Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Karolína Hylasová

Aplikace kopulí ve financích

Katedra matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Blanka Šedivá, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematika a její aplikace

Plzeň 2020

Poděkování:

Ráda bych poděkovala RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za cenné rady a trpělivost během konzultací.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracovala samostatně, za použití pouze podkladů uvedených v přiloženém seznamu literatury.

V Plzni dne 22. 7. 2020 ______________________________

Karolína Hylasová

Abstrakt:

V této bakalářské práci popisujeme základní definice a vlastnosti kopule. Zaměříme se především na Archimedovské kopule, které jsou jednou z nejdůležitějších tříd kopulí. Zavádíme jejich definice, základní vlastnosti a několik příkladů rodin Archimedovských kopulí. Na závěr demonstrujeme aplikace kopulí na reálných datech.

Klíčová slova:

kopule, Sklarova věta, Fréchet-Hoeffdingovy meze, Archimedovské kopule

Abstract:

In this bachalor thesis we describe fundamental definitions and properties of a copula. We will focus primarily on Archimedean copulas, which are one of the most important class of copulas. We will introduce their definition, fundamental properties and severel families of Archimedean copulas. In the end we will demonstrate application of copulas on real dataset.

Key words:

copula, Sklar's theorem, Fréchet-Hoeffding bounds, Archimedean copula

Obsah

Seznam použitých zkratek

$\mathbf{I}$	interval $\mathbf{I} = [0{,}1]$
$\mathbf{I}^2$	definiční obor kopule, $\mathbf{I}^2 = [0{,}1]^2$
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\overline{\mathbb{R}}$	rozšířená množina reálných čísel, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Úvod

Pojem kopule poprvé použil v matematickém slova smyslu americký matematik a profesor Abe Sklar roku 1959 ve své publikaci Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges [9], kde tímto slovem popsal funkce, které "spojují" dohromady více jednorozměrných distribučních funkcí a dávají tak vzniknout jedné vícerozměrné distribuční funkci. Ačkoliv tento pojem tedy Sklar zavedl již v roce 1959, kopule se v matematice začaly hojně využívat až v devadesátých letech 20. století.

Slovo kopule má původ v latinském slově "copula", jehož význam se dá podle Cassellova latinského slovníku vysvětlit jako "pouto či spojení". Tedy je zřejmé, proč si Sklar zvolil pro tuto funkci právě označení kopule, jelikož spojuje více funkcí v jednu jedinou.

Jak již bylo řečeno, kopule je funkce, která spojuje jednorozměrné marginální distribuční funkce v jednu vícerozměrnou distribuční funkci. Přesněji řečeno, kopule je vícerozměrná distribuční funkce, jejíž složky mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $\mathbf{I}$. Hlavní aplikace kopulí jsou v současné době směřovány na problematiku určení závislosti jednotlivých náhodných veličin.

V první kapitol této práce definujeme pojem kopule a některé z jeho hlavních vlastností, jako je Sklarova věta či Fréchet-Hoeffdingovy meze.

Ve druhé kapitole se zaměříme na nejjednodušší typ kopulí, co se konstrukce týče - Archimedovské kopule. Ukážeme si jejich vznik a vlastnosti a několik konkrétních rodin této třídy kopulí.

V poslední kapitole demonstrujeme vznik a aplikaci kopulí na reálných datech z oblasti financí. Nejprve zavedeme obecný postup, jakýsi návod, jak data aproximovat pomocí nejvhodnější kopule a následně tento postup aplikujeme na reálná data.

1. Definice a základní vlastnosti

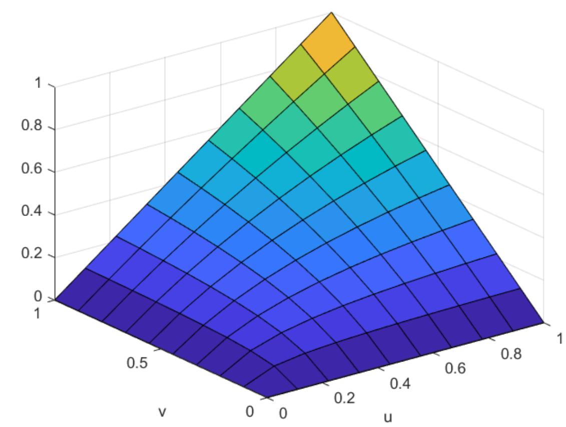
V první kapitole si nejprve zadefinujeme funkci kopule a uvedeme některé z jejích základních vlastností, jako je například diferencovatelnost. Následně se budeme věnovat Sklarově větě, považované za centrální větu teorie kopulí, a Fréchet-Hoeffdingovým mezím, které můžeme aplikovat na libovolnou kopuli. A nakonec nahlédneme na uspořádání kopulí.

1.1 Definice kopule

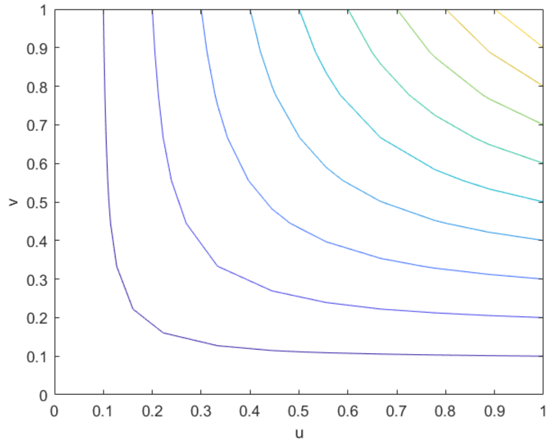
Kopule je funkce, která spojuje dvě jednorozměrné distribuční funkce v jejich vícerozměrnou marginální distribuční funkci. Konkrétněji, kopule jsou vícerozměrné distribuční funkce, jejichž jednodimenzionální meze jsou rovnoměrné na intervalu **I**.

Definice 1.1.1. ***Dvourozměrná kopule*** *(dále jen kopule) je funkce* $C : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$*, která splňuje následující vlastnosti:*

1. *Pro každé* u,v *z množiny* $\mathbf{I}$ *platí:*
$$C(u,0) = C(0,v) = 0 \tag{1.1}$$
a také
$$C(u,1) = u, \qquad C(1,v) = v; \tag{1.2}$$
2. *Funkce* C *je 2-rostoucí, tj. pro každé* u_1,u_2,v_1,v_2 *z množiny* $\mathbf{I}$*, kde* $u_1 \leq u_2$ *a* $v_1 \leq v_2$*, platí*
$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_1,v_1) \geq 0. \tag{1.3}$$



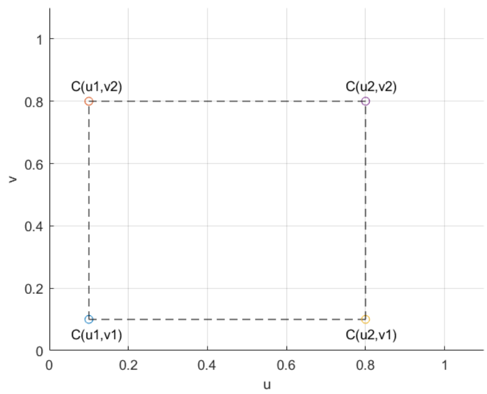
Obrázek 1.1: Dvourozměrná kopule $C(u,v)$.



Obrázek 1.2: Vrstevnicový graf dvourozměrné kopule $C(u,v)$.

Lemma 1.1.1. *Kopule C je rostoucí v každé své proměnné.*

Důkaz: K důkazu tohoto lemmatu využijeme vlastnosti kopule (1.3), která nám říká, že funkce $C(u,v)$ je 2-rostoucí.



Obrázek 1.3: Uspořádání prvků.

Na Obrázku 1.3 je demonstrováno uspořádání prvků u_1, u_2, v_1, v_2
Pokud dokazujeme, že $C(u,v)$ je rostoucí v první proměnné zvolíme libovolné $u_2 \in \mathbf{I}$ a $u_1 = 0$, pak platí

$$\begin{aligned} C(u_2,v_2) - C(0,v_2) - C(u_2,v_1) + C(0,v_1) &\geq 0 \\ C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) &\geq 0 \\ C(u_2,v_2) &\geq C(u_2,v_1). \end{aligned}$$

Zavedeme-li označení $u = u_2$, pak dostáváme vztah

$$C(u,v_2) \geq C(u,v_1), \tag{1.4}$$

který nám ukazuje,že funkce $C(u,v)$ je rostoucí ve své první proměnné.
Obdobným způsobem dokážeme, že $C(u,v)$ je rostoucí ve své druhé proměnné.

$\square$

Věta 1.1.1. *Nechť C je kopule. Poté pro každé $(u_1,u_2),(v_1,v_2)$ patřící do definičního oboru kopule $\mathbf{I}^2$ platí*

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \tag{1.5}$$

Důkaz: Předpokládejme, že pro libovolné u_1,u_2,v_1,v_2 z množiny $\mathbf{I}^2$ platí $u_1 \leq u_2$ a $v_1 \leq v_2$. Pro důkaz použijeme známou trojúhelníkovou nerovnost

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2)| + |C(u_1,v_2) - C(u_1,v_1)|. \tag{1.6}$$

Víme, že funkce C je rostoucí v každé své proměnné. Můžeme proto odhadnout obě absolutní hodnoty na pravé straně:

$$0 \leq C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) \leq C(u_2,1) - C(u_1,1) \leq u_2 - u_1, \tag{1.7}$$

obdobně

$$0 \leq C(u_1,v_2) - C(u_1,v_1) \leq C(1,v_2) - C(1,v_1) \leq v_2 - v_1. \tag{1.8}$$

Platí tedy nerovnosti

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2)| \leq |u_2 - u_1| \tag{1.9}$$

a

$$|C(u_1,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |v_2 - v_1|. \tag{1.10}$$

Po sečtení těchto dvou nerovností dostáváme nerovnost

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2)| + |C(u_1,v_2) - C(u_1,v_1)|,$$

tedy námi požadovanou nerovnost (1.5).

□

Důsledek: Kopule C je stejnoměrně spojitá na svém definičním oboru $\mathbf{I}^2$.

Důležitou vlastností kopulí je jejich diferencovatelnost. Následující dvě věty nám ukazují, jak je to u kopulí s parciálními derivacemi prvního a druhého řádu.

Věta 1.1.2. *Nechť C je kopule. Pro všechna v z množiny $\mathbf{I}$ a skoro všechna u existuje derivace $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ a platí:*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \leq 1. \tag{1.11}$$

Obdobně pro všechna u z množiny $\mathbf{I}$ a skoro všechna v existuje derivace $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ a platí:

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u,v) \leq 1. \tag{1.12}$$

Navíc funkce $u \longmapsto C_v(u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ a $v \longmapsto C_u(v) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ jsou definované a rostoucí skoro všude na $\mathbf{I}$.

Důkaz: Důkaz věty je možno nalézt v [6].

$\square$

Věta 1.1.3. *Nechť C je kopule. Pokud $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ a $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ jsou spojité na $\mathbf{I}^2$. Dále nechť pro $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ existuje pro všechny $u \in (0,1)$ pokud $v = 0$, poté $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ a $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$ existuje na $(0,1)^2$ a $\frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial v \partial u}$.*

Důkaz: Důkaz této věty je podrobně rozebrán v [8].

$\square$

1.2 Sklarova věta

Sklarova věta je centrální věta teorie kopulí a základ mnoha, ne-li všech, aplikací kopulí ve statistice. Objasňuje vztah mezi sdruženými distribučními funkcemi, jejich marginálními funkcemi a kopulemi.

Tuto větu můžeme jednoduše formulovat pomocí náhodných veličin a jejich distribučních funkcí. Náhodná veličina je kvantita, jejíž hodnoty jsou popsány pravděpodobnostní distribuční funkcí. Náhodné veličiny označujeme velkými písmeny, například X a Y, malými písmeny x,y označujeme hodnoty těchto náhodných veličin. Řekneme, že F je distribuční funkce náhodné veličiny X, pokud pro každé $x \in \overline{\mathbb{R}} : F(x) = P[X < x]$ [11]. Náhodná veličina je spojitá, pokud její distribuční funkce je spojitá.

Věta 1.2.1. *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny s distribučními funkcemi F_1 a F_2, F je sdružená distribuční funkce. Poté existuje kopule C taková, že pro každé $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$,*

$$F(x,y) = C(F_1(x),F_2(y)). \tag{1.13}$$

Pokud F_1 a F_2 jsou spojité, potom C je definovaná jednoznačně. V opačném případě je C určena jednoznačně na $H(F_1) \times H(F_2)$. Jinak řečeno, pokud C je kopule a F_1, F_2 jsou distribuční funkce, potom funkce F, definovaná jako (1.13), je sdruženou distribuční funkcí s jednorozměrnými marginálními funkcemi F_1 a F_2.

Důkaz: Důkaz Sklarovy věty je podrobně popsán v [6].

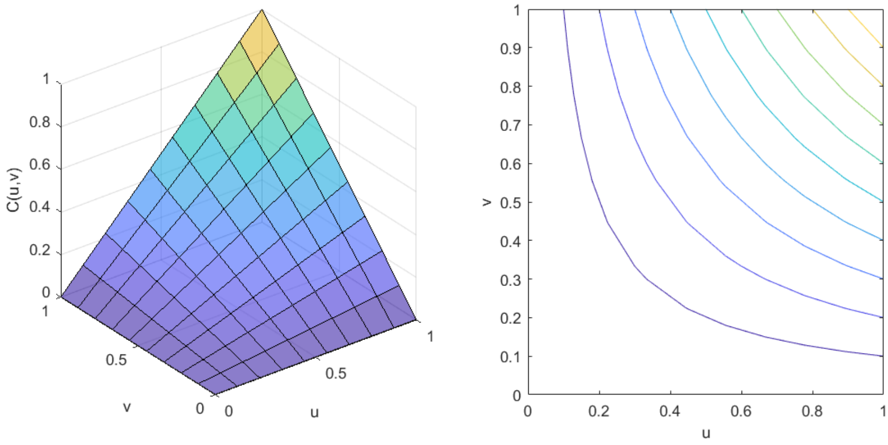
$\square$

Kopuli C z Věta 1.1.3 ***kopule náhodných veličin X a Y*** a značíme ji C_{XY}. Pokud X a Y jsou nezávislé, pak jejich kopuli definovanou vztahem

$$\Pi(F_1(x),F_2(y)) = F_1(x)F_2(y) \tag{1.14}$$

nazýváme ***součinová*** kopule.

Věta 1.2.2. *Nechť X a Y jsou spojité náhodné veličiny. Potom X a Y jsou nezávislé veličiny právě tehdy, když $C_{XY} = \Pi$.*



Obrázek 1.4: Součinová kopule $\Pi(u,v)$.

Důkaz: Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé právě tehdy, když pro jejich sdruženou distribuční funkci platí vztah $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$ pro všechna x,y z množiny $\overline{\mathbb{R}}^2$.

$\square$

Nyní si zavedeme nový pojem - kvantilová funkce, jejíž definici a další její vlastnosti je možné nalézt v [11], stejně jako zadání následujících příkladů.

Definice 1.2.1. *Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X. Potom* ***kvantilová funkce*** *náhodné veličiny X je taková funkce, pro kterou platí*

$$F^{(-1)}(u) = \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}} : F(x) \geq u\}, \qquad 0 < u < 1. \tag{1.15}$$

Pokud je distribuční funkce $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : 0 < F(x) < 1\}$ spojitá a rostoucí je kvantilová funkce shodná s obyčejnou inverzní distribuční funkcí F^{-1}.

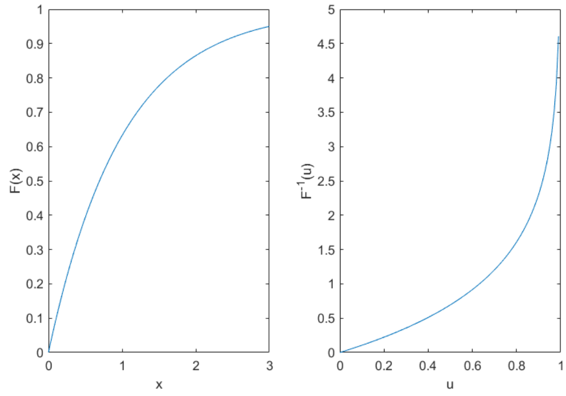
Důsledek: Mějme sdruženou distribuční funkci F, spojité marginální funkce F_1, F_2 a kopuli C definovanou stejně jako v Věta 1.2.1. Nechť $F_1^{(-1)}$ je kvantilovou funkcí F_1 a $F_2^{(-1)}$ je kvantilovou funkcí F_2. Poté pro libovolné (u,v) z $\mathbf{I}^2$ platí vztah

$$C(u,v) = F(F_1^{(-1)}(u), F_2^{(-1)}(v)). \tag{1.16}$$

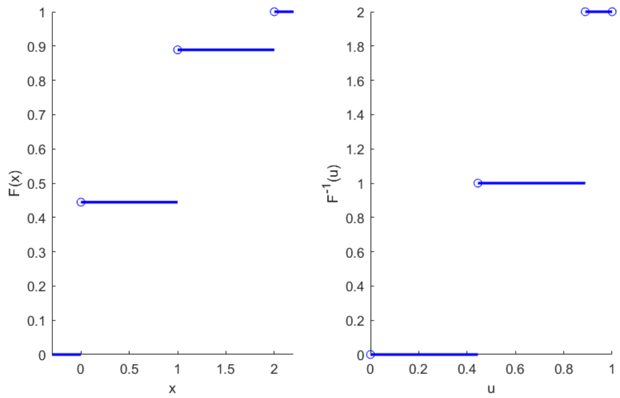
Příklad 1.2.1. *Mějme exponenciální rozdělení, jehož distribuční funkce má tvar $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ a pro její parametr si zvolme $\lambda = 1$. Protože tato distribuční funkce je na intervalu $(0, +\infty)$ rostoucí a zobrazuje jej na interval $(0,1)$, je kvantilová funkce rovna její obyčejná inverzní distribuční funkce, tj.*

$$F^{-1}(u) = -\ln(1-u), \qquad u \in (0,1).$$

Příklad 1.2.2. *Máme zadanou náhodnou veličinu $X \sim Bi(2,1/3)$. Tato veličina nabývá pouze tří hodnot s pravděpodobnostmi $P[X=0] = 4/9, P[X=1] = 4/9$ a $P[X=2] = 1/9$. Jak je zřejmé z* Obrázku 1.3, *kvantilová funkce $F^{(-1)}(u)$ je na intervalu $(0,1)$, stejně jako distribuční funkce $F(x)$, spojitá zleva.*



Obrázek 1.5: Distribuční (vlevo) a kvantilová (vpravo) funkce exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda = 1$ (Příklad 1.2.1).



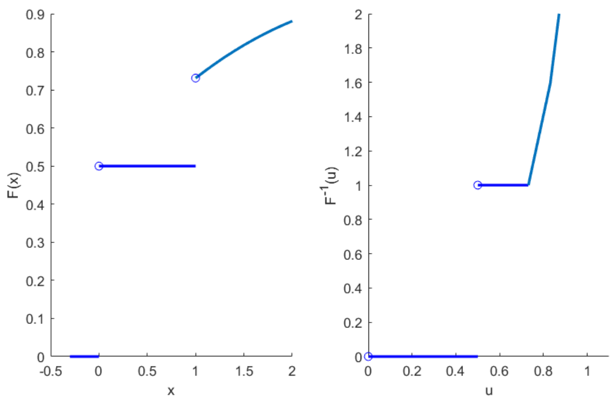
Obrázek 1.6: Distribuční (vlevo) a kvantilová (vpravo) funkce náhodné veličiny s binomickým rozdělením $X \sim Bi(2{,}1/3)$ (Příklad 1.2.2).

Příklad 1.2.3. *Mějme náhodnou veličinu X, jejíž distribuční funkce je dána vztahy*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1/2 & 0 < x \leq 1, \\ 1/(1+\mathrm{e}^{-x}) & x > 1. \end{cases}$$

Kvantilová funkce je dána vztahy

$$F^{(-1)}(u) = \begin{cases} 0 & 0 < u \leq 1/2, \\ 1 & 1/2 < u \leq 1/(1+\mathrm{e}^{-1}), \\ \ln(u/(1-u)) & u > 1/(1+\mathrm{e}^{-x}). \end{cases}$$



Obrázek 1.7: Distribuční (vlevo) a kvantilová (vpravo) zadané náhodné veličiny z Příkladu 1.2.3.

1.3 Fréchet-Hoeffdingovy meze

Fréchet-Hoeffdingovy meze jsou univerzální meze pro kopule, které nám ukazují, jakým způsobem bude kopule omezena, tj. jaké budou její hranice.

Věta 1.3.1. *Nechť C je kopule. Potom pro každé $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ platí*

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v). \tag{1.17}$$

kde $W(x,y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1,0)$ a $M(x,y) = \min(F_1(x),F_2(y))$.
*Kopuli M nazýváme **horní Frétchet-Hoeffdingovou mezí** a kopuli W **dolní Frétchet-Hoeffdingovou mezí**.*

Důkaz: Zvolme si libovolný bod $(u,v) \in \mathbf{I}^2$. Z vlastností kopule víme, že

$$C(u,v) \leq C(u,1) = u,$$

$$C(u,v) \leq C(1,v) = v,$$

z čehož vyplývá nerovnost

$$C(u,v) \leq \min(u,v) = M(u,v). \tag{1.18}$$

Z vlastností kopule také známe vztah

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0,$$

který platí pro libovolné u_1,u_2,v_1,v_2, pro které $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$, z množiny $\mathbf{I}^2$. Zvolíme-li $u_2 = 1, v_2 = 1$ a přeznačíme-li $u_1 = u, v_1 = v$, získáme nerovnost ve tvaru

$$C(1,1) - C(1,v) - C(u,1) + C(u,v) \geq 0. \tag{1.19}$$

Úpravou nerovnosti dostaneme

$$C(u,v) \geq C(u,1) + C(1,v) - C(1,1). \tag{1.20}$$

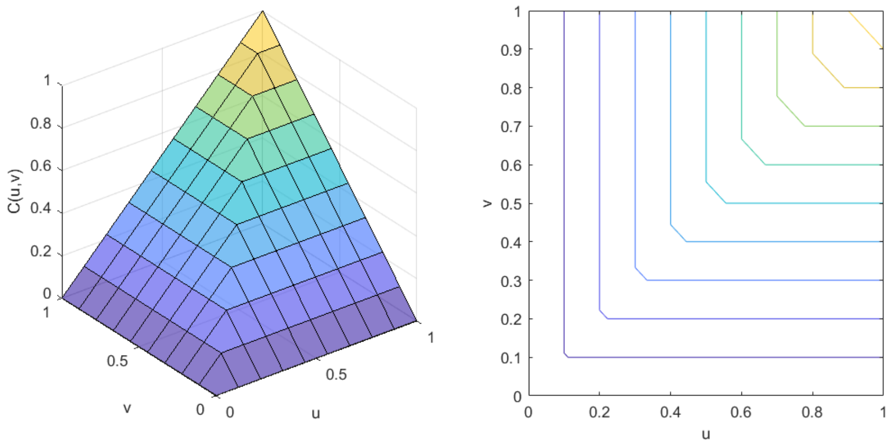
Ze známých vlastností pro kopule můžeme tuto nerovnost přepsat do tvaru

$$C(u,v) \geq u + v - 1. \tag{1.21}$$

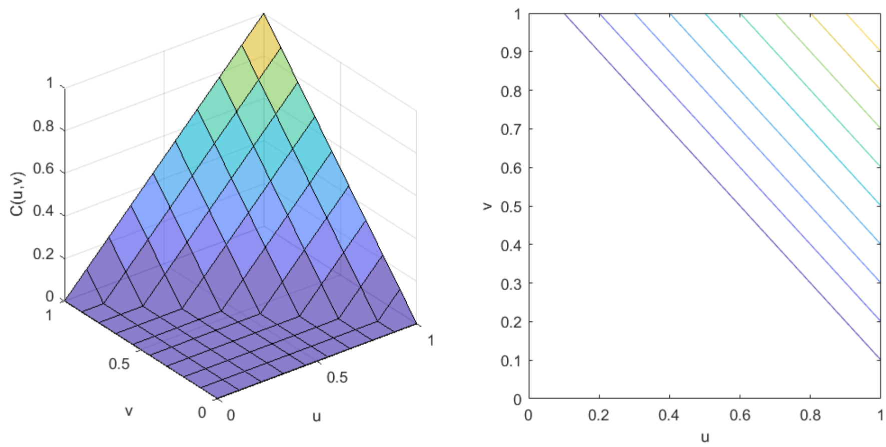
Víme, že pro každou kopuli platí $C(u,v) \geq 0$ a spojíme-li tuto podmínku s nerovností (1.20), získáváme

$$C(u,v) \geq \max(u + v - 1,0) = W(u,v). \tag{1.22}$$

$\square$



Obrázek 1.8: Horní Frétchet-Hoeffdingova mez $M(u,v)$.



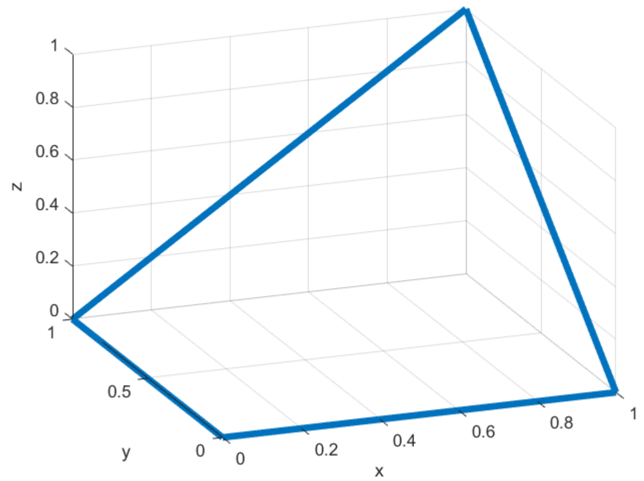
Obrázek 1.9: Dolní Frétchet-Hoeffdingova mez $W(u,v)$.

Důsledkem Sklarovy věty je skutečnost, že pokud X a Y jsou náhodné veličiny se sdruženou distribuční funkcí F a marginálními funkcemi F_1 a F_2, potom pro každé $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$:

$$W(x,y) \leq F(x,y) \leq M(x,y), \tag{1.23}$$

kde $W(x,y) = \max(F_1(x) + F_2(y) - 1,0)$ a $M(x,y) = \min(F_1(x),F_2(y))$. Protože M a W jsou kopule, jsou tyto meze sdruženými distribučními funkcemi, které nazýváme ***Fréchet-Hoeffdingovy meze*** sdružené distribuční funkce F s marginálními funkcemi F_1 a F_2.

Z Definice 1.1.1 a tvrzení ve Věta 1.1.1 vidíme, že graf libovolné kopule je spojitá plocha v jednotkové krychli $\mathbf{I}^3$, jejíž hranice tvoří zkosený čtyřúhelník tvořený vrcholy $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,1)$. Díky větě o Fréchet-Hoeffdingových mezích (Věta 1.3.1) také můžeme říct, že graf každé kopule je omezen právě těmito mezemi.



Obrázek 1.10: Ohraničení oblasti grafu kopule.

1.4 Uspořádání

Díky Fréchet-Hoeffdingovým mezím můžeme uvažovat o uspořádání kopulí.

Definice 1.4.1. *Pokud C_1 a C_2 jsou kopule, řekneme, že C_1 je menší než C_2 (C_2 je větší než C_1) a píšeme $C_1 \prec C_2$ ($C_2 \succ C_1$), pokud $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)$ pro všechna $u,v \in \mathbf{I}^2$.*

Jinými slovy, spodní Fréchet-Hoeffdingova mez, kopule W, je menší než každá jiná kopule a horní Fréchet-Hoeffdingova mez, kopule M, je větší než každá jiná kopule.

2. Archimedovské kopule

Archimedovské kopule jsou jednou z nejdůležitějších tříd kopulí a to především díky jejich jednoduché konstrukci.

V této kapitola si ukážeme, jak konstruovat Archimedovskou kopuli. Tedy zadefinujeme jejich generátory a pseudo-inverzní funkce, které jsou také důležitou součástí konstrukce Archimedovských kopulí. Dále se podíváme na vlastnosti těchto funkcí a na vlastnosti Archimedovských kopulí samotných. A dále uvedeme několik příkladů rodin, které patří do třídy Archimedovských kopulí.

2.1 Definice

Definice 2.1.1. *Nechť $\varphi : \mathbf{I} \to [0,+\infty)$ je spojitá a ostře klesající funkce, pro niž platí podmínka $\varphi(1) = 0$.* ***Pseudo-inverzní funkce*** *$\varphi^{[-1]}$ k funkci φ s definičním oborem $D(\varphi^{[-1]}) = [0,+\infty)$ a oborem hodnot $H(\varphi^{[-1]}) = \mathbf{I}$ je definovaná předpisem*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq +\infty \end{cases} \tag{2.1}$$

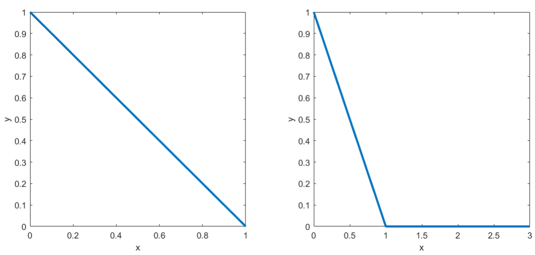
Poznámka 2.1.1. *Pseudo-inverzní funkce $\varphi^{[-1]}$ definovaná v* Definice 2.1.1 *splňuje následující vlastnosti:*

- *$\varphi^{[-1]}$ je spojitá a nerostoucí na intervalu $[0,+\infty)$ a ostře klesající na intervalu $[0,\varphi(0)]$,*
- *$\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ na intervalu $\mathbf{I}$,*
- *$\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \min(t,\varphi(0))$*

Funkce φ se nazývá **generátor** kopule. Pokud $\varphi(0) = +\infty$, nazýváme funkci φ **přesný** generátor a pro jeho pseudo-inverzní funkci platí $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, tj. jeho pseudo-inverzní funkce je známou klasickou inverzní funkcí.

Příklad 2.1.1. *Máme zadanou funkci $\varphi(t) = 1 - t$, kde $t \in \mathbf{I}$. Funkce je spojitá ostře klesající a platí $\varphi(1) = 0$. Splňuje tedy podmínky z* Definice 2.1.1 *a víme tedy, že existuje její pseudo-inverzní funkce. Inverzní funkce k funkci $\varphi(t)$ je dána předpisem $\varphi^{-1}(t) = 1 - t$ a $\varphi(0) = 1$. Nyní tedy máme všechno připravené a můžeme si zadefinovat pseudo-inverzní funkci pro zadanou funkci $\varphi(t) = 1 - t$.*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0,1], \\ 0, & 1 \leq t \in [1,+\infty) \end{cases} \tag{2.2}$$



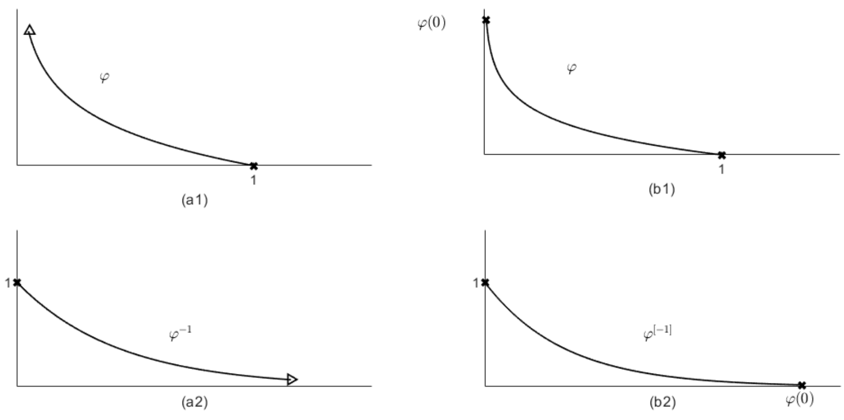
Obrázek 2.1: Zadaná funkce φ (vlevo) a její pseudo-inverzní funkce $\varphi^{[-1]}$ (vpravo).

Pomocí generátoru φ a jeho pseudo-inverzní funkce $\varphi^{[-1]}$ můžeme zavést předpis pro kopuli $C(u,v)$.

Definice 2.1.2. *Nechť $\varphi : \mathbf{I} \to [0,+\infty)$ je spojitá a ostře klesající funkce, pro niž platí, že $\varphi(1) = 0$, a nechť $\varphi^{[-1]}$ je pseudo-inverzní funkcí k funkci φ definovaná předpisem* (2.1). *Pro kopuli $C : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$ dostáváme předpis*

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \tag{2.3}$$

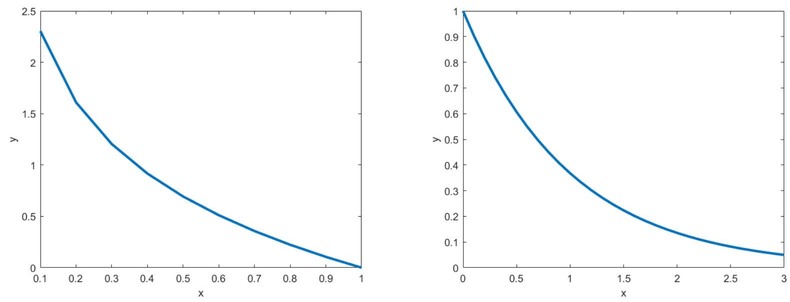
Kopuli definovanou vztahem (2.3) nazýváme **Archimedovská kopule**. Pokud je Archimedovská kopule generovaná přesným generátorem φ, pak pro tuto kopuli platí vztah $C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ a tuto kopuli nazýváme **přesná Archimedovská kopule**.



Obrázek 2.2: Přesný generátor (a1), jeho inverzní funkce (a2) a nepřesný generátor (b1) a jeho pseudo-inverzní funkce (b2).

Příklad 2.1.2. *Nechť $\varphi(t) = -\ln(t)$ pro každé t patřící do množiny* $\mathbf{I}$.
Víme, že $\varphi(0) = +\infty$, generátor φ je přesný a pro jeho pseudo-inverzní funkci platí

$$\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1} = e^{-t}.$$



Obrázek 2.3: Zadaná funkce φ (vlevo) a její inverzní funkce $\varphi^{[-1]}$ (vpravo).

Pro Archimedovskou kopuli C dostáváme podle vztahu (2.3) *předpis*

$$
\begin{aligned}
C(u,v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\
&= e^{-[(-\ln(u))+(-\ln(v))]} \\
&= e^{\ln(uv)} \\
&= uv = \Pi(u,v).
\end{aligned}
$$

Součinové kopule Π je tedy přesná Archimedovská kopule s generátorem $\varphi(t) = -\ln(t)$.

Oprávněnost nazývat Archimedovské kopule kopulemi ověříme z (1.1), (1.2), (1.3) z Definice 1.1.1.

Lemma 2.1.1. *Nechť C je Archimedovská kopule, pak tato kopule splňuje pro každé u,v z intervalu $\mathbf{I}$ podmínky*

1.

$$C(u,0) = C(0,v) = 0,$$

2.

$$C(u,1) = u, \qquad C(1,v) = v,$$

jinými slovy, Archimedovská kopule splňuje okrajové podmínky známé z Definice 1.1.1.

Důkaz: Pro každé $u \in \mathbf{I}$ platí:

$$C(u,0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0,$$

$$C(u,1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u.$$

Obdobně pro každé $v \in \mathbf{I}$ platí:

$$C(0,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(0) + \varphi(v)) = 0,$$

$$C(1,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(1) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v)) = v.$$

$\square$

Lemma 2.1.2. *Nechť C je Archimedovská kopule, poté je tato kopule 2-rostoucí právě tehdy, když pro každé u_1,u_2,v z intervalu $\mathbf{I}$, pro které $u_1 \leq u_2$, platí nerovnost*

$$C(u_2,v) - C(u_1,v) \leq u_2 - u_1. \tag{2.4}$$

Důkaz: Zvolme $v_1,v_2 \in \mathbf{I}$ takové, že $v_1 \leq v_1$. Je zřejmé, že platí $C(0,v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1,v_2)$. Víme, že Archimedovská kopule C je spojitá, jelikož generátor φ a jeho pseudo-inverzní funkce $\varphi^{[-1]}$ jsou spojité, a tedy existuje t z množiny $\mathbf{I}$ takové, pro které platí $C(t,v_2) = v_1$, nebo-li $\varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1)$. Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}
C(u_2,v_1) - C(u_1,v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)),\\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)),\\
&= C(C(u_2,v_2),t) - C(C(u_1,v_2),t),\\
&\leq C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2)
\end{aligned}$$

Nerovnost přepíšeme do tvaru

$$C(u_1,v_1) - C(u_1,v_2) - C(u_2,v_1) + C(u_2,v_2) \geq 0,$$

tedy do tvaru, který nám říká, že daná funkce C je 2-rostoucí.

□

Nyní si uvedeme několik základních vlastností, kterými se vyznačují Archimedovské kopule.

Věta 2.1.1. *Nechť $\varphi : \mathbf{I} \to [0, +\infty)$ je spojitá, ostře klesající funkce taková, že $\varphi(1) = 0$. Nechť $\varphi^{[-1]}$ je pseudo-inverzní funkce k funkci φ. Poté funkce $C : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$ je Archimedovská kopule právě tehdy, když φ je konvexní.*

Důkaz: Funkce φ je konvexní právě tehdy, když je konvexní i její pseudo-inverzní funkce $\varphi^{[-1]}$. Nerovnost (2.4) můžeme přepsat do tvaru

$$u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)), \tag{2.5}$$

která platí pro každé $u_1,u_2 \in \mathbf{I}$, pro které $u_1 \leq u_2$. Pokud zavedeme označení $a = \varphi(u_1), b = \varphi(u_2)$ a $c = \varphi(v)$, poté můžeme tuto nerovnost přepsat do tvaru

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c). \tag{2.6}$$

Dále předpokládejme, že pseudo-inverzní funkce $\varphi^{[-1]}$ je konvexní a zvolme pevně dané a, b, c z množiny $\mathbf{I}$ tak, že $a \geq b$ a $c \geq 0$. A nechť $\gamma = \frac{a-b}{a-b+c}$. Tedy $a = (1-\gamma)b + \gamma(a+c)$ a $(b+c) = \gamma b + (1-\gamma)(a+c)$. Tyto dva vztahy dosadíme do definice pro konvexní funkci a dostáváme nerovnosti

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c) \tag{2.7}$$

a

$$\varphi^{[-1]}(b+c) \leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c), \tag{2.8}$$

po jejichž sečtení dostáváme námi požadovanou nerovnost (2.6).

□

Věta 2.1.2. *Nechť C je Archimedovská kopule a nechť φ je její generátor. Potom:*

1. *C je symetrická,*
   tj. pro všechna u,v patřící do množiny $\mathbf{I}$ platí $C(u,v) = C(v,u)$,
2. *C je asociativní,*
   tj. pro všechna u,v,w z množiny $\mathbf{I}$ platí $C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w))$,
3. *pokud $c > 0$ je libovolná konstanta, poté $c\varphi$ je také generátorem kopule C.*

Důkaz:
add 1)

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) = C(v,u),$$

pořadí generátorů v závorce můžeme zaměnit díky komutativnosti sčítání.
add 2)

$$\begin{aligned}C(C(u,v),w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u,v)) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi[\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))] + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi[\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w))]) \\ &= C(u,C(v,w))\end{aligned}$$

add 3)

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}(c\varphi(u) + c\varphi(v)) = c\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) = c \cdot C(u,v)$$

□

2.2 Archimédův axiom

Archimedovské kopule svůj přívlastku Archimedovské získaly díky podobnosti s Archimédovým polynomem, nebo-li také Archimédovou vlastností. Poprvé toto jejich označení zavedl ve své publikaci Cho-Hsin Ling [4]. Tento axiom nám říká, že pro libovolná dvě kladná reálná čísla a,b existuje přirozené číslo n takové, že $na > b$.
Archimedovská kopule C se chová jako binární operace na intervalu $\mathbf{I}$, tj. přiřazuje libovolné dvojici čísel u,v z intervalu $\mathbf{I}$ číslo $C(u,v)$ také z intervalu $\mathbf{I}$.

Definice 2.2.1. *Pro libovolné u patřící do $\mathbf{I}$ existuje **C-násobek** u_C^n daný rekurzivním předpisem $u_C^1 = u$, $u_C^{n+1} = C(u,u_C^n)$.*

Archimédův axiom můžeme přeformulovat tak, aby platil pro kopule.

Věta 2.2.1. *Nechť C je Archimedovská kopule generovaná funkcí φ. Poté pro libovolné u,v z $\mathbf{I}$ existuje přirozené číslo n takové, že $u_C^n < v$.*

Důkaz: Důkaz této věty je podrobně popsán v [6].

□

2.3 Uspořádání a limitní případy

V Definice 1.4.1 jsme se seznámili s tím, jak funguje uspořádání obecně v rámci kopulí. V této části se podíváme na uspořádání v Archimedovských kopulích a na některé jejich limitní případy.

Než ale s uspořádáním začneme, musíme si nejprve zadefinovat nový pojem.

Definice 2.3.1. *Funkce f definovaná na intervalu $[0, +\infty)$ je subaditivní pro všechna x,y z jejího definičního oboru $D(f)$, pokud pro tyto hodnoty platí vztah*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y). \tag{2.9}$$

Následující věta, kterou Schweizer a Sklar zavedli roku 1983 ve svém díle *Probabilistic Metric Spaces* [7], charakterizuje uspořádání Archimedovských kopulí za pomocí subadivity jejich generátoru a pseudo-inverzní funkce.

Věta 2.3.1. *Nechť C_1 a C_2 jsou Archimedovské kopule generované funkcemi φ_1 a φ_2. Poté platí, že C_1 předchází C_2, tj. $C_1 \prec C_2$, právě tehdy, když $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ je subaditivní.*

Důkaz: Důkaz této věty je podrobně popsán v [6].

□

Ve stejné publikaci [7] zároveň Schweizer se Sklarem zavedli vztah mezi subadivitou a konkávností.

Lemma 2.3.1. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[0, +\infty)$. Pokud f je konkávní a platí $f(0) = 0$, potom f je subaditivní.*

Důkaz: Nechť x,$y \in [0,+\infty)$. Pokud $x+y = 0$, pak víme, že musí platit $x = y = 0$, což nám s podmínkou $f(0) = 0$ vede na triviální řešení pro subaditivitu.
Předpokládejme tedy, že $x + y > 0$, tedy

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{x+y}(x+y) + \frac{y}{x+y}(0), \\ y &= \frac{x}{x+y}(0) + \frac{y}{x+y}(x+y). \end{aligned}$$

Pokud f je konkávní a $f(0) = 0$, pak

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(0) = \frac{x}{x+y}f(x+y) \\ f(y) &\geq \frac{x}{x+y}f(0) + \frac{y}{x+y}f(x+y) = \frac{y}{x+y}f(x+y) \end{aligned}$$

Nerovnosti sečteme dohromady a dostáváme

$$f(x) + f(y) \geq \frac{x}{x+y}f(x+y) + \frac{y}{x+y}f(x+y),$$

z čehož po jednoduché úpravě dostáváme vztah

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y),$$

který nám říká, že daná funkce je subaditivní.

$\square$

Důsledek: Nechť C_1 a C_2 jsou Archimedovské kopule s generátory φ_1 a φ_2. Pokud $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ je konkávní, potom $C_1 \prec C_2$.

Důsledek: Nechť C_1 a C_2 jsou Archimedovské kopule s generátory φ_1 a φ_2. Pokud φ_1/φ_2 je neklesající na intervalu (0,1), potom $C_1 \prec C_2$.

Důsledek: Nechť C_1 a C_2 jsou Archimedovské kopule s generátory φ_1 a φ_2. Pokud φ_1, φ_2 jsou spojitě diferencovatelné na intervalu (0,1) a pokud φ_1'/φ_2' je neklesající na intervalu (0,1), potom $C_1 \prec C_2$.

Příklad 2.3.1. *Generátorem Archimedovských kopulí je například funkce:*

- $\varphi(t) = -\ln(t)$, *která generuje součinovou kopuli* Π, *jak bylo ukázáno v* Příklad (2.1.2)*,*
- $\varphi(t) = 1 - t, t \in \mathbf{I}$.

Nyní se podíváme, jak je to s limitami v Archimedovských kopulích. Obě věty jsou převzaté z [6] a jejich přesné důkazy je možné najít také v této publikaci.

Věta 2.3.2. *Nechť* $\{C_\theta | \theta \in \Theta\}$ *je rodina Archimedovských kopulí s diferencovatelnými generátory* φ_θ *na množině* Ω*. Potom* $C = \mathrm{lim} C_\theta$ *je Archimedovská kopule právě tehdy, když existuje funkce* φ *patřící do* Ω *taková, že pro všechna s,t z* (0,1) *platí*

$$\lim \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi_\theta'(t)} = \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi_\theta'(t)}, \tag{2.10}$$

kde "lim" *představuje příslušnou jednostrannou limitu, když* θ *se přibližuje koncovému bodu parametrického intervalu* Θ.

Věta 2.3.3. *Nechť* $\{C_\theta | \theta \in \Theta\}$ *je rodina Archimedovských kopulí s diferencovatelnými generátory* φ_θ *na množině* Ω*. Poté* $\mathrm{lim} C_\theta(u,v) = M(u,v)$ *právě tehdy, když*

$$\lim \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi_\theta'(t)} = 0, \tag{2.11}$$

pro libovolné t z intervalu (0,1)*, kde* "lim" *představuje příslušnou jednostrannou limitu, když* θ *se přibližuje koncovému bodu parametrického intervalu* Θ.

2.4 Rodiny Archimedovských kopulí

Třída Archimedovských kopulí obsahuje mnoho rodin. Každá z těchto rodin je generovaná jinou funkcí a vyznačuje se jinými vlastnostmi. Jedny z nejpoužívanějších jednoparametrových rodin Archimedovských kopulí jsou Claytonova, Frankova a Gumbelova kopule, kterým je věnována tato podkapitola. U každé z nich je uveden jejich předpis, generátor, rozsah parametru, podmínky, za jakých se jedná o přesnou kopuli, a také některé speciální případy, které mohou u daných rodin nastat pro určitou hodnotu parametru.

2.4.1 Claytonova kopule

Claytonova kopule je asymetrická jednoparametrová kopule daná předpisem

$$C_\theta^{Cl}(u,v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1{,}0)]^{-1/\theta}. \tag{2.12}$$

Generátorem této kopule je funkce

$$\varphi_\theta^{Cl}(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1) \tag{2.13}$$

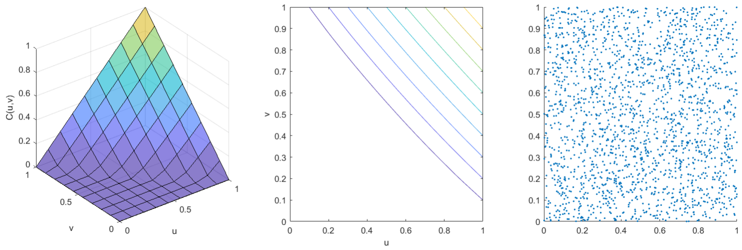
a pro její parametr θ platí

$$\theta \in [-1, +\infty)\backslash\{0\}.$$

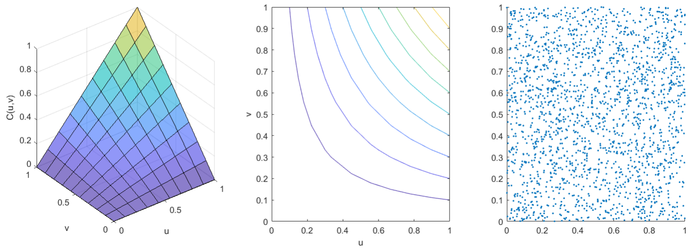
Pokud $\theta \geq 0$ pak je Claytonova kopule $C_\theta^{Cl}(u,v)$ přesnou Archimedovskou kopulí.

Speciální případy:

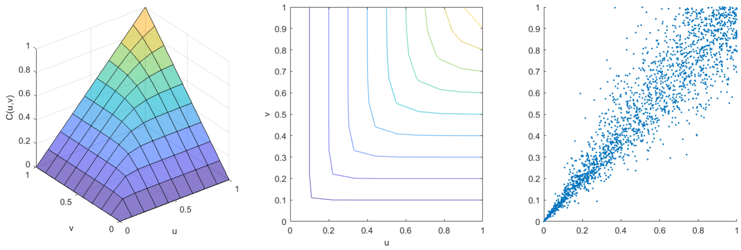
- $C_{-1}^{Cl} = W$, Claytonova kopule s parametrem $\theta = -1$ je dolní Fréchet-Hoeffdingovou mezí,
- $C_{+\infty}^{Cl} = M$, Claytonova kopule s parametrem $\theta = +\infty$ je horní Fréchet-Hoeffdingovou mezí,
- $C_0^{Cl} = \Pi$, pokud se parametr θ Claytonovy kopule blíží k nule jedná se o součinovou kopuli, z jejíž vlastností víme, že součinová kopule značí nezávislost náhodných veličin,
- $C_1^{Cl} = \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$, kde značí Σ součtovou kopuli danou vztahem $\Sigma(u,v) = u + v$.



Obrázek 2.4: Claytonova kopule s parametrem $\theta = -0{,}9$.



Obrázek 2.5: Claytonova kopule s parametrem θ blížícím se 0, součinová kopule.



Obrázek 2.6: Claytonova kopule s parametrem $\theta = 7$.

2.4.2 Frankova kopule

Frankova kopule je symetrická jednoparametrová kopule daná předpisem

$$C_\theta^{Fr}(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}. \tag{2.14}$$

Generátorem této kopule je funkce

$$\varphi_\theta^{Fr}(t) = -\ln\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}, \tag{2.15}$$

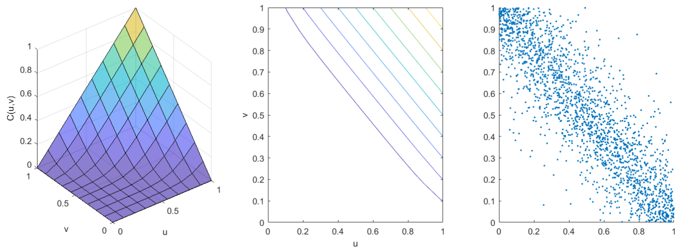
a pro její parametr θ platí

$$\theta \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}.$$

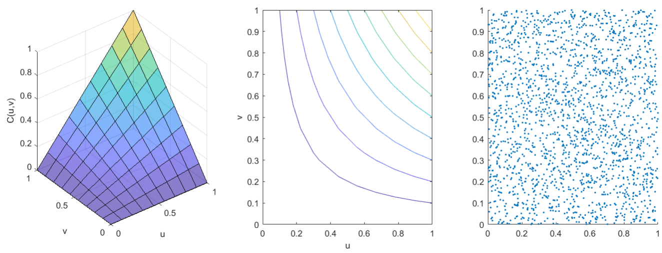
Frankova kopule je přesnou kopulí pro libovolné $\theta \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$.

Speciální případy:

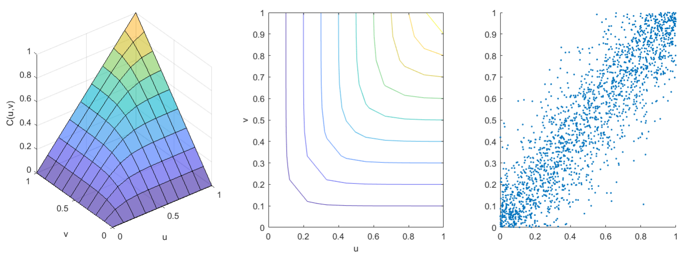
- $C_{-\infty}^{Fr} = W$, Frankova kopule s parametrem $\theta = -\infty$ je dolní Fréchet-Hoeffdingovou mezí,
- $C_{+\infty}^{Fr} = M$, Frankova kopule s parametrem $\theta = +\infty$ je horní Fréchet-Hoeffdingovou mezí,
- $C_0^{Fr} = \Pi$, pokud se parametr θ Frankovy kopule blíží k nule jedná se o součinovou kopuli, z jejíž vlastností víme, že součinová kopule značí nezávislost náhodných veličin,



Obrázek 2.7: Frankova kopule s parametrem $\theta = -11$.



Obrázek 2.8: Frankova kopule s parametrem θ blížícím se 0, součinová kopule.



Obrázek 2.9: Frankova kopule s parametrem $\theta = 11$.

2.4.3 Gumbelova kopule

Gumbelova kopule, nebo také Gumbel-Hougardova kopule, je asymetrická jednoparametrová kopule daná předpisem

$$C_\theta^{GH}(u,v) = \exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}). \tag{2.16}$$

Generátorem této kopule je funkce

$$\varphi_\theta^{GH}(t) = (-\ln)^\theta, \tag{2.17}$$

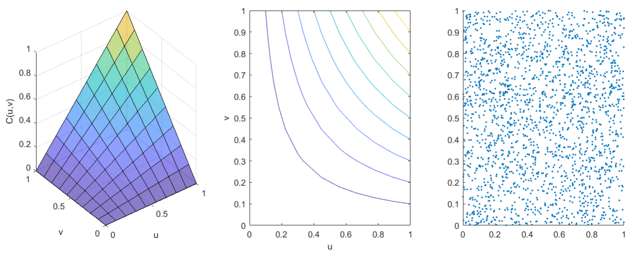
a pro její parametr θ platí

$$\theta \in [1, +\infty).$$

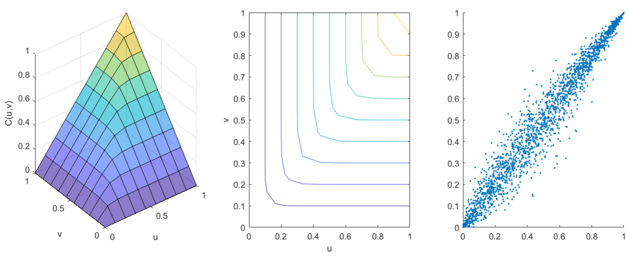
Gumbelova kopule je přesnou kopulí pro libovolné $\theta \in [1, +\infty)$.

Speciální případy:

- $C_{+\infty}^{GH} = M$, Gumbelova kopule s parametrem $\theta = +\infty$ je horní Fréchet-Hoeffdingovou mezí,
- $C_1^{GH} = \Pi$, Gumbelova kopule s parametrem $\theta = 1$ je součinovou kopulí, parametr $\theta = 1$ u Gumbelovy kopule tedy značí nezávislost dvou daných náhodných veličin.



Obrázek 2.10: Gumbelova kopule s parametrem $\theta = 1$, součinová kopule.



Obrázek 2.11: Gumbelova kopule s parametrem $\theta = 8$.

3. Aplikace kopulí na reálná data

V poslední kapitole bude demonstrováno použití kopulí na jednoduchých datech tak, aby bylo čtenáři přiblíženo využití a výhoda této funkce. Veškeré simulace a výpočty byly prováděny v softwaru MATLAB a jejich kódy jsou k nahlédnutí na přiloženém CD.

3.1 Data

Data, na kterých bude aplikace kopulí demonstrována, jsem získala z CourseWaru předmětu KMA/FIPM. Jedná se o vývoje cen akcií na burze do roku 2016 získaná z BCPP (Burza cenných papírů Praha a.s.), veškerá data neobsahují úpravy o dividendy. Jelikož jsem v celé své práci hovořila o dvourozměrných kopulích, v tomto případě tomu nebude jinak. Tedy prvním krokem vždy bude zvolit si dvě společnosti, jejichž vývoj cen za určité období budeme pomocí kopulí aproximovat a tím ukážeme vzájemnou závislost těchto dat. Jednotlivá data jsou dostupná k nahlédnutí na přiloženém CD ve složce MATLAB.

3.2 Normální rozdělení

Máme tedy zvolené naše dvě náhodné veličiny a nyní musíme zavést jejich pravděpodobnostní rozdělení. Pro každou náhodnou veličinu jsem volila normální pravděpodobnostní rozdělení, jelikož se jedná o jedno z nejpoužívanějších rozdělení.

Pro každou náhodnou veličinu si tedy pomocí matlabovských funkcí určíme střední hodnotu μ a rozptyl σ^2, pomocí kterých poté pro danou náhodnou veličinu zavedeme normální rozdělení charakterizované právě těmito parametry $X \sim (\mu,\sigma^2)$.

Pro obě normální rozložení vykreslíme histogram, který proložíme Gaussovou křivkou. Následně pro obě rozdělení vykreslíme jejich sdruženou marginální distribuční funkci.

3.3 Transformace dat

Z definice kopule víme, že jejím definičním oborem je $\mathbf{I}^2$. Musíme proto naše data transformovat tak, aby spadala do této množiny. K tomu nám poslouží matlabovská funkce `ksdensity`. Díky ní transformujeme data tak, že spadají do množiny $\mathbf{I}^2$ a pro tato transformovaná data opět vykreslíme jejich sdruženou distribuční funkci.

3.4 Výběr vhodné kopule

Nyní je třeba vybrat kopuli, která bude nejlépe aproximovat transformovaná data. Volit budeme mezi třemi kopulemi - Claytonovou, Frankovou a Gumbelovou. Různých kopulí existuje mnohem víc, ale rozhodla jsem se vybírat pouze z těchto tří, které byly zavedeny ve druhé kapitole.

Abychom zvolili tu nejlepší kopuli, provedeme několik měření pomocí různých kritérií, které nám s výběrem pomohou.

Nejprve však budeme muset zjistit logaritmickou věrohodnostní funkci jednotlivých rodin kopulí, kterou při použití funkce `copulafit` získáme automaticky, avšak abychom získali její hodnotu, musíme funkci `copulafit` upravit tak, aby nám tyto hodnoty vypisovala. Porovnáním logaritmické věrohodnostní funkce dat pro různá kritéria můžeme rozhodnout, která z kopulí je vhodnější pro aproximaci našich dat. Bohužel to nám ale neříká, která kopule je nejblíže k pravé distribuční funkci. Volíme takovou rodinu kopulí, která měla u co nejvíce kritérií nejnižší hodnotu, jelikož nižší výsledné hodnoty u našich kritérií nám indikují, že daná kopule bude lépe aproximovat zvolená data.

Pro každou kopuli provedeme měření pomocí tří různých kritérií a jednotlivé výsledky budou zaznamenány do tabulky, díky které poté snadněji rozhodneme, která kopule je pro naše data tou nejvhodnější.

3.4.1 Akaikeho informační kritérium

Akiakeho informační kritérium (AIC) poskytuje informace, které ztratíme při popisu reality daným modelem. Model s nižším AIC je vhodnější. Vzorec používaný k výpočtu AIC může být nalezen v [1].

$$AIC = \frac{2p}{n} - \frac{2l}{n},$$

kde p je počet parametrů modelu, l je logaritmická věrohodnost modelu a n je počet pozorování.

3.4.2 Korigovaná Akaikeho informační kritérium

Korigované Akaikeho informační kritérium (AICc). V publikaci [1] autoři uvádí, že by se AICc mělo používat u dat malých rozměrů raději než AIC. Toto kritérium definují předpisem

$$AICc = 2p\frac{n}{n-k-1} - 2l,$$

kde p je počet parametrů modelu, l je logaritmická věrohodnost modelu a n je počet pozorování.

3.4.3 Bayesovo informační kritérium

Bayesovo informační kritérium (BIC) se nejčastěji používá pro data s konečným počtem prvků. V [1] je toto kritérium definováno vztahem

$$BIC = p\ln(n) - 2l,$$

kde p je počet parametrů modelu, l je logaritmická věrohodnost modelu a n je počet pozorování.

3.5 Kopule

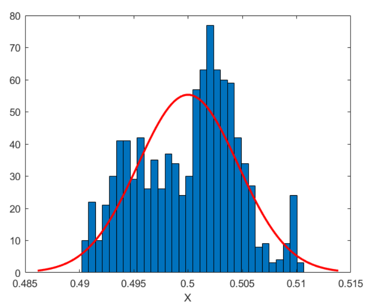
Již víme, kterou kopuli k aproximaci dat zvolit a také víme, jaký parametr θ má daná kopule, tento parametr získáme z funkce `copulafit` stejně jako jsme získali logaritmickou věrohodnostní funkci. Můžeme si tedy s pomocí funkce `copularnd` vygenerovat náhodné veličiny splňující parametry této kopule. Vytvoříme graf sdružené distribuční funkce, abychom ilustrovali náhodné veličiny vygenerované s použitím kopule.

Vygenerovaná následně transformujeme, opět s použitím funkce `ksdensity`, na původní množinu a vykreslíme graf sdružené marginální distribuční funkce těchto dvou veličin.

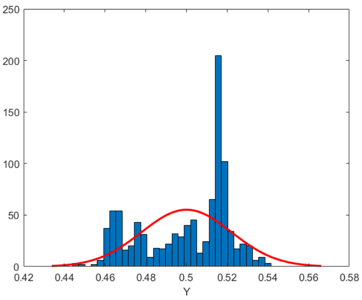
3.6 Příklad 1

Pro první příklad jsem si zvolila dvě společnosti z energetické oblasti, tedy ČEZ a Unipetrol. Pro každou náhodnou veličinu (naše vybrané společnosti) budeme brát 1000 hodnot cen akcií, tedy vývoj cen za období od 18.9.2012 do 16.9.2016.

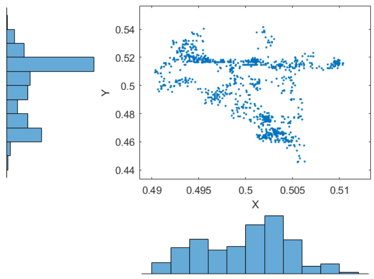
Pro obě náhodné veličiny jsme si pomocí matlabovských funkcí našli střední hodnotu a rozptyl a s těmito parametry jsme získali normální rozdělení pro každou náhodnou veličinu. A následně jsme pro obě normální rozdělení vykreslili jejich sdruženou marginální distribuční funkci.



Obrázek 3.1: Normální rozdělení pro ČEZ.

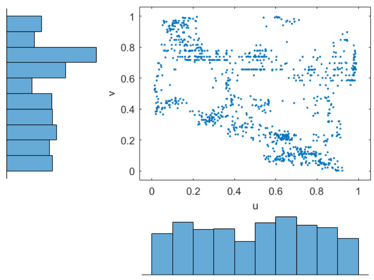


Obrázek 3.2: Normální rozdělení pro Unipetrol.



Obrázek 3.3: Sdružená marginální distribuční funkce.

Data jsme následně transformovali tak, aby patřila do definičního oboru kopule, tedy $\mathbf{I}^2$. Sdruženou distribuční funkci transformovaných dat ilustruje následující graf.

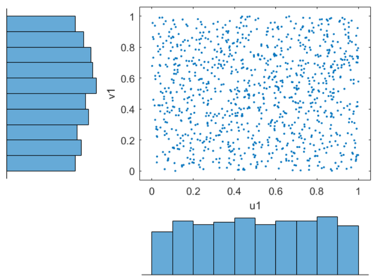


Obrázek 3.4: Sdružená distribuční funkce transformovaných dat.

Nalezneme logaritmickou věrohodnostní funkci pro každou rodinu kopulí a tu následně dosadíme do vzorců pro jednotlivá kritéria. Po jednoduchých výpočtech dostáváme výsledné hodnoty, které jsou zaznamenány v tabulce, abychom v nich měli lepší přehled.

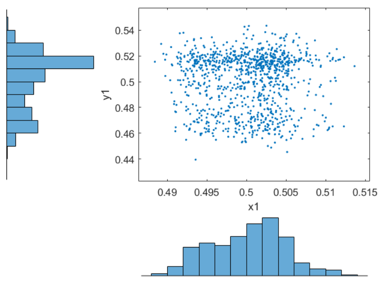
	AIC	AICc	BIC
Clayton	0,0020	2,0031	6,9069
Frank	0,1738	173,8470	178,7507
Gumbel	0,0020	2,0028	6,9065

Z tabulky je zřejmé, že nejnižších hodnot, i když s ne moc velkými rozdíly, nabývá v jednotlivých kritériích Gumbelova kopule. Pro generování náhodných veličin funkcí `copularnd` volíme právě tuto kopuli a vykreslíme si graf sdružené distribuční funkce těchto veličin. Frankova kopule zřejmě nabývá takto vysokých hodnot, jelikož se jedná o symetrickou kopuli, a z našich dat je zřejmé, že ta symetrická nebudou.



Obrázek 3.5: Sdružená distribuční funkce vygenerovaných dat.

Na závěr transformujeme vygenerovaná data zpět na původní množinu.



Obrázek 3.6: Sdružená distribuční funkce vygenerovaných dat transformovaných na původní množinu.

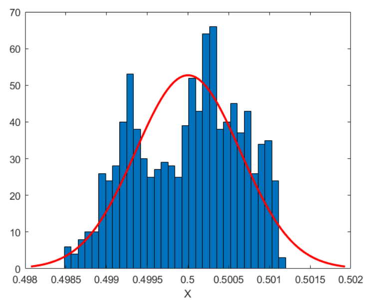
	θ	$\theta-$konfidenční interval
Clayton	$1{,}4509 \times 10^{-6}$	$(-0{,}0837; 0{,}0837)$
Frank	-2.7123	$(-3{,}1283; -2{,}2963)$
Gumbel	1,0000	$(0{,}9479; 1{,}0521)$

Pokud se podíváme na výslednou hodnotu θ pro naši zvolenou Gumbelovu kopuli, vidíme, že $\theta = 1{,}0000$. Z vlastností a speciálních případů v části 2.4.3 víme, že této hodnotě odpovídá součinová kopule, tedy naše dvě zvolená data jsou nezávislá.

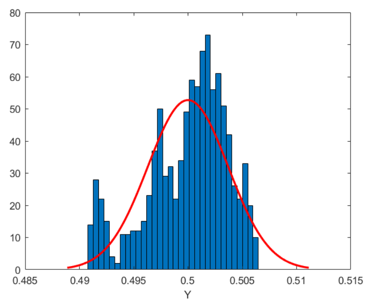
3.7 Příklad 2

Ve druhém příkladu budeme aplikaci kopulí demonstrovat na datech z oblasti bankovnictví. Opět jsem si zvolila dvě společnosti, tentokrát Komerční banku (KB) a Erste Group (ERSTE), pro jejichž aproximaci cenového vývoje akcií od 11.5.2012 do 11.5.2016, tedy 1000 hodnot, budeme hledat nejvhodnější kopulovou funkci.

Postup je obdobný jako u prvního příkladu. Pro obě náhodné veličiny najdeme pomocí matlabovských funkcí střední hodnotu a rozptyl, pomocí kterých zavedeme pro každou veličinu normální rozdělení.

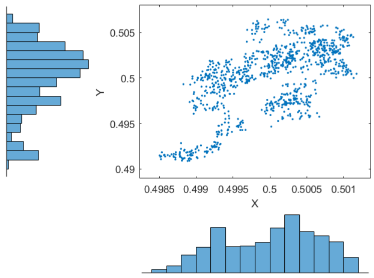


Obrázek 3.7: Normální rozdělení pro KB.



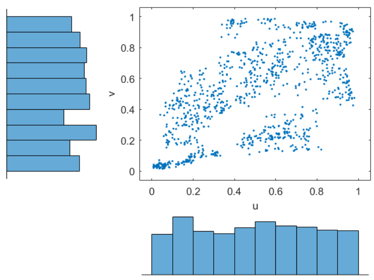
Obrázek 3.8: Normální rozdělení pro ERSTE.

Následně jsme pro obě normální rozdělení vykreslili jejich sdruženou marginální distribuční funkci.



Obrázek 3.9: Sdružená marginální distribuční funkce.

Data musíme opět s použitím funkce `ksdensity` transformovat na definiční obor kopule. Vykreslíme si sdruženou distribuční funkci těchto transformovaných dat, abychom ilustrovali jejich rozložení.

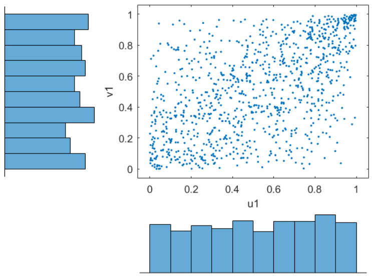


Obrázek 3.10: Sdružená distribuční funkce transformovaných dat.

Pomocí námi upravené funkce `copulafit` jsme nalezli pro každou rodinu kopulí logaritmickou věrohodnostní funkci, kterou následně dosadíme do vzorečků pro jednotlivá kritéria a pro lepší přehled všechny výsledné hodnoty zaznamenáme do tabulky, pomocí které vybereme nejvhodnější kopuli pro naše data.

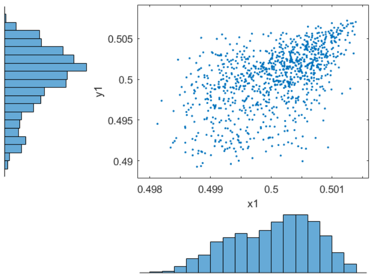
	AIC	**AICc**	**BIC**
Clayton	0,5183	518,2941	523,1979
Frank	0,4016	401,5542	406,4580
Gumbel	0,3592	359,2093	364,1130

Z tabulky je jednoznačně vidět, že nejnižší hodnoty jednotlivých kritérií nabývá Gumbelova kopule. Pro generování náhodných veličin volíme právě Gumbelovu kopuli, jejíž parametr θ jsme již získali při použití funkce `copulafit`. Pro naše vygenerovaná data si opět vykreslíme jejich sdruženou distribuční funkci.



Obrázek 3.11: Sdružená distribuční funkce vygenerovaných dat.

Vygenerovaná data transformujeme zpět na původní množinu námi zvolených dat.



Obrázek 3.12: Sdružená distribuční funkce vygenerovaných dat transformovaných na původní množinu.

	θ	$\theta-$konfidenční interval
Clayton	1,3430	(1,1581; 1,5279)
Frank	4,3211	(3,8349; 4,8074)
Gumbel	1,6634	(1,5823; 1,7446)

Víme, že parametr θ nabývá pro naši zvolenou Gumbelovu kopuli hodnoty $\theta = 1{,}6634$, tedy nejedná se o součinovou kopuli. Podíváme-li se i na $\theta-$konfidenční interval pro Gumbelovu kopuli, vidíme, že pro zvolený parametr nemůže nastat situace, kdy $\theta = 1$. Nemůže se tedy stát, že by naše data byla nezávislá. Můžeme tedy říct, že vývoj cen akcií Komerční banky a Erste Group je závislý.

Závěr

Cílem této práce bylo čtenáři přiblížit dvourozměrné kopule,tedy funkce, které se v dnešní době stále více využívají při určování závislosti jednotlivých náhodných veličin. Zaměřili jsme se především na Archimedovské kopule, které jsou jednou z nejpoužívanějších tříd kopulí. Jejich vznik a využití jsme na závěr demonstrovali na reálných datech.

V první kapitole jsme zadefinovali pojem kopule a zaměřili se na jejich základní a nejdůležitější vlastnosti, jako je Sklarova věta, Fréchet-Hoeffdingovy meze či diferencovatelnost nebo omezení kopulí.

Ve druhé kapitole jsme si zavedli Archimedovské kopule, které jsou díky své snadné konstrukci jednou z nejdůležitějších a nejpoužívanějších tříd kopulí. Právě na jejich vznik a základní vlastnosti je druhá kapitola zaměřena. Na závěr této kapitoly jsme zavedli Claytonovu, Frankovu a Gumbelovu kopuli, tedy jedny z nejvyužívanějších rodin Archimedovských kopulí.

Ve třetí kapitole jsme aproximovali reálná data z oblasti financí pomocí nejvhodnější ze tří dříve zadefinovaných Archimedovských kopulí. Přesněji řečeno, na reálných datech jsme provedli normální rozdělení a pomocí matlabovských funkcí a zvolených kritérií jsme vybrali kopuli, která nejvhodněji aproximovala námi zvolená reálná data. Ve své podstatě se jednalo o jakýsi návod, jak zvolit nejvhodnější kopuli pro aproximaci zadaných reálných dat.

Literatura

[1] Hastie, T.; Tibishrani, R.; Friedman, J. (2008): *The Elements of Statistical Learning* Second edition
Springer Series in Statistics, New York, ISBN 978-0-387-84858-7

[2] Cherubini, U.; Luciano, E.; Vecchiato, W. (2004): *Copula Methods in Finance*
John Wiley & Sons, The Wiley Finance Series, ISBN 0-470-86344-7

[3] Cherubini, U.; Gobbi, F.; Mulinacci, S.; Romagnoli, S. (2011): *Dynamic Copula Methods in Finance*
John Wiley & Sons, The Wiley Finance Series, ISBN 978-1-119-95452-1

[4] Ling, C.-H.(1965): *Representation of associative functions*
Publicationes Mathematicae 12, 189-212

[5] Mai, J.-F.; Scherer, M. (2012): *Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms, And Applications*
Imperial College Press, ISBN 978-9-81-314924-3

[6] Nelsen, R. B.(2006): *An Introduction to Copulas* Second edition
Springer Science + Business Media, New York, ISBN 0-387-28659-4.

[7] Schweizer, B.; Sklar, A. (1983): *Probabilistic Metric Spaces*
North-Holland, New York

[8] Seeley, R.T. (1961): *Fubini implies Leibniz implies* $F_{yx} = F_{xy}$
Am Monthly 68, 56 - 57

[9] Sklar, A.(1959): *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*
Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris 8, 229-231

[10] Trivedi, P.K.; Zimmer, D.M. (2007): *Copula Modeling: An Introduction for Practitioner*
Now Publishers Inc, Foundations and Trends in Econometrics, ISBN 978-1-60198-020-5

[11] Zvára, K.; Štěpán, J. (2006): *Pravděpodobnost a matematická statistika*
Matfyzpress, Praha, ISBN 80-86732-71-1