Stejně jako v předchozím případě budeme určovat postupně vlastnosti, avšak již pouhé vlastnosti podle toho, jak na sebe navazují v tabulce 1

Grupoid je to zcela určitě, což již víme ze znalosti učiva základní školy, že součtem dvou celých čísel získáme opět celé číslo.

Asociativnost

$a + (b + c) = (b + a) + c$, tato vlastnost bude platit pro všechna celá čísla.

Poloha závorek v operaci sčítání výsledek nemění. Operace sčítání na množině celých čísel je tedy asociativní.

Neutrální prvek

$a + e = a$

$6 + e = 6$

$e = 0$

Neutrálním prvek množiny celých čísel je nula. Nula je jediným prvkem v operaci sčítání, který nemění výsledek.

Inverzní prvek

Inverzní prvek v celých číslech je číslo opačné.

$a + a^{-1} = e$

$a + a^{-1} = 0$

$a^{-1} = -a$

Komutativnost je také splněna, při sčítání nezáleží na pořadí a tedy.

a + b = b + a

Výsledek: Máme tedy splněny tyto vlastnosti: zobrazení množiny sama na sebe, asociativnost, neutrální prvek, inverzní prvek, komutativnost. Z výše uvedených vlastností a dle definice jednotlivých algebraických struktur tedy může určit, že se jedná o **komutativní (abelovskou) grupu.**

b) (R, -)

Řešení:

Operace odčítání reálných čísel je operací uzavřenou. Pokaždé nám vyjde číslo z množiny čísel R.

Asociativnost:

a - (b - c) = (a - b) - c

Asociativnost v tomto případě neplatí, stačí si jí ověřit na jednoduchém příkladu, například 7 - (9- 4) = (7- 9) - 4 po vypočtení víme, že 2 se nerovná - 6. Zjišťujeme tedy, že operace odčítání na množině reálných čísel není asociativní. Z toho plyne, že další vlastnosti k určení algebraické struktury jsou pro nás již zbytečné a není třeba je ověřovat.

Výsledek: Jedná se tedy o **grupoid.** Máme splněnou pouze podmínku, že se množina zobrazí sama na sebe. Následná podmínka asociativnost splněna není, další vlastnosti je tedy zbytečné již zkoumat.

c) Množina sudých čísel (S) a operací sčítání (S, +)

Řešení: Při sčítání dvou sudých čísel, ve všech případech, dostanu opět číslo sudé. Množina sudých čísel s operací sčítání je tedy uzavřená. Máme tedy splněnou podmínku struktury grupoid.

Asociativnost je též splněna (opět máme operaci sčítání, která je vždy asociativní viz výše).

Neutrálním prvkem je nula, jako je tomu u většiny množin s definovaných s operací sčítání.

Ke každému prvku existuje prvek inverzní tedy číslo opačné.

Komutativnost je u sčítání, jak víme z předchozích příkladů také splněna.

Výsledek: Množina sudých čísel v operaci sčítání dle výše splněných vlastností je **komutativní grupa.**

d) Množina lichých čísel L (L, +)

Množina lichých čísel nesplňuje v relaci sčítání podmínku grupoidu. Při sčítání jakýchkoliv dvou lichých čísel nám vyjde číslo sudé. Tím není splněna podmínka základní, že v grupoidu vycházejí pouze hodnoty ze zadané množiny. Další vlastnosti už nehledáme, jelikož se nemůžeme dostat výše, když není zajištěna podmínka nižší.
Výsledek: Množina lichých čísel tedy není žádnou z algebraických struktur s jednou binární operací.

e) Množina lichých čísel L (L, ·)

Řešení: Při násobení jakýchkoli dvou čísel lichých vyjde vždy číslo liché. Je to tedy operace uzavřená a dostáváme se na strukturu grupoid.
Asociativnost u operace násobení také platí.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Neutrálním prvkem je prvek 1 je lichý a víme z dřívějších znalostí, že je neutrálním prvkem operace součinu. Při násobení jakéhokoli lichého čísla jedničkou vyjde násobené číslo.
Inverzní prvek pro všechny prvky z množiny L je číslo převrácené. Z těchto doposud zjištěných vlastností se jedná o grupu. Zjistíme ještě, zda je komutativní. Komutativnost v případě množiny lichých čísel a operace násobení platí.
Výsledek: Algebraická struktura s jednou binární operací je tedy **abelovskou grupou.**

f) Množina sudých čísel S (S, ·)

Řešení: Násobení dvou sudých čísel dostaneme číslo sudé. Operace je tedy uzavřená na množině.
Asociativnost u násobení je vždy splněna. Máme tedy pologrupu.
Neutrální prvek z množiny neexistuje.
Neutrálním prvkem násobení je jednotka, ale ta není sudé číslo.

Komutativnost platí a · b = b · a

Výsledek: Algebraická struktura je **komutativní pologrupa.**

g) (N, +)

Řešení: Operace sčítání přirozených čísel je operace uzavřená. Jedná se o grupoid. Operace sčítání je asociativní.

Neutrálním prvkem operace sčítání je 0.

Inverzní prvek v přirozených číslech pro číslo neexistuje.

Jediný prvek, který má inverzní prvek je 0.

Komutativnost ve sčítání splněna je.

Výsledek: Máme tedy zadán **abelovský monoid.**

h) (N^+, +)

Stejně jako v předchozím příkladu se jedná o asociativní grupoid. Neutrální prvek však v tom případě neexistuje, nulu neřadíme mezi kladná přirozená čísla. Komutativní operace. Z vlastností tedy vychází struktura **abelovská pologrupa.**

i) (R, ·)

Pokud násobím reálné číslo, vyjde pokaždé opět číslo reálné. Operace splňuje podmínku grupoidu.

Násobení, jak již víme, je asociativní operací. Platí to i v oboru reálných čísel.

Neutrální prvkem je číslo jedna.

Inverzní prvek existuje pro všechny prvky kromě nuly.

Komutativnost dané operace je také splněna. Máme zadánu strukturu **abelovský monoid.**

Pokud bychom vzali opět množinu reálných čísel, a to bez nuly v operaci násobení, došli bychom k výsledku, že se jedná o **abelovskou grupu,** existoval by inverzní prvek pro každý prvek z množiny, a to opačné číslo ke každému číslu z množiny R.

2. U množin zadaných výčtem prvků rozhodněte, o jakou algebraickou strukturu se jedná. Zkuste použít Cayleyho tabulku.

a) ({0, 1}, ∧)

Množina prvků 0,1 s operací konjunkce

∧	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Zadaná množina je uzavřená, vycházejí pouze čísla z množiny. Operace konjunkce je asociativní i přesto, že tuto vlastnost z tabulky nelze určit, chybí nám třetí rozměr, neutrálním prvkem je 1 v řádku i sloupci vycházejí čísla ze záhlaví, inverzní prvek k nule neexistuje, tabulka je souměrná podle hlavní diagonály operace je tedy komutativní. Máme zadán **komutativní monoid**

b) ({0, 1}, +)

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	2

Operace není uzavřená na množině, vychází nám hodnota 2, která není z dané množiny, nejedná se tedy o strukturu grupoid.

c) ({0, 1}, ∨)

Operace disjunkce na množině prvků 0, 1

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

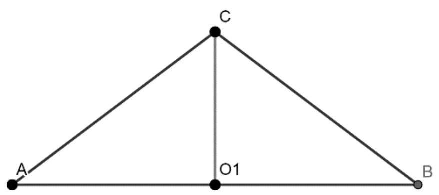
Operace je uzavřená na dané množině. Disjunkce je asociativní. Neutrálním prvkem operace disjunkce je 0. Inverzní prvek neexistuje. Operace je komutativní, je souměrná dle hlavní diagonály. Je zadán **komutativní monoid.**

d) ({0, 1, 2}, ·)

·	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

Opět máme neuzavřenou operaci na dané množině, a to $2 \cdot 2 = 4$, kdy číslo čtyři nepatří do zadání. Struktura není grupoid.

3. **Vytvořte multiplikativní tabulku pro binární operaci skládání shodných zobrazení reprodukujících rovnoramenný trojúhelník. Určete typ algebraické struktury skládání těchto shodných zobrazení.**



Obrázek 2 Osa souměrnosti rovnoramenného trojúhelníka (zdroj: vlastní)

Z obrázku 2 můžeme vidět, že zobrazení reprodukující rovnoramenný trojúhelník jsou dvě. Jedním je zobrazení dle osové souměrnosti tedy osy o_1, druhým je identita

Řešení: Vytvoříme si Cayleyho tabulku

°	**id**	**o_1**
id	id	o_1
o_1	o_1	Id

id – identita, o_1– osová souměrnost

Při zjišťování algebraické struktury binární operace skládání zobrazeních v geometrických obrazcích máme určena pravidla. Pokud se jedná o zobrazení identita výsledkem je také identita. Při zobrazování dle os souměrnosti je výsledkem opět zobrazení dle osy souměrnosti.

Výsledek: Operace je uzavřená, vycházejí nám v tabulce pouze hodnoty ze zadané množiny.

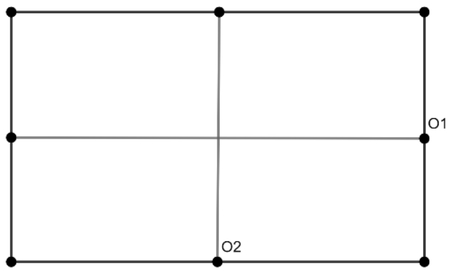
Zadaná operace je asociativní, což nemůžeme vyčíst z tabulky. Víme však, že při skládání nám nezáleží na určení závorek.

Neutrální prvek je identita, jelikož má pod sebou i vedle sebe v tabulce záhlaví tabulky

Existují inverzní prvky, jsou to prvky takové, které mají na průsečíku prvek neutrální

Algebraická struktura je také komutativní, je souměrná podle hlavní diagonály. Vlastnosti zjištěné v tabulce můžeme snadno interpretovat, k tomu nám může posloužit tabulka č. 1. Z té zjistíme, že tyto všechny vlastnosti nabývá algebraická struktura s jednou binární operací, a to **abelovská grupa.**

4. Vytvořte multiplikativní tabulku skládání shodných zobrazení reprodukujících obdélník. Určete typ algebraické struktury skládání těchto shodných zobrazení.



Obrázek 3 osy souměrnosti obdélníku (zdroj: vlastní)

Z obrázku 3 zjistíme zobrazení, která nám zachovávají obdélník. Patří mezi ně identita, zobrazení osové souměrnosti dle os souměrnost o_1, o_2 a rotace o 180°, což je zobrazení dle středové souměrnosti.

	id	**r**	**o_1**	**o_2**
id	id	r	o_1	o_2
r	r	id	o_2	o_1
o_1	o_1	o_2	id	r
o_2	o_2	o_1	r	id

id – identita, r – rotace o 180°, o_1, o_2 – osová souměrnost,

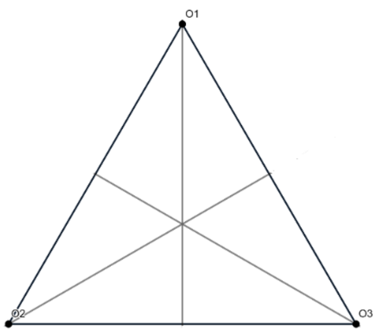
Výsledek: Operace je uzavřená na množině, asociativnost z tabulky vyčíst nemůžeme. Operace skládání však asociativní je. Neutrálním prvkem je identita, má pod sebou ve sloupci i vedle sebe v řádku opsané záhlaví tabulky. Inverzní prvek pro každý prvek je také splněn, v každém řádku se nachází jedenkrát neutrální prvek, například pro r je inverzní prvek r. Komutativnost operace skládání zobrazení obdélníka je zajištěna, tabulka je souměrná, dle hlavní diagonály.

Výsledná operace je algebraickou strukturou **komutativní grupa.**

5. **Určete typ algebraické struktury skládání shodných zobrazení reprodukujících rovnostranný trojúhelník.**

Vytvoř tabulku skládání těchto zobrazení a urči algebraickou strukturu.

Shodnosti budeme skládat z leva například I°O_1= nejprve uděláme I a pak O_1.



Obrázek 4 osy rovnostranného trojúhelníka (zdroj: vlastní)

Zobrazení, která budeme používat jsou zobrazení dle tří os souměrnosti, rotaci o 120°, rotaci o 240° a identitu

Opět vytvoříme tabulku

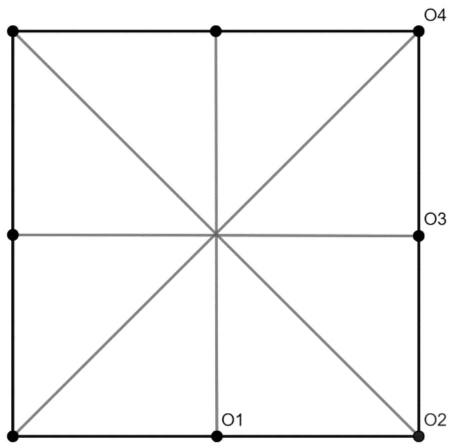
°	I	$R_{120°}$	$R_{240°}$	O_1	O_2	O_3
I	I	$R_{120°}$	$R_{240°}$	O_1	O_2	O_3
$R_{120°}$	$R_{120°}$	$R_{240°}$	I	O_3	O_1	O_2
$R_{240°}$	$R_{240°}$	I	$R_{120°}$	O_2	O_3	O_1
O_1	O_1	O_2	O_3	I	$R_{120°}$	$R_{240°}$
O_2	O_2	O_3	O_1	$R_{240°}$	I	$R_{120°}$
O_3	O_3	O_1	O_2	$R_{120°}$	$R_{240°}$	I

Skládání zobrazení rovnostranného trojúhelníka je operace uzavřená, operace skládání je asociativní, neutrálním prvkem je identita neboli rotace o 360°. Inverzní prvek ke každému prvku existuje pro I = I pro $O_1 = O_1$, $R_{240°}= R_{120°}$ atd. Operace není symetrická dle hlavní diagonály, není tím pádem ani komutativní.

Jedná se algebraickou strukturu s jednou binární operací, a to o **grupu.**

6. **Skládání zobrazení reprodukujících čtverec.**
   Mějme zadána tato zobrazení I – identita, $R_{90°}$ - rotace o 90°, $R_{180°}$ - rotace o 180°, $R_{270°}$ - rotace o 270°, dále pak čtyři osy souměrnosti O_1, O_2, O_3, O_4.

Máme tedy zadáno osm zobrazení reprodukujících čtverec.



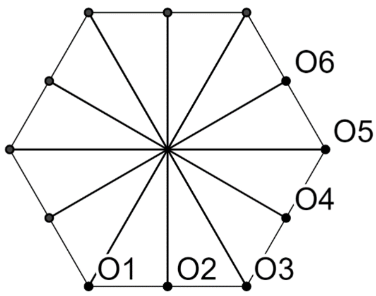
Obrázek 5 osy souměrnosti čtverce (zdroj: vlastní)

°	I	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	O_1	O_2	O_3	O_4
I	I	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	O_1	O_2	O_3	O_4
$R_{90°}$	$R_{90°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	I	O_2	O_3	O_4	O_1
$R_{180°}$	$R_{180°}$	$R_{270°}$	I	$R_{90°}$	O_3	O_4	O_1	O_2
$R_{270°}$	$R_{270°}$	I	$R_{90°}$	$R_{180°}$	O_4	O_1	O_2	O_3
O_1	O_1	O_4	O_3	O_2	I	$R_{270°}$	$R_{180°}$	$R_{90°}$
O_2	O_2	O_1	O_4	O_3	$R_{90°}$	I	$R_{270°}$	$R_{180°}$
O_3	O_3	O_2	O_1	O_4	$R_{180°}$	$R_{90°}$	I	$R_{270°}$
O_4	O_4	O_3	O_2	O_1	$R_{270°}$	$R_{180°}$	$R_{90°}$	I

Zadaná algebraická struktura je uzavřená, asociativnost skládání je zajištěna, neutrálním prvkem identita, inverzní prvek ke každému prvku existuje, je to vždy při skládání prvek, kde mi vyjde neutrální prvek na jejich průsečíku. Komutativní operace není (není souměrná tabulka).

Struktura je **grupa.**

7. **Skládání zobrazení reprodukujících šestiúhelník. Vytvořte Cayleyho tabulku s binární operací ° skládání shodných zobrazení a zjistěte, o kterou algebraickou strukturu se jedná.**
   Shodných zobrazení budeme mít 12. Šestiúhelník, jak můžeme vidět na obrázku číslo 6 má šest os souměrností (O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6). Dále ho reprodukuje šest rotací o daný úhel, (identita (id), rotace o 60° ($R_{60°}$), rotace o 120° ($R_{120°}$), rotace o 180° ($R_{180°}$), rotace o 240° ($R_{240°}$), rotace o 300° ($R_{300°}$)



Obrázek 6 osy souměrnosti pravidelného šestiúhelníku (zdroj: vlastní)

°	**Id**	$\mathbf{R_{60^\circ}}$	$\mathbf{R_{120^\circ}}$	$\mathbf{R_{180^\circ}}$	$\mathbf{R_{240^\circ}}$	$\mathbf{R_{300^\circ}}$	$\mathbf{O_1}$	$\mathbf{O_2}$	$\mathbf{O_3}$	$\mathbf{O_4}$	$\mathbf{O_5}$	$\mathbf{O_6}$
Id	Id	R_{60°	R_{120°	R_{180°	R_{240°	R_{300°	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
$\mathbf{R_{60^\circ}}$	R_{60°	R_{120°	R_{180°	R_{240°	R_{300°	Id	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_1
$\mathbf{R_{120^\circ}}$	R_{120°	R_{180°	R_{240°	R_{300°	Id	R_{60°	O_3	O_4	O_5	O_6	O_1	O_2
$\mathbf{R_{180^\circ}}$	R_{180°	R_{240°	R_{300°	Id	R_{60°	R_{120°	O_4	O_5	O_6	O_1	O_2	O_3
$\mathbf{R_{240^\circ}}$	R_{240°	R_{300°	Id	R_{60°	R_{120°	R_{180°	O_5	O_6	O_1	O_2	O_3	O_4
$\mathbf{R_{300^\circ}}$	R_{300°	Id	R_{60°	R_{120°	R_{180°	R_{240°	O_6	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
$\mathbf{O_1}$	O_1	O_6	O_5	O_4	O_3	O_2	Id	R_{300°	R_{240°	R_{180°	R_{120°	R_{60°
$\mathbf{O_2}$	O_2	O_1	O_6	O_5	O_4	O_3	R_{60°	Id	R_{300°	R_{240°	R_{180°	R_{120°
$\mathbf{O_3}$	O_3	O_2	O_1	O_6	O_5	O_4	R_{120°	R_{60°	Id	R_{300°	R_{240°	R_{180°
$\mathbf{O_4}$	O_4	O_3	O_2	O_1	O_6	O_5	R_{180°	R_{120°	R_{60°	Id	R_{300°	R_{240°
$\mathbf{O_5}$	O_5	O_4	O_3	O_2	O_1	O_6	R_{240°	R_{180°	R_{120°	R_{60°	Id	R_{300°
$\mathbf{O_6}$	O_6	O_5	O_4	O_3	O_2	O_1	R_{300°	R_{240°	R_{180°	R_{120°	R_{60°	Id

Z tabulky vyčteme, že operace skládání zobrazení reprodukujících pravidelný šestiúhelník v rovině je operace uzavřená (vycházejí nám pouze daná shodná zobrazení), asociativnost z tabulky vyčíst nelze (chybí nám třetí rozměr), operace skládání však víme, že je asociativní. Neutrální prvek má v řádku i sloupci opsané záhlaví tabulky, v našem případě je tímto prvkem identita neboli rotace o 360°. Inverzní prvek ke každému prvku existuje (po složení dvou zobrazení nám vyjde prvek inverzní), například pro prvek R_{60° je inverzním prvkem rotace o 300° (R_{300°), inverzní prvek k R_{180° je prvek R_{180°, k osové souměrnosti O_1 je inverzním prvek osová souměrnost O_1. Po zjištění těchto vlastností binární operace ° jsme zjistili, že se jedná o algebraickou strukturu **grupa.** Ještě zjistíme, zda je operace komutativní, komutativnost z tabulky poznáme tak, že je tabulka souměrná dle hlavní diagonály, zjistíme tedy, že operace skládání shodných zobrazení reprodukujících pravidelný šestiúhelník není komutativní.

Algebraická struktura je **grupa.**

Na tomto příkladu si můžeme demonstrovat vhodnost a nevhodnost Cayleyho tabulky. Máme spolu v relaci 12 prvků, což není mnoho, přesto tabulka už začíná být trochu nepřehledná. Je tedy vhodné tabulku používat pro množiny méně obsáhlé než pro množiny tvořící několik desítek prvků.

8. Zapište příklad grupoidu, který není pologrupou.

Znamená to, že musím najít algebraickou strukturu, která je grupoidem, tedy při dané operaci vycházejí hodnoty pouze z operace, a zároveň není asociativní.

Řešení: Z definice asociativity víme, že asociativní není například operace odčítání či dělení.

Zkusme si tedy vzít množinu R bez 0 s operací ÷ (R - {0}, ÷) Pokud vezmu reálná čísla bez nuly a vydělím je, vyjde opět číslo reálné. Operace je tedy uzavřená vůči množině a struktura je grupoidem.

Asociativnost neplatí, záleží na pořadí prvků $a \div (b \div c) = (a \div b) \div c$.

Výsledek: Struktura (R - {0}, ÷) je tedy grupoid, ale není pologrupou.

9. Nalezněte komutativní pologrupu

Řešení: Binární operace na dané množině musí být uzavřená, asociativní a komutativní.

Asociativnost je, jak už víme zařízena pro násobení a sčítání.

Zkusme tedy vzít množinu přirozených čísel (N, +).

Množina je uzavřená je tam zařízena asociativnost $a + (b + c) = (a + b) + c$ a pro komutativnost platí $a + b = b + a$. Pro všechna přirozená čísla toto platí.

Výsledek: Množina přirozených čísel v operaci sčítání je tedy **abelovskou pologrupou.**

10. Nalezněte příklad abelovské grupy

Operace musí být uzavřená, asociativní, komutativní, musí obsahovat neutrální prvek, každý prvek musí mít prvek inverzní.

Zkusme si vzít operaci sčítání v Z_5 (Z_5, +)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Jak může dokázat, že jsme vybrali správnou množinu?

Zadaná operace je uzavřená v množině, asociativní je, jedná se operaci sčítání. Neutrální prvek z tabulky vidíme, že je číslo 0. Inverzní prvek ke každému prvku také existuje pro 1 je to 4, pro 4 vychází inverze jednička. Pro trojku dvojka a zase naopak. Komutativnost z tabulky můžeme vyčíst tím, že je tabulka symetrická dle hlavní diagonály. Struktura je tedy **komutativní grupou**, stejně tak jako znělo zadání příkladu.

11. Vytvořte Cayleyho tabulku pro zbytkovou třídu Z_3 v operaci sčítání a operaci násobení. Určete vlastnosti a rozhodněte, o kterou algebraickou strukturu se jedná.

+	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

Operace sčítání je uzavřená na množině, asociativní, neutrálním prvkem z tabulky je 0 (v řádku i sloupci má čísla ze záhlaví), inverzní prvek pro každý prvek existuje pro jedničku je to dvojka, pro dvojku vychází jednička, je komutativní (osově souměrná podle hlavní diagonály). Jedná se tedy o strukturu **abelovskou grupu.**

Operace násobení je uzavřená, asociativní, neutrální prvek je 1 má opsané záhlaví, inverzní prvek existuje pouze pro prvek jedna. Operace je komutativní, jelikož tabulka je symetrická. Máme algebraickou strukturu **abelovský monoid.**

12. Algebraická struktura je zadána tímto předpisem (M, ∪), kde množina M obsahuje tyto prvky M = {∅, {a}, {b}, {a, b}}. O jakou algebraickou strukturu se jedná?

∪	**∅**	**{a}**	**{b}**	**{a, b}**
∅	∅	{a}	{b}	{a, b}
{a}	{a}	{a}	{a, b}	{a, b}
{b}	{b}	{a, b}	{b}	{a, b}
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}

Řešení: Operace sjednocení je uzavřená na dané množině, neutrální prvkem je prázdná množina (má pod sebou v řádku i sloupci hodnoty ze záhlaví tabulky), operace sjednocení je asociativní, inverzní prvky pro všechny prvky neexistuje, existuje pouze pro prázdnou množinu a je jím prázdná množina, komutativní je, jelikož je osově souměrná podle hlavní diagonály.∪

Asociativnost:

({a} ∪ {b}) ∪ {a, b} = {a} ∪ ({b} ∪{a, b})

asociativnost platí i pro další prvky, operace je na dané množině asociativní

Výsledek: Algebraická struktura je **komutativní monoid.**

13. Určete typ algebraické struktury s jednou binární operací * danou předpisem a * b = a + b-1 na množině celých čísel (Z, *).

Jedná se grupoid, vždy nám vyjde celé číslo,

Asociativní operace je

(a + b-1) + c = a + (b + c–1)

Komutativita je také splněna, nezáleží, zda máme a + b–1 či b + a – 1,

Neutrální prvek a + e–1 = a

e = 1

neutrálním prvkem je tedy 1.

Inverzní prvky existují, jedná se vždy o číslo opačné k danému číslu a.

Máme zadanou **abelovskou grupu.**

14. Určete typ algebraické struktury s jednou binární operací (M, *), kde M = N tedy přirozená čísla. Binární operace je zadána předpisem a * b = a^b

Při umocňování nám vždy vyjdou hodnoty z množiny M, množina je tedy uzavřená na svém intervalu

Asociativnost:

(a * b) * c = a * (b * c)

$(a^b)^c = a^{(b^c)}$

Tyto dva výrazy se nerovnají, jak již známe z učiva střední školy u pravidel umocňování, proto naše operace není asociativní.

Komutativnost

a*b = b*a

$a^b = b^a$

Komutativnost neplatí, když umocníme jedno číslo na druhé, a naopak nevyjdou nám stejné hodnoty. Vyjdou stejné hodnoty jen v případě, že číslo a = b.

Jelikož ve struktuře neplatí asociativnost, další vlastnosti již zjišťovat by bylo nelogické. Výsledná struktura se již nezmění.

Jedná se o strukturu **grupoid.**

15. Na množině racionálních čísel s binární operací ° vyšetřete algebraickou strukturu (Q, °) a ° b = $\frac{ab}{2}$

Operace je uzavřená, vždy vyjde racionální číslo,

Asociativnost

(a ° b) ° c = a ° (b ° c)

$$\frac{\frac{ab}{2}\cdot c}{2} = \frac{a\cdot\frac{bc}{2}}{2}$$

$$\frac{a}{4}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{4}$$

Levá a pravá strana si nejsou rovné, operace není asociativní.

Neutrální prvek

Z definice neutrálního prvku zjistíme, zda neutrální prvek existuje

$\frac{ae}{2}$= a

$2a = ae$

e = 2

Neutrálním prvkem je číslo 2.

Inverzní prvek

Inverzní prvek je dán předpisem $a^{-1} = \frac{4}{a}$.

Inverzní prvek neexistuje pro agresivní prvek 0.

Komutativnost:

$\frac{ab}{2} = \frac{ba}{2}$

operace je komutativní, platí komutativní zákon.

Z vlastností uvedených výše jsme zjistili, že se jedná o **komutativní pologrupu s neutrálním prvkem**.

16. Určete typ algebraické struktury (Z_4, +)

Máme zadanou zbytkovou třídu celých čísel Z_4, prvky této množiny jsou zbytky po dělení číslem 4. Můžeme mít tedy zbytek 0, 1, 2, 3. Pohybujeme se tedy v oboru množiny těchto čtyř hodnot.

Vytvoříme si tabulku

+	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Při operaci sčítání modulo 4 vycházejí pouze hodnoty z dané množiny, operace je tedy uzavřená.

Asociativnost – tuto vlastnost nemůžeme z tabulky vyčíst, chybí nám třetí rozměr.

Víme však z předešlých příkladů, že operace sčítání je asociativní.

Neutrálním prvek, tedy prvkem, který má výsledné hodnoty stejné se záhlavím tabulky je v tomto případě 0, tak jako ve většině příkladů sčítání.

Inverzní prvek ke každému prvku je inverzní prvek, kdy výsledek operace je roven neutrálnímu prvku. Pro 0 je inverzním prvkem 0, pro 1 je inverzním prvkem 3, pro 2 je inverzním prvkem 2, pro 3 je inverzním prvkem 1

Operace je komutativní, tabulka je souměrná dle hlavní diagonály.

Máme tedy **abelovskou grupu.**

17. Je dána množina A = {a, b, c,} a částečná tabulka binární operace *

*	a	b	c
a	a	c	a
b			b
c			

Doplňte tabulku tak, aby algebraická struktura (A, *) byl,

a) grupoid
b) grupoid s neutrálním prvkem
c) grupoid s inverzním prvek

d) pologrupu

a) Grupoid

Řešení: Aby daná algebraická struktura s jednou binární operací byla grupoidem, musí splňovat vlastnost uzavřenosti na množině. Je tedy pouze na nás, jak tabulku doplníme. Musíme jen zachovat prvky a, b, c z množiny. Jinak doplníme podle sebe. Jedno z možných řešení:

*	**a**	**b**	**c**
a	a	c	a
b	c	a	b
c	b	c	a

Z tabulky určíme, že daná algebraická struktura (A, *) je grupoid, jelikož je uzavřená (vycházejí hodnoty pouze z množiny).

b) Grupoid s neutrálním prvkem

Řešení: Opět musíme splnit podmínku grupoidu, musíme mít doplněny pouze prvky z množiny. Navíc musíme zachovat existenci neutrálního prvku. Z výše uvedených informací o Cayleyho tabulce víme, že neurální prvek je prvek takový, který má v sloupci i řádku opsané hodnoty ze záhlaví tabulky.

*	**a**	**b**	**c**
a	a	c	a
b	b	a	b
c	a	b	c

Z tabulky vyčteme, že máme splněnou uzavřenost, hodnoty v tabulce jsou pouze z množiny, neutrálním prvkem je prvek c (má v řádku i sloupci opsané hodnoty ze záhlaví tabulky). Jedná se tedy o **grupoid s neutrálním prvkem.**

c) **Grupoid s inverzním prvkem**

*	**a**	**b**	**c**
a	a	c	a
b	b	c	b
c	a	b	c

Operace * je uzavřená, neutrálním prvkem je c (má opsané záhlaví tabulky v řádku i sloupci), inverzní prvek je prvek c pro všechny prvky, prvek a je inverzní s prvkem b, prvek b je inverzní s b, prvek c je inverzní k c. Algebraická struktura je tedy **grupoidem, s inverzním prvkem.**

c) **Pologrupa**

Aby byla struktura pologrupou, musela by být asociativní, asociativnost z tabulky nelze vyčíst. Nemáme totiž zadán třetí rozměr. Musíme tedy zkusit, zda je splněna pro již zadané prvky dle vztahu pro asociativnost.

(a * a) * b = a * b = c a a ∗ (a ∗ b) = a ∗ c = a, zjistíme tedy, že asociativnost není splněna už pro prvky, které jsou v tabulce zadány. Operace tedy není asociativní a nelze ji doplnit, tak aby nám vycházela pologrupa.

18. Určete, o jakou algebraickou strukturu se jedná, je-li dána množina M = {∅, {2}, {4}, {5}, {2, 4}, {2, 5}, {4, 5}, {2, 4, 5}} a binární operace průnik množin.

Řešení: Pro tento příklad bude nejjednodušší vytvořit si tabulku, ze které pak lépe vyčíst jednotlivé vlastnosti. Průnikem množin zjišťujeme shodné prvky množin.

∩	**∅**	**{2}**	**{4}**	**{5}**	**{2,4}**	**{2,5}**	**{4,5}**	**{2,4,5}**
∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
{2}	∅	{2}	∅	∅	{2}	{2}	∅	{2}
{4}	∅	∅	{4}	∅	{4}	∅	{4}	{4}
{5}	∅	∅	∅	{5}	∅	{5}	{5}	{5}
{2,4}	∅	{2}	{4}	∅	{2,4}	{2}	{4}	{2,4}
{2,5}	∅	{2}	∅	{5}	{2}	{2,5}	{5}	{2,5}
{4,5}	∅	∅	{4}	{5}	{4}	{5}	{4,5}	{4,5}
{2,4,5}	∅	{2}	{4}	{5}	{2,4}	{2,5}	{4,5}	{2,4,5}

Operace průniku na dané množině je uzavřená.

Asociativnost nemůžeme z tabulky vyčíst, ale víme, že operace průniku je asociativní.

Můžeme si to i demonstrovat na příkladu z množiny: (a ° b) ° c = a ° (b ° c)

(a ∩ b) ∩ c = a ∩ (b ∩ c)

({2} ∩ {4}) ∩ ∅ = (∅ ∩ {4}) ∩ {2}

Nezáleží tedy, v jakém pořadí operaci provádíme v řetězci operací.

Neutrálním prvkem je {2,4,5} (má shodný řádek i sloupek se záhlavím tabulky).

Inverzní prvek v této operaci neexistuje pro všechny prvky z množiny M.

Operace je komutativní, tabulka je osově souměrná podle hlavní diagonály.

Algebraická struktura průniku na množině M je **abelovský monoid.**

19. Mějme zadanou matici $M_{m \cdot n}$ v operaci sčítání ($M_{m \cdot n}$, +)

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{pmatrix}$$

U operace sčítání nám nezáleží na tom, zda máme čtvercovou či obdélníkovou matici. Můžeme však sčítat matice pouze o stejném řádu.

Jelikož mohu sčítat jen matice stejného řádu, jedná se o uzavřenou operaci, opět dostanu matici stejného řádu.

Asociativnost

Matice je asociativní, nezáleží na pořadí matic ve sčítání, při sčítání matic jsou sčítána čísla vždy na příslušných pozicích a sčítání čísel je asociativní. Operace je tedy asociativní.

Neutrální prvek

Stejně jako u klasického sčítání například reálných čísel, je neutrálním prvkem 0, u matic je to podobné.

a + e = a

e = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Neutrálním prvkem je tedy nulová matice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Inverzní prvek

Inverzní prvek v operaci sčítání je opačný prvek, v případě matice to bude opačná matice.

a + (-a) = e

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Komutativnost

Jelikož i při sčítání matic sčítám první prvek matice A s prvním prvkem matic B, nezáleží nám tedy v tomto případě na pořadí v operaci. Operace je tedy komutativní. Struktura sčítání jak čtvercových, tak obdélníkových matic je **komutativní grupa.**

20. Vezměte (S_n, °). Množinu skládání permutaci s prvky S_n= {A,B}

2! = 2

Tedy máme zadané permutace a operaci °, která bude skládání matic permutací a dva prvky.

AB, BA

1 $\longrightarrow$ 1		1 $\longrightarrow$ 2	
2 $\longrightarrow$ 2		2 $\longrightarrow$ 1	

Zobrazení

a: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Nyní si připravíme tabulku operace skládání

a ° a (x) = a ° (a (x))

a ° b (x) = a ° (b (x))

°	a	b
a	a	b
b	b	a

Vysvětlení pro skládání a ° b (x) = a ° (b (x)) nejprve jdu z permutace b v závorce a pak jdu do permutace a bez závorky. V b jdu z jedničky do dvojky a v a se dostanu z 2 do 1. První sloupec je tedy 1, 2, druhý sloupec je z 2 do jedničky v b a jedničky jde v a do 1. Druhý sloupec je 2, 1, zapsat to mohu takto $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ze zápisu vidím, že při skládání permutace a s permutací b dostanu množinu b.

Stejným způsobem pokračujeme pro ostatní prvky a jejich skládání.

Z tabulky můžeme vyčíst, že daná množina je uzavřená, množina skládání je asociativní, což z tabulky nevidíme, ale známe z předchozích znalostí. Neutrálním prvkem je permutace a, inverzní prvek z tabulky také ke každému prvku můžeme najít, komutativní operace také je, je souměrná dle hlavní diagonály.

Algebraická struktura skládání permutací je **komutativní grupa.**

21. V S_3 zjistěte vlastnosti operaci skládání permutací

n! = 3! = 3 · 2 ·1 = 6

V případě skládání S_3 už máme šest prvků. Hodnoty tedy nabývají velmi rychle. Zadání větší permutace je už složitější na výpočet a zapsání tabulky skládání

a: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ b: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

e: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ f: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$b \circ b = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = a$

$b \circ c = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = e$

$b \circ d = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = f$

$b \circ e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix} = c$

$b \circ f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = d$

$c \circ b = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = d$

$c \circ d = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = b$

$c \circ c = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = a$

$c \circ e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = f$

$c \circ f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = e$

$d \circ b = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix} = c$

$d \circ c = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = f$

$d \circ d = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = e$

$d \circ e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = a$

$d \circ f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = b$

$e \circ c = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = b$

$e \circ d = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = a$

$e \circ e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = d$

$e \circ f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix} = c$

$e \circ b = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = f$

$f \circ b = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = e$

$f \circ c = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix} = d$

$f \circ d = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix} = c$

$f \circ e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} = b$

$f \circ f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = a$

∘	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	a	e	f	c	d
c	c	d	a	b	f	e
d	d	c	f	e	a	b
e	e	f	b	a	d	c
f	f	e	d	c	b	a

Vlastnosti binární operace skládání permutací: je uzavřená vycházejí pouze permutace z dané množiny, asociativnost platí v operaci skládání permutací, neutrální prvek z tabulky, je prvek a. Každý prvek v tabulce má inverzní prvek při jejich skládání vychází prvek neutrální například $a^{-1} = a$, $e^{-1} = d$, $d^{-1} = e$. Komutativní operace skládání v tomto případě není, tabulka nemá zajištěnou symetrii dle hlavní diagonály.
Skládání permutaci S_3 je strukturou **grupy.**
Z tohoto plyne myšlenku, která bude platit pro další vyšší permutace.

Grupou bude i každá další permutace o hodnotě $n \geq 3$.

22. Vyšetřete algebraickou strukturu ($M_{m \cdot n}$, $\cdot$)

Pokud násobím dvě obdélníkové matice, musí být shodný počet sloupců druhé s počtem řádků první, výsledný rozměr je pak počet řádků první a počet sloupců druhé.

Matice 2×3 a matice 3×4, výsledná matice bude mít rozměr 2×4

Pokud bychom tedy násobili dvě matice obdélníkové, každá má jiný rozměr a výsledkem je také jiný rozměr, operace násobení obdélníkové matice tedy není uzavřené a nejedná se o grupoid.

Budeme tedy řešit násobení dvou matic čtvercových.

Matice čtvercové mají stejný rozměr, a i výsledkem bude stejný rozměr matic. Operace je tedy uzavřená, asociativnost platí, neutrálním prvkem je jednotková matice, inverzní matice existuje v případě, že máme zadanou regulární matici, tedy její determinant není rovný 0. Komutativní operace násobení dvou matic není. Jedná se o **grupu.**

7 Řešené příklady se dvěma binárními operacemi

1. Rozhodni o typu algebraické struktury

a) (N, +, ·)

Rozdělíme si relaci na dvě části a každou vyřešíme zvlášť

(N, +)

Operace je uzavřená, asociativnost vyplývá ze sčítání, neutrálním prvkem v operaci sčítání je neutrální prvek 0. Inverzní prvky neexistují, inverzní prvek má pouze číslo 0.

Komutativnost platí

a + b = b + a

Algebraická struktura (*N*, +) je komutativní pologrupu s neutrálním prvkem.

Operace je také uzavřená, asociativní je vzhledem k operaci násobení, neutrální prvek je jednotka, inverzní prvky neexistují.

Algebraická struktura (*N*, ·) je komutativní monoid neboli komutativní pologrupu s jednotkou.

Distributivnost

a (b + c) = ab + ac ∧ (b + c) a = ba + ca

a = 2

b = 4

c = 7

2 · (4 + 7) = 2·4 + 2·7 splněno

(4 + 7) · 2 = 4·2 + 7·2 splněno

Podmínka distributivnosti je splněna.

Algebraická struktura je dle vlastností **komutativní polookruh.**

b) (R, +, ·)

Budeme postupovat stejně jako v předchozím cvičení.

(R, +)

Sčítání reálných čísel je uzavřená operace, také je splněna asociativnost, neutrálním prvkem sčítání je 0, inverzní prvek k číslu *a* je opačné číslo –a, operace sčítání je komutativní. Struktura spadá dle vlastnosti do kategorie **komutativní grupa.**

(R, ·)

Násobení reálných čísel je operace uzavřená, asociativní, neutrálním prvkem je 1, inverzní prvek k prvku a je vždy číslo $\frac{1}{a}$ pro nulu však inverzní prvek neexistuje, operace je komutativní a · b = b · a.

Stejně jako u předchozího příkladu i zde máme splněnu distributivnost.

Stačí nám však aby byla komutativní struktura (R - {0}, ·). Což daná struktura je.

Máme také **komutativní grupu.**

Při spojení vlastností se jedná o **komutativní těleso.**

c) (Z, +, ·)

(Z, +)

Množina celých čísel je v operaci sčítání uzavřená

Asociativnost je ve sčítání celých čísel zajištěna.

Neutrálním prvkem je nula.

Inverzní prvek ke každému nenulovému číslu a je (-a).

Komutativnost platí u sčítání celých čísel.

Algebraická struktura je **komutativní grupa.**

(Z, ·)

Operace násobení je uzavřená.

Asociativní je také, jelikož je to násobení.

Neutrálním prvkem neboli také jednotkovým je 1.

a · e = a

5 · e = 5

e = 1

Inverzní prvky v násobení jsou čísla a^{-1}, nejedná se o celá čísla. Inverzní prvek tedy neexistuje.

Komutativnost je zařízena a · b = b · a.

Struktura je komutativní **pologrupa.**

Nemá netriviální dělitele nuly a distributivnost je zařízena.

Algebraická struktura (Z, +, ·) je **obor integrity.**

d) (C, +, ·)

V počátku si uvědomte, co znamenají komplexní čísla. Jedná se o čísla ve tvaru a + bi $i^2 = -1$.

Při sčítání nejprve sčítáme reálné složky a pak složky imaginární. Při násobení násobíme prvky mezi sebou.

Algebraická struktura (C, +)

Operace sčítání je uzavřená na množině, asociativní je operace na množině komplexních čísel také, neutrálním prvkem je 0 kdy za reálnou i imaginární složku zvolím nulu, inverzní prvek je – a – bi, komutativní operace také je, je jedno při sčítání komplexních čísel, který prvek sčítám se kterým tedy, jestli mám $(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$, vždy vyjde stejný výsledek.

Algebraická struktura s operací sčítání komplexních čísel je **komutativní grupou.**

Operace násobení (C, ·)

Operace je opět uzavřená, jedná se o násobení, proto je asociativní, neutrálním prvkem je 1, za reálnou část da jedničku a za imaginární 0. Inverzním prvkem je hodnota $\frac{1}{a+bi}$ což se dá upravit na tvar $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$, inverzní prvek mají všechna komplexní čísla bez nuly.

Operace násobení komplexních čísel je komutativní, jelikož vzájemně násobím imaginární i reálnou složku.

(C - {0}, ·), tato struktura je tedy **komutativní grupou**

Neobsahuje netriviální dělite nuly, distributivnost násobení vůči sčítání platí ve všech případech.

Algebraická struktura se dvěma binárními operacemi, kdy u operace sčítání se jedná o komutativní grupu a operace násobení máme také komutativní grupu, a operace jsou distributivní se nazývá **komutativní těleso.**

e) (Q, +, ·)

(Q, +)

Racionální čísla jsou uzavřená na celém intervalu, sčítání je asociativní, neutrální prvek je prvek 0. Inverzní prvek $-\frac{a}{b}$. Operace je komutativní.

Racionální čísla v operaci sčítání jsou **komutativní grupou**.

(Q, ·)

Násobení racionálních čísel je uzavřené, operace je asociativní jedná se o násobení. Neutrálním prvek je číslo 1 zapsané například jako $\frac{1}{1}, \frac{4}{4}, \frac{8}{8}$ tedy $\frac{a}{a}$. Inverzní prvek neexistuje pro číslo nula. Algebraická struktura je **komutativní monoid.**

Neexistují netriviální dělitelé nuly. Distributivnost je splněna v operaci násobení a sčítání.

(Q - {0}, ·) je komutativní grupa, což je opět postačující podmínkou.

Výsledná struktura (Q, +, ·) je **komutativní těleso.**

f) Množina lichých čísel v operaci sčítání a násobení (L, +,·)

(L, +)

Sčítání lichých čísel není uzavřenou množinou, nevycházejí hodnoty pouze z množiny lichých čísel, ale při součtu dvou lichých čísel, vyjde také číslo liché. Komutativita je zařízena, liché číslo v součtu s lichých, nezáleží na pořadí prvků dané operace

Struktura tedy není **grupoidem.**

Druhou část operace už nemusíme provádět, v tomto případě se nejedná o žádnou algebraickou strukturu se dvěma binárními operacemi.

g) Množina sudých čísel v operaci násobení a sčítání. (S, +, ·)

(S, +)

Operace sčítání sudých čísel je operací uzavřenou na množině. Při součtu dvou sudých hodnot nám vyjde opět hodnota sudá.

Asociativnost

(a + b) + c = a + (b + c)

V aditivním zápisu nám závorky nehrají významnou roli, operace je asociativní.

Neutrální prvek

V operaci sčítání je neutrálním prvek hodnota 0. 0 náleží množině sudých čísel, operace má neutrální prvek.

Inverzní prvek

Inverzním prvkem v operaci sčítání je opačná hodnota čísla – a.

Komutativnost

Komutativnost a + b = b + a, v tomto případě platí. Operace je komutativní.

Algebraická struktura sudých čísel s operací sčítání je **komutativní grupou.**

(S, ·)

Operace násobení je uzavřená operace na množině sudých čísel.

Asociativnost

(a · b) · c = a · (b ·c)

Stejně jako byla operace sčítání asociativní, je i operace násobení asociativní.

Neutrální prvek

Neutrální prvek v operaci násobení je 1. Číslo jedna však nespadá do množiny sudých čísel, jedná se o číslo liché. Operace tedy nemá neutrální prvek a nemůže tedy obsahovat ani prvek inverzní.

Komutativnost

a · b = b ·a

Komutativnost operace násobení je také zajištěna.

Distributivní zákon platí i v tomto případě.

Jedná se o algebraickou strukturu s jednou binární operací, a to o **komutativní pologrupu bez triviálních dělitelů nuly.**

V případě struktury (S, +, ·) se dle vlastností jedná o **obor integrity.**

2. **Na množině reálných čísel R máme zadanou algebraickou strukturu (R, °, *), zjisti dle zadaných ° a * o jakou strukturu se jedná.**

a ° b = a + b -3

a * b = $\frac{a \cdot b}{2}$

(R, °)

Operace je uzavřená na množině reálných čísel.

Asociativnost

$(a \circ b) \circ c = (a + b - 3) \circ c = (a + b - 3) + c - 3 = a + b + c - 6$

$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - 3) = a + (b + c - 3) - 3 = a + b + c - 6$

Tento vztah na množině reálných čísel platí operace je asociativní.

Neutrální prvek

a + e -3 = a

e = 3

Neutrálním prvkem operace ° je číslo 3.

Inverzní prvek

$a + a^{-1} = e$

$a + a^{-1} = 3$

$a^{-1} = 3 - a$

Inverzní prvek v dané operaci existuje pro každý z prvků.

Komutativnost

$a + b - 3 = b + a - 3$

Operace je komutativní.

Jedná se o **abelovskou grupu.**

(R, *)

Operace je uzavřená, vždy dostanu číslo reálné.

Asociativnost

$(a * b) * c = a * (b * c)$

$$\frac{\frac{ab}{2}\cdot c}{2} = \frac{a\cdot\frac{bc}{2}}{2}$$

$\frac{a}{4}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{2} = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{4}$ Operace * není asociativní.

Neutrální prvek

$\frac{ae}{2} = a$

$e = 2$

Neutrálním prvek je prvek čísla 2.

Inverzní prvek

Inverzní prvek je prvek převrácený tedy $a^{-1} = \frac{4}{a}$.

Komutativnost

$\frac{ab}{2} = \frac{ba}{2}$

Operace * je komutativní.

Z vlastností jsme zjistili, že se jedná o **komutativní grupoid**

Neexistují nenulové prvky, které vycházejí při násobení nula. Operace nemá dělitele nuly.

Algebraická struktura se dvěma binárními operacemi (R, °, *) **neexistuje.**

3. Vezměte stejné operace jako v příkladu č. 11 kapitoly č. 6.

Vytvořte Cayleyho tabulku pro zbytkovou třídu Z_3 v operaci sčítání a operaci násobení. A určete dané vlastnosti operace (Z_3, +, ·)

+	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Operace sčítání je uzavřená, asociativní, neutrálním prvkem je 0 v řádku i sloupci má čísla ze záhlaví, inverzní prvek pro každý prvek existuje, je komutativní osově souměrná podle hlavní diagonály. Jedná se tedy o **abelovskou grupu.**

Operace násobení je uzavřená, asociativní, neutrální prvek je 1, inverzní prvek existuje ke všem nenulovým prvkům a operace je komutativní (tabulka je souměrná dle hlavní diagonály).
Distributivní zákon těchto dvou struktur je splněn.
Struktura (Z_3 - {0}, ·) je **abelovskou grupou**.

(Z_3, +, ·) jedná se o algebraickou strukturu **komutativního tělesa**

4. Je dána algebraická struktura (Z_6, +, ·). Určete její typ.

(Z_6,+)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

(Z_6, ·)

·	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Operace sčítání zbytkových tříd je operací uzavřenou, asociativní, jelikož se jedná o sčítání, neutrálním prvkem je 0, inverzní prvek každého čísla existuje, jedná se o komutativní operaci. Máme zadanou **komutativní grupu.**

Operace násobení zbytkových tříd Z_6 je operace uzavřená, asociativní, máme násobení, neutrálním prvkem je jednotka, nemá inverzní prvek, souměrná dle hlavní diagonály je, je tedy i komutativní. Jedná se o **komutativní monoid.**

V operaci existují dělitelé nuly. A distributivní zákon je také splněn.

Výsledná struktura (Z_6, +, ·) je **komutativní okruh.**

Příklad číslo 3 a 4 můžeme zobecnit. Obecně máme zadanou strukturu (Z_n, +, ·). Pokud n = prvočíslo, potom nám vždy existují všechny vlastnosti potřebné ke komutativnímu tělesu. Pokud je tedy n prvočíslo jedná se vždy o **komutativní těleso.** Například Z_5, Z_{11}, Z_{13}, Z_{41}.

Pokud n = složené číslo, nenalezneme v tomto případě inverzní prvky ke všem prvkům a složená čísla také obsahují dělitele nuly. V případě složených čísel bude vždy vycházet **komutativní okruh.** Například Z_4, Z_6, Z_{24}, Z_{32}.

5. Vyšetřete algebraickou strukturu zadanou následovně (R, °, *)

$a \circ b = a + b - \sqrt{2}$

$a * b = a + b - \frac{ab\sqrt{2}}{2}$

(R, °)

Operace ° je uzavřená, vždy vyjdou čísla z množiny R.

Asociativní

$(a + b - \sqrt{2}) + c - \sqrt{2} = a + b + c - 2\sqrt{2}$

$a + (b + c - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = a + b + c - 2\sqrt{2}$

Asociativní zákon platí.

Neutrální prvek

$a + e - \sqrt{2} = a$

$e = \sqrt{2}$

Inverzní prvek

a + a^{-1} - $\sqrt{2}$ = $\sqrt{2}$

a^{-1} = $2\sqrt{2}$ – a

Komutativnost

a° b = b ° a

a + b - $\sqrt{2}$ = b + a - $\sqrt{2}$

komutativnost platí.

Výsledkem zjištění je **komutativní grupa.**

(R, *)

a + b - $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$

operace je uzavřená

Asociativnost

Asociativní zákon zní (a · b) ·c = a · (b · c)

$(a * b) * c$ = (a + b - $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$) * c = $(a + b - \frac{ab\sqrt{2}}{2}) + c - \frac{(a+b-\frac{ab\sqrt{2}}{2})c\sqrt{2}}{2} = a + b + c - \frac{ab\sqrt{2}}{2} - \frac{ac\sqrt{2}}{2} - \frac{bc\sqrt{2}}{2} + \frac{abc}{2}$

Na straně druhé podobným způsobem

$a * (b * c) = a * (b + c - \frac{bc\sqrt{2}}{2}) = a + (b + c - \frac{bc\sqrt{2}}{2}) - \frac{a(b+c-\frac{bc\sqrt{2}}{2})\sqrt{2}}{2} = a + b + c - \frac{ab\sqrt{2}}{2} - \frac{ac\sqrt{2}}{2} - \frac{bc\sqrt{2}}{2} + \frac{abc}{2}$

Operace * je asociativní.

Neutrální prvek

a + e - $\frac{ae\sqrt{2}}{2}$ = a

e = $\frac{ae\sqrt{2}}{2}$ – a

e = 0

Inverzní prvek

a + a^{-1} - $\frac{a \cdot a^{-1}\sqrt{2}}{2}$ = e

$a^{-1} = \frac{a}{1-\frac{a\sqrt{2}}{2}}$

Komutativnost

a * b = b * a

a + b - $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$ = b + a - $\frac{ba\sqrt{2}}{2}$

operace je komutativní.

Algebraická struktura * je **komutativní grupou.**

Neexistují dělitele nuly.

Distributivnost

(a + b) · c = ac + bc ∧ (b + c) a = ba + ca

Dosadíme si nejdříve do levé strany zákonu distributivnosti, poté do pravé. Pravá a levá strana se nám musejí rovnat.

a + b - $\sqrt{2}$ + c - $\frac{(a + b - \sqrt{2})c\sqrt{2}}{2}$

$\left(a + c - \frac{ac\sqrt{2}}{2}\right) \circ \left(b + c - \frac{bc\sqrt{2}}{2}\right) = \left(a + b + 2c - \frac{\sqrt{2}c\,(a+b)}{2} - \sqrt{2}\right)$

Porovnání obou stran zjistíme, že distributivní zákon daných operací je splněn.

Zadaná struktura (R, °, *) je **komutativním tělesem.**

6. Máme zadanou dvouprvkovou množinu P = {*a*, *b*}. Určete algebraickou strukturu (2^P, ∪, ∩), kdy 2^P je systém všech podmnožin množiny P.

Podmnožiny množiny P jsou ∅, {a}, {b}, {a, b}

(2^P, ∪)

∪	**∅**	**{a}**	**{b}**	**{a, b}**
∅	∅	{a}	{b}	{a, b}
{a}	{a}	{a}	{a, b}	{a, b}
{b}	{b}	{a, b}	{b}	{a, b}
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}

Operace sjednocení je uzavřená.
Operace sjednocení množin je asociativní, jestliže platí:
A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C
Neutrálním prvkem je prázdná množina, má v řádku i sloupci opsané záhlaví tabulky.

Inverzní prvek neexistuje pro všechny prvky jediný inverzní prvek má prázdná množina, a to prázdnou množinu.
Komutativnost platí, tabulka je souměrná podle hlavní diagonály.
Algebraická struktura sjednocení podmnožin množiny P je **komutativní pologrupa s neutrálním prvkem (abelovský monoid).**

(2^P, ∩)

∩	**∅**	**{a}**	**{b}**	**{a, b}**
∅	∅	∅	∅	∅
{a}	∅	{a}	∅	{a}
{b}	∅	∅	{b}	{b}
{a, b}	∅	{a}	{b}	{a, b}

Operace průniku je uzavřená (vycházejí pouze čísla ze záhlaví tabulky).
A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C, asociativnost operace průnik je zajištěna.

Neutrálním prvkem je množina prvků {a, b}.
Ke každému prvku existuje prvek inverzní právě tehdy, pokud se ve všech řádcích nachází prvek neutrálním. V našem příkladu to neplatí. Nemáme tedy inverzní prvky pro všechny prvky.
Komutativní operace je, opět je souměrná dle hlavní diagonály. Struktura (2^P, ∩) je **komutativní monoid.**
Distributivnost operace: A∩(B∪C) = (A∩B) ∪ (A∩C), distributivnost platí.

Algebraická struktura (2^P, ∪, ∩), je **komutativní polookruh.**

Závěr

V bakalářské práci jsem se ze začátku snažila vysvětlit základní poznatky o binárních relacích. O jejich základních vlastnostech a definic a vzorců dané vlastnosti. Dále jsem se snažila vysvětlit podrobněji, typy algebraických struktur nejdříve s jednou binární operací poté se dvěma binárními operacemi. Studenti předmětu elementární algebra by měli převážně ze tří tabulek u algebraických struktur lépe pochopit dané učivo.

V první řadě jsem se věnovala algebraickým strukturám s jednou binární relací, jako jsou pologrupy, grupy, monoidy. K tomu abychom mohli v další části práce řešit příklady, jsme potřebovali také znát binární vlastnosti těchto algebraických struktur. Následovala kapitola o algebraických strukturách se dvěma binárními operacemi, která plynule navazuje na algebraické struktury s jednou binární relací. Jednalo se o polookruh, okruh, obor integrity, těleso. Po vysvětlení těchto pojmů a jejich návaznosti na algebraické struktury s jednou binární operací následovali dvě kapitoly s řešenými příklady algebraických struktur s jednou binární relací a pak se dvěma binárními operacemi. Příklady byli různého typu na vyšetření dané struktury, na zapsání dle zadání příkladu některé množiny, vytvořené Cayleyho tabulky a určení vlastností. V příkladech se osvojili znalosti získané z prvních třech kapitol bakalářské práce, a také se předpokládalo s tím, že čtenáři budou mít za sebou středoškolskou matematiku.

Resumé

Tato práce je zaměřena na řešené příklady algebraických struktur s jednou a dvěma binárními operacemi. Zabývá se tedy vysvětlením základních pojmů souvisejících s tématem práce. Je zde tedy popsáno, co je binární operace, její vlastnosti, jaké máme algebraické struktury s jednou binární operací, poté jaké máme algebraické struktury se dvěma binárními operacemi. Po vysvětlení pojmů jsou v práci řešené příklady nejprve s jednou binární operací a poté se dvěma binárními operacemi.

Resumé

This bachelor thesis deals with algebraic structures with one or two binary operations and examples of them. It studies primary concepts about this theme. There are described what is binary operations, properties of operations, algebraic structure with one an with two binary operations. Then in the bachelor thesis are examples of algebraic structure with one and with two binary operations.

Seznam literatury

1. BICAN, Ladislav. *Algebra (pro učitelské studium).* Praha: Academia, 2001. ISBN 80-200-0860-8.

2. DRÁBEK, Jaroslav a Lukáš HONZÍK. *Elektronická skripta k předmětu Elementární algebra* [online]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2011

3. DRÁBEK, Jaroslav. *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství).

4. KUČEROVÁ, Šárka. *Algebraické struktury: bakalářská práce*. Brno: Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, 2012. 48 l., Vedoucí bakalářské práce PhDr. Jiřina Novotná, Ph.D.

5. KOVÁŘ, Petr. *Algebra.* Online, 2023. 201 s. Dostupné z WWW: https://homel.vsb.cz/~kov16/files/skriptum_algebra.pdf

6. LEGÉŇ, Anton. *Grupy, okruhy a zväzy*. Bratislava: Alfa, 1980. Epsilon.

7. LIBICHER, Jaroslav. *Algebra I. (Algebraické struktury).* V Ostravě: Pedagogická fakulta v Ostravě, 1973.

8. Množiny. In: Matematika polopatě [online]. matweb, 2006 [cit. 2023-03-12]. Dostupné z: https://www.matweb.cz/mnoziny/

Seznam obrázků a tabulek